

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de
MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse fonctionnelle

Par

BELHOUT AZZOUZ

Sujet

Les applications $\tau(q,p)$ -sommantes et le théorème de domination

Promotion: 2016/2017

Remerciements

Malgré tout le soin apporté à la rédaction de ce mémoire, il est possible que quelques erreurs soient toujours en présentées dans ce travail.

A terme de cette étude, j'ai le plaisir et le devoir de remercier en premier lieu le bon dieu, le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour accomplir cette tâche.

*Avec une immense estimation, j'exprime mes plus grands remerciements à **Monsieur A. TALLAB**, qui m'a encadrée d'une manière exemplaire: de compétence et de disponibilité à mon égard.*

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragée.

Mes remerciements à tous les professeurs du département de Mathématiques.

Je ne saurais aussi oublier mes amis et mes collègues qui ont participé de loin ou de près et qui m'ont aidée à l'élaboration de ce mémoire.

Résumé.

Dans ce mémoire on va présenter et étudier la classe des applications multilinéaires $\tau(p, q)$ -sommantes qu'ont été étudiées par X. Mujica dans 2008, qui a généralisée les applications linéaires absolument τ -sommantes introduits par A. Pietsch dans 1980 au cas multilinéaire.

Mots clés : Espace de Banach, les applications multilinéaires, les applications multilinéaires $\tau(p, q)$ -sommantes, théorème de domination.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	2
1.1 Applications multilinéaires continues	3
1.2 \mathcal{L}_n -modules des applications n -linéaires	5
1.3 Quelques définitions et notations	8
2 Applications n-linéaires $\tau(p)$-sommantes et théorème de domination	12
2.1 Applications n -linéaires $\tau(p, q)$ -sommantes	13
2.2 Théorèmes de dominations	18
3 Exemples sur les applications n-linéaires $\tau(p, q)$-sommantes	23
3.1 Les applications n -linéaires de rangs finis	24
3.2 Les applications bilinéaires nucléaires	24
3.3 Les applications p -semi-intégrales	25
3.4 Les applications n -linéaires p -dominés	26
3.5 Les applications approximables	28
Conclusion	30

Introduction

La notion des applications linéaires p -sommantes remonte à Grothendieck dans les années 1950, mais seulement en 1967 et 1968, Pietsch [9] et Lindenstrauss-Pełczyński [5] ont clairement contribué au développement de cette notion. Dans ce travail on va étudier la notion des applications multilinéaires $\tau(p, q)$ -sommantes introduit par Mujica en 2008 dans [8] qui a généralisée les applications linéaires absolument τ -sommantes introduits par A.Pietsch dans 1980 dans [10] au cas multilinéaire. Aussi on donne certaines caractérisations et propriétés de cette classe qu'ont présenter par Mujica dans [8], parexemple " le théorème de domination" et la relations de cette classe des applications avec d'autre classe de sommabilité.

Notre travail est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on donne un aperçu général sur les applications multilinéaires continues, puis \mathcal{L}_n -modules des applications n -linéaires et l'inégalité de Hölder généralisé et aussi l'espace des fonctions p -intégrables L_p , l'espace des suites p -sommables $l_p(E)$ et l'espace des suites faiblement p -sommables $l_p^w(E)$ et quelques lemmes essentiels.

Dans le deuxième chapitre, on va introduire, la notion des applications multilinéaires $\tau(p, q)$ -sommantes. Au plus quelques théorèmes parexemple, le théorème de domination sachant que il y a deux théorèmes de dominations pour cette classe des applications et leurs dé, enstration en utilisant le lemme de Ky Fan, aussi le théorème d'inclusion.

Dans le troisième chapitre, on va donner quelques exemples sur les applications multilinéaires $\tau(p, q)$ -sommantes parexemples, les applications n -linéaires de rangs finis, les applications bilinéaires nucléaires, les applications n -linéaires p -dominés, les applications p -semi-intégrales, Les applications approximables.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Applications multilinéaires continues

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E_1, \dots, E_n, F des espaces normés.

Définition 1.1.1 Une application $T : E_1, \dots, E_n \rightarrow F$ est dite multilinéaire ou n -linéaire, si pour tout $a^j, b^j \in E_j$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) avec $j = 1, \dots, n$, on a

$$T(a^1, \dots, \alpha a^j + \beta b^j, \dots, a^n) = \alpha T(a^1, \dots, a^j, \dots, a^n) + \beta T(a^1, \dots, b^j, \dots, a^n).$$

Si $F = \mathbb{k}$, T est dite forme multilinéaire. On note par $L(E_1, \dots, E_n, F)$ l'ensemble des applications multilinéaire de E_1, \dots, E_n dans F .

Remarque 1.1.1 Définissons les applications n -linéaires suivantes,

$$1) (T_1 + T_2)(a^1, \dots, a^n) = T_1(a^1, \dots, a^n) + T_2(a^1, \dots, a^n)$$

$$2) (\lambda T)(a^1, \dots, a^n) = \lambda T(a^1, \dots, a^n),$$

pour $(a^1, \dots, a^n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Ce qui donne à $L(E_1, \dots, E_n, F)$ une structure d'espace vectoriel.

Proposition 1.1.1 Soient $T \in L(E_1, \dots, E_n, F)$ et $a = (a^1, \dots, a^n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. On munit $E_1 \times \dots \times E_n$ de la norme

$$\|a\| = \|(a^1, \dots, a^n)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \|a^j\|_{E_j},$$

les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) T est continue.

(2) T est continue au point $0 = (0, \dots, 0)$.

(3) $\|T(a^1, \dots, a^n)\|$ est borné sur le produit des boules unitées: $\|a^1\| \leq 1, \dots, \|a^n\| \leq 1$.

(4) $\exists M > 0$ tq $\forall (a^1, \dots, a^n) \in E_1 \times \dots \times E_n$

$$\|T(a^1, \dots, a^n)\| \leq M \|a^1\| \dots \|a^n\|.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble des applications multilinéaires continues de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F par $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ quand $E_1 = \dots = E_n = E$ nous écrivons $\mathcal{L}(^n E; F)$ et si $F = \mathbb{k}$ nous utilisons $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n, \mathbb{k}) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n)$ et $\mathcal{L}(^n E) = \mathcal{L}(^n E; \mathbb{k})$. Nous représentons $\mathcal{L}(^1 E; F)$ par $\mathcal{L}(E; F)$.

Proposition 1.1.2 Soient $n \in \mathbb{N}$, E_1, \dots, E_n et F sont des espaces normés sur \mathbb{K} , alors l'application $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par,

$$\|T\| = \sup \{ \|T(a)\| ; a \in E_1 \times \dots \times E_n, \|a\|_\infty \leq 1 \} \quad (1.1.1)$$

où $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ est un espace normé avec la norme définie dans 1.1.1 et il est Banach pour F est un espace de Banach.

Théorème 1.1.1 Soient E_1, \dots, E_n des espaces de Banach et F un espace normé, l'application $T \in L(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est continue si, et seulement si, T est continue pour chaque variable de $E_1 \times \dots \times E_n$.

