

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED BOUDIAF**



**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire de fin d'étude présenté pour l'obtention du diplôme de

\*\*\*\*\* **Master** \*\*\*\*\*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Mathématique Discrète

**Rédige Par**

KHARCHI Somia KORICHI Safia

**THEME**

Etude des relations binaires

Devant de jury :

ZEDAM Lemnouar	Prof	Président	Univ de M'sila
A. AMROUNE	Prof	Encadreur	Univ de M'sila
LADJELETE Lahcen	MA/A	Examineur	Univ de M'sila

Année : 2016/2017

# *Remerciements*

Tout d'abord, nous remercions **ALLAH** le tout puissant, de nous avoir donné le courage, la santé et la patience durant tout le temps que nous avons consacré à la réalisation de ce travail.

Nous voudrions tout d'abord adresser toutes nos gratitudee au **Mr. Abdelaziz AM-ROUNE**, du Pôle universitaire MOHAMMED BOUDIAF de M'SILA pour nous avoir guider et conseiller tout au long de ce travail et pour son soutien scientifique et humain, et la confiance qu'il nous a accordée pour mener ce travail. Nous désirons aussi remercier Monsieur **ZEDAM Lemnouar** pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury. Nous tiendrons également à remercier Monsieur **LADJELETE Lahcen** pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail, en acceptant de l'examiner.

Nos remerciements vont également à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Enfin, nous n'oublions pas d'adresser nos vifs remerciements à toutes nos familles, qui nous ont accompagnés tout au long de nos études par leurs amours inconditionnels et leur soutien constant.

Merci

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Notions de base</b>	<b>3</b>
1.1 Généralités sur les relations binaires . . . . .	4
1.2 Propriétés des relations binaires . . . . .	6
1.3 Représentation d'une relation binaire . . . . .	12
1.4 Fermetures des relations binaires . . . . .	15
<b>2 Relation d'équivalence et relation d'ordre</b>	<b>18</b>
2.1 Relation d'équivalence . . . . .	19
2.2 Relation d'ordre . . . . .	21
2.2.1 Éléments remarquables dans un ensemble ordonné . . . . .	23
2.2.2 Représentation des ensembles ordonnés . . . . .	25
2.2.3 L'ordre lexicographique . . . . .	26
2.2.4 Extension d'ordre . . . . .	27
2.2.5 Sections initiales et sections finales . . . . .	29
2.3 Bon ordre, ordre bien fondé et ordre belordonné . . . . .	32
<b>3 Treillis et décomposition en chaînes et antichaînes</b>	<b>36</b>
3.1 Généralités sur les treillis . . . . .	37
3.1.1 Propriétés algébriques des treillis . . . . .	38
3.1.2 Idéal et filtre dans treillis . . . . .	42
3.1.3 Lois de composition interne et les lois de treillis . . . . .	44

3.1.4	Treillis des préordres et des équivalences . . . . .	46
3.2	Décomposition en antichaînes et chaînes . . . . .	48
3.2.1	Décomposition en niveau de l'ensemble des extensions . . . . .	53
3.2.2	Dénombrement des ordres . . . . .	53
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>

# Introduction

La théorie de l'ordre joue un rôle important, elle remonte aux années 1940; Il est originaire de la théorie de types de l'ordre du à HAUSDORFF (Grundzuge der Mengenlehre 1914), SIERPINSKI (Leçons sur Les nombres transfinis 1928, repris en cardinal et ordinal 1958), SZPILRAJN (Sur l'extension de l'ordre partiel 1930), DUSHNIK, MILLER (Concernant la similarité et les structure des d'ordres 1940).

En mathématiques, il existe deux types de relations, relation d'ordre et similarité ou relation d'équivalence.

Les notions d'ordre, de classement, de rangement sont présentes dans de multiples activités ou situations humaines : hiérarchies administratives ou sociales, organigrammes, ordonnancements de tournois sportifs, ordres de préséance, de succession ou de préférences, motions d'ordre, ordres du jour, classements scolaires ou audiovisuels, ordre alphabétique, lexicographique, etc., on n'en finirait pas d'énumérer toutes les situations ou interviennent des ordres. Il n'est donc pas étonnant, compte tenu du développement de l'utilisation des mathématiques dans la modélisation de multiples phénomènes, de trouver de nombreux domaines où les mathématiques de l'ordre sont présentes.

Pour affiner la présentation des résultats d'un sondage, on divise souvent l'ensemble des personnes interrogées en "sympathisants de la tendance X", "sympathisants de la tendance Y", et "ni l'un ni l'autre". Ou bien entre "hommes" et "femmes". Ou encore en classes d'âges, par exemple : «les 18 – 25 ans", "les 26 – 34 ans", "les 35 – 50 ans" et "les plus de 50 ans ".

En mathématiques, il est également courant de diviser un ensemble en sous-ensembles disjoints (ce qu'on appelle "partitionner un ensemble"). Par exemple, on peut diviser l'ensemble des entiers relatifs en "nombres pairs" et "nombres impairs". Ou bien en "nom-

bres strictement négatifs", "0" et "nombres strictement positifs". De telles partitions sont notamment utiles pour faire des preuves cas par cas. Ainsi, si l'on veut prouver que pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $(n^3 - n)$  est divisible par 3, il peut être utile de diviser les entiers naturels en "nombres de la forme  $3k$ ", "nombres de la forme  $3k + 1$ " et "nombres de la forme  $3k + 2$ ".

Définir une relation d'équivalence, c'est précisément définir un critère qui permet de découper un ensemble en sous-ensembles disjoints, chacun de ces sous-ensembles regroupant les éléments d'un certain type, ces sous-ensembles sont appelés des "classes d'équivalence", par référence aux classes d'âge.

Ce travail est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit les notions de base de relations binaires et les propriétés liées à cette notion ainsi que les différents aspects de la relation binaire.

Le deuxième chapitre est consacré aux relations d'équivalence, relations d'ordre, extensions linéaires des ordres partiels et à certain type spécial d'ordre tel que le Bon ordre, ordres bien fondés et ordres belordonnés

Dans le troisième chapitre, on présente le treillis des préordres, le treillis d'équivalences et la décomposition en chaînes et antichaines d'un ensemble ordonné, En fin, on termine ce mémoire par un dénombrement des ordres définis sur un ensemble fini ayant moins de dix-sept éléments.

# Chapitre 1

## Notions de base

Dans ce chapitre on donne des notions générales sur les relations binaires, ainsi que quelques formes de représentation de la relation binaire. Enfin en termine ce chapitre par les fermetures des relations binaires.

### Contenus

- ✓ Généralités sur les relations binaires
- ✓ Propriétés des relations binaires
- ✓ Représentation d'une relation binaire
- ✓ Fermetures des relations binaires

## 1.1 Généralités sur les relations binaires

**Définition 1.1.1** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien de  $E$  et  $F$  et note  $E \times F$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x$  est un élément de  $E$  et  $y$  un élément de  $F$ .

**Remarque 1.1.1** L'égalité dans  $E \times F$  est définie par :  $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x'$  et  $y = y'$ .

**Définition 1.1.2** (Relation binaire)

Une relation binaire d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$  est une partie  $\mathfrak{R}$  de  $E \times F$ . Si  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  on dit que  $x$  est en relation avec  $y$  et on note  $x\mathfrak{R}y$ , dans le cas contraire on écrit  $(x, y) \notin \mathfrak{R}$ .

Si  $E = F$ , on dit que  $\mathfrak{R}$  est une relation binaire définie sur  $E$ .

**Exemple 1.1.1** 1. Soit  $E = \{3, 6, 9\}$ ,  $F = \{4, 8, 12\}$ . Alors  $\mathfrak{R} = \{(3, 4), (3, 8), (6, 12)\}$  est une relation de  $E$  vers  $F$ .

2. Sur l'ensemble  $E$  des droites de l'espace, " $(D)$  est orthogonale à  $(D')$ " est une relation binaire.

**Définition 1.1.3** (Domaine et image)

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $\mathfrak{R}$  une relation entre  $E$  et  $F$ . On appelle domaine de  $\mathfrak{R}$  l'ensemble

$$\text{Dom}(\mathfrak{R}) = \{x \in E \mid \exists y \in F, x\mathfrak{R}y\}.$$

On appelle image de  $\mathfrak{R}$  l'ensemble

$$\text{Im}(\mathfrak{R}) = \{y \in F \mid \exists x \in E, x\mathfrak{R}y\}.$$

**Définition 1.1.4** (Image directe, image réciproque)

Soit  $E$ ,  $F$  deux ensembles,  $\mathfrak{R}$  une relation binaire de  $E$  dans  $F$  (i.e.  $\mathfrak{R} \subseteq E \times F$ ),  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ .

$\mathfrak{R}(A)$  est appelée image directe de  $A$  et définie comme :  $\mathfrak{R}(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, (x, y) \in \mathfrak{R}\}$ .

$\mathfrak{R}^{-1}(B)$  est appelée image réciproque de  $B$  et définie comme :  $\mathfrak{R}^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B, (x, y) \in \mathfrak{R}\}$ .

**Définition 1.1.5** (*Image d'un élément selon une relation*)

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $\mathfrak{R}$  une relation binaire de  $E$  vers  $F$  et  $a$  un élément de  $E$ .  $\mathfrak{R}(a) = \{y \in F \mid (a, y) \in \mathfrak{R}\}$ .  $\mathfrak{R}(a)$  est l'image selon  $\mathfrak{R}$  de l'élément  $a$  de  $E$ .

$\mathfrak{R}(a)$  est appelée également coupe selon l'élément  $a$ .

**Théorème 1.1.1** Soit  $\mathfrak{R}$  et  $S$  deux relations binaires de  $E$  dans  $F$ , alors

$$\text{Si } \forall a \in E, \mathfrak{R}(a) = S(a) \Rightarrow \mathfrak{R} = S$$

**Preuve.** Soit  $(a, b) \in \mathfrak{R} \Rightarrow b \in \mathfrak{R}(a)$ , (on a  $\mathfrak{R}(a) = S(a), \forall a \in E$ ) alors  $b \in S(a)$  et  $(a, b) \in S$  donc  $\mathfrak{R} \subset S$ . D'une manière analogue, on montre que  $S \subset \mathfrak{R}$ . ■

**Théorème 1.1.2** [1] Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire de  $E$  dans  $F$ , et soient  $E_1, E_2$  deux sous-ensembles de  $E$  alors :

- a. Si  $E_1 \subseteq E_2$ , alors  $\mathfrak{R}(E_1) \subseteq \mathfrak{R}(E_2)$ .
- b.  $\mathfrak{R}(E_1 \cup E_2) = \mathfrak{R}(E_1) \cup \mathfrak{R}(E_2)$ .
- c.  $\mathfrak{R}(E_1 \cap E_2) \subseteq \mathfrak{R}(E_1) \cap \mathfrak{R}(E_2)$  (L'égalité n'est pas toujours vraie).

**Preuve.**

- a. Soit  $y \in \mathfrak{R}(E_1)$ , il existe donc  $x \in E_1$  tel que  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  et comme  $E_1 \subseteq E_2$  donc  $x \in E_2$  et  $(x, y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow y \in \mathfrak{R}(E_2)$ , alors  $\mathfrak{R}(E_1) \subseteq \mathfrak{R}(E_2)$ .
- b. Pour l'inclusion directe, soit  $y \in \mathfrak{R}(E_1 \cup E_2) \Rightarrow \exists x \in E_1 \cup E_2$  tel que  $(x, y) \in \mathfrak{R}$ . Donc on a soit  $x \in E_1$  et  $(x, y) \in \mathfrak{R}$ , alors  $y \in \mathfrak{R}(E_1)$ . Ou  $x \in E_2$  et  $(x, y) \in \mathfrak{R}$ , alors  $y \in \mathfrak{R}(E_2)$ . Donc  $y \in \mathfrak{R}(E_1) \cup \mathfrak{R}(E_2)$ .

Pour l'inclusion inverse on a  $E_1 \subset E_1 \cup E_2$  alors d'après (a)  $\mathfrak{R}(E_1) \subseteq \mathfrak{R}(E_1 \cup E_2)$  et la même chose avec  $E_2$ , on obtient  $\mathfrak{R}(E_2) \subseteq \mathfrak{R}(E_1 \cup E_2)$ . Donc  $\mathfrak{R}(E_1) \cup \mathfrak{R}(E_2) \subseteq \mathfrak{R}(E_1 \cup E_2)$ . Finalement,  $\mathfrak{R}(E_1 \cup E_2) = \mathfrak{R}(E_1) \cup \mathfrak{R}(E_2)$ .

- c. Soit  $y \in \mathfrak{R}(E_1 \cap E_2) \Rightarrow \exists x \in E_1 \cap E_2$  tel que  $(x, y) \in \mathfrak{R}$ . Donc on a  $x \in E_1$  et  $(x, y) \in \mathfrak{R}$ , alors  $y \in \mathfrak{R}(E_1)$ . Et  $x \in E_2$  et  $(x, y) \in \mathfrak{R}$ , alors  $y \in \mathfrak{R}(E_2)$ . Donc  $y \in \mathfrak{R}(E_1) \cap \mathfrak{R}(E_2)$ .

■

**Exemple 1.1.2** Soit  $\leq$  une relation sur  $\mathbb{Z}$  et soit  $E_1, E_2$  deux sous ensembles de  $\mathbb{Z}$  tel que  $E_1 = \{0, 1, 2\}$  et  $E_2 = \{9, 13\}$ . Alors  $\mathfrak{R}(E_1)$  est composée des entiers  $n$  tel que  $0 \leq n$  ou  $1 \leq n$  ou  $2 \leq n$ . Donc  $\mathfrak{R}(E_1) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ , et de même  $\mathfrak{R}(E_2) = \{9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$ , alors  $\mathfrak{R}(E_1) \cap \mathfrak{R}(E_2) = \{9, 10, 11, \dots\} = \mathfrak{R}(E_2)$ . d'autre part  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , donc  $\mathfrak{R}(E_1 \cap E_2) = \emptyset$ . Finalement on a,  $\mathfrak{R}(E_1 \cap E_2) \neq \mathfrak{R}(E_1) \cap \mathfrak{R}(E_2)$ .

**Définition 1.1.6** (fonction)

Une fonction  $f$  de  $E$  dans  $F$  est une relation de  $E$  dans  $F$ , vérifiant : pour tout  $x \in E$ , il existe au plus un élément  $y \in F$  satisfaisant  $xfy$ . (i.e.,  $\forall x \in E, \forall y, y' \in F \mid xfy \wedge xfy' \Rightarrow y = y'$ ).

Le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  est l'ensemble des  $x \in E$ , satisfaisant : il existe un et un seul  $y \in F$  tel que  $xfy$ . On dit que la fonction  $f$  est totale si son domaine est  $E$ .

L'image de  $f$  est l'ensemble suivant :  $\{y \in F \mid (\exists x \in E) [(x, y) \in f]\}$

**Définition 1.1.7** (Application)

Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est une fonction de  $E$  dans  $F$  dont le domaine de définition est égal à  $E$ . (Une fonction totale est dite application.)

Une relation de  $E$  vers  $F$  est une application si et seulement si, pour tout  $x$  de  $E$ , il existe un et un seul élément  $y$  de  $F$  tel que  $xfy$ .

## 1.2 Propriétés des relations binaires

**Définition 1.2.1** (Relation réflexive)

Une relation binaire  $\mathfrak{R}$  sur un ensemble  $E$  est réflexive si

$$\forall x \in E, \text{ alors } (x, x) \in \mathfrak{R}.$$

**Exemple 1.2.1** 1. Soit  $E = \{a, b, c\}$  et  $\mathfrak{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ , alors  $\mathfrak{R}$  est relation réflexive sur  $E$ .

2. La relation de divisibilité sur  $\mathbb{N}^*$  ou  $\mathbb{Z}^*$  est réflexive.

**Définition 1.2.2** (Relation irréflexive)

Une relation binaire  $\mathfrak{R}$  sur un ensemble  $E$  est *irréflexive* si

$$\forall x \in E, \text{ alors } (x, x) \notin \mathfrak{R}.$$

**Exemple 1.2.2** Sur l'ensemble des droites de l'espace, “ $(D)$  est orthogonale à  $(D')$ ” est *irréflexive*, puisqu'une droite ne peut être orthogonale à elle-même.

**Définition 1.2.3** (Relation symétrique)

Une relation binaire  $\mathfrak{R}$  sur un ensemble  $E$  est *symétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \text{ alors } (x\mathfrak{R}y) \Rightarrow (y\mathfrak{R}x).$$

**Exemple 1.2.3** 1. Dans  $\mathbb{R}$  l'addition, la multiplication, et l'égalité sont *symétriques*.

2. Entre garçons la relation “être frère de” est *symétrique*, car si Ali est frère de Khaled, Khaled est aussi frère d' Ali.