Corollaire 1.1.1 Si E_1, \dots, E_n sont des dimensions finies, alors toute $T \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ est continue, i.e., $L(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Définition 1.1.2 Soient E_1, \dots, E_n, F des espaces de Banach. On considère non-nulle $\varphi^j \in E_j^* (j = 1, \dots, n)$ et $y \in F$. On définit l'application n -linéaires

$$\varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^n \otimes y : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F,$$

par

$$\varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^n \otimes y(x^1, \dots, x^n) := \varphi^1(x^1) \dots \varphi^n(x^n) y. \quad (1.1.2)$$

L'application $\varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^n \otimes y \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et

$$\|\varphi^1 \otimes \dots \otimes \varphi^n \otimes y\| = \|\varphi^1\| \dots \|\varphi^n\| \|y\|.$$

On denote par $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$, l'espace vectoriel des applications de rangs finies, Qui est généré par les applications de la forme (1.1.2). Tous les éléments T de cet espace ont des représentations finies de la forme

$$T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i^1 \otimes \dots \otimes \varphi_i^m \otimes y_i$$

où $(\lambda_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{K}$, $(\varphi_i^j)_{i=1}^n \subset X_j^* (j = 1, \dots, m)$ et $(y_i)_{i=1}^n \subset Y$.

1.2 \mathcal{L}_n -modules des applications n -linéaires

Définition 1.2.1 Soient E_i, F des espaces de Banach sur un corps \mathbb{k} . Un \mathcal{L}_n -module des applications n -linéaires $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ de telle sorte que les composants

$$\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{M} \cap \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$$

sont satisfait les conditions suivantes,

- (1) $I_n = 1 \otimes \overset{n \text{ fois}}{\dots} \otimes 1 \otimes 1 \in \mathcal{M}(\mathbb{k}, \overset{n \text{ fois}}{\dots}, \mathbb{k}; \mathbb{k})$, où $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n$.
- (2) Si $S_1, S_2 \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, on a $S_1 + S_2 \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$.
- (3) Si $S \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $R \in \mathcal{L}(F, G)$ et $T = (T_1, \dots, T_n)$ où $T_i \in \mathcal{L}(D_i, E_i)$, on a $RST \in \mathcal{M}(D_1, \dots, D_n; G)$.

On note que l'application nulle de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F est une dans $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, car si $R : y \in F \mapsto R(y) = 0 \in F$ et $T = (T_1, \dots, T_n)$ on a $T_i \in \mathcal{L}(E_i, E_i)$, il peut être obtenu par la composition RST , que la propriété (3) est une dans $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Remarque 1.2.1 Sous la condition (3), la propriété (1) équivalente la propriété (1') telle que,

$$(1') a_i \in E_i^* \text{ et } y \in F \text{ implique } a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Preuve. (1) \Leftrightarrow (1')

(\Rightarrow) Comme $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y = (1 \otimes y) \circ I_n \circ (a_1 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1)$ pour (3) et (1) il en résulte que $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y \in \mathcal{M}$.

(\Leftarrow) Comme $I_n = 1 \otimes \overset{n \text{ fois}}{\dots} \otimes 1 \otimes 1$ pour (1') il en résulte que $I_n \in \mathcal{M}$. ■

Définition 1.2.2 Une application non négative $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ de \mathcal{M} dans \mathbb{k} sera appelé quasi-norme en \mathcal{M} si,

$$(QN1) \|I_n\|_{\mathcal{M}} = 1.$$

(QN2) Il existe une constante $C_{\mathcal{M}} \geq 1$ tel que $\|S_1 + S_2\|_{\mathcal{M}} \leq C_{\mathcal{M}}(\|S_1\|_{\mathcal{M}} + \|S_2\|_{\mathcal{M}})$ pour chaque

$$S_i \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F).$$

(QN3) $\|RST\|_{\mathcal{M}} \leq \|R\| \|S\|_{\mathcal{M}} \|T_1\| \dots \|T_n\|$ pour $S \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $R \in \mathcal{L}(F; G)$ et $T = (T_1, \dots, T_n)$ où $T_i \in \mathcal{L}(D_i, E_i)$.

Si la constante $C_M = 1$, alors l'application $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ est une norme.

Comme conséquence de cette définition nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.1 Si $S \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors $\|S\| \leq \|S\|_{\mathcal{M}}$.

Preuve. On a pour $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n, b \in F^*$,

$$|b(S(x_1, \dots, x_n))| \leq \|b \otimes 1\| \|S\|_{\mathcal{M}} \|1 \otimes x_1\| \dots \|1 \otimes x_n\|,$$

donc

$$\begin{aligned} \|S\| &= \sup_{\|x_i\| \leq 1} \|S(x_1, \dots, x_n)\|_F \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} |b(S(x_1, \dots, x_n))| \\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} \|b \otimes 1\| \|S\|_{\mathcal{M}} \|1 \otimes x_1\| \dots \|1 \otimes x_n\| \\ &= \|S\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposition 1.2.1 On note que la propriété (QN1) équivalente à (QN1') telle que (QN1') Pour chaque $a_i \in E_i^*$ et $y \in F$,

$$\|a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y\|_{\mathcal{M}} = \|a_1\| \dots \|a_n\| \|y\|$$

$$(\|a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y\|_{\mathcal{M}} = \|a_1\| \dots \|a_n\| \|y\|) \Leftrightarrow (\|1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes 1\|_{\mathcal{M}} = 1).$$

Et pour (QN3), il a

$$\|s\|_{\mathcal{M}} \leq \|1 \otimes y\| \|I_n\|_{\mathcal{M}} \|a_1 \otimes 1\| \dots \|a_n \otimes 1\| = \|y\| \|a_1\| \dots \|a_n\|.$$

Preuve. (\Rightarrow) Clair.

(\Leftarrow) Pour $S = a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y$, supposons que $\|a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y\| = \|S\| \leq \|S\|_{\mathcal{M}}$. D'autre part, nous avons

$$S = (1 \otimes y) I_n(a_1 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1).$$

■

Remarque 1.2.2 (1) $(QN2')$ $\|S_1 + S_2\|_{\mathcal{M}}^r \leq \|S_1\|_{\mathcal{M}}^r + \|S_2\|_{\mathcal{M}}^r$ pour $S_1, S_2 \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$. Si $r = 1$, $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ est une norme. Nous dirons que $[\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}]$ est un \mathcal{L}_n -module r -normé des applications n -linéaires ou tout simplement un \mathcal{L}_n -module r -normé si \mathcal{M} est un \mathcal{L}_n -module des applications n -linéaires avec une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ tel que tout sous-espace vectoriel topologique de Hausdorff $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ est complet.

(2) Si $r = 1$, nous disons que $[\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}]$ est un \mathcal{L}_n -module de Banach des applications n -linéaires ou tout simplement \mathcal{L}_n -module de Banach.

(3) Certains auteurs ont appelé une telle classe "les idéaux des applications n -linéaires" dans ce mémoire nous avons choisi cette nouvelle terminologie présenté par Mujica dans [8].

Théorème 1.2.1 Soient \mathcal{M} est un sous espace de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ et une fonction à valeurs ne négatives $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ telle que pour $0 < r \leq 1$ satisfait les conditions suivantes:

(0) $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \lambda_1 \dots \lambda_n$ est en \mathcal{M} et $\|I_n\|_{\mathcal{M}} = 1$.

(1) Si $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\mathcal{M}}^r < \infty$, alors $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $\|S\|_{\mathcal{M}}^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\mathcal{M}}^r$.

(2) $T_i \in \mathcal{L}(D_i, E_i), S \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $R \in \mathcal{L}(F; G)$, implique $RS(T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{M}(D_1, \dots, D_n; G)$ et $\|RST\|_{\mathcal{M}} \leq \|R\| \|S\|_{\mathcal{M}} \|T_1\| \dots \|T_n\|$.

Alors $[\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}]$ est un \mathcal{L}_n -module r -normé des applications n -linéaires et si $r = 1$, $[\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}]$ est un \mathcal{L} -module de Banach des applications n -linéaires.