3. Sur l'ensemble des droites de l'espace, la relation de *parallélisme* est évidemment *symétrique*, car si  $D \parallel D'$  on a aussi  $D' \parallel D$ .

**Définition 1.2.4** (Relation transitive)

Une relation binaire  $\mathfrak{R}$  sur un ensemble  $E$  est *transitive* si

$$\forall x, y, z \in E, (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}z) \Rightarrow (x\mathfrak{R}z).$$

**Exemple 1.2.4** 1. La relation d'*inclusion* sur les ensembles est *transitive*, car si  $A \subset B$  et  $B \subset C$ , alors  $A \subset C$ .

2. La relation  $>$  (*strictement supérieur*) est *transitive*.

3. La relation “ $A\mathfrak{R}B$  équivaut qu'il existe une route entre  $A$  vers  $B$ ” est *transitive*, car s'il existe une route entre la ville  $A$  et la ville  $B$  et une route entre la ville  $B$  et la ville  $C$ , il existe nécessairement une route de  $A$  à  $C$ .

4. La relation d'*orthogonalité* n'est pas *transitive*.

**Définition 1.2.5** (*Relation antisymétrique*)

Une relation binaire  $\mathfrak{R}$  sur un ensemble  $E$  est antisymétrique si

$$\forall x, y \in E, (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x = y.$$

**Exemple 1.2.5** 1. La relation usuelle  $\geq$  est antisymétrique sur  $\mathbb{R}$ , car si  $x \geq y$  et  $y \geq x$ , alors  $x = y$ .

2. Soit la relation  $\mathfrak{R}$  définie sur  $\mathbb{Z}$  par :  $(x\mathfrak{R}y \iff x + y = 0)$  n'est pas antisymétrique, le fait que  $x + y = 0$  et  $y + x = 0$  ne signifie pas que  $x = y$ .

**Définition 1.2.6** (*Relation asymétrique*)

Une relation binaire  $\mathfrak{R}$  sur un ensemble  $E$  est asymétrique si

$$\forall x, y \in E, (x, y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y, x) \notin \mathfrak{R}.$$

**Exemple 1.2.6** La relation "être fils de" est asymétrique, car si Khaled est fils d'Ali, Ali n'est pas le fils de Khaled.

**Définition 1.2.7** (*relation identité (égalité)*)

Soit  $E$  un ensemble non vide, la relation de l'identité noté  $I_E$  ou  $\Delta_E$  (diagonale de  $E$ ) est une relation binaire sur  $E$  définie par :  $I_E = \Delta_E = \{(x, x) \mid x \in E\}$ .

**Propriétés 1.2.1** Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire sur  $E$  alors

- ▶ Si  $\forall a \in E, a \in \mathfrak{R}(a)$ , alors  $\mathfrak{R}$  est réflexive.
- ▶ Si  $\forall a, b \in E, a \in \mathfrak{R}(b) \Rightarrow b \in \mathfrak{R}(a)$ , alors  $\mathfrak{R}$  est symétrique.
- ▶ Si  $\forall a, b \in E, a \in \mathfrak{R}(b) \text{ et } b \in \mathfrak{R}(a) \Rightarrow a = b$ , alors  $\mathfrak{R}$  est antisymétrique.
- ▶ Si  $\forall a, b, c \in E, a \in \mathfrak{R}(b) \text{ et } b \in \mathfrak{R}(c) \Rightarrow a \in \mathfrak{R}(c)$ , alors  $\mathfrak{R}$  est transitive.

**Définition 1.2.8** (*Relation inverse*)

Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ . On appelle relation inverse de  $\mathfrak{R}$  et on note  $\mathfrak{R}^{-1}$ , la relation binaire de  $F$  vers  $E$  définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, (x\mathfrak{R}^{-1}y) \iff (y\mathfrak{R}x).$$

**Exemple 1.2.7** Soit  $E = \{a, b, c\}$  et on définit la relation  $\mathfrak{R}$  par :  $\mathfrak{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$ , alors  $\mathfrak{R}^{-1} = \{(a, a), (b, a), (c, b)\}$ .

**Définition 1.2.9** Soient  $E, F$  deux ensembles non vides et  $\mathfrak{R}$  et  $S$  deux parties non vides de  $E \times F$ . On dit que la relation  $\mathfrak{R}$  est incluse dans la relation  $S$  et on note  $\mathfrak{R} \subset S$ , si  $(x, y) \in E \times F, \forall (x, y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x, y) \in S$ . On dit que  $\mathfrak{R}$  est plus fine que  $S$  ( $S$  plus grossière que  $\mathfrak{R}$ ). On dit que deux relations  $\mathfrak{R}$  et  $S$  sont égales si  $\mathfrak{R} \subset S$  et  $S \subset \mathfrak{R}$ .

**Exemple 1.2.8** On considère l'ensemble  $D$  des droites du plan  $P$ .

Soient  $D_1, D_2$  deux droites de  $D$ ,

$D_1 \mathfrak{R} D_2 \iff D_1$  est orthogonale à  $D_2$

$D_1 S D_2 \iff D_1$  s'intersecte avec  $D_2$ . (i.e.,  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ )

$\mathfrak{R}$  est plus fine que  $S$ , car si deux droites sont perpendiculaires alors elles s'intersectent.

**Définition 1.2.10** (complémentaire de  $\mathfrak{R}$ )

Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ . On appelle relation complémentaire de  $\mathfrak{R}$  et on note  $\mathfrak{R}^c$  ou  $\overline{\mathfrak{R}}$ , la relation binaire de  $E$  vers  $F$  définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, (x, y) \in \mathfrak{R}^c \iff (x, y) \notin \mathfrak{R}.$$

**Définition 1.2.11** Soient  $\mathfrak{R}$  et  $S$  deux relations binaires d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ . On appelle réunion de  $\mathfrak{R}$  et  $S$  et on note  $T = \mathfrak{R} \cup S$  la relation binaire  $T$  de  $E$  vers  $F$  définie par :  $\forall (x, y) \in E \times F, xTy \iff ((x\mathfrak{R}y) \vee (xSy))$ .

**Définition 1.2.12** On appelle intersection de  $\mathfrak{R}$  et  $S$  et on note  $T = \mathfrak{R} \cap S$  la relation binaire  $T$  de  $E$  vers  $F$  définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, xTy \iff ((x\mathfrak{R}y) \wedge (xSy)).$$

**Définition 1.2.13** Soient les relations  $\mathfrak{R} \subseteq E \times F$  et  $S \subseteq F \times G$  La composée  $T$  de  $S$  et  $\mathfrak{R}$  est une relation binaire de l'ensemble  $E$  vers l'ensemble  $G$  notée  $T = S \circ \mathfrak{R}$  ou  $T = S\mathfrak{R}$  et définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times G, (xTy) \iff (\exists z \in F \text{ tq } (x\mathfrak{R}z) \wedge (zSy)).$$

**Exemple 1.2.9** Soit  $\Pi$  un ensemble de personnes,  $P$  la relation exprimant que telle personne est père de telle autre,  $M$  la relation exprimant que telle personne est mère de telle autre. La relation composée  $G = M \circ P$  est satisfaite s'il existe un couple  $(x, y)$  de personnes telles qu'il existe un personne  $z$  dont  $x$  soit le père, et qui soit mère de  $y$ , i.e. ssi  $x$  est grand-père maternel de  $y$ .

**Notation 1.2.1** Dans le cas particulier où  $E = F = G$  on note  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{R}$ .

**Exemple 1.2.10** Soit  $E = \{a, b, c, d\}$  et soit  $\mathfrak{R} = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$  définie sur  $E$ . Alors la composition de  $\mathfrak{R}$  est  $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2 = \{(a, c), (b, d)\}$ .

**Proposition 1.2.1** Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ .

1. Si  $\mathfrak{R}$  est réflexive alors  $\mathfrak{R}^{-1}$  est réflexive.
2.  $\mathfrak{R}^{-1} \circ \mathfrak{R}$  est réflexive si, et seulement si, l'ensemble de définition de  $\mathfrak{R}$  est  $E$ .
3.  $\mathfrak{R}$  est transitive si, et seulement si,  $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ .
4. Si  $\mathfrak{R}$  est transitive,  $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$  l'aussi.
5.  $\mathfrak{R}$  est antisymétrique si, et seulement si,  $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1} \subset \Delta_E$ .

**Preuve.**

1. Si  $\mathfrak{R}$  est réflexive alors  $\forall x \in E, (x, x) \in \mathfrak{R}$  donc  $(x, x) \in \mathfrak{R}^{-1}$ , alors  $\mathfrak{R}^{-1}$  est réflexive.
2. Pour l'implication directe, on suppose que  $\mathfrak{R}^{-1} \circ \mathfrak{R}$  est réflexive est on montre que l'ensemble de définition de  $\mathfrak{R}$  est  $E$ .

$$\Rightarrow \forall x \in E, x (\mathfrak{R}^{-1} \circ \mathfrak{R}) x.$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E \text{ tq } (x\mathfrak{R}y) \wedge (y\mathfrak{R}^{-1}x).$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E : x\mathfrak{R}y \wedge x\mathfrak{R}y.$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E : x\mathfrak{R}y.$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(\mathfrak{R}) = E.$$

Pour l'implication inverse, suppose  $Dom(\mathfrak{R}) = E$  (i.e.,  $\forall x \in E, \exists y \in E : x\mathfrak{R}y$ ) est on montre que  $\mathfrak{R}^{-1} \circ \mathfrak{R}$  est réflexive

$$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E : (x\mathfrak{R}y) \wedge (y\mathfrak{R}^{-1}x).$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \exists y \in E : x\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}^{-1}x. \text{ Donc } \mathfrak{R}^{-1} \circ \mathfrak{R} \text{ est réflexive.}$$

**3.** On montre que  $\mathfrak{R}$  est transitive entraine  $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ .

Soit  $(x, y) \in \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$ , alors  $\exists z \in E : (x\mathfrak{R}z) \wedge (z\mathfrak{R}y)$  comme  $\mathfrak{R}$  est transitive alors  $x\mathfrak{R}y$  (i.e.,  $(x, y) \in \mathfrak{R}$ ), donc  $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ .

On montre que si  $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ , alors  $\mathfrak{R}$  est transitive.

$$\text{Soit } x, y, z \in E : \begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \wedge \\ y\mathfrak{R}z \end{cases} \Rightarrow x(\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R})z \Rightarrow (x, z) \in \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \text{ alors } (x, z) \in \mathfrak{R} \text{ car } \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R},$$

donc  $\mathfrak{R}$  est transitive.

**4.**  $\mathfrak{R}$  transitive entraine  $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$  transitive

Soient  $x, y, z \in E$  telle que :

$$\begin{cases} x\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}y \\ \text{et} \\ y\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists z_1 \in E : (x\mathfrak{R}z_1) \wedge (z_1\mathfrak{R}y) \\ \exists z_2 \in E : (y\mathfrak{R}z_2) \wedge (z_2\mathfrak{R}z) \end{cases} \text{ comme } \mathfrak{R} \text{ est transitive on a : } \begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \text{et} \\ y\mathfrak{R}z \end{cases} \Rightarrow x\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}z, \text{ donc } \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \text{ est transitive.}$$

**5.**  $\mathfrak{R}$  est antisymétrique  $\Rightarrow \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1} \subset \Delta_E$ .

On suppose  $\mathfrak{R}$  est antisymétrique et soit  $(x, y) \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{R}$  et  $(x, y) \in \mathfrak{R}^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{R}$  et  $(y, x) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (x = y)$ , (car  $\mathfrak{R}$  antisymétrique), alors  $(x, y) = (x, x) \in \Delta_E$  donc  $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1} \subset \Delta_E$ .

Inversement, supposons que  $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1} \subset \Delta_E$  et montrons que  $\mathfrak{R}$  est antisymétrique. Soit  $x, y \in E$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ x\mathcal{R}^{-1}y \end{array} \right. \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}, \text{ alors } x = y \text{ car } (\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset \Delta_E), \text{ donc } \mathcal{R}$$

est antisymétrique. ■

### 1.3 Représentation d'une relation binaire

Si  $E$  et  $F$  sont finis on peut représenter une relation binaire ( $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ ) par un diagramme sagittal, par un diagramme cartésien, ou encore par une matrice.

**Représentation ensembliste :** On liste tout simplement les couples satisfaisant à la relation.

**Diagramme sagittal ou graphe :**

Pour cela, on représente d'abord les éléments de  $E$  et ceux de  $F$  par des points, ce sont les sommets du diagramme, puis, si  $a \in E$  et  $b \in F$  sont tels que  $a\mathcal{R}b$ , on dessine une flèche partant du point qui représente  $a$  et allant à celui qui représente  $b$ . Lorsqu'on dessine le diagramme sagittal d'une relation binaire sur un ensemble  $E$ , on convient de le simplifier en représentant qu'une seule fois les éléments de  $E$ .

**Exemple 1.3.1** Soit  $E = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $F = \{1, 2, 3, 4\}$

On définit la relation  $\mathcal{R} \subseteq E \times F$  par  $\mathcal{R} = \{(a, 4), (a, 2), (c, 1), (b, 1), (e, 4), (c, 4)\}$  et la relation  $S$  sur  $F$  par  $S = \{(1, 2), (2, 2), (4, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 3)\}$ .

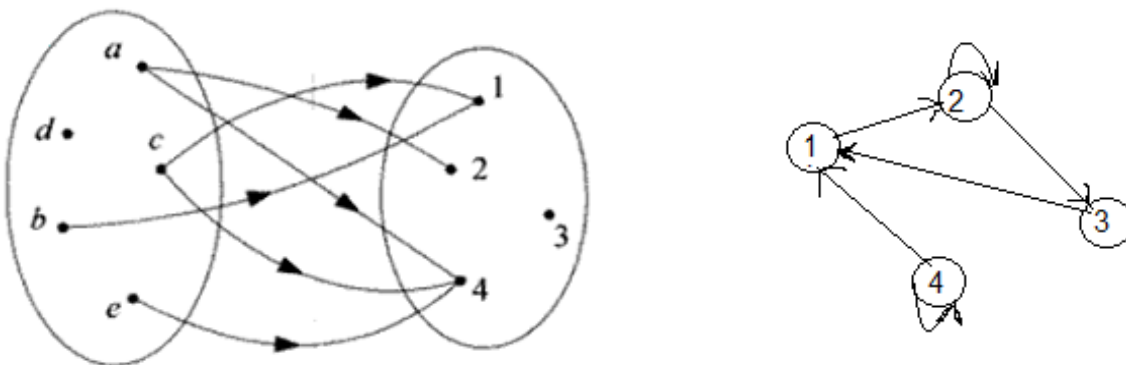


FIG.1- Diagramme sagittal pour  $\mathcal{R}$  et  $S$

**Diagramme cartésien :**

Tableau à double entrée qui représente une relation entre les éléments d'un ensemble de départ et ceux d'un ensemble d'arrivée. Les éléments d'un ensemble sont écrits à gauche et les éléments de l'autre ensemble en bas ou en haut. Une flèche indique le sens dans lequel la relation doit être lue. La case où la relation s'applique est marquée par un signe distinctif, soit par un  $\times$ , par un oui ou par un non. Le diagramme cartésien d'une relation sur un ensemble est carré, car il possède autant de lignes que de colonnes ; avec les cases qui représentent les couples du type  $(x, x)$  remplissent une diagonale du carré qu'on appelle la diagonale. Par exemple en dresse le table cartésien pour les relations  $\mathfrak{R}$  et  $S$ .

$\mathfrak{R}$	1	2	3	4
$a$		$\times$		$\times$
$b$	$\times$			
$c$	$\times$			$\times$
$d$				
$e$				$\times$

$S$	1	2	3	4
1		$\times$		
2		$\times$	$\times$	
3	$\times$			
4	$\times$			$\times$

**Représentation des relations binaires entre éléments d'ensembles finis par des matrices :[11]**

Considérons deux ensembles finis  $E$  et  $F$  et une relation  $\mathfrak{R}$  entre les éléments de  $E$  et de  $F$ . Puisque  $E$  est fini nous pouvons désigner ses éléments par  $a_1, \dots, a_n$ ; puisque  $F$  est fini nous pouvons désigner ses éléments par  $b_1, \dots, b_m$ . Faisons correspondre à  $\mathfrak{R}$  le tableau rectangulaire ou matrice de  $m$  lignes et  $n$  colonnes obtenu en écrivant 1 à l'intersection de la  $p^{\text{ième}}$  ligne et de la  $q^{\text{ième}}$  colonne lorsque  $(a_p, b_q) \in \mathfrak{R}$  et en écrivant 0 lorsque  $(a_p, b_q) \notin \mathfrak{R}$ .

Il est facile de constater que la matrice correspondante à  $\mathfrak{R}^c$  se déduit de celle correspondante à  $\mathfrak{R}$  en changeant les 0 en 1 et les 1 en 0, et que si  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$  sont deux relations entre les éléments de  $E$  et de  $F$ , la matrice correspondante à  $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$  (resp.  $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ ) est la matrice obtenue en "ajoutant" les éléments des matrices correspondantes à  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$  suivant la

règle habituelle de l'addition des matrices avec les lois  $\left\{ \begin{array}{l} 0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \\ 1 \wedge 1 = 1 \end{array} \right.$  (resp.  $\left. \begin{array}{l} 1 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \\ 0 \vee 0 = 0 \end{array} \right.$ ).

La matrice correspondante à  $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$  est la matrice obtenue par celles de  $\mathfrak{R}_1$  et  $\mathfrak{R}_2$  suivant les règles habituelles de la multiplication des matrices avec les lois

⊗	0	1
0	0	0
1	0	1

et

⊕	0	1
0	0	1
1	1	1

**Exemple 1.3.2** *En fait la Représentation matricielle pour la relation  $S$  et  $\mathfrak{R}$  dans l'exemple précédent*

$\mathfrak{R}$	1 2 3 4	$S$	1 2 3 4	$\mathfrak{R} \circ S$	1 2 3 4
$a$	$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$	1	$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$	$a$	$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$
$b$	$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$	2	$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$	$b$	$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$
$c$	$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	3	$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$	$c$	$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$
$d$	$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$	4	$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$	$d$	$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$
$e$	$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$			$e$	$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

**Remarque 1.3.1** • *Pour reconnaître qu'une relation est réflexive, il suffit de vérifier qu'à chaque sommet du diagramme sagittal il y a une flèche qui part de ce sommet et qui y revient une telle flèche s'appelle une boucle. Et sur le diagramme cartésien et les matrices la relation binaire est réflexive quand toute la diagonale est noircie (i.e.,  $(x, x) = 1$ ).*

- *Pour reconnaître la symétrie d'une relation binaire sur son diagramme sagittal, il suffit de vérifier qu'à chaque fois qu'une flèche va de  $a$  à  $b$ , une autre flèche revient de  $b$  à  $a$ . Et il suffit de vérifier que son diagramme cartésien et son matrice est symétrique par rapport à la diagonale (i.e., les couples  $(a, b)$  et  $(b, a)$  ont même valeur).*

## 1.4 Fermetures des relations binaires

**Définition 1.4.1** Soit  $\Omega$  un ensemble et  $P$  une propriété et soit  $S \subseteq \Omega$  telle que  $S$  peut satisfaire  $P$  ou non. La question qui se pose est la suivante :

Quel est le plus petit sous-ensemble de  $\Omega$  qui contient  $S$  et qui vérifie la propriété  $P$  (dite fermeture de  $S$  selon  $P$ )? i.e., trouver  $C \subseteq \Omega$  telle que :

- (1)  $S \subseteq C$ .
- (2)  $P(C)$  vérifie. (i.e., la propriété  $p$  est vérifiée dans  $C$ ).
- (3) Si  $D \subseteq \Omega$  telle que  $S \subseteq D$  (avec  $D$  vérifie  $P$ ) alors  $C \subseteq D$ .

**Théorème 1.4.3** Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire définie sur un ensemble  $E$ . Alors

1.  $r(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \Delta_E$  où  $\Delta_E$  est la relation « égalité » sur  $E$ .
2.  $s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1}$  où  $\mathfrak{R}^{-1}$  est la relation réciproque de  $\mathfrak{R}$ .
3.  $t(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^2 \cup \mathfrak{R}^3 \cup \dots \cup \mathfrak{R}^i \cup \dots = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i = \mathfrak{R}^+$ .

**Remarque 1.4.1** Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire définie sur un ensemble  $E$ . Alors  $(x, y) \in t(\mathfrak{R})$  si et seulement si il existe une suite  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  d'éléments de  $E$  où  $n \geq 1, c_0 = x$  et  $c_n = y$  et telle que  $(x, c_1), \dots, (c_{n-1}, y) \in \mathfrak{R}$  (notion de chemin).

**Preuve.**

1. On montrer que  $\mathfrak{R} \cup \Delta_E = r(\mathfrak{R})$  est la fermeture réflexive de  $\mathfrak{R}$ 
  - Il est clair que  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R} \cup \Delta_E$ .
  - $\mathfrak{R} \cup \Delta_E$  est réflexive car  $\Delta_E \subset \mathfrak{R} \cup \Delta_E$ .
  - Soit  $\mu$  une relation réflexive qui contient  $\mathfrak{R}$  on montre que  $\mathfrak{R} \cup \Delta_E \subset \mu$ , on a  $\mathfrak{R} \subset \mu$  et comme  $\mu$  réflexive  $\Delta_E \subset \mu$  donc  $\mathfrak{R} \cup \Delta_E \subset \mu$ .

Finalement  $r(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \Delta_E$  est la fermeture réflexive de  $\mathfrak{R}$ .

2. On montrer que  $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1} = s(\mathfrak{R})$  est la fermeture symétrique de  $\mathfrak{R}$

- Il est clair que  $\mathfrak{R} \subset s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1}$ .
- Soit  $(x, y) \in s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1} \Rightarrow (x, y) \in \mathfrak{R}$  ou  $(x, y) \in \mathfrak{R}^{-1}$  alors  $(y, x) \in \mathfrak{R}^{-1}$  ou  $(y, x) \in \mathfrak{R}$  donc  $(y, x) \in s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1}$  alors  $s(\mathfrak{R})$  est symétrique.
- Soit  $\mu$  une relation symétrique qui contient  $\mathfrak{R}$  on montre que  $s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1} \subset \mu$ , on a  $\mathfrak{R} \subset \mu$  et comme  $\mu$  symétrique  $\mathfrak{R}^{-1} \subset \mu$  donc  $s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1} \subset \mu$ .

Finalement  $s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1}$  est la fermeture symétrique de  $\mathfrak{R}$ .

3. On montre que  $t(\mathfrak{R}) = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i$  est la fermeture transitive de  $\mathfrak{R}$

- Pour  $i = 1$   $\mathfrak{R} \subset t(\mathfrak{R}) = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i$ .
- On montre que  $t(\mathfrak{R})$  est transitive, soit  $x, y, z \in E$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i y \\ \text{et} \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} x \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i z \\ y \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i z \end{array} \right.$$

$(x, y) \in \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{N}^*$  telle que  $(x, y) \in \mathfrak{R}^s = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \circ \dots \circ \mathfrak{R}$ ,  $s$  fois  
 $\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, \dots, x_{s-1}) \in E^{s-1}$  telle que  $(x \mathfrak{R} x_1) \wedge (x_1 \mathfrak{R} x_2) \wedge \dots \wedge (x_{s-1} \mathfrak{R} y) \dots$  (1).

$(y, z) \in \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$  telle que  $(y, z) \in \mathfrak{R}^k = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} \circ \dots \circ \mathfrak{R}$ ,  $k$  fois  $\Leftrightarrow$   
 $\exists (y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) \in E^{k-1}$  telle que  $(y \mathfrak{R} y_1) \wedge (y_1 \mathfrak{R} y_2) \wedge \dots \wedge (y_{k-1} \mathfrak{R} z) \dots$  (2). On a

de (1) et (2) :  $((x \mathfrak{R} x_1) \wedge (x_1 \mathfrak{R} x_2) \wedge \dots \wedge (x_{s-1} \mathfrak{R} y) \wedge (y \mathfrak{R} y_1) \wedge (y_1 \mathfrak{R} y_2) \wedge \dots \wedge (y_{k-1} \mathfrak{R} z)) \Rightarrow$   
 $(x, z) \in \mathfrak{R}^{k+s}, k + s \in \mathbb{N}^*$  donc  $(x, z) \in \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i$ .

- Soit  $\mu$  une relation transitive qui contient  $\mathfrak{R}$  on montre que  $t(\mathfrak{R}) = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i \subset \mu$ .  
 Soit  $(x, y) \in \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{N}^*$  telle que  $(x, y) \in \mathfrak{R}^b \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, \dots, x_{b-1}) \in E^{b-1}$  telle que  $(x \mathfrak{R} x_1) \wedge (x_1 \mathfrak{R} x_2) \wedge \dots \wedge (x_{b-1} \mathfrak{R} y)$  et comme  $\mathfrak{R} \subset \mu$  alors  $(x \mu x_1) \wedge (x_1 \mu x_2) \wedge \dots \wedge (x_{b-1} \mu y)$ . Comme  $\mu$  est transitive enfin on obtient  $(x \mu y)$ , alors  $t(\mathfrak{R}) = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i \subset \mu$ .

Finalement  $t(\mathfrak{R}) = \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{R}^i \subset \mu$  est la fermeture transitive de  $\mathfrak{R}$ .

■

**Propriétés 1.4.1** Soit  $\mathfrak{R}$  une relation binaire définie sur un ensemble  $E$ . Alors :

- $\mathfrak{R}$  est réflexive si et seulement si  $\mathfrak{R} = r(\mathfrak{R})$ .
- $\mathfrak{R}$  est symétrique si et seulement si  $\mathfrak{R} = s(\mathfrak{R})$ .
- $\mathfrak{R}$  est transitive si et seulement si  $\mathfrak{R} = t(\mathfrak{R})$ .

**Notation 1.4.1** On note  $\mathfrak{R}^+$  la fermeture transitive de  $\mathfrak{R}$  et  $\mathfrak{R}^*$  la fermeture réflexive et transitive de  $\mathfrak{R}$ .

**Exemple 1.4.1** Soit  $E = \{a, b, c, d, e\}$  on définit sur  $E$  la relation  $\mathfrak{R} = \{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e)\}$ .

Alors

$$r(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \Delta_E = \{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

$$s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^{-1} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (d, e), (e, d)\}.$$

$$\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} = \{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e)\}, \quad \mathfrak{R}^3 = \mathfrak{R}^2 \circ \mathfrak{R} = \{(a, e)\} \text{ et } \mathfrak{R}^4 = \mathfrak{R}^5 = \emptyset.$$

$$t(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}^2 \cup \mathfrak{R}^3 = \{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (a, b), (b, c), (b, d), (d, e)\}, (a, e)\}.$$

# Chapitre 2

## Relation d'équivalence et relation d'ordre

Dans ce deuxième chapitre, nous allons donner des définitions et des concepts sur les relations d'équivalence et relations d'ordre. Enfin on introduit certains types spéciales d'ordres tel que le bon ordre, ordres bien fondés et ordres belordonnés.

### Contenus

- ✓ Relation d'équivalence
- ✓ Relation d'ordre
  - ✓ Eléments remarquables dans un ensemble ordonné
  - ✓ Représentation des ensembles ordonnés
  - ✓ L'ordre lexicographique (ordre du dictionnaire)
  - ✓ Extension d'ordre
  - ✓ La section initiale et la section finale
- ✓ Bon ordre, ordres bien fondés et ordres belordonnés

## 2.1 Relation d'équivalence

**Définition 2.1.1** (*Relation d'équivalence*)

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathfrak{R}$  un relation binaire sur  $E$ . On dit que  $\mathfrak{R}$  est une relation d'équivalence si  $\mathfrak{R}$  est réflexive, symétrique et transitive.

**Exemple 2.1.1** 1. L'égalité sur un ensemble quelconque est une relation d'équivalence.

2. Les « cohortes » utilisées en démographie : la population de l'Algérie est partagée en classes d'individus tous nés la même année.

3. Soit  $f : X \rightarrow E$  une application alors :

La relation  $\text{mod}(f)$  sur  $X$  définie par  $x \equiv y \text{ mod}(f) \iff f(x) = f(y)$  est une relation d'équivalence sur  $X$ .

4. La congruence sur  $\mathbb{Z}$  :

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On dit que deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  sont congrus modulo  $n$  ou encore que  $a$  est congru à  $b$  modulo  $n$ , si  $n$  divise  $a - b$ . On notera  $a \equiv b \text{ mod } n$  ou  $a \equiv b [n]$ . Par exemple, soit  $n = 4$ , On a  $11 \equiv 3 \text{ mod } [4]$  et  $22 \equiv 6 \text{ mod } [4]$ . Donc 4 divise  $11 - 3 = 8$  et 4 divise  $22 - 6 = 16$ .

5. Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites.

6. En géométrie euclidienne, la similitude des triangles est une relation d'équivalence, car si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des triangles quelconques, alors (1)  $A$  est semblable à lui-même, (2) si  $A$  est semblable à  $B$ , alors  $B$  est semblable à  $A$  et (3) si  $A$  est semblable à  $B$  et  $B$  semblable à  $C$  alors  $A$  est semblable à  $C$ .

**Définition 2.1.2** Si  $\mathfrak{R}$  est une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ , pour tout  $x \in E$ , on note  $\bar{x} = \{y \in E \mid x \mathfrak{R} y\}$  Cet ensemble s'appelle la classe d'équivalence de  $x$  modulo  $\mathfrak{R}$ .

**Exemple 2.1.2** Soit  $V$  un espace vectoriel réel,  $\mathcal{L}$  la colinéarité sur l'ensemble  $E = V \setminus \{0\}$  des vecteurs non nuls de  $V$  et  $x \in E$ , alors la classe d'équivalence de  $x$  est  $\bar{x} = \{y = t \cdot x \mid t \in \mathbb{R}^*\}$ , l'ensemble des points non nuls de la droite engendrée par  $x$ .

**Proposition 2.1.1** Soit  $\mathfrak{R}$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ . Alors les classes d'équivalences forment une partition de  $E$ , c'est-à-dire que

- (1) Toute classe d'équivalence est non vide (i.e.,  $\forall i \in I, \bar{x}_i \neq \emptyset$ );
- (2) La réunion des classes d'équivalence est égale à  $E$  (i.e.  $\bigcup_{i \in I} \bar{x}_i = E$ );
- (3) Deux classes d'équivalence sont soit disjointes (i.e.  $\forall i, j \in I$ , et  $i \neq j, \bar{x}_i \cap \bar{x}_j = \emptyset$ ).

**Théorème 2.1.1** [5] Une relation d'équivalence  $\mathfrak{R}$  sur un ensemble  $E$  définit une partition de  $E$  dont les éléments sont les classes d'équivalence de  $\mathfrak{R}$ . Réciproquement, toute partition de  $E$  définit sur  $E$  une relation d'équivalence dont les classes coïncident avec les éléments de la partition.

**Preuve.** On a  $x \in \bar{x}$ , puisque la relation est réflexive, donc pour tout  $x \in E, \bar{x} \neq \emptyset$ . Puisque  $x \in \bar{x}$ , on a

$$E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \subset \bigcup_{x \in E} \bar{x} \subset E.$$

Les classes ne sont donc pas vides et leur réunion est l'ensemble  $E$ .

Montrons que deux classes d'équivalence  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont identiques si et seulement si  $x\mathfrak{R}y$ .

Supposons d'abord que  $x\mathfrak{R}y$  et soit  $z \in \bar{x}$ ; alors on a  $x\mathfrak{R}z$ , donc  $y\mathfrak{R}z$  et par suite  $z \in \bar{y}$ , ce qui montre que  $\bar{x} \subset \bar{y}$ . Par symétrie, on verrait de même que  $\bar{y} \subset \bar{x}$ . Donc  $\bar{x} = \bar{y}$ .

Inversement supposons que  $\bar{x} = \bar{y}$ . On a toujours  $x \in \bar{x} = \bar{y}$ , donc  $x\mathfrak{R}y$ .

Supposons maintenant que  $\bar{x} \neq \bar{y}$ . S'il existait  $z \in E$  tel que  $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ , alors  $z\mathfrak{R}x$  et  $z\mathfrak{R}y$ . Comme la relation est symétrique et transitive, on en déduirait  $x\mathfrak{R}y$ , d'où  $\bar{x} = \bar{y}$  contrairement à l'hypothèse. Donc  $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ .

Réciproquement, si  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$ , la relation  $x\mathfrak{R}y$  si et seulement si  $x$  et  $y$  appartiennent au même  $A_i$  est une relation d'équivalence.

En effet puisque  $\bigcup_{i \in I} A_i = E$ , pour tout  $x \in E$ , il existe un indice  $i$  tel que  $x \in A_i$ . Donc  $x\mathfrak{R}x$ .