Preuve. On note que (0) implique (1) et $(QN1)$, (2) implique (3) et $(QN3)$ et (1) implique (2) et $(QN2)$. Le completé de l'espace topologique de Hausdorff $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ suit également de (1). Soit $(R_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy en $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, pour $\varepsilon > 0$ il existe $J_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l \geq J_{\varepsilon}$, alors

$$\|R_k - R_l\|_{\mathcal{M}}^r \leq \varepsilon.$$

Soient $T_1 = R_1, T_2 = R_2 - R_1, \dots, T_k = R_k - R_{k-1}$, alors $\sum_{j=1}^k T_j = R_k$. Voyons voir ce que la serie $\sum_{j=1}^k T_j$ et de Cauchy, i.e.,

$$\left\| \sum_{j=1}^k T_j - \sum_{j=1}^l T_j \right\|_{\mathcal{M}}^r \leq \|R_k - R_l\|_{\mathcal{M}}^r \leq \varepsilon,$$

pour $k, l \geq J_\varepsilon$. On considère maintenant une suite des entiers positifs $(n_k)_{k=1}^\infty$ telle que $n_k \leq n_{k+1}$ pour chaque k satisfaisant

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_{k+1}} T_j - \sum_{j=1}^{n_k} T_j \right\|_M^r \leq \varepsilon/2^k.$$

Alors, $\sum_{k=1}^\infty \|S_k\|_M^r \leq \sum_{k=1}^\infty \varepsilon/2^k = \varepsilon < \infty$. Il doit être $S = \sum_{k=1}^\infty S_k \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ et que

$$\|S\|_M^r \leq \sum_{k=1}^\infty \|S_k\|_M^r < \varepsilon,$$

pour (1). Comme

$$S = \sum_{k=1}^\infty S_k = \sum_{k=1}^\infty \left[\sum_{j=1}^{n_{k+1}} T_j - \sum_{j=1}^{n_k} T_j \right] = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} T_j \right) = \sum_{j=n_1+1}^\infty T_j,$$

si $R = \sum_{j=1}^{n_1} T_j + S \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ comme $k \geq n_1 \geq J_\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \|R_k - R\|_M^r &= \left\| \sum_{j=1}^k T_j - \left(\sum_{j=1}^{n_1} T_j + S \right) \right\|_M^r \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^k T_j - \sum_{j=1}^{n_1} T_j \right\|_M^r + \|S\|_M^r \end{aligned}$$

$$(k, n_1 \geq J_\varepsilon) < \varepsilon + \varepsilon.$$

La preuve est achevée. ■

1.3 Quelques définitions et notations

Notation 1.3.1 Pour $p > 1$ on note p^* le conjugué de p défini par la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. On pose $p^* = \infty$ si $p = 1$.

Définition 1.3.1 (L'espace $C(K)$) Soit K un espace topologique compact. L'espace de Banach $C(K)$ est défini par:

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{K} : \text{continue}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_K |f(x)|, f \in C(K).$$

Définition 1.3.2 (L'espace L^p) Soit $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = L^p(\mu) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$L^p(\mu)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ nous avons $f \in L^\infty(\mu)$ s'il existe $C > 0$ telle que

$$|f| \leq C. \mu \text{ p.p.} \tag{1.3.1}$$

$L^\infty(\mu)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C, \text{ vérifier (1.3.1)}\}.$$

Définition 1.3.3 (L'espace l_p) Soit $1 \leq p < \infty$. On note par l_p l'espace de Banach des suites scalaires p -sommables

$$l_p = l_p(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|(x_i)_i\|_p := \left(\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

pour $p = +\infty$

$$l_\infty = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|(x_i)_i\|_\infty := \sup_i |x_i| < +\infty \right\}.$$

On définit aussi l'espace des suites scalaires convergeant vers zéro

$$c_0 = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \lim_{i \rightarrow +\infty} |x_i| = 0 \right\}$$

cet espace est un sous-espace fermé de l_∞ muni de la norme sup.

Lemme 1.3.1 (Inégalité de Hölder généralisé) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé,

$(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$ deux suites finies d'éléments de E et $p, q, r \in [1, +\infty[$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^n (\|x_i\| \|y_i\|)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.3.2}$$

Définition 1.3.4 (L'espace $l_p(E)$) Soit E un espace de Banach. On désignera par $l_p(E)$ l'espace de Banach des suites p -sommables d'éléments de E dont la norme est

$$\|(x_i)_i\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty,$$

et par $l_{\infty}(E)$ l'espace de Banach des suites bornées, normé par

$$\|(x_i)_i\|_{\infty} = \sup_i \|x_i\|.$$

Notation 1.3.2 On désignera par $c_0(E)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_i$ d'éléments de E convergeant vers 0. Notons que $c_0(E)$ est un sous-espace fermé de $l_{\infty}(E)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

On désignera par $l_{p,\omega}(E)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_i$ d'éléments de E faiblement p -sommables, c'est à dire des suites $(x_i)_i$ vérifiant

$$(\langle x_i, x^* \rangle)_i \in \ell_p, \quad \text{pour tout } x^* \in X^*,$$

muni de la norme définie par

$$\|(x_i)_i\|_{p,\omega} := \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|(\langle x_i, x^* \rangle)_i\|_p,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \|(x_i)_i\|_{p,\omega} &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|(x_i)_i\|_{\infty,\omega} &= \|(x_i)_i\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Lemme 1.3.2 soit E est un espace de Banach, $p \geq 1$ et $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^{\omega}(E^*)$, on a

$$\sup_{\varphi \in B_{E^{**}}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(a_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t \in B_E} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
 \sup_{\varphi \in B_{E^{**}}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(a_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p^*}=1} \sup_{\varphi \in B_{E^{**}}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi(a_j) \right| \\
 &= \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p^*}=1} \sup_{\varphi \in B_{E^{**}}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi(a_j) \right| \\
 &= \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p^*}=1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \right\| \\
 &= \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p^*}=1} \sup_{t \in B_E} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j(t) \right| \\
 &= \sup_{t \in B_E} \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p^*}=1} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j(t) \right| \\
 &= \sup_{t \in B_E} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

La preuve de lemme suivant peut trouver dans [7, p.1.], aussi dans [10, p.40.] et dans [3].

Lemme 1.3.3 (Lemme de Ky Fan) *Soient E un espace vectoriel topologique séparé, C une partie convexe compacte de E . Soit M un ensemble des fonctions définies sur C à valeurs dans $(-\infty, \infty]$ vérifiant les propriétés suivantes.*

- (a) *Tout $f \in M$ est convexe et semicontinue inférieurement.*
 - (b) *Si $g \in \text{conv}(M)$, il existe $f \in M$ telle que $g(x) \leq f(x), \forall x \in C$.*
 - (c) *S'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in M$, $f(x) \leq r$.*
- Alors il existe $x_0 \in C$ tel que $f(x_0) \leq r$ pour tout $f \in M$.*

Chapitre 2

Applications n -linéaires

$\tau(p)$ -sommantes et théorème de domination

2.1 Applications n -linéaires $\tau(p, q)$ -sommantes

On va donner la définition des applications n -linéaires $\tau(p, q)$ -sommantes qu'a introduit par Mujica dans [8].