La relation  $\mathfrak{R}$  est évidemment symétrique. Soient  $x, y, z$  des éléments de  $E$  tels que  $x\mathfrak{R}y$  et  $y\mathfrak{R}z$ . Alors il existe  $i \in I$  tel que  $x \in A_i$  et  $y \in A_i$ , et il existe  $j \in I$  tel que  $y \in A_j$ ; et  $z \in A_j$ . Comme  $y \in A_i \cap A_j$ , on a  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , donc  $A_i = A_j$ , et par suite  $x\mathfrak{R}z$ , d'où la transitivité de  $\mathfrak{R}$ .

Il est clair que les classes d'équivalence sont les éléments  $A$ , de la partition donnée. ■

**Définition 2.1.3** *L'ensemble des classes d'équivalence est appelé ensemble quotient de  $E$  par  $\mathfrak{R}$  et se note  $E/\mathfrak{R}$ . L'application  $E \rightarrow E/\mathfrak{R}$  qui à tout élément  $x$  de  $E$  associe sa classe d'équivalence se nomme application (ou projection) canonique.*

**Exemple 2.1.3** 1. *Soit  $E = \mathbb{R}$  et soit  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$ . La relation  $\mathfrak{R}$  est réflexive, symétrique et transitive, c'est donc bien une relation d'équivalence.*

*On a  $\forall x \in \mathbb{R}, \bar{x} = \{y \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = y^2 + y\}$ , alors  $\bar{x} = \{y \in E \mid (x - y)(x + y + 1) = 0\}$   
 $\bar{x} = \{y \in E \mid y = x \text{ ou } y = -1 - x\} = \{x, -1 - x\}$ , donc  $E/\mathfrak{R} = \{\{x, -1 - x\} / x \in \mathbb{R}\}$ .*

2. *La relation  $\mathfrak{R}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $x\mathfrak{R}y$  si, et seulement si,  $\langle\langle x \text{ et } y \text{ ont le même signe} \rangle\rangle$  possède deux classes d'équivalence; la classe  $\mathbb{R}_+^*$  et la classe  $\mathbb{R}_-^*$ . Donc  $\mathbb{R}^*/\mathfrak{R} = \{\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*\}$ .*

## 2.2 Relation d'ordre

**Définition 2.2.1** *(Relation d'ordre)*

*On appelle relation d'ordre sur un ensemble  $E$  toute relation binaire réflexive, anti-symétrique et transitive. La plus part des relations d'ordre sont notées  $\leq$  ou  $\preceq$ . Un ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $\leq$  est dit ordonné, et on utilise la notation  $(E, \leq)$  pour s'y référer.*

**Exemple 2.2.1** 1. *Les relations  $\geq, \leq$  sont des relations d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .*

2. *La relation de divisibilité est une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}^*$  et non sur  $\mathbb{Z}$ .*

3. *Les relations  $\subset, \supset$  sont des relations d'ordre sur  $P(E)$ .*

**Définition 2.2.2** *(préordre)*

*Soit  $E$  un ensemble et  $\mathfrak{R}$  une relation binaire sur  $E$ . On dit que  $\mathfrak{R}$  est un préordre (ou quasi-ordre) sur  $E$ , si  $\mathfrak{R}$  est réflexive et transitive. Par exemple  $\mathbb{Z}^*$  ordonné par la divisibilité est un préordre.*

**Définition 2.2.3** (*ordre strict*)

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathfrak{R}$  une relation binaire sur  $E$ . On dit que  $\mathfrak{R}$  est un ordre strict sur  $E$ , si  $\mathfrak{R}$  est irréflexive, antisymétrique et transitive. Par exemple  $(\mathbb{R}, <)$  est un ordre stricte.

**Définition 2.2.4** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné si tous les éléments de  $E$  sont comparables, on dit que  $(E, \leq)$  est totalement ordonné et  $\leq$  est une relation d'ordre total. S'il existe au moins un couple d'éléments de  $E$  non comparables on dit que  $(E, \leq)$  est partiellement ordonné et  $\leq$  est une relation d'ordre partiel.

**Exemple 2.2.2** 1.  $\leq$  et  $\geq$  définissent un ordre total sur  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ .

2. La divisibilité un ordre partiel sur  $\mathbb{N}^*$ .

3. Soit  $F$  un ensemble et  $E = P(F)$ , si  $\text{card}(F) \leq 1$ , alors " $\subseteq$ " est un ordre total dans  $E$ . Et si  $F$  contient au moins deux éléments distincts  $a$  et  $b$ , alors :  $\exists A = \{a\} \in E, B = \{b\} \in E (A \not\subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A)$ . Donc  $A$  et  $B$  ne sont pas comparable avec la relation " $\subseteq$ " alors l'ordre " $\subseteq$ " est un ordre partiel dans  $E$ .

**Définition 2.2.5** (*Relation couverture*)

Dans un ensemble ordonné  $(E, \leq)$  nous disons que  $x$  est couvert par  $y$  (ou qui  $y$  couvre  $x$ ) et on note  $x \prec y$  si  $x < y$  et il n'y a aucun  $z \in E$  tels que  $x < z < y$ .

**Exemple 2.2.3** 1. Dans le chaîne  $\mathbb{N}$ , nous avons  $m \prec n$  si et seulement si  $n = m + 1$ .

2. Dans  $\mathbb{R}$ , il n'y a pas des paires  $x, y$  tel que  $x \prec y$ .

3. Dans  $P(X)$ , nous avons  $A \prec B$ , si et seulement si  $B = A \cup \{b\}$  pour un  $b \in X \setminus A$ .

**Définition 2.2.6** (*Chaîne*)

Une chaîne est un ensemble totalement ordonné, le symboles  $C_n$  désignera une chaîne à  $n$  éléments.

**Définition 2.2.7** (*Antichaîne*)

On appelle antichaîne tous ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables. Le symbole  $A_n$  désignera une antichaîne à  $n$  éléments.

Si  $X$  est une chaîne (resp. une antichaine), on dit que  $X$  est maximale si pour toute chaîne (resp. antichaine)  $Y$  de  $E$ ,  $X \subset Y \Rightarrow X = Y$

**Exemple 2.2.4** 1.  $\mathbb{N}$  avec l'ordre  $\leq$  est une chaîne.

2.  $P(E)$  avec la relation d'inclusion n'est pas une chaîne.

3. Dans  $\mathbb{N}^*$  avec la relation de divisibilité  $P = \{p \in \mathbb{N}^*, p \text{ premier}\}$  est une antichaine.

**Exemple 2.2.5** Soit  $E = P(\{a, b, c\})$ , muni de l'inclusion.

1.  $X = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$  est une chaîne maximale.

2.  $X = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$  est une chaîne non maximale.

3.  $X = \{\{a\}\}$  est une antichaine non maximale.

## 2.2.1 Éléments remarquables dans un ensemble ordonné

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné,  $A \subset E$  et  $\alpha \in E$ . On dit que  $\alpha$  est :

- un majorant (resp. minorant) de  $A$  si  $\forall x \in A, x \leq \alpha$  (resp.  $\alpha \leq x$ ),
- un élément maximal (resp. minimal) de  $A$ , si  $\alpha \in A$  et si  $\forall x \in A, \alpha \leq x \Rightarrow x = \alpha$  (resp.  $x \leq \alpha \Rightarrow x = \alpha$ ),
- un plus grand élément (resp. plus petit élément) de  $A$ , si  $\alpha \in A$  et si  $\forall x \in A, x \leq \alpha$  (resp.  $\alpha \leq x$ ),
- une borne supérieure (resp. inférieure) de  $A$ , est le plus petit de ces majorants (resp. le plus grand de ces minorants).

**Notation 2.2.1** Si  $A$  admet un plus grand élément (resp. plus petit élément), on note celui-ci  $\max(A)$  (resp.  $\min(A)$ ).

Si  $A$  admet une borne supérieure (resp. inférieure), on note celle-ci  $\text{Sup}(A)$  (resp.  $\text{Inf}(A)$ ).

- Exemple 2.2.6** 1. L'ensemble des entiers naturels, muni de son ordre naturel, admet 0 comme plus petit élément mais n'admet pas de plus grand élément.
2. Soit  $A$  un sous ensemble de  $\mathbb{N}^*$  que l'on munit de la relation d'ordre de la divisibilité. Alors  $\inf A$  est le pgcd des éléments de  $A$  tandis que  $\sup A$  est le ppcm de ces éléments. Soit  $A = \{2, 3\}$  alors  $\sup A = 6$  et  $\inf A = 1$ , mais  $\max(A)$  n'existe pas, car 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2 et  $\min(A)$  n'existe pas (pour la même raison).
3. Dans  $\mathbb{R}$  muni de la relation d'ordre  $\leq$ ,  $[0, 1[$  admet 0 pour plus petit élément ( $\min([0; 1]) = 0$ ) mais n'admet pas plus grand élément ( $\max([0; 1])$  n'existe pas).  
 et  $[1, +\infty[$  est l'ensemble des majorants de l'intervalle  $[0, 1[$  alors  $\sup([0; 1]) = 1$  et  $]-\infty, 0]$  est l'ensemble des minorants de l'intervalle  $[0, 1[$  alors  $\inf([0; 1]) = \min([0; 1]) = 0$ .
4. On munit  $\mathbb{R}$  de son ordre usuel. La partie  $A = \left\{ \frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^* \right\}$  est majorée par 1 et minorée par 0 et  $\sup(A) = \max(A) = 1$ ,  $\inf(A) = 0$ , mais  $\min(A)$  n'existe pas.

**Proposition 2.2.1** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné. Si  $E$  admet un plus grand (resp. plus petit) élément, celui-ci est unique.

**Preuve.** Soit  $a$  et  $b$  deux plus grands éléments de  $E$ . On a par définition  $a \leq b$  et  $b \leq a$ , donc  $a = b$  (car  $\leq$  est antisymétrique). Il en est de même pour le plus petit élément. ■

**Proposition 2.2.2** Soit  $A$  une partie d'un ensemble muni d'une relation d'ordre. Si  $A$  admet un maximum, alors il admet une borne supérieure et  $\max A = \sup A$ . Et si  $A$  admet un minimum, alors il admet une borne inférieure et  $\min A = \inf A$ .

**Preuve.** Supposons que  $A$  admette un maximum, disons  $a$ . On note  $S$  l'ensemble des majorants de  $A$  ( $S$  n'est pas vide puisqu'il contient  $a$ ). Soit  $b \in S$ , alors  $a \leq b$  puisque  $a \in A$  et  $b$  est un majorant de  $A$ . Ainsi,  $\forall b \in S, a \leq b$ . donc  $a$  est le plus petit élément de  $S$ . Donc  $a$  est la borne supérieure de  $A$ . La démonstration de  $\min A = \inf A$  est analogue à la précédente. ■

**Axiome 2.2.1** (Axiome de Zorn). Soit  $E$  un ensemble ordonné non vide. Si toute chaîne non vide  $C$  de  $E$  a un majorant (c'est-à-dire un élément  $c \in E$  tel que  $x \leq c$  pour tout

$x \in C$ ) respectivement une borne supérieure (c'est-à-dire un plus petit majorant), alors  $E$  est dit inductif au sens faible, respectivement inductif au sens fort.

**Axiome 2.2.2** *Axiome(s) de Zorn [M. Zorn (1930)]. Tout ensemble inductif contient un élément maximal.*

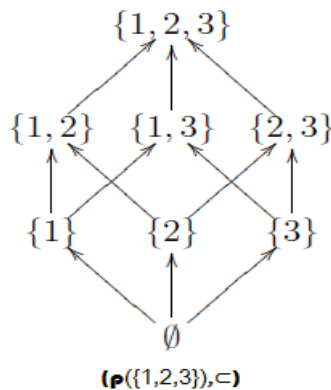
## 2.2.2 Représentation des ensembles ordonnés

Le plus part des ensembles ordonnés peuvent être représentés au moyen d'un diagramme de Hasse.

On peut représenter une relation d'ordre sur un ensemble fini, par une version simplifiée du diagramme sagittal, qu'on appelle le diagramme de Hasse. En adoptant quelques conventions :

1. les boucles de réflexivité sont supprimées,
2. quand un élément en précède un autre on le place visuellement plus bas que le plus grand,
3. les flèches deviennent de simples traits sans pointes (la disposition visuelle des éléments fait en sorte que la direction des flèches n'est plus essentielle),
4. s'il y a une flèche allant de  $x$  à  $y$  et une autre de  $y$  à  $z$ , alors on supprime la flèche qui relie  $x$  et  $z$ .

**Exemple 2.2.7** Soit  $E = \{1, 2, 3\}$  alors on peut représenter  $P(E)$  avec l'ordre  $\subseteq$  par le diagramme de Hasse tel que  $P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$



**Définition 2.2.8** (*Morphismes d'ensembles ordonnés*)

Soient deux ensembles ordonnés  $(E, \leq)$  et  $(F, \leq)$ , une application  $f : E \rightarrow F$  sera dite une application croissante ou homomorphisme d'ordre ou encore (application isotone), si quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $E$  :  $x \leq y$  implique  $f(x) \leq f(y)$ .

On définira également :

Application décroissante ou (antitone) :  $x \leq y$  implique  $f(x) \geq f(y)$ .

Application strictement croissante :  $x < y$  implique  $f(x) < f(y)$ .

Application strictement décroissante :  $x < y$  implique  $f(x) > f(y)$ .

Une application  $f$  telle que  $x \leq y$  **si et seulement si**  $f(x) \leq f(y)$  est appelée un codage ou monomorphisme de  $E$  dans  $F$ . Si  $f$  est en plus une bijection, alors on dit que  $f$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Si  $f$  est un homomorphisme d'un ensemble ordonné dans lui-même (c'est-à-dire lorsque  $E = F$ ) alors on dit que  $f$  est un endomorphisme d'ensemble ordonné. Un endomorphisme d'ensemble ordonné bijectif est appelé un automorphisme d'ensemble ordonné.

**2.2.3 L'ordre lexicographique****Définition 2.2.9** (*Ordre lexicographique*)

Soit  $(E_1, \leq_1)$  et  $(E_2, \leq_2)$  deux ensembles ordonnés. On définit l'ordre lexicographique  $\leq_l$  sur  $E_1 \times E_2$  comme suit : pour  $(x, y)$  et  $(x', y') \in E_1 \times E_2$ , on pose

$$(x, y) \leq_l (x', y') \text{ si } x <_1 x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq_2 y').$$

Et on écrit

$$(x, y) <_l (x', y') \text{ si } x <_1 x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y <_2 y').$$

**Exemple 2.2.8** Soit  $(\mathbf{A}, \leq_{\mathbf{A}})$ , l'alphabet latin ordonné de la façon usuelle, et On définit l'ordre lexicographique  $\leq_l$  sur  $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ .

1.  $(e, n) <_l (o, u)$ .

Cette inégalité peut être vue comme correspondant au fait que le mot **en** précède le mot **ou** dans le dictionnaire. C'est la première lettre qui est déterminante ici :  $e \leq_{\mathbf{A}} o$ .

2.  $(e, n) <_l (e, u)$ .

On compare maintenant les mots **en** et **eu**. Comme la première lettre est identique, il faut maintenant comparer la deuxième lettre :  $e = e$  et  $n \leq_A u$ .

3.  $(o, u) \leq_l (o, u)$ .

Car  $(o, u) = (o, u)$ . En termes de mots, **ou** est identique à **ou**, lettre par lettre.

**Proposition 2.2.3** *La relation  $\leq_l$  est une relation d'ordre sur  $E \times E$ . Si  $\leq$  est un ordre total sur  $E$ , alors  $\leq_l$  est un ordre total sur  $E \times E$ .*

**Preuve.** Il est clair que la relation  $\leq_l$  est réflexive.

Supposons que  $(x, y) \leq_l (x', y')$  et  $(x', y') \leq_l (x, y)$ . Dans le cas  $(x = x'$  et  $y \leq y')$  et  $(x' = x$  et  $y' \leq y)$ , on a  $x = x'$  et  $y = y'$ . Cela montre que la relation  $\leq_l$  est antisymétrique.

supposons que  $(x, y) \leq_l (x', y')$  et  $(x', y') \leq_l (x'', y'')$ . Si  $x < x'$  ou  $x' < x''$  alors on a  $x < x''$  et donc  $(x, y) \leq_l (x'', y'')$ , ce qui l'inégalité qu'on cherche à obtenir. Il reste le cas où  $x = x'$  et  $x' = x''$ . Mais alors la définition de l'ordre  $\leq_l$  indique que  $y \leq y'$  et  $y' \leq y''$ , donc  $y \leq y''$ . On obtient dans ce cas aussi  $(x, y) \leq_l (x'', y'')$ . La relation  $\leq_l$  est donc transitive.

Supposons que l'ordre  $\leq$  est total et considérons deux éléments  $(x, y)$  et  $(x', y')$  de  $E \times E$ . Concernant  $x$  et  $x'$ , nous avons trois cas :  $x < x'$ ,  $x = x'$  ou  $x > x'$  puisque l'ordre  $\leq$  est total. Dans le premier cas, on a  $(x, y) \leq_l (x', y')$  et, dans le troisième cas, on a  $(x', y') \leq_l (x, y)$ . Traitons le cas restant  $x = x'$ . Nous avons alors deux sous-cas :  $y \leq y'$  ou bien  $y' \leq y$ , encore parce que  $\leq$  est total. Dans le premier sous-cas  $(x, y) \leq_l (x', y')$  et, dans le second,  $(x', y') \leq_l (x, y)$ . L'ordre  $\leq_l$  est donc total. ■

## 2.2.4 Extension d'ordre

**Définition 2.2.10** *Soient  $\mathfrak{R}$  et  $\mathfrak{R}'$  deux relations d'ordre sur le même ensemble  $E$ , on dit que  $\mathfrak{R}'$  est une extension de  $\mathfrak{R}$  si  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'$  (En d'autre terme, pour tous  $x, y \in E$   $x \mathfrak{R} y \Rightarrow x \mathfrak{R}' y$ ). Une extension  $\mathfrak{R}'$  est dite linéaire si  $\mathfrak{R}'$  est un ordre total.*

**Exemple 2.2.9** *On définit  $\mathfrak{R}$  comme suit :*

$\mathfrak{R}$	$a$	$b$	$c$
$a$	1	0	1
$b$	0	1	1
$c$	0	0	1

on peut définir  $\mathfrak{R}'$  l'extension de  $\mathfrak{R}$  par

$\mathfrak{R}'$	$a$	$b$	$c$
$a$	1	1	1
$b$	0	1	1
$c$	0	0	1

**Théorème 2.2.2** (Théorème de Szpilrajn)

Tout ordre partiel s'étend à un ordre total (tout ordre partiel possède une extension linéaire).

**Lemme 2.2.1** Soit  $(E, \leq)$  un ordre partiel avec des éléments  $a$  et  $b$  vérifiant  $b \not\leq a$ , alors la relation définie par  $x \leq' y$  si  $x \leq y$  ou  $x \leq a$  et  $b \leq y$  est un ordre partiel contient  $\leq$  ( $\leq \subset \leq'$ ) de plus  $a \leq' b$ .

**Preuve.** On montrer que la relation définie par  $x \leq' y$  si  $\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \\ \text{ou} \\ x \leq a \text{ et } b \leq y \end{array} \right.$  est un ordre partiel contient  $\leq$ .

1. La réflexivité de  $\leq'$  est évidant car  $\leq$  est réflexive.

2. Supposons que  $\forall x, y \in E, x \leq' y$  si  $\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \dots\dots (1) \\ \text{ou} \\ x \leq a \text{ et } b \leq y \dots (2) \end{array} \right.$  et  $y \leq' x$  si  $\left\{ \begin{array}{l} y \leq x \dots\dots (3) \\ \text{ou} \\ y \leq a \text{ et } b \leq x \dots (4) \end{array} \right.$ .

Alors de (1) et (3) on a  $x = y$ , donc la relation  $\leq'$  est antisymétrique.

3. Supposons que  $\forall x, y, z \in E, x \leq' y$  si  $\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \dots\dots (1) \\ \text{ou} \\ x \leq a \text{ et } b \leq y \dots (2) \end{array} \right.$  et  $y \leq' z$  si  $\left\{ \begin{array}{l} y \leq z \dots\dots (3) \\ \text{ou} \\ y \leq a \text{ et } b \leq z \dots (4) \end{array} \right.$ .

Alors dans les cas ((1) et (3)), ((1) et (4)) et ((2) et (3)) la relation  $\leq'$  est transitive.

Finalement la relation  $\leq'$  est un ordre partiel contient  $\leq$ . De plus  $a \leq' b$  car  $(a \leq a \text{ et } b \leq b)$ .

En conclusion. Si  $E$  est fini on utilise le lemme précédent (d'une manière succécive) pour aboutir à un ordre linéaire.

Si  $E$  étant infini en utilise le lemme de Zorn. ■

**Lemme 2.2.2** *Si  $\mathfrak{R}$  est un ordre sur  $E$  et  $(b, a) \notin \mathfrak{R}$ , alors il existe un ordre contenant  $\mathfrak{R} \cup \{(a, b)\}$  et le plus petit est  $\mathfrak{R} \vee \{(a, b)\} = \mathfrak{R} \cup \Gamma$  où*

$$\Gamma = \{(x, y) \in E \times E \mid (x, a) \in \mathfrak{R} \text{ et } (b, y) \in \mathfrak{R}\}.$$

**Lemme 2.2.3** [9] *Un ordre est linéaire si et seulement si il n'a pas d'autre extension que lui même.*

**Preuve.** Si un ordre  $\mathfrak{R}$  est linéaire, on ne peut lui ajouter aucune comparabilité donc il n'a pas d'extension autre que lui même. La réciproque est  $\mathfrak{R}$  est un ordre et il n'a pas d'autre extension que lui même alors tous ces éléments sont comparable. Donc  $\mathfrak{R}$  est linéaire.

■

**Théorème 2.2.3** [12] *Tout ordre est l'intersection de tous ses extensions linéaires.*

**Preuve.** On montre que  $\mathfrak{R} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$  ( $\mathfrak{R}_i$  est l'ensemble de toute les extensions linéaires contient  $\mathfrak{R}$ )

1.  $\mathfrak{R} \subset \bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$  est claire car  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_i \forall i \in I$ .
2. On suppose que  $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i \not\subset \mathfrak{R}$ , alors il existe  $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$  et  $(x, y) \notin \mathfrak{R}$  donc  $\exists \mathfrak{R}'$  tel que  $(y, x) \in \mathfrak{R}'$  ( $\mathfrak{R}'$  est extension de  $\mathfrak{R}$ ) et comme  $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{R}_i$  donc  $(x, y) \in \mathfrak{R}'$  on alors d'après l'antisymétrie de  $\mathfrak{R}'$ ,  $x = y$ .

Comme  $\mathfrak{R}$  est réflexive on a  $((x, x) = (y, y)) \in \mathfrak{R}$  donc  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  contradiction.

■

## 2.2.5 Sections initiales et sections finales

**Définition 2.2.11** *Une section initiale d'un ensemble ordonné  $(E, \leq)$  c'est un sous-ensemble  $\emptyset \neq I$  de  $E$  avec la propriété que si  $x \in I$  et  $y \in E$  est tel que  $y \leq x$  alors  $y \in I$  Une section initiale principale est une section initiale de la forme  $\downarrow x = \{y \in E \mid y \leq x\}$ . On définit duallement une section finale comme étant un sous-ensemble  $\emptyset \neq F$  tel que si  $x \in F$  et  $y \in E$  est tel que  $y \geq x$  alors  $y \in F$ ; Et une section finale principale pour être un ensemble de la forme  $\uparrow x = \{y \in E \mid y \geq x\}$ .*

- Propriétés 2.2.1** 1. Une section initiale  $I$  d'ensemble ordonné  $E$  est un idéal si et seulement si  $I \neq \emptyset$  et, pour toutes sections initiales  $I_1$  et  $I_2$  si  $I = I_1 \cup I_2$  alors  $I = I_1$  ou  $I = I_2$  (ou, ce qui revient au même, si  $I \subseteq I_1 \cup I_2$  alors  $I \subseteq I_1$  ou  $I \subseteq I_2$ ).
2. Tout idéal  $I$  de  $E$  est contenu dans un idéal maximal (pour l'inclusion) de  $E$ .

**Exemple 2.2.10** 1. La section initiale engendrée par  $a \in E$  est un idéal.

En effet  $\downarrow a = \{x \in E \mid x \leq a\}$  est un idéal

Comme  $a \leq a$  (par la réflexivité de  $\leq$  sur l'ensemble  $E$ ) donc  $a \in \downarrow a$  i.e.,  $\downarrow a \neq \emptyset$ .

Soit  $x \in \downarrow a, y \leq x \stackrel{?}{\Rightarrow} y \in \downarrow a$

On a  $x \in \downarrow a$ , donc  $x \leq a$ , alors on a  $y \leq x$  et  $x \leq a \Rightarrow y \leq a$  (par la transitivité de  $\leq$  sur l'ensemble  $E$ ) alors  $y \in \downarrow a$  finalement  $\downarrow a$  est un idéal.

2. La section finale engendrée par  $a \in E$  est un filtre.

On montrer que  $\uparrow a = \{x \in E \mid a \leq x\}$  est une filtre

Comme  $a \leq a$  (par la réflexivité de  $\leq$  sur l'ensemble  $E$ ) donc  $a \in \uparrow a$  i.e.,  $\uparrow a \neq \emptyset$ .

Soit  $x \in \uparrow a, x \leq y \stackrel{?}{\Rightarrow} y \in \uparrow a$

On a  $x \in \uparrow a$  donc  $a \leq x$ , alors on a  $a \leq x$  et  $x \leq y \Rightarrow a \leq y$  (par la transitivité de  $\leq$  sur l'ensemble  $E$ ) alors  $y \in \uparrow a$  finalement  $\uparrow a$  est une filtre.

**Théorème 2.2.4** [2] Si  $E, F$  sont des ensembles ordonnés et si  $f : E \rightarrow F$  est une application quelconque, les énoncés suivants sont équivalents :

- (1)  $f$  est croissante ;
- (2) l'image inverse d'une section initiale principale de  $F$  est une section initiale de  $E$  ;
- (3) l'image inverse d'une section finale principale de  $F$  est une section finale de  $E$ .

**Preuve.** (1)  $\Rightarrow$  (2) :

Supposons que  $f$  est croissante. Soit  $y \in F$  et  $A = f^{-1}(\downarrow y)$ .

Si  $A \neq \emptyset$ , soit  $x \in A$ . Alors pour tout  $z \in E$  avec  $z \leq x$  nous avons  $f(z) \leq f(x) \leq y$  d'où  $z \in A$ . Donc  $A$  est un ensemble descendant de  $E$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) :

Pour tout  $x \in E$ , on a  $x \in f^{-1}[\downarrow f(x)]$ . Par (2) c'est un ensemble descendant de  $E$ , donc si  $y \in E$  est tel que  $y \leq x$  on a  $x \in f^{-1}[\downarrow f(x)]$  Il s'ensuit que  $f(x) \leq f(y)$  et donc  $f$  est croissante.

(1)  $\Leftrightarrow$  (3) : Cela découle de ce qui précède par le principe de la dualité. ■

**Lemme 2.2.4** *Si un ensemble ordonné  $E$  est fini et non-vide alors il possède au moins un élément minimal.*

**Preuve.** Récurrence sur le nombre  $n$  de élément de  $E$ . Si  $n = 1$  alors l'unique élément de  $E$  est minimal et la propriété est vraie. Supposons  $n > 1$  et la propriété vraie pour les ensembles ordonnés ayant moins de  $n$  éléments. Soit  $x \in E$  et soit  $\downarrow x = \{y \in E \mid y \leq x\}$ . Soit  $E' = \downarrow x \setminus \{x\}$ . Cet ensemble est fini et, comme il ne contient pas  $x$ , il a moins de éléments que  $E$ . Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,  $E'$  a un élément minimal. Cet élément est minimal dans  $E$ . ■

### Forêts et Arbres

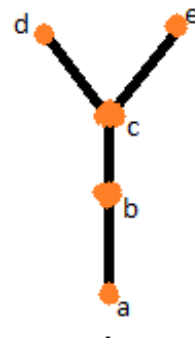
**Définition 2.2.12** [9](Forêts)

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné, on dit que  $(E, \leq)$  est une forêt si pour tout élément  $x \in E$  l'ensemble  $\downarrow x$  des minorants de  $x$  est une chaîne.

**Exemple 2.2.11** Soit  $E = \{a, b, c, d, e\}$  et on définit  $\mathfrak{R}$  sur  $E$  par la table :

$\mathfrak{R}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	1	1	1	1	1
$b$	0	1	1	1	1
$c$	0	0	1	1	1
$d$	0	0	0	1	0
$e$	0	0	0	0	1

et dont le diagramme de Hasse est



Donc il est facile observe que  $(E, \leq)$  est une forêt

**Définition 2.2.13** (Arbres)

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné, on dit que  $(E, \leq)$  est un arbre si pour tout élément  $x \in E$  l'ensemble  $\downarrow x$  des minorants de  $x$  est une chaîne et plus pour chaque paire d'éléments  $x, y \in E$  existe  $z \in E$  minorant à la fois  $x$  et  $y$ . Par exemple tout chaîne est un arbre.

## 2.3 Bon ordre, ordre bien fondé et ordre belordonné

**Définition 2.3.1** (*Bon ordre*)

Soit  $E$  un ensemble ordonné par  $\leq$ . On dit que  $\leq$  est un bon ordre (ou que  $E$  est bien ordonné) si toute partie non vide de  $E$  admet un plus petit élément. De façon formelle,

$$\forall A \subset E, A = \emptyset \text{ ou } \exists a \in A, \forall b \in A, a \leq b.$$

**Exemple 2.3.1** 1.  $(\mathbb{N}, \leq)$  est bien ordonné et  $(\mathbb{N}, \geq)$  n'est pas bien ordonné.

2.  $(\mathbb{Z}, \leq)$  n'est pas un bien ordonné.

3.  $(]0, 1], \leq)$  n'est pas un bien ordonné.

4.  $([0, 1], \leq)$  n'est pas un bien ordonné.

**Proposition 2.3.1** Si  $(E, \leq)$  bien ordonné alors  $(E, \leq)$  est totalement ordonné.

**Preuve.** Soit pour tout  $x, y \in E$  la partie  $\{x, y\}$  est non vide, donc admet un plus petit élément. Si  $x$  est plus petit élément alors  $x \leq y$ . Sinon, c'est  $y$  et  $y \leq x$ . ■

**Définition 2.3.2** (*Segment initial*)

Soit  $(E, \leq)$  est un ensemble bien ordonné, on dit qu'une partie  $S \subset E$  est une segment initial si,  $\forall x, y \in E (y \in S \text{ et } x \leq y) \Rightarrow x \in S$

Si  $x_0 \in E$  alors  $S_{x_0} = \{y \in E \mid y < x_0\}$  est un segment initial de  $E$  (défini par  $x_0$ ).

**Lemme 2.3.1** Si  $(E, \leq)$  est un ensemble bien ordonné, et  $f : E \rightarrow E$  est un application strictement croissante, alors  $f(x) \geq x$  pour tout  $x \in E$ .

**Preuve.** On suppose que l'ensemble  $a = \{x \in E \mid f(x) < x\}$  est non vide, et on pose  $z$  le plus petit élément de  $a$ . Et on pose  $w = f(z)$  alors il vérifie  $f(w) < w$ , ce qui est une contradiction avec  $z$  le plus petit élément de  $a$ . ■

**Proposition 2.3.2** *Soit  $E$  un ensemble bien ordonné pour que  $S$  soit segment initial de  $E$ , il faut suffit que  $S = E$  ou  $S = S_{x_0}$ .*

**Preuve.** Si  $S = E$ , alors  $S$  segment initial de  $E$ .

Sinon alors, l'ensemble  $E/S = \{x \in E \text{ et } x \notin S\} \neq \emptyset$  et admet un plus petit élément  $x_0$ .

Si  $x < x_0 \Rightarrow x \in S$ .

Si  $x \geq x_0 \Rightarrow x \notin S$ . Donc  $S = S_{x_0}$ . ■

**Définition 2.3.3** (*Ordre bien fondé*)

*Étant donné un ensemble  $E$ , un ordre strict  $\prec$  sur  $E$  est bien fondé si et seulement si tout sous-ensemble non-vide de  $E$  admet un élément minimal.*

Le théorème suivant fournit une définition équivalente d'un ordre bien fondé :

**Théorème 2.3.5** *L'ordre  $\prec$  est bien fondé si et seulement s'il n'existe aucune suite infinie décroissante dans  $E$ .*

**Preuve.** Supposons que  $\prec$  est bien fondé, et prouvons par contradiction qu'il n'existe aucune suite infinie décroissante dans  $E$ . Supposons qu'il existe une

telle suite  $u_1 \succ u_2 \succ \dots \succ u_n \succ \dots$ , alors l'ensemble  $X = \{u_i | i \geq 0\}$  serait un sous-ensemble de  $E$  ne contenant évidemment aucun élément minimal, ce qui contredit le fait que  $\prec$  est bien fondé.