Définition 2.1.1 [8] Soient $S \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $1 \leq q \leq p$. On dit que S est $\tau(p, q)$ -sommante, s'il existe une constante $C \geq 0$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}, x_{ij} \in E_i, b_j \in F^*, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$, on a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\ & \leq C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) b_j(y)|^q \right)^{1/q}, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

et par le Lemme 1.3.2 l'inégalité 2.1.1 équivalente à

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\ & \leq C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\beta\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

où $a_i \in E_i^*, y \in F$ et $\beta \in F^{**}$. La classe des applications n -linéaires $\tau(p, q)$ -sommantes de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F noté par $\mathcal{L}_{\tau(p, q)}(E_1, \dots, E_n; F)$ qui est un espace de Banach muni de la norme $\|S\|_{\tau(p, q)} = \inf C$ pour les constantes qui sont apparaît dans l'inégalité 2.1.1. Quand nous avons $p = q$, on écrit $\mathcal{L}_{\tau(p)}$ et $\|S\|_{\tau(p)}$ au lieu de $\mathcal{L}_{\tau(p, p)}$ et $\|S\|_{\tau(p, p)}$, respectivement, et on dit que S est $\tau(p)$ -sommante et si $p = q = 1$, on écrit \mathcal{L}_{τ} et $\|S\|_{\tau}$ au lieu de $\mathcal{L}_{\tau(1)}$ et $\|S\|_{\tau(1)}$, respectivement et on dit que S est τ -sommante.

Remarque 2.1.1 [7] Si $p < q$ et S est $\tau(p, q)$ -sommante, alors $S = 0$.

Preuve. Fixe $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n, b \in F^*$, pour $i = 1, \dots, n$, et $j = 1, \dots, m$ pour $m \in \mathbb{N}$ et on considère $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^n \setminus l_p^n$. Soient $x_{ij} \in E_i, b_j \in F^*, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{np} \right)^{1/p} |bS(x_1, \dots, x_n)| \\
 &= \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j^n bS(x_1, \dots, x_n)|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left(\sum_{j=1}^m |bS(\lambda_j x_1, \dots, \lambda_j x_n)|^p \right)^{1/p} \\
 (S \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}(E_1, \dots, E_n; F)) &\leq C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(\lambda_j x_1) \dots a_n(\lambda_j x_n) b(y)|^q \right)^{1/q} \\
 &= C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{nq} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) b(y)|^q \right)^{1/q} \\
 &= C \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{nq} \right)^{1/q} \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) b(y)| \\
 &= C \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{nq} \right)^{1/q} \|x_1\| \dots \|x_n\| \|b\|.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{np} \right)^{1/np} (|b_j S(x_1, \dots, x_n)|)^{1/n} \\
 &\leq \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{nq} \right)^{1/nq} (c \|x_1\| \dots \|x_n\| \|b\|)^{1/n},
 \end{aligned}$$

comme $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in l_q^n \setminus l_p^n$, pour m assez grand à 0, nous devons

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{np} \right)^{1/np} (|b_j S(x_1, \dots, x_n)|)^{1/n} \\
 &> \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{nq} \right)^{1/nq} (C \|x_1\| \dots \|x_n\| \|b\|)^{1/n}
 \end{aligned}$$

qui sont en valeur S est identique à zéro. ■

Remarque 2.1.2 *A partir de maintenant on va travailler pour $p \geq q$.*

Proposition 2.1.1 *L'espace $(\mathcal{L}_{\tau(p; q)}, \|\cdot\|_{\tau(p; q)})$ est \mathcal{L}_n -module (ideal) de Banach des applications n -linéaires $\tau(p, q)$ -sommantes.*

Preuve. (0) On montre que $I_n \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}$ et que $\|I_n\|_{\tau(p; q)} = 1$. On note que

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{j=1}^m |\gamma_j(I_n(\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{nj}))|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^m |\gamma_j \lambda_{1j} \dots \lambda_{nj}|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left(\sum_{j=1}^m |1 \cdot \lambda_{1j} \dots \lambda_{nj} \cdot \gamma_j \cdot 1|^p \right)^{1/p} \\
 (p \geq q) \Rightarrow \|\cdot\|_p &\leq \|\cdot\|_q \leq \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1 \lambda_{1j} \dots a_n \lambda_{nj} \cdot \gamma_j \cdot y|^q \right)^{1/q}
 \end{aligned}$$

pour tout $\gamma_j \in \mathbb{k}, \lambda_{ij} \in \mathbb{k}, m \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, en d'autres termes I_n est $\tau(p; q)$ -sommante et $\|I_n\|_{\tau(p; q)} \leq 1$. Comme $1 = \inf c$, alors $\|I_n\|_{\tau(p; q)} = 1$.

(1) Soient $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}(E_1, \dots, E_n; F)$ tel que $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\tau(p; q)} < \infty$. Pour chaque S_k savoir que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m |b_j(S_k(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\ & \leq \|S_k\|_{\tau(p; q)} \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) b_j(y)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Pour $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$ et $m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m (|b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p)^{1/p} \\ & = \left(\sum_{j=1}^m |b_j(\sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m |b_j(S_k(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \right)^{1/p} \quad (\text{l'inégalité triangulaire}) \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\|S_k\|_{\tau(p; q)} \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) b_j(y)|^q \right)^{1/q} \right] \\ & = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\tau(p; q)} \right) \left[\sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) b_j(y)|^q \right)^{1/q} \right] \end{aligned}$$

d'où il résulte que $S \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $\|S\|_{\tau(p; q)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\tau(p; q)}$.

(2) Considérons les transformations linéaires $T_i : D_i \rightarrow E_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $R : F \rightarrow G$ est linéaire continu, où D_1, \dots, D_n et G sont des espaces de Banach. Voyons voir ce que $RS(T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}(D_1, \dots, D_n; G)$ pour $S \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}(E_1, \dots, E_n; F)$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on considère $u_{ij} \in D_i, c_j \in G^* i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ et $(S \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}(E_1, \dots, E_n; F))$, on a

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m |c_j(RS(T_1, \dots, T_n)(u_{1j}, \dots, u_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\
 = & \left(\sum_{j=1}^m |(R^*c_j)(S(T_1u_{1j}, \dots, T_nu_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\
 \leq & \|S\|_{\tau(p; q)} \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(T_1u_{1j}) \dots a_n(T_nu_{nj})(R^*c_j)(y)|^q \right)^{1/q} \\
 = & \prod_{k=1}^n \|T_k\| \|S\|_{\tau(p; q)} \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m \left| a_1 \left(\frac{T_1}{\|T_1\|} \right) u_{1j} \dots a_n \left(\frac{T_n}{\|T_n\|} u_{nj} \right) c_j(Ry) \right|^q \right)^{1/q} \\
 = & \prod_{k=1}^n \|T_k\| \|R\| \|S\|_{\tau(p; q)} \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m \left| \frac{T_1^*}{\|T_1\|} a_1(u_{1j}) \dots \frac{T_n^*}{\|T_n\|} a_n(u_{nj}) c_j \left(\frac{R}{\|R\|} y \right) \right|^q \right)^{1/q} \\
 \leq & \prod_{k=1}^n \|T_k\| \|R\| \|S\|_{\tau(p; q)} \sup_{\substack{\|v_i\| \leq 1 \\ \|z\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |v_1(u_{1j}) \dots v_n(u_{nj}) c_j(z)|^q \right)^{1/q}.
 \end{aligned}$$

donc $RS(T_1, \dots, T_n)$ est $\tau(p; q)$ -sommante, et

$$\|RS(T_1, \dots, T_n)\|_{\tau(p; q)} \leq \|R\| \|S\|_{\tau(p; q)} \|T_1\| \dots \|T_n\|.$$