Pour prouver la réciproque, nous supposons que  $\prec$  n'est pas bien fondé, et construisons une suite infinie décroissante dans  $E$ . Si  $\prec$  n'est pas bien fondé, alors il existe un ensemble  $X \subseteq E$  non vide sans élément minimal.

Soit  $u_1 \in X$ , alors, nécessairement, il existe  $u_2 \in X$  tel que  $u_2 \prec u_1$ . Puis, toujours parce que  $X$  n'admet pas d'élément minimal, il existe  $u_3 \in X$  tel que  $u_3 \prec u_2$ . En réitérant ce procédé, on construit une suite  $u_1 \succ u_2 \succ \dots$ , infinie décroissante dans  $E$ . ■

**Exemple 2.3.2** *Les relations suivantes sont des ordres bien fondés :*

1. *L'ordre  $<$  sur  $\mathbb{N}$  ;*
2. *La relation de division sur  $\mathbb{N}$  :  $x \prec y$  si et seulement si  $x|y$ , et  $x \neq y$  ;*

3. L'ordre lexicographique strict sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**Exemple 2.3.3** Les relations suivantes ne sont pas des ordres bien fondés :

1. L'ordre  $<$  sur  $\mathbb{Z}$  ;

2. L'ordre lexicographique strict sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ;

3. La relation d'inclusion stricte sur les parties de  $\mathbb{N}$  (considérer les ensembles  $F_K = \{i \in \mathbb{N} / i \geq k\}$ ).

**Théorème 2.3.6** [9] Un poset  $E$  est bien fondé si et seulement si une extension linéaire de  $E$  est bien ordonnée.

**Définition 2.3.4** (Belordonné)

Un ensemble ordonné  $E$  est belordonné, si toute partie non vide  $A$  de  $E$  contient un nombre fini, non nul, d'éléments minimaux. Par exemple, tout ensemble fini est belordonné, tout bon ordre est un bel ordre.

**Théorème 2.3.7** [8] Erdos-Tarski (1943)

Un ensemble belordonné est une union finie d'idéaux.

**Théorème 2.3.8** [9] Soit  $E$  un ensemble ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $E$  est belordonné ;

2.  $E$  est bien fondé sans antichaine infinie ;

3. Toute suite infinie  $x_0, \dots, x_n, \dots$ , d'éléments de  $E$ , contient une sous suite infinie croissante  $x_{i_0} \leq x_{i_1} \leq \dots x_{i_n} \leq \dots$  ;

4. Toute suite infinie  $x_0, \dots, x_n, \dots$ , d'éléments de  $E$ , contient un "couple" croissant  $x_i \leq x_j$  avec  $i < j$  ;

5. L'ensemble  $F(E)$  des sections finales de  $E$  muni de l'ordre opposé de l'inclusion est bien fondé ;

6. L'ensemble  $I(E)$  des sections initiales de  $E$  muni de l'ordre d'inclusion est bien fondé.

**Propriétés 2.3.1** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles ordonnés et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  : si  $f$  est croissante et surjective et  $E$  est belordonné, alors  $F$  est belordonné.

**Théorème 2.3.9** Un ensemble ordonné  $E$  est belordonné si toutes ses extensions linéaires sont bien ordonnées.

# Chapitre 3

## Treillis et décomposition en chaînes et antichaînes

Dans ce chapitre, nous allons s'intéresser au cas d'une classe spéciale d'ordres partiels (treillis). On s'intéresse aussi à la décomposition en chaînes et antichaînes d'un ensemble ordonné. En fin, on termine ce chapitre par un dénombrement des ordres définis sur un ensemble fini ayant moins de dix-sept éléments.

### Contenus

- ✓ Généralités sur les treillis.
  - ✓ Propriétés algébriques des treillis.
  - ✓ Idéal et filtre dans treillis.
  - ✓ Lois de composition interne et les lois de treillis.
  - ✓ Treillis des préordres et des équivalences.
- ✓ Décomposition en antichaînes et chaînes.
  - ✓ Décomposition en niveau de l'ensemble des extensions.
  - ✓ Dénombrement des ordres.

### 3.1 Généralités sur les treillis

#### Définition 3.1.1 (Treillis)

Un ensemble ordonné non vide  $(T, \leq)$  est dit treillis si pour tout paire  $\{x, y\}$  d'éléments, la borne supérieure et la borne inférieure existent dans  $T$ .

**Notation 3.1.1**  $Sup\{x, y\} = x \vee y$ .  
 $Inf\{x, y\} = x \wedge y$ .

**Exemple 3.1.1** 1. L'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'inclusion forme un treillis, avec  $X \cup Y$  est la borne supérieure et la borne inférieure  $X \cap Y$ .

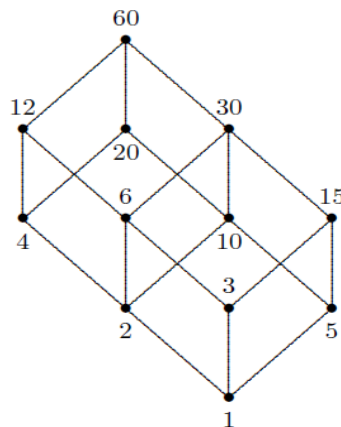
2.  $(\mathbb{N}^*, |)$  est un treillis :  $x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$  et  $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$ .

3. Toute chaîne est un treillis :  $x \vee y = \max(x, y)$  et  $x \wedge y = \min(x, y)$ .

#### Définition 3.1.2 (Sous-treillis)

Soit  $L$  un treillis et  $\emptyset \neq M \subseteq L$ . Alors  $M$  est un sous-treillis de  $L$  si pour tout  $a, b \in M$  implique  $a \vee b \in M$  et  $a \wedge b \in M$ .

**Exemple 3.1.2**  $(D(60), |, \text{pgcd}, \text{ppcm})$  est un sous-treillis de  $(\mathbb{N}^*, |)$ . Voir la représentation par le diagramme de Hasse (pour tout pair de  $D(60)$  admet  $\text{pgcd}$  et  $\text{ppcm}$  dans  $D(60)$  par exemple  $6 \wedge 20 = \text{pgcd}(6, 20) = 2$  et  $6 \vee 20 = \text{ppcm}(6, 20) = 60$ )



**Définition 3.1.3** (*Treillis fermée*)

Un treillis est fermée s'il possède un plus petit élément (noté 0) et un plus grand élément (noté 1).

**Exemple 3.1.3** 1. Le treillis  $D(30)$  est fermée par "0" = 1 et "1" = 30.

2. Le treillis  $(P(E), \subset)$  est fermée "0" =  $\emptyset$  et "1" =  $E$ .

3.  $(\mathbb{N}^*, |)$  est un treillis n'est pas fermée.

**Définition 3.1.4** (*Treillis complet*)

Un treillis est dit complet lorsque tout sous ensemble d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.

### 3.1.1 Propriétés algébriques des treillis

**Proposition 3.1.1** [5] Dans un treillis quelconque  $T$  pour tout  $x, y, z \in T$  alors les opérations  $\vee$  et  $\wedge$  possèdent les propriétés suivantes :

1.  $x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \wedge y \\ y = x \vee y \end{cases}$ .
2.  $x \vee x = x, x \wedge x = x$  (L'idempotence).
3.  $x \vee y = y \vee x$  et  $x \wedge y = y \wedge x$  (La commutativité).
4.  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  et  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  (L'associativité).
5.  $x \wedge (x \vee y) = x$  et  $x \vee (x \wedge y) = x$  (L'absorption).

**Preuve.** soit  $x, y, z \in T$

$$1. x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \wedge y \\ y = x \vee y \end{cases}$$

l'ensemble des majorants de  $\{x, y\}$  est le filtre engendré par  $y$  donc le plus petit majorant est  $y$ . De même l'ensemble des minorants de  $\{x, y\}$  est le idéal engendré par  $x$  donc le plus grande minorant est  $x$ .

2.  $x \vee x = x, x \wedge x = x$  (L'idempotence).

Cette propriété découle de la définition de la relation d'ordre, le plus petit des majorants de  $x$  est  $x$  et le plus grand des minorants de  $x$  est  $x$ .

3.  $x \vee y = y \vee x$  et  $x \wedge y = y \wedge x$  (la commutativité).

$$x \vee y = \sup \{x, y\} = \sup \{y, x\} = y \vee x.$$

$$x \wedge y = \inf \{x, y\} = \inf \{y, x\} = y \wedge x.$$

4.  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  et  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  (L'associativité).

On pose  $t = y \vee z$  et  $s = x \vee y$ .

$$x \vee (y \vee z) = \sup \{x, t\} = \sup \{x, y, z\}.$$

$$(x \vee y) \vee z = \sup \{s, z\} = \sup \{x, y, z\}, \text{ alors } x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

La démonstration de  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$  est analogue à la précédente.

5.  $x \wedge (x \vee y) = x$  et  $x \vee (x \wedge y) = x$  (L'absorption).

La relation d'ordre étant réflexive, on aura  $x \leq x$ , de plus  $x \wedge y$  étant le plus grand minorant, on peut écrire  $x \wedge y \leq x$ ; ceci prouve que  $x$  est un majorant de l'ensemble  $\{x \wedge y, x\}$  par ailleurs si  $z$  est un majorant de  $\{x \wedge y, x\}$  on a nécessairement  $x \leq z$ .

Il résulte de tout ceci que  $x$  est le plus petit majorant de  $\{x \wedge y, x\}$  c'est à dire  $x \vee (x \wedge y) = x$ .

La démonstration de  $x \wedge (x \vee y) = x$  est analogue à la précédente.

■

**Théorème 3.1.1** Soit  $T$  un ensemble muni deux lois de composition internes  $\wedge$  et  $\vee$  qui sont idempotentes, commutatives, associatives et qui vérifient les lois d'absorption, alors il existe une relation d'ordre et une seule  $(\leq)$  sur  $T$ , tel que  $T$  soit un treillis avec 
$$\begin{cases} x \wedge y = \inf \{x, y\} \\ x \vee y = \sup \{x, y\} \end{cases}$$

**Preuve.** Si telle relation d'ordre existe, elle sera définie par :

$$\begin{aligned} x\mathfrak{R}y &\Leftrightarrow x = x \wedge y \\ x\mathfrak{R}'y &\Leftrightarrow y = x \vee y. \end{aligned}$$

1. L'unicité de la relation  $\mathfrak{R}$ .

On montrer que  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$  c'est à dire on montre que  $(x\mathfrak{R}y \Rightarrow x\mathfrak{R}'y \text{ et } x\mathfrak{R}'y \Rightarrow x\mathfrak{R}y)$ .

Soit  $(x, y) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x = x \wedge y$

donc  $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (y \wedge x) = y$  (par la commutativité et lois d'absorption)  $\Rightarrow x\mathfrak{R}'y$ .

Soit  $(x, y) \in \mathfrak{R}' \Leftrightarrow x\mathfrak{R}'y \Leftrightarrow y = x \vee y$ .

$x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$  (lois d'absorption)  $\Rightarrow x\mathfrak{R}y$  donc  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$ .

2. On montrer que  $\mathfrak{R}$  est une relation d'ordre

(i)  $x\mathfrak{R}x$  car  $x \wedge x = x = x$  (idempotente) donc  $\mathfrak{R}$  est réflexive

(ii)  $\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \text{et} \\ y\mathfrak{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \wedge y \\ \text{et} \\ y = y \wedge x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \wedge y \\ \text{et} \\ y = x \wedge y \end{cases} \Rightarrow x = y$  donc  $\mathfrak{R}$  est antisymétrique.

(iii)  $\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ \text{et} \\ y\mathfrak{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \wedge y \\ \text{et} \\ y = y \wedge z \end{cases} \Rightarrow x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \Rightarrow x\mathfrak{R}z$   
donc est transitive.

Donc  $\mathfrak{R}$  est une relation d'ordre noté  $(\leq)$ .

■

**Proposition 3.1.2** Dans un treillis quelconque :

1. Si  $a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a \wedge x \leq b \wedge x \\ a \vee x \leq b \vee x \end{cases}$ .

2. Si  $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow \begin{cases} a \wedge c \leq b \wedge d \\ a \vee c \leq b \vee d \end{cases}$ .

**Preuve.**

1. On montrer que si  $a \leq b \Rightarrow a \wedge x \leq b \wedge x$  on a  $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$ , donc

$$\begin{aligned}
 (a \wedge x) \wedge (b \wedge x) &= (x \wedge a) \wedge (x \wedge b) \\
 &= x \wedge (a \wedge b) \wedge x \\
 &= x \wedge (a \wedge b) \\
 &= x \wedge a \\
 &= a \wedge x.
 \end{aligned}$$

Alors  $a \wedge x \leq b \wedge x$ .

On montrer que  $a \leq b \Rightarrow a \wedge x \leq b \wedge x$  on a  $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b$ , donc

$$\begin{aligned}
 (a \vee x) \vee (b \vee x) &= (x \vee a) \vee (x \vee b) \\
 &= x \vee (a \vee b) \vee x \\
 &= x \vee (a \vee b) \\
 &= x \vee b \\
 &= b \vee x.
 \end{aligned}$$

Alors  $a \vee x \leq b \vee x$ .

2. On montrer que si  $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge d$  on a  $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a, c \leq d \Rightarrow c \wedge d = c$ , donc

$$\begin{aligned}
 (a \wedge c) \wedge (b \wedge d) &= (c \wedge a) \wedge (b \wedge d) \\
 &= c \wedge (a \wedge b) \wedge d \\
 &= (c \wedge a) \wedge d \\
 &= a \wedge (c \wedge d) \\
 &= a \wedge c.
 \end{aligned}$$

Alors  $(a \wedge c) \leq (b \wedge d)$ .

On montrer que si  $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow a \vee c \leq b \vee d$  on a  $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b$ ,  
 $c \leq d \Rightarrow c \vee d = d$ , donc

$$\begin{aligned}
 (a \vee c) \vee (b \vee d) &= (c \vee a) \vee (b \vee d) \\
 &= c \vee (a \vee b) \vee d \\
 &= c \vee (b \vee d) \\
 &= (c \vee d) \vee b \\
 &= d \vee b \\
 &= b \vee d.
 \end{aligned}$$

Alors  $(a \vee c) \leq (b \vee d)$ .

■

### 3.1.2 Idéal et filtre dans treillis

**Définition 3.1.5** Soit  $L$  un treillis, un sous-ensemble non vide  $I$  de  $L$  est appelé un idéal si

1.  $a, b \in I$  implique  $a \vee b \in I$ ,
2.  $a \in L, b \in I$  et  $a \leq b$  impliquent  $a \in I$ .

Le dual un idéal est appelé filtre. Autrement dit, un sous-ensemble non vide  $F$  de  $L$  est appelé filtre si

1.  $a, b \in F$  implique  $a \wedge b \in F$  ;
2.  $a \in L, b \in F$  et  $a \geq b$  impliquent  $a \in F$ .

Un idéal  $I$  (resp. filtre  $F$ ) de  $L$  est appelé propre si  $I \neq L$  (resp.  $F \neq L$ ). Pour tout  $a \in L$ , l'ensemble  $\downarrow a$  est un idéal, dit idéal principal engendré par  $a$ , et  $\uparrow a$  est un filtre principal engendré par  $a$ .

**Propriétés 3.1.1** ►  $F$  filtre propre si et seulement si  $0 \notin F$ .

►  $I$  idéal propre si et seulement si  $1 \notin I$ .

**Définition 3.1.6** Soit  $G$  un partie non vide, le filtre engendré par  $G$  est le plus petit filtre qui contient  $G$  telle que  $F_G = \cap \{\text{tous les filtre qui contient } G\}$ .

**Définition 3.1.7** Un partie  $G$  est  $\wedge$ -compatible si  $F_G$  est propre.

Si  $G$  est  $\wedge$ -incompatible alors il existe une nombre fini,  $a_1, \dots, a_n$  d'éléments dont  $a_1 \wedge a_2 \dots \wedge a_n = 0$ .

**Exemple 3.1.4** 1. Dans un treillis finie, tout idéal ou filtre est principal.

2. Soit  $L$  et  $K = \{0, 1\}$  deux treillis bornés et  $f : L \rightarrow K$  homomorphisme surjectif. Alors  $f^{-1}(0)$  est un idéal et  $f^{-1}(1)$  est un filtre en  $L$ .

3. Les éléments suivants sont idéaux dans  $P(X)$  :

- a. tous les sous-ensembles ne contenant pas d'élément fixé de  $X$  ;
- b. tous les sous-ensembles finis (cet idéal n'est pas principal si  $X$  est infinie).

4. Soit  $(X; T)$  un espace topologique et soit  $x \in X$ . Ensuite, l'ensemble  $\{V \subseteq X \mid (\exists U \in T)x \in U \subseteq V\}$  est un filtre dans  $P(X)$ .

**Théorème 3.1.2** L'ensemble des filtre propres ordonné par inclusion est inductif (toute chaîne a un élément maximale).

**Preuve.** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une chaîne de filtre propre on pose  $F = (\cup F_i)_{i \in I}$

1. On montre que  $F$  est un filtre.

(i)  $x \in F, y \geq x \Rightarrow y \in F$  ?

On a  $x \in F$  alors  $\exists i_0 \in I$  telle que  $x \in F_{i_0}, y \geq x \Rightarrow y \in F_{i_0}$  donc  $y \in F = (\cup F_i)_{i \in I}$ .

(ii)  $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$  ?

On a  $x, y \in F$  alors  $\exists i_0, j_0 \in I$  telle que  $x \in F_{i_0}$  et  $y \in F_{j_0}$  supposons que  $F_{i_0} \subset F_{j_0}$  (car  $F$  est une chaîne)

donc  $x \in F_{j_0}$ , on a  $(x \in F_{j_0} \text{ et } y \in F_{j_0}) \Rightarrow x \wedge y \in F_{j_0}$  donc  $x \wedge y \in F = (\cup F_i)_{i \in I}$ .

Finalement  $F$  est un filtre.

2.  $F$  est propre car  $0 \notin F_i \forall i \in I \Rightarrow 0 \notin (\cup F_i)_{i \in I}$ .

■

**Corollaire 3.1.1** *Il existe des filtres propres maximaux pour l'inclusion, ils seront appelés des ultrafiltres.*

**Remarque 3.1.1** *Tout filtre propre est contenu dans un ultrafiltre.*

**Proposition 3.1.3** [10] *Soit  $F$  un filtre propre, les deux assertions suivantes équivalentes :*

- a)  $F$  est un ultrafiltre.
- b) Pour tout  $x \notin F$ , il existe  $y \in F$  tel que  $x \wedge y = 0$ .

**Preuve.**  $\Rightarrow$ ) Si  $F$  est un ultrafiltre, supposons qu'il existe  $x \notin F$  tel que pour tout  $y \in F$ ,  $x \wedge y \neq 0$ . Posons  $G = F \cup \{x\}$ ,  $G$  est une partie  $\wedge$ -compatible, en effet :

Soient  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $G$  et posons  $a = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ .

► Si tous les  $a_i$  appartiennent à  $F$ , alors  $a \in F$  donc  $a \neq 0$ .

► Si par exemple,  $a_1 = x$  :  $a = x \wedge y$  avec  $y = a_2 \wedge \dots \wedge a_n, y \in F$  donc  $a \neq 0$ .

Par suite  $G$  engendre un filtre propre  $F_G$ , or  $F \subset G \subset F_G$  ce qui contredit la maximalité de  $F$ .

$\Leftarrow$ ) Si on a la propriété b) : supposons qu'il existe un filtre propre  $F'$  tel que  $F \subsetneq F'$ , soit alors  $x \in F'$  et  $x \notin F$ , il existe  $y \in F$  tel que  $x \wedge y = 0$ , or  $x$  et  $y$  appartiennent à  $F'$  on aurait donc  $0 \in F'$  ce qui contredit le fait que  $F'$  soit propre. ■

### 3.1.3 Lois de composition interne et les lois de treillis

**Définition 3.1.8** *Soit  $E$  un ensemble. Une loi de composition interne sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$ . Si on la note 
$$E \times E \longrightarrow E$$
  
 $(a, b) \longmapsto a * b$ , on parle de la loi  $*$  et on dit que  $a * b$  est le composé de  $a$  et  $b$  pour la loi  $*$ .*

**Définition 3.1.9** *Soit  $(T, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$  un treillis fermé. Une loi de composition interne sur  $T$  est croissante à droite si,  $x \leq y$ , alors  $a * x \leq a * y, \forall a \in T$ .*

Une loi de composition interne sur  $T$  est croissante à droite si,  $x \leq y$ , alors  $x * a \leq y * a, \forall a \in T$ .

**Définition 3.1.10** Soit  $(T, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$  un treillis fermé . Une loi de composition interne  $*$  sur  $T$  est dite conjonctive si,  $x * y \leq x \wedge y$ .

Une loi de composition interne  $*$  sur  $T$  sera dite disjonctive si,  $x * y \geq x \wedge y$ .

**Remarque 3.1.2** Une loi de composition interne  $*$  sur un ensemble ordonné est conjonctive si,  $x * y \leq x$  et  $x * y \leq y$ .

Une loi de composition interne  $*$  sur un ensemble ordonné est disjonctive si,  $x * y \geq x$  et  $x * y \geq y$ .

**Proposition 3.1.4** Soit  $(T, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$  un treillis fermé, et  $\circ$  une loi de composition interne et croissante sur  $T$  ayant un élément neutre. Alors

(1) Si  $\circ$  admette 1 pour élément neutre, alors  $\forall x, y \in T, x \circ y \leq x \wedge y$ .

(2) Si  $\circ$  admette 0 pour élément neutre, alors  $\forall x, y \in T, x \circ y \geq x \vee y$ .

**Preuve.** Soit  $x, y \in T$

(1) La loi  $\circ$  croissante et admette 1 pour élément neutre, alors on a  $\begin{cases} x \circ y \leq x \circ 1 \\ x \circ y \leq 1 \circ y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \circ y \leq x \\ x \circ y \leq y \end{cases}$ . Donc  $x \circ y \leq x \wedge y$ . On en déduit que  $\wedge$  est la plus grande loi de composition interne croissante et admettant 1 pour élément neutre.

(2) Puisque  $\circ$  est une loi croissante et admette 0 pour élément neutre on a :  $\begin{cases} x \circ 0 \leq x \circ y \\ 0 \circ y \leq x \circ y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq x \circ y \\ y \leq x \circ y \end{cases}$ . Donc  $x \vee y \leq x \circ y$ . On en déduit que  $\vee$  est la plus petite loi de composition interne croissante et admettant 0 pour élément neutre.

■

**Définition 3.1.11** Soit  $(T, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$  un treillis fermé. Une loi de composition interne sur  $T$  vérifiant  $\wedge \leq \circ \leq \vee$  est dite une loi de moyenne.

Une interne qui est ni conjonctive, ni disjonctive ni une loi de composition de moyenne est dite alors une loi mixte.

**Question 3.1.1** Il ya lieu de se demander ci la réunion des lois conjonctives, lois disjonctives, lois de moyenne et des lois mixtes donne l'ensemble de toutes les lois de composition interne?

### 3.1.4 Treillis des préordres et des équivalences

On note par  $QO(E)$  l'ensemble de toutes les relations de préordre sur l'ensemble  $E$ .

**Définition 3.1.12** L'ensemble  $QO(E)$  avec  $\subseteq$  comme ordre partielle, est un treillis complet.

**Proposition 3.1.5** [4] L'ensemble de toutes les relations de préordre sur un ensemble  $E$  a une structure de treillis, où  $\wedge$  et  $\vee$  sont définis comme suit :

Soit  $\mathfrak{R}$  et  $T$  deux relations de préordre sur l'ensemble  $E$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} \wedge T &= \mathfrak{R} \cap T \\ \mathfrak{R} \vee T &= \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R} \circ T \cup \mathfrak{R} \circ T \circ \mathfrak{R} \cup \dots \\ &= T \cup T \circ \mathfrak{R} \cup T \circ \mathfrak{R} \circ T \cup \dots\end{aligned}$$

**Remarque 3.1.3** On peut définir l'opération de  $\vee$  de deux relations par la formule précédente dans l'ensemble de toutes les relations sur un ensemble  $E$ .

La classe d'ordres partiels n'est pas fermée dans le cadre de cette opération de  $\vee$ . Pour cette raison nous sommes forces de considérer la notion plus générale de relation de préordre

**Preuve.** Pour deux relations de préordre  $\mathfrak{R}$  et  $T$  sur un ensemble  $E$  il est facile pour vérifier la réflexivité et la transitivité de  $\mathfrak{R} \cap T$ .

Soit  $Rel(\mathfrak{R}, T) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R} \circ T \cup \mathfrak{R} \circ T \circ \mathfrak{R} \cup \dots$ , nous montrons que  $Rel(\mathfrak{R}, T) = Rel(T, \mathfrak{R})$  et c'est une relation de préordre. D'abord nous avons  $\Delta_E \subseteq \mathfrak{R} \subseteq Rel(\mathfrak{R}, T)$  où  $\Delta_E$  la relation d'identité. Puisque  $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ , quelles que soient les parités de  $m, n$  nous avons cela

$\underbrace{\mathfrak{R} \circ T \circ \dots}_m \circ \underbrace{\mathfrak{R} \circ T \circ \dots}_n$  est une terme apparaissant dans l'union de  $Rel(\mathfrak{R}, T)$ . Par conséquent  $Rel(\mathfrak{R}, T) \circ Rel(\mathfrak{R}, T) \subseteq Rel(\mathfrak{R}, T)$ . Cela prouve que  $Rel(\mathfrak{R}, T)$  est un préordre.

Nous avons  $Rel(\mathfrak{R}, T) \subseteq T \circ (Rel(\mathfrak{R}, T)) \subseteq \cup_{m=1}^{\infty} T \circ \left( \underbrace{\mathfrak{R} \circ T \circ \dots}_m \right) \subseteq Rel(T, \mathfrak{R})$ .

De même,  $Rel(T, \mathfrak{R}) \subseteq Rel(\mathfrak{R}, T)$ , par conséquent  $Rel(\mathfrak{R}, T) = Rel(T, \mathfrak{R})$ .

Soit  $\mathfrak{R} \wedge T = \mathfrak{R} \cap T$  et  $\mathfrak{R} \vee T = Rel(\mathfrak{R}, T) = Rel(T, \mathfrak{R})$ .

On vérifie que ces deux opérations sont commutatives, associative, idempotent et ils satisfont les lois d'absorption.

Ainsi, ils définissent un treillis. Ce treillis a un élément maximal unique "1" et un élément minimal unique "0". Nous désignons encore ce treillis par  $QO(E)$ . ■

### Treillis des équivalences

Soit  $Eq(E)$  est l'ensemble de toutes les relations d'équivalence sur  $E$ .

**Définition 3.1.13** *L'ensemble  $Eq(E)$  avec  $\subseteq$  comme ordre partielle, est un treillis complet.*

**Théorème 3.1.3** [3] *L'ensemble de toute les relations d'équivalences sur un ensemble  $E$  a une structure de treillis, où  $\wedge$  et  $\vee$  sont définis comme suit :*

*Soit  $\mathfrak{R}$  et  $T$  sont deux relations d'équivalence sur  $E$  alors*

$$\mathfrak{R} \wedge T = \mathfrak{R} \cap T$$

$$\mathfrak{R} \vee T = \mathfrak{R} \cup (\mathfrak{R} \circ T) \cup (\mathfrak{R} \circ T \circ \mathfrak{R}) \cup \dots$$

*Ou de manière équivalente,  $(a, b) \in \mathfrak{R} \vee T$  si et seulement si existe une séquence d'éléments  $c_1, c_2, \dots, c_n$  de  $E$  telle que  $(c_i, c_{i+1}) \in \mathfrak{R}$  ou  $(c_i, c_{i+1}) \in T$  pour  $i = 1, \dots, n-1, a = c_1$  et  $b = c_n$ .*

**Preuve.** Soit  $A = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R} \circ T \cup \mathfrak{R} \circ T \circ \mathfrak{R} \cup \dots$

Si  $(a, b) \in A \Leftrightarrow$  existe une suite d'éléments  $c_1, c_2, \dots, c_n$  de  $E$  telle que  $(c_i, c_{i+1}) \in \mathfrak{R}$  ou  $(c_i, c_{i+1}) \in T$  pour  $i = 1, \dots, n-1, a = c_1$  et  $b = c_n$ .

D'abord nous avons  $\Delta_E \subseteq \mathfrak{R} \subseteq A$  ( $\mathfrak{R}$  réflexive).

Soit  $a, b, c \in E$ . Si  $(a, b) \in A$  alors il existe une séquence d'éléments telle que  $a = d_1, d_2, \dots, d_n = b$  de  $E$  telle que  $(d_i, d_{i+1}) \in \mathfrak{R}$  ou  $(d_i, d_{i+1}) \in T$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . Comme  $\mathfrak{R}$  et  $T$  sont symétrique,  $(d_{i+1}, d_i) \in \mathfrak{R}$  ou  $(d_{i+1}, d_i) \in T$ . On prend  $c_i = d_{n-i+1}$ , alors on obtient la suite souhaitée qui assure que  $(b, a) \in A$ .

en autre parte, si  $(b, c) \in A$  alors il existe une séquence d'éléments telle que  $b = e_1, e_2, \dots, e_n = c$  de  $E$  telle que  $(e_i, e_{i+1}) \in \mathfrak{R}$  ou  $(e_i, e_{i+1}) \in T$  pour  $i = 1, \dots, n - 1$ . Mais  $(d_n, e_1) = (b, b) \in \mathfrak{R} \cap T$  par la réflexivité de  $\mathfrak{R}$  et  $T$ . Donc la séquence d'éléments  $a = d_1, d_2, \dots, d_n = b = e_1, e_2, \dots, e_n = c$ , alors  $(a, c) \in A$ . Finalement,  $A \in Eq(E)$ . ■

Soit l'ensemble de toutes les partitions de  $E$  est désigné par  $\Pi(E)$ . Et pour partition  $\pi$  de  $\Pi(E)$ , on définit une relation d'équivalence  $\mathfrak{R}(\pi)$  par :

$$\mathfrak{R}(\pi) = \{(a, b) \in E^2 \mid \{a, b\} \subseteq B \text{ pour certains } B \text{ dans } \pi\}.$$

**Théorème 3.1.4** *Une application  $\pi \rightarrow \mathfrak{R}(\pi)$  est un isomorphisme entre  $\Pi(E)$  et  $Eq(E)$ . Et on définit la relation  $\leq$  sur  $\Pi(E)$  par  $\pi_1 \leq \pi_2$  ssi chaque classe de  $\pi_1$  est contenu dans un certain classe de  $\pi_2$ .*

**Corollaire 3.1.2**  *$\Pi(E)$  est un treillis complet, appelé le treillis des partitions de  $E$ .*

**Remarque 3.1.4** *Le treillis des relations d'équivalence sur l'ensemble  $E$  est un sous-treillis de  $QO(E)$ .*

## 3.2 Décomposition en antichaînes et chaînes

**Décomposition en niveaux d'un ensemble ordonné :**

étant donné un ensemble ordonné  $E$ , posons  $Min(E) = \{a \in E \mid a \text{ minimal dans } E\}$ .

Définissons également  $E_0 = Min(E)$ ,  $E_1 = Min(E \setminus E_0)$ ,  $E_n = Min(E \setminus \cup_{m < n} E_m)$ . Ces ensembles sont des antichaînes et sont deux à deux disjoints.

Si  $E$  est fini alors  $E_K = \emptyset$  pour au moins un entier  $K$ . Le plus petit de ces  $K$  est la hauteur de  $E$ , notée  $h(E)$ .

$E$  étant fini, il est la réunion des  $E_0, \dots, E_{h(E)-1}$ . Ce sont ces sous ensembles, que nous pouvons appeler niveaux.

**Exemple 3.2.1** 1. Si  $E$  est une chaîne à  $m$  éléments, chaque niveau est réduit à un élément et la hauteur de  $E$  est  $m$ .

2. Les niveaux de l'ensemble  $E = D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  avec la divisibilité est  $E_0 = \{1\}, E_1 = \{2, 3, 5\}, E_2 = \{6, 10, 15\}, E_3 = \{30\}, E_4 = \emptyset$ , on a  $E_4 = \emptyset$  donc  $h(E) = 4$ .

**Décomposition en chaînes d'un ensemble ordonné :**

Soit  $E$  un poset. Un ensemble  $\{C_1, \dots, C_m\}$  de chaînes disjointes de  $E$  tel que  $E = \cup_{i=1}^m C_i$  est appelé une décomposition en chaînes de  $E$ . Une décomposition minimale en chaîne de  $E$  est une décomposition pour laquelle le nombre de chaînes est minimal.

**Définition 3.2.1** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné fini. On appelle

- Largeur de  $E$ , le cardinal maximal des antichaînes de  $E$ , noté  $W(E)$ .
- Hauteur de  $E$ , le cardinal maximal des chaînes de  $E$ , noté  $h(E)$ .

**Propriétés 3.2.1** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné fini, alors  $|E| \leq W(E) \times h(E)$

**Exemple 3.2.2** Soit l'ensemble  $E = D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  avec la divisibilité, on a  $|E| = 8 \leq W(E) \times h(E) = 3 \times 4 = 12$ .