Le théorème 1.2.1, nous donne que $\mathcal{L}_{\tau(p; q)}$ avec la norme $\|\cdot\|_{\tau(p; q)}$ est \mathcal{L}_n -module normé des applications n -linéaire $\tau(p, q)$ sommantes. En conséquence, nous avons $\|S\| \leq \|S\|_{\tau(p; q)}$ et que $S = a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes y$ et $\|S\|_{\tau(p; q)} = \|a_1\| \dots \|a_n\| \|y\|$. ■

Proposition 2.1.2 [8] Pour $1 \leq s \leq r \leq q \leq p$, alors

$$\mathcal{L}_{\tau(q; r)} \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p; s)}$$

Preuve. Par conséquent si $S \in \mathcal{L}_{\tau(q; r)}$, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\
 \leq & \left(\sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^q \right)^{1/q} \\
 \leq & C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) b_j(y)|^r \right)^{1/r} \\
 \leq & C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) b_j(y)|^s \right)^{1/s}.
 \end{aligned}$$

En outre, les inégalités ci-dessus, ils en résulte que $\forall S \in \mathcal{L}_{\tau(q; r)} \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p; r)}$,

$$\|S\|_{\tau(p; r)} \leq \|S\|_{\tau(q; r)},$$

et $\forall S \in \mathcal{L}_{\tau(q;r)} \subseteq \mathcal{L}_{\tau(q;s)}$,

$$\|S\|_{\tau(q;s)} \leq \|S\|_{\tau(q;r)}.$$

Lemme 1.3.2 nous donne S est $\tau(p; q)$ -sommante, alors

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\ & \leq C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\beta\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

On va présenter une relation entre les applications n -linéaires $\tau(p; q)$ -sommante et les applications n -linéaires absolument $(p; q_1, \dots, q_n)$ -sommants.

Définition 2.1.2 [11] Une application $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ est absolument $(p; q_1, \dots, q_n)$ -sommante, si $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_n}$, et s'il existe une constante $C \geq 0$ tel que, $\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall x_{ij} \in E_i, i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m \|T(x_{1j}, \dots, x_{nj})\|^p \right)^{1/p} \\ & \leq C \prod_{i=1}^n \sup_{\|a_i\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^m |a_i(x_{ij})|^{q_i} \right)^{1/q_i}. \end{aligned}$$

On note par $\mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n, q_{n+1})}(E_1, \dots, E_n, F^*; \mathbb{k})$ pour l'espace de toute les applications n -linéaires absolument $(p; q_1, \dots, q_n)$ -sommantes.

Remarque 2.1.3 Par l'inégalité de Hölder généralisée, si $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_n}$, alors

$$\left(\sum_{j=1}^m (\|x_{1j}\| \dots \|x_{nj}\|)^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{j=1}^m \|x_{1j}\|^{q_1} \right)^{1/q_1} \dots \left(\sum_{j=1}^m \|x_{nj}\|^{q_n} \right)^{1/q_n}.$$

Proposition 2.1.3 [8] Soit $S \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}(E_1, \dots, E_n; F)$, on définit $S_F \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n, F^*; \mathbb{k})$ par

$$S_F(x_1, \dots, x_n, b) = bS(x_1, \dots, x_n).$$

Pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n+1}}$ et $S \in \mathcal{L}_{\tau(p; q)}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors

$$S_F \in \mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n, q_{n+1})}(E_1, \dots, E_n, F^*; \mathbb{k}).$$

Preuve. D'après l'inégalité de Hölder généralisée et le Lemme 1.3.2 on a,

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m |S_F(x_{1j}, \dots, x_{nj}, b_j)|^p \right)^{1/p} \\
 = & \left(\sum_{j=1}^m |b_j S(x_{1j}, \dots, x_{nj})|^p \right)^{1/p} \\
 \leq & C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|v\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) b_j(y)|^q \right)^{1/q} \\
 \leq & C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|v\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j})|^{q_1} \right)^{1/q_1} \dots \left(\sum_{j=1}^m |a_n(x_{nj})|^{q_n} \right)^{1/q_n} \left(\sum_{j=1}^m |b_j(y)|^{q_{n+1}} \right)^{1/q_{n+1}} \\
 = & C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\beta\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j})|^{q_1} \right)^{1/q_1} \dots \left(\sum_{j=1}^m |a_n(x_{nj})|^{q_n} \right)^{1/q_n} \left(\sum_{j=1}^m |\beta(b_j)|^{q_{n+1}} \right)^{1/q_{n+1}}.
 \end{aligned}$$

donc, $S_F \in \mathcal{L}_{as(p; q_1, \dots, q_n, q_{n+1})}(E_1, \dots, E_n, F^*; \mathbb{K})$. ■

2.2 Théorèmes de dominations

On va présenter le premier théorème de domination pour les applications n -linéaires $\tau(p)$ -sommantes que sont introduit par Mujica dans [8], qui a généralisé le théorème de Pietsch pour les applications linéaires pour $p = q = 1$ (voir [10]).

Théorème 2.2.1 [8] *Soit $1 \leq p < \infty$. Une application $S \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ est $\tau(p)$ -sommante, si et seulement si, s'il existe une constante $C \geq 0$ et $\mu \in W(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}})$, l'ensemble des probabilités de Borel dans $B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}$, tel que*

$$\begin{aligned}
 & |b(S(x_1, \dots, x_n))| \\
 \leq & C \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta) \right)^{\frac{1}{p}},
 \end{aligned}$$

pour chaque $x_i \in E_i$ et $b \in F^*$.

Preuve. On a,

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \right)^{1/p} \\
 \leq & \left\{ \sum_{j=1}^m \left[C \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^p d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta) \right)^{1/p} \right]^p \right\}^{1/p} \\
 = & C \left\{ \int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} \sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^p d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta) \right\}^{1/p} \\
 \leq & C \left\{ \int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\beta\| \leq 1}} \sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^p d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta) \right\}^{1/p} \\
 = & C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\beta\| \leq 1}} \left\{ \sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^p \right\}^{1/p}.
 \end{aligned}$$

(\Leftarrow) On suppose que $S \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$ en fixant $C = \|S\|_{\tau(p)}$. On considère $C(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}})^*$ le dual d'espace des fonctions continues avec la topologie faible $C(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}})$, alors $W(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}})$ est un sous-ensemble convexe et compact. Pour toute famille finie des éléments $x_{i1}, \dots, x_{im} \in E_i$ et $b_1, \dots, b_m \in F^*$, l'équation

$$\begin{aligned}
 & \phi(\mu) \\
 = & \sum_{j=1}^m \{ |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \\
 & - C^p \int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^p d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta) \}
 \end{aligned}$$

définie une fonction réelle convexe et continue ϕ sur $W(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}})$. On choisit $a_{10} \in B_{E_1^*}, \dots, a_{n0} \in B_{E_n^*}$ et $\beta_0 \in B_{F^{**}}$ tel que

$$\begin{aligned}
 & \sup \left\{ \sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^p : \|a_i\|, \|\beta\| \leq 1 \right\} \\
 = & \sum_{j=1}^m |a_{10}(x_{1j}) \dots a_{n0}(x_{nj}) \beta_0(b_j)|^p.
 \end{aligned}$$

Si $\gamma(a_{10}, \dots, a_{n0}, \beta_0)$ désigne la mesure de Dirac au point $(a_{10}, \dots, a_{n0}, \beta_0)$, alors nous avons

$$\phi(\gamma(a_{10}, \dots, a_{n0}, \beta_0)) = \sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p - C^p |a_{10}(x_{1j}) \dots a_{n0}(x_{nj}) \beta_0(b_j)|^p \leq 0$$

Depuis la collection \mathcal{F} des fonctions obtenues de cette manière est concave.