**Théorème 3.2.5** [9] (Erdos - Szekeres) Tout ensemble ordonné  $E$  de taille au moins  $pq + 1$  contient soit une chaîne de taille  $p + 1$  soit une antichaîne de taille  $q + 1$ .

**Preuve.** On suppose le contraire

$E$  ne contient aucun chaîne maximal de taille  $p + 1$  et ne contient aucun antichaîne maximal de taille  $q + 1$ .

Alors la taille de la chaîne maximal est  $p < p + 1$  et la taille de la antichaîne maximal et  $q < q + 1$ , donc  $|E| \leq p \times q$ , et on a par hypothèse  $|E| = pq + 1 \leq p \times q$ , contradiction. ■

**Lemme 3.2.1** Soit  $E$  un poset.

(1) Alors le cardinal de la décomposition minimale en chaînes de  $E$  est au moins égal à la largeur de  $E$ .

(2) Si  $w$  est la Largeur de  $E$  et  $C_1, \dots, C_w$  est une décomposition en chaînes de  $E$ , et  $A$  est une antichaîne qui comporte  $w$  éléments, alors  $|A \cap C_i| = 1$  pour tout  $i = 1, \dots, w$ .

**Preuve.**

- (1) Soit  $A$  une antichaîne de  $E$ , et  $C_1, \dots, C_t$  des chaînes disjointes couvrant  $E$ . Alors pour tout  $i$  on a  $|A \cap C_i| \leq 1$ . Sinon, s'il existe  $x, y \in A \cap C_i$  avec  $x \neq y$ ,  $x$  et  $y$  sont comparables, et donc ne peuvent appartenir tous deux à  $A$ , une contradiction. Comme les  $C_i$  sont disjointes, on a  $|A| = \sum_{i=1}^t |A \cap C_i|$  et ce dernier nombre est au plus  $t$ .
- (2) Si  $t = w$ , alors  $|A| = \sum_{i=1}^w |A \cap C_i| \leq w$ , et nous avons un égalité des deux côtés. De plus,  $|A \cap C_i| = 1$  pour tout  $i$ .

■

**Théorème 3.2.6** (*Théorème de Dilworth*)

Soit  $E$  un poset fini. La largeur de  $E$  est égale au cardinal d'une décomposition minimale en chaînes de  $E$ .

**Preuve.** La preuve utilise un raisonnement par récurrence sur les éléments du poset  $E$ . Si le nombre d'élément est 1, l'assertion est triviale.

Supposons maintenant que l'assertion est vraie pour tout poset de  $n$  éléments. On aimerait montrer qu'elle est également satisfaite par un poset à  $n + 1$  éléments. Pour cela, soit  $E$  un poset à  $n + 1$  éléments. Soit  $y$  un élément maximal de  $E$ , et considérons le poset  $E' = E - \{y\}$  avec  $n$  éléments. Par hypothèse de récurrence, le cardinal d'une décomposition minimale en chaînes et la largeur de  $E'$  sont les mêmes, disons  $w$ .

Soit  $C_1, \dots, C_w$  des chaînes disjointes couvrant  $E'$ . On va construire une antichaîne  $A$  de  $E'$  avec  $w$  éléments de la manière suivante : pour tout  $i$ , on choisit dans  $C_i$  un élément maximal  $x_i$  qui appartient à une antichaîne de longueur  $w$ .

Commençons par nous convaincre que les  $x_i$  sont deux à deux incomparables. Supposons que  $i$  et  $j$  sont deux à deux différents, et que  $x_i \geq x_j$ . Soit  $B$  une antichaîne de longueur  $w$  qui contient  $x_i$ . D'après le lemme précédent (2) on a  $B \cap C_j = \{y_j\}$  pour un certain  $y_j$ . On a  $y_j \leq x_j$ , car  $y_j$  appartient à une antichaîne de longueur  $w$ , et que  $x_j$  est un

élément maximal par rapport à cette condition. Comme  $y_j$  est dans l'antichaîne  $B$ ,  $x_j$  et  $y_j$  ne sont pas comparable, on ne peut donc avoir  $x_i \geq x_j$ . Comme  $i$  et  $j$  ont été choisis arbitrairement, on vient de montrer que pour tout  $i$  et  $j$  les éléments  $x_i$  et  $x_j$  ne sont pas comparables, et donc que  $A$  est une antichaîne.

On va maintenant utiliser  $A$  pour construire une antichaîne et une décomposition en chaînes de  $E$  de la même taille, ce qui terminera le raisonnement par récurrence. On va distinguer 2 cas.

- (1) Supposons d'abord que  $y \geq x_i$  pour un certain  $i$ . Dans ce cas, on va trouver une décomposition en chaînes de  $E$  avec  $w$  éléments et une antichaîne de  $E$  avec  $w$  éléments. Le lemme précédent (1) nous montre alors que le cardinal d'une décomposition minimale de  $E$  est le même que sa largeur. Soit  $C = \{y\} \cup \{z \in C_i \mid z \leq x_i\}$ .

$C$  est une chaîne. Considérons le poset  $E'' = E - C$ .

On va montrer que  $E''$  n'a pas d'antichaîne de longueur  $w$ . Supposons d'abord que  $x_i$  est l'élément maximal de  $C_i$ . Alors, enlever  $C$  de  $E$  est la même chose qu'enlever  $C_i$  de  $E$ , de telle manière que  $E''$  admet une décomposition en  $w - 1$  chaînes, ce qui implique que la largeur de  $E''$  ne peut dépasser  $w - 1$ . Ensuite, supposons que  $x_i$  n'est pas l'élément maximal de  $C_i$ . Alors, les autres éléments de  $C_i$  qui sont plus grand que  $x_i$  ne peuvent être dans une antichaîne de longueur  $w$  par définition de  $x_i$ . Il s'ensuit que la largeur de  $E''$  est d'au plus  $w - 1$ .

On en déduit que  $E''$  peut être couvert par au plus  $w - 1$  chaînes disjointes et que donc  $E$  peut être couvert par au plus  $w$  chaînes disjointes (celles de  $E''$  et  $C$ ), ainsi la largeur de  $E$  est d'au plus  $w$ . Comme  $A$  est une antichaîne de  $E$  de taille  $w$ , on vient de montrer qu'il y a une décomposition en chaînes de  $E$  de la même taille qu'une antichaîne, ce qui prouve le théorème.

- (2) Supposons maintenant que  $y \not\geq x_i$  pour tout  $i$ . Comme  $y$  est un élément maximal de  $E$ ,  $y$  est incomparable avec tous les  $x_i$ , et donc  $A' = \{y, x_1, \dots, x_w\}$  est une antichaîne. D'un autre côté,  $\{y\}, C_1, \dots, C_w$  est une décomposition en chaînes de  $E$  de taille  $w + 1 = |A'|$ , on en déduit donc que dans ce cas également le cardinal d'une décomposition minimale en chaînes de  $E$  est le même que sa largeur.

En regroupant ces deux cas, la preuve est terminée.

■

**Théorème 3.2.7** [6](Théorème de Sperner)

Soit  $A$  une antichaîne composée de sous-ensembles de  $E$ , de cardinal  $n$ . Alors :

$$|A| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

**Preuve.** Supposons que  $E$  soit un ensemble finie non vide à  $n$  éléments ( $|E| = n$ ) et  $A$  une antichaîne composée de sous-ensembles de  $E$ . Il est clair que

$$|A| \leq \bigvee_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} \binom{n}{i} \dots \dots \dots (1)$$

Pour montrer l'inégalité  $|A| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ , il suffit de montrer

$$\bigvee_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} \binom{n}{i} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots \dots \dots (2)$$

Pour cela, soit  $U$  une suite définie par  $U_i = \binom{n}{i}$  avec  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . On a:

$$\begin{aligned} U \text{ est croissante} &\iff U_{i+1} - U_i \geq 0 \\ &\iff \binom{n}{i+1} - \binom{n}{i} \geq 0 \\ &\iff i \leq \frac{n-1}{2} \\ &\iff i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor. \end{aligned}$$

Alors,  $U_0 \leq U_1 \leq \dots \leq U_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \leq U_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$ , c'est-à-dire  $U_i \leq U_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , donc  $\binom{n}{i} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , alors

$$\bigvee_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} \binom{n}{i} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \dots \dots \dots (3)$$

Pour obtenir l'inégalité (2), on va montrer que  $\binom{n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

Comme  $n \in \mathbb{N}^*$ , on distingue deux cas possible :

1. Si  $n$  pair (i.e.,  $n = 2k$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ ), on a :

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 &= \lfloor k - \frac{1}{2} \rfloor + 1 = (k-1) + 1 = k, \text{ et d'autre part } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor k \rfloor = k. \text{ Alors} \\ \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 &= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \text{ donc } \binom{n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

2. Si  $n$  impair (i.e.,  $n = 2k + 1$  et  $k \in \mathbb{N}$ ), on a:

$$n - (\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1) = (2k+1) - (\lfloor \frac{(2k+1)-1}{2} \rfloor + 1) = k, \text{ et d'autre part } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{2} \rfloor = k.$$

$$\text{Alors } n - (\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \text{ donc } \binom{n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} = \binom{n}{n - (\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Finalement, dans les deux cas on a l'égalité  $\binom{n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ . Alors l'inégalité (3) est identique avec l'inégalité (2)

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \binom{n}{i} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots \dots \dots (2)$$

De l'inégalités (1) et (2), alors  $|A| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

■

**Remarque 3.2.1** Si  $A$  anti-chaîne maximal, alors  $|A| = \binom{n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

### 3.2.1 Décomposition en niveau de l'ensemble des extensions

Soit  $E$  un ensemble fini. L'ensemble  $Q = Ord_E$  (l'ensemble de tous les ordres sur  $E$ ), ordonné par inclusion, des ordres sur  $E$  se décompose en niveaux. Le niveau  $Q_0$  est constitué de l'égalité  $\Delta_E$  (car l'égalité le plus petit ordre aucun paire de comparabilité), le niveau  $Q_1$  des ordres ayant une seule paire de comparabilité. Plus généralement :

**Théorème 3.2.8** Un ordre  $\mathfrak{R}$  appartient au niveau  $n$  si et seulement si il contient exactement  $n$  paires de comparabilité.

### 3.2.2 Dénombrement des ordres

[7] Soit  $Ord(n)$  le nombre d'éléments de  $Ord_E$ , donc le nombre d'ordres sur un ensemble ayant  $n$  éléments. et soit  $[Ord](n)$  le nombre d'ordres sur  $n$  éléments, ces ordres étant comptés à l'isomorphie près.

**Remarque 3.2.2** Pour  $n$  supérieure strictement à dix-sept, le nombre de relations transitives est inconnu jusqu'aujourd'hui.

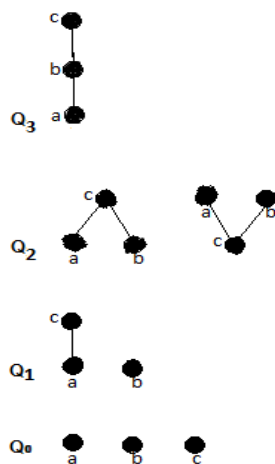
Valeurs de  $Ord(n)$  pour  $n$  inférieure ou égal dix-sept

Les nombres des éléments de $E$	$Ord(n)$ [Tout les ordres possible]
1	1
2	3
3	19
4	219
5	4 231
6	130 023 a
7	6 129 859 b
8	431 723 379 c
9	44 511 042 511 d
10	6 611 065 248 783 e
11	1 396 281 677 105 899 e
12	414 864 951 055 853 499 f
13	171 850 728 381 587 059 351 f
14	98 484 324 257 128 207 032 183 f
15	77 567 171 020 440 688 353 049 939 g
16	83 480 529 785 490 157 813 844 256 579 h
17	122 152 541 250 295 322 862 941 281 269 151 i

Valeurs de  $[Ord](n)$  pour  $n \leq 16$

Les nombres des éléments de $E$	$[Ord](n)$ [Tous les ordres possible à isomorphisme près]
1	1
2	2
3	5
4	16
5	63
6	318
7	2 045 a
8	16 999 b
9	183 231 c
10	2 567 284 d
11	46 749 427 d
12	1 104 891 746 e
13	33 823 827 452 f
14	1 338 193 159 771g
15	68 275 077 901 156 h
16	4 483 130 665 195 087 h

**Exemple 3.2.3** Soit  $E = \{a, b, c\}$ , on peut définir tous les ordres possibles sur  $E$  à isomorphisme près par les diagrammes de Hasse :



**Lemme 3.2.2** *Soit  $\mathfrak{R}$  un ordre sur un ensemble  $E$ , pas forcément fini. Un ordre  $\mathfrak{R}'$  est une couverture inférieure de  $\mathfrak{R}$  dans l'ensemble  $\text{Ord}_E$ , ordonné par inclusion, des ordres sur  $E$  si et seulement si  $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \{(a, b)\}$  où  $(a, b)$  est un arc de couverture du diagramme de couverture de l'ensemble ordonné  $(E, \mathfrak{R})$ .*

**Preuve.** Clairement, si on enlève à  $E$  un arc de couverture de son diagramme, l'ensemble résultant est un ordre. En outre, comme on enlève seulement un élément, cet ordre est une couverture inférieure de  $\mathfrak{R}$ . Réciproquement, supposons  $\mathfrak{R}'$  soit une couverture inférieure de  $\mathfrak{R}$ . Soit  $e = (a, b) \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}'$ . Comme  $\mathfrak{R}$  est un ordre,  $(b, a) \notin \mathfrak{R}$  donc  $(b, a) \notin \mathfrak{R}'$ . D'après le Lemme 2.2.2,  $\mathfrak{R}' \vee \{e\}$  est le plus petit ordre contenant  $\mathfrak{R}' \cup \{e\}$ . Par conséquent  $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}' \vee \{e\} \subset \mathfrak{R}$ .

Puisque  $\mathfrak{R}'$  est une couverture inférieure de  $\mathfrak{R}$  on a  $\mathfrak{R}' \vee \{e\} = \mathfrak{R}$ . Comme  $e$  est une arête du diagramme de  $\mathfrak{R}' \vee \{e\}$ ,  $\mathfrak{R}' \vee \{e\} \setminus \{e\}$  est un ordre. Puisqu'il contient  $\mathfrak{R}'$  il est égal à  $\mathfrak{R}'$ . Et le lemme est prouvé. ■

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons abordé quelques concepts de la théorie des ensembles ordonnés, des similarités et des treillis. Ensuite on a étudié et quelques propriétés de ces notions tel que le bon ordre, ordres bien fondés et ordres belordonnés.

Et puis nous avons essayé de représenter les ensembles ordonnés en les décomposant en chaînes et antichaines afin de pouvoir aborder certains théorèmes célèbres tel que le théorème de Dilworth, théorème de Sperner.

On a terminé ce travail par un dénombrement des ordres définis sur un ensemble fini ayant moins de dix-sept éléments.

Merci

# Bibliographie

- [1] K. BERNARD, R. C. Busby, S. Ross, Discrete Mathematical Structures (4th Edition), Pearson Education North ASIA LIMIED and Higher Education Press, 2001.
- [2] T. S. BLYTH, Lattices and Ordered Algebraic Structures, Springer-Verlag London Limited 2005.
- [3] S. BURRIS et H.P.Sankappanavar, A course in universal Algebra, The Millennium Edition, 2012.
- [4] H. CATHERINE Yan, Commuting Quasi-order relations, Discrete Mathematics 183 (1998) 285-292
- [5] J. R. DURBIN, Modern Algebra : An Introduction (6thEdition), John Wiley & Sons, Inc, 2009.
- [6] I. GUILLAUME, Rapport de Graphe Avancée Hypergraphes : théorie de Sperner." [perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010/guillaume-iooss.pdf](http://perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010/guillaume-iooss.pdf)" 19 novembre 2010.
- [7] J. HEITZIG, J.Reinhold, The number of unlabelled orders on fourteen elements, Order 17 (2000), no. 4, 333-341..
- [8] D. OUDRAR, Sur l'énumération de structures discrètes, une approche par la théorie des relations, Département de Recherche Opérationnelle, Faculté de mathématiques, Université des Sciences et de Technologie Houari Boumediene, 28 septembre 2015.
- [9] M. PAUZET, Théorie de l'ordre : une introduction (En cours d'apparition).
- [10] D. PONASSE, J.C.Carregan, Algèbre et Topologie Booléennes, MASSON 1979.

- [11] J. RIGUET, Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p.114-155
  
- [12] I. RIVAL, Ordered Sets, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at Banff, Canada, August 28 to September 12, 1981.