Une collection de fonctions est concave si pour tout naturel $K, \phi_1, \dots, \phi_K \in \mathcal{F}, 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_K \leq 1$ comme $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$, alors $\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k \leq \phi$ pour quelque $\phi \in \mathcal{F}$. On

appelle $U = (B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}})$ et on considère l'application

$$\phi_K(\mu) := \sum_{j=1}^{m_k} \left\{ |b_j^k(S(x_{1j}^k, \dots, x_{nj}^k))| - C^p \int_U |a_1(x_{1j}^k) \dots a_n(x_{nj}^k) \beta(b_j^k)| d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta) \right\}$$

où $x_{ij}^k \in E_i$ et $b_j^k \in F^*$ pour chaque $k = 1, \dots, K, i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m_k$. Bientôt,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k \\ = & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} (|b_j^k(S(x_{1j}^k, \dots, x_{nj}^k))| \\ & - C^p \int_U |a_1(x_{1j}^k) \dots a_n(x_{nj}^k) \beta(b_j^k)| d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta)) \end{aligned} \right\} \\ = & \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{m_k} (|\lambda_k b_j^k(S(x_{1j}^k, \dots, x_{nj}^k))| - \\ & C^p \int_U |a_1(x_{1j}^k) \dots a_n(x_{nj}^k) \beta(\lambda_k b_j^k)| d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta)) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

qui a été généré par $x_{ij}^k, \lambda_k b_j^k$ pour $k = 1, \dots, K, i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m_k$, et appartient à \mathcal{F} , montrant que \mathcal{F} est concave.

Par le lemme de Ky Fan, il existe une mesure $\mu_0 \in W(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}})$ telle que

$$\phi(\mu_0) \leq 0, \forall \phi \in \mathcal{F}.$$

En particulier, si ϕ est généré par x_1, \dots, x_n et b , i.e.,

$$\phi(\mu) = |b(S(x_1, \dots, x_n))|^p - C^p \int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta),$$

il en résulte que

$$|b(S(x_1, \dots, x_n))|^p - C^p \int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu_0(a_1, \dots, a_n, \beta) \leq 0,$$

donc

$$|b(S(x_1, \dots, x_n))|^p \leq C^p \int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu_0(a_1, \dots, a_n, \beta).$$

Alors

$$|b(S(x_1, \dots, x_n))| \leq C \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu_0(a_1, \dots, a_n, \beta) \right)^{1/p}.$$

La preuve est terminée. ■

On va présenter un autre théorème de domination concernant de cette classe des applications voir [8, Theorem 3.6]. Pour la preuve on utilise la même idée qu'a utilisé dans [1].

Théorème 2.2.2 [8, Theorem 3.6] *Soit $1 \leq p < \infty$. On considère $S \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ et C est une constante positive, les propriétés suivantes sont équivalentes,*

- (1) *L'application S est $\tau(p)$ -sommante et $\|S\|_{\tau(p)} \leq C$.*
- (2) *Ils existent des mesures de probabilités μ_i ($i = 1, \dots, n$) sur $B_{E_i^*}$ et μ_{n+1} sur $B_{F^{**}}$, tel que pour tout $x_i \in E_i$ and $b \in F^*$, on a*

$$\begin{aligned} & |b(S(x_1, \dots, x_n))| \\ \leq & C \left(\int_{B_{E_1^*}} \dots \int_{B_{E_n^*}} \int_{B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu_{n+1}(\beta) d\mu_n(a_n) \dots d\mu_1(a_1) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Et

$$\|S\|_{\tau(p)} = \inf \{C > 0 : \text{Pour } C \text{ vérifié 2.11}\}.$$

Preuve. Ici, nous répétons la preuve du théorème précédent avec des modifications.

Nous ne sommes intéressés que par la première affirmation parce que nous utilisons 2.11, on montre facilement que S est $\tau(p)$ -sommante et $\|S\|_{\tau(p)} \leq C$.

\Leftarrow) On considère $C(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*})^*$ et $C(B_{F^{**}})^*$ avec leurs topologies faibles, respectivement. Ces ensembles sont convex et compacts aussi bien que $W(B_{E_1^*}) \times \dots \times W(B_{E_n^*}) \times W(B_{F^{**}})$. Pour toute famille finie des elements $x_{i1}, \dots, x_{im} \in E_i$ et $b_1, \dots, b_m \in F^*$, l'équation

$$\begin{aligned} & \phi(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) \\ = & \sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p \\ & - C^p \left(\int_{B_{E_1^*}} \dots \int_{B_{E_n^*}} \int_{B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu_{n+1}(\beta) d\mu_n(a_n) \dots d\mu_1(a_1) \right) \end{aligned}$$

définie une fonction réelle convexe et continue ϕ sur $W(B_{E_1^*}) \times \dots \times W(B_{E_n^*}) \times W(B_{F^{**}})$.

On choisit $a_{10} \in B_{E_1^*}, \dots, a_{n0} \in B_{E_n^*}$ et $\beta_0 \in B_{F^{**}}$ tel que

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) \dots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^p : \|a_i\|, \|\beta\| \leq 1 \right\} \\ = & \sum_{j=1}^m |a_{10}(x_{1j}) \dots a_{n0}(x_{nj}) \beta_0(b_j)|^p. \end{aligned}$$

Si $\delta_1(a_{10}), \dots, \delta_n(a_{n0}), \delta_{n+1}(\beta_0)$ désigne la mesure de Dirac au point $a_{10}, \dots, a_{n0}, \beta_0$ respectivement, alors nous avons

$$\begin{aligned} & \phi(\delta_1(a_{10}), \dots, \delta_n(a_{n0}), \delta_{n+1}(\beta_0)) \\ &= \sum_{j=1}^m |b_j(S(x_{1j}, \dots, x_{nj}))|^p - C^p |a_{10}(x_{1j}) \dots a_{n0}(x_{nj}) \beta_0(b_j)|^p \leq 0. \end{aligned}$$

Depuis la collection \mathcal{F} des fonctions obtenues de cette manière est concave. Par le lemme de Ky Fan (Lemme 1.3.3), il existe une mesure $\bar{\mu}_1 \times \dots \times \bar{\mu}_n \times \bar{\mu}_{n+1} \in W(B_{E_1^*}) \times \dots \times W(B_{E_n^*}) \times W(B_{F^{**}})$ telle que

$$\phi(\bar{\mu}_1 \times \dots \times \bar{\mu}_n \times \bar{\mu}_{n+1}) \leq 0, \forall \phi \in \mathcal{F}.$$

En particulier, si ϕ est généré par x_1, \dots, x_n et b , i.e.,

$$\begin{aligned} & \phi(\bar{\mu}_1 \times \dots \times \bar{\mu}_n \times \bar{\mu}_{n+1}) \\ &= |b(S(x_1, \dots, x_n))|^p \\ & \quad - C^p \left(\int_{B_{E_1^*}} \dots \int_{B_{E_n^*}} \int_{B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu_{n+1}(\beta) d\mu_n(a_n) \dots d\mu_1(a_1) \right), \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & |b(S(x_1, \dots, x_n))| \\ & \leq C \left(\int_{B_{E_1^*}} \dots \int_{B_{E_n^*}} \int_{B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu_{n+1}(\beta) d\mu_n(a_n) \dots d\mu_1(a_1) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

La preuve est achevée. ■

Chapitre 3

Exemples sur les applications n -linéaires $\tau(p, q)$ -sommantes

3.1 Les applications n -linéaires de rangs finis

Proposition 3.1.1 [8] Soient E_1, E_2, F des espaces de Banach et $\bar{a}_1^k \in E_1, \bar{a}_2^k \in E_2, \bar{y}^k \in F, \bar{a}_1^k, \bar{a}_2^k, \bar{y}^k \neq 0$ pour $k = 1, \dots, M$. Ensuite, une application de rang fini (voir la définition 1.1.2) $S \in \mathcal{L}_f(E_1, E_2; F)$,

$$S : E_1 \times E_2 \rightarrow F$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \sum_{k=1}^M \bar{a}_1^k(x_1) \bar{a}_2^k(x_2) \bar{y}^k$$

est 2-linéaire $\tau(p, q)$ sommante pour tout $1 \leq q \leq p$ avec

$$\|S\|_{\tau(p,q)} \leq \sum_{k=1}^M \|\bar{a}_1^k\| \|\bar{a}_2^k\| \|\bar{y}^k\|.$$

Preuve. Nous avons,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m |b_j S(x_{1j}, x_{2j})|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^M \bar{a}_1^k(x_{1j}) \bar{a}_2^k(x_{2j}) b_j(\bar{y}^k) \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{k=1}^M \left(\sum_{j=1}^m |\bar{a}_1^k(x_{1j}) \bar{a}_2^k(x_{2j}) b_j(\bar{y}^k)|^p \right)^{1/p} \\ &= \sum_{k=1}^M \left(\|\bar{a}_1^k\| \|\bar{a}_2^k\| \|\bar{y}^k\| \left(\sum_{j=1}^m \left| \frac{\bar{a}_1^k}{\|\bar{a}_1^k\|}(x_{1j}) \frac{\bar{a}_2^k}{\|\bar{a}_2^k\|}(x_{2j}) b_j\left(\frac{\|\bar{y}^k\|}{\|\bar{y}^k\|}\right) \right|^p \right)^{1/p} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^M \left(\|\bar{a}_1^k\| \|\bar{a}_2^k\| \|\bar{y}^k\| \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) a_2(x_{2j}) b_j(y)|^p \right)^{1/p} \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^M \|\bar{a}_1^k\| \|\bar{a}_2^k\| \|\bar{y}^k\| \right) \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) a_2(x_{2j}) b_j(y)|^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

donc S est 2-linéaire $\tau(p, q)$ -sommante et

$$\|S\|_{\tau(p,q)} \leq \sum_{k=1}^M \|\bar{a}_1^k\| \|\bar{a}_2^k\| \|\bar{y}^k\|.$$

■

3.2 Les applications bilinéaires nucléaires

Définition 3.2.1 [10] Une application bilinéaire $S \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ est dite nucléaire s'il admet une représentation de la forme,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} \otimes a_{2k} \otimes y_k,$$

avec

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{1k}\| \|a_{2k}\| \|y_k\| < \infty$$

et $\|S\|_{\mathcal{N}} = \inf C$, avec l'infimum pris sur toutes les représentations possibles de S . Et on note par $\mathcal{N}(E_1, E_2; F)$ l'espace de toutes les applications bilinéaires nucléaires.

Proposition 3.2.1 [8] Si $S \in \mathcal{N}(E_1, E_2; F)$, alors $S \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, E_2; F)$ et $\|S\|_{\tau(p)} \leq \|S\|_{\mathcal{N}}$.

Preuve. Supposer $a_{1k}, a_{2k}, y_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc nous avons

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m |b_j S(x_{1j}, x_{2j})|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}(x_{1j}) a_{2k}(x_{2j}) b_j(y_k) \right|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{1k}\| \frac{a_{1k}}{\|a_{1k}\|}(x_{1j}) \|a_{2k}\| \frac{a_{2k}}{\|a_{2k}\|}(x_{2j}) \|y_k\| b_j\left(\frac{y_k}{\|y_k\|}\right) \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m \left| \|a_{1k}\| \frac{a_{1k}}{\|a_{1k}\|}(x_{1j}) \|a_{2k}\| \frac{a_{2k}}{\|a_{2k}\|}(x_{2j}) \|y_k\| b_j\left(\frac{y_k}{\|y_k\|}\right) \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\|a_{1k}\| \|a_{2k}\| \|y_k\| \left(\sum_{j=1}^m \left| \frac{a_{1k}}{\|a_{1k}\|}(x_{1j}) \frac{a_{2k}}{\|a_{2k}\|}(x_{2j}) b_j\left(\frac{y_k}{\|y_k\|}\right) \right|^p \right)^{1/p} \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{1k}\| \|a_{2k}\| \|y_k\| \right) \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) a_2(x_{2j}) b_j(y)|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Ainsi S est $\tau(p)$ -sommante et $\|S\|_{\tau(p)} \leq \|S\|_{\mathcal{N}}$. ■

3.3 Les applications p -semi-intégrales

On rappelle la définition d'une application n -linéaire p -semi-intégrale (voir [2, pg 10]).

Définition 3.3.1 [2, p.10.] Une application $S \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ est p -semi-intégrale, s'il existe une constante $C \geq 0$ et une mesure de probabilité $\mu \in W(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*})$ tel que

$$\|S(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p d\mu(a_1, \dots, a_n) \right)^{1/p} \quad (3.3.1)$$

pour tout $x_i \in E_i$. L'espace de toutes les applications n -linéaires p -semi-intégrales noté par $\mathcal{L}_{si(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$ et sa norme est donnée par

$$\left\{ \|S\|_{si(p)} = \inf C, \text{ pour l'inégalité 3.3.1 est vérifiée} \right\}.$$

Proposition 3.3.1 [8] Soit $S \in \mathcal{L}_{si(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors $S \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $\|S\|_{si(p)} \leq \|S\|_{\tau(p)}$. Comme un cas particulier, si $F = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{L}_{si(p)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$ et $\|S\|_{si(p)} = \|S\|_{\tau(p)}$.

Preuve. Soit ν une mesure de probabilité régulière $B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}$ tel que $\nu(C) = \mu(C \times B_{F^{**}})$ pour chaque sous-ensemble \mathcal{C} borelien de $B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}$. Si $S \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$ et pour tout $x_i \in E_i$, puis par le Théorème 2.2.1 on a,

$$\begin{aligned} & |bS(x_1, \dots, x_n)| \\ & \leq \|S\|_{\tau(p)} \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta) \right)^{1/p} \\ & \leq \|S\|_{\tau(p)} \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p \|\beta\|^p \|b\|^p d\mu(a_1, \dots, a_n, \beta) \right)^{1/p} \\ & \leq \|b\| \|S\|_{\tau(p)} \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p d\nu(a_1, \dots, a_n) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|S(x_1, \dots, x_n)\| & = \sup_{\|b\| \leq 1} |bS(x_1, \dots, x_n)| \\ & \leq \|S\|_{\tau(p)} \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p d\nu(a_1, \dots, a_n) \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

i.e., S est p -semi-intégrale et $\|S\|_{si(p)} \leq \|S\|_{\tau(p)}$. Observez que si $F = \mathbb{K}$, nous avons aussi cela $\mathcal{L}_{si(p)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$, si $\delta(1) \in W(B_{\mathbb{K}})$ signifie la mesure de Dirac à $1 \in B_{\mathbb{K}^{**}}$, alors

$$\begin{aligned} & |bS(x_1, \dots, x_n)| \\ & \leq \|b\| \|S\|_{si(p)} \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p d\nu(a_1, \dots, a_n) \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_{B_{\mathbb{K}^{**}}} |\beta(b)|^p d\delta(1)(\beta) \right)^{1/p} \|S\|_{si(p)} \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p d\nu(a_1, \dots, a_n) \right)^{1/p} \\ & \leq \|S\|_{si(p)} \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{\mathbb{K}^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p |\beta(b)|^p d(\nu \times \delta(1))(a_1, \dots, a_n, \beta) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Depuis $(\nu \times \delta(1)) \in W(B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*} \times B_{\mathbb{K}^{**}})$. Il s'ensuit que S est $\tau(p)$ -sommante et $\|S\|_{si(p)} = \|S\|_{\tau(p)}$. ■

3.4 Les applications n -linéaires p -dominés

Définition 3.4.1 [4] Soit $S \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. On dira que S est p -dominé ($1 \leq p \leq \infty$) s'il existe une constante positive C telle que pour tout, $m \in \mathbb{N}$ et $(a_j^i)_{1 \leq j \leq m} \subset E_i$ ($1 \leq i \leq n$), on a

$$\left(\sum_{j=1}^m \|u(x_j^1, \dots, x_j^n)\|^{\frac{r}{n}} \right)^{\frac{n}{r}} \leq C \prod_{i=1}^m \left\| (x_j^i)_{1 \leq j \leq m} \right\|_{l_p^{n,w}}. \quad (3.4.1)$$

On note par $\mathcal{L}_{d(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$ l'espace de tous les opérateurs n -linéaires p -dominés de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F , qui un quasi-Banach si on considère la quasi-norme définie par

$$\delta_p(u) = \inf \{C \text{ vérifiant linéarité 3.4.1}\}.$$

Si $p > n$, $\delta_p(u)$ est une norme sur $\mathcal{L}_{d(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Théorème 3.4.1 [4] Une application $S \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ est p -dominé, si et seulement s'il existe une constante $C \geq 0$ et des mesures de probabilités $\mu_i \in W(B_{E_i^*})$ ($i = 1, \dots, n$) tel que

$$\begin{aligned} & \|S(x_1, \dots, x_n)\| \\ & \leq C \left(\int_{B_{E_1^*}} \dots \int_{B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p d\mu_n(a_n) \dots d\mu_1(a_1) \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

pour tout $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$, dans ce cas $\|S\|_{d(p)} = \inf C$ (see 3.2 in [3], p. 12).

Proposition 3.4.1 [8] Soit $S \in \mathcal{L}_{si(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors $S \in \mathcal{L}_{d(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $\|S\|_{d(p)} \leq \|S\|_{\tau(p)}$. En particulier, si $F = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{L}_{si(p)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$ et $\|S\|_{d(p)} = \|S\|_{\tau(p)}$

Preuve. soit $\mu_i \in W(B_{E_i^*})$ et $\mu_{n+1} \in W(B_{F^{**}})$ sont des mesures de probabilités régulières $B_{E_i^*}$ ($i = 1, \dots, n$) et $B_{F^{**}}$, respectivement. Si $S \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$ et pour tout $x_i \in E_i$, alors par l'inégalité 2.11 on a

$$\begin{aligned} & |bS(x_1, \dots, x_n)| \\ & \leq \|S\|_{\tau(p)} \left(\int_{B_{E_1^*}} \dots \int_{B_{E_n^*}} \int_{B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\mu_{n+1}(\beta) d\mu_n(a_n) \dots d\mu_1(a_1) \right)^{1/p} \\ & \leq \|S\|_{\tau(p)} \left(\int_{B_{E_1^*}} \dots \int_{B_{E_n^*}} \int_{B_{F^{**}}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)| \|\beta\| \|b\|^p d\mu_{n+1}(\beta) d\mu_n(a_n) \dots d\mu_1(a_1) \right)^{1/p} \\ & \leq \|b\| \|S\|_{\tau(p)} \left(\int_{B_{E_1^*}} \dots \int_{B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \dots a_n(x_n)|^p d\mu_n(a_n) \dots d\mu_1(a_1) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \|S(x_1, \dots, x_n)\| \\ &= \sup_{\|b\| \leq 1} |bS(x_1, \dots, x_n)| \\ &\leq \|S\|_{\tau(p)} \left(\int_{B_{E_1^*}} \cdots \int_{B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \cdots a_n(x_n)|^p d\mu_n(a_n) \cdots d\mu_1(a_1) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

i.e., S est p -dominé et $\|S\|_{d(p)} \leq \|S\|_{\tau(p)}$. On remarque que si $F = \mathbb{k}$, on a aussi $\mathcal{L}_{d(p)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{k}) \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{k})$, donc si $\delta(1) \in W(B_{\mathbb{k}^{**}})$ signifie la mesure de Dirac à $1 \in B_{\mathbb{k}^{**}}$, on a

$$\begin{aligned} & |bS(x_1, \dots, x_n)| \\ &\leq \|b\| \|S\|_{d(p)} \left(\int_{B_{E_1^*}} \cdots \int_{B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \cdots a_n(x_n)|^p d\mu_n(a_n) \cdots d\mu_1(a_1) \right)^{1/p} \\ &\leq \|S\|_{d(p)} \left(\int_{B_{\mathbb{k}^{**}}} |\beta(b)|^p d\delta(1)(\beta) \right)^{1/p} \left(\int_{B_{E_1^*}} \cdots \int_{B_{E_n^*}} |a_1(x_1) \cdots a_n(x_n)|^p d\mu_n(a_n) \cdots d\mu_1(a_1) \right)^{1/p} \\ &\leq \|S\|_{d(p)} \left(\int_{B_{E_1^*}} \cdots \int_{B_{E_n^*}} \int_{B_{\mathbb{k}^{**}}} |a_1(x_1) \cdots a_n(x_n) \beta(b)|^p d\delta(1)(\beta) d\mu_n(a_n) \cdots d\mu_1(a_1) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Selon 2.2.2, S est $\tau(p)$ -sommante et $\|S\|_{d(p)} = \|S\|_{\tau(p)}$.

En d'autres termes, $S \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{k})$ est p -dominé, si et seulement si, c'est $\tau(p)$ -sommante. ■

3.5 Les applications approximables

Définition 3.5.1 Soit $S \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. On dit que S est approximable s'il existe une suite $S_k \in \mathcal{L}_f(E_1, E_2; F)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a K_ε tel que $\|S - S_k\| \leq \varepsilon$ où $k \geq K_\varepsilon$. Pour $1 \leq q \leq p$, par 3.1.1 pour chaque $k = 1, 2, \dots$ il existe des constantes C_k tel que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m |b_j S_k(x_{1j}, x_{2j})|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C_k \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\vartheta\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) a_2(x_{2j}) b_j(\vartheta)|^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

Définition 3.5.2 (pour tout $k = 1, 2, \dots$) avec $m \in \mathbb{N}$, $x_{ij} \in E_i$, $b_j \in F^*$ et $j = 1, 2, \dots, m$.

Proposition 3.5.1 [8] Soit $S \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Si S est approximative, alors S est $\tau(p; q)$ -sommante et $\|S\|_{\tau(p)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$.

Preuve. On prend $\varepsilon > 0$, choisissant $k \geq K_\varepsilon$ pour obtenir cela

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^m |b_j S(x_{1j}, x_{2j})|^p \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\sum_{j=1}^m |b_j (S - S_k)(x_{1j}, x_{2j})|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m |b_j S_k(x_{1j}, x_{2j})|^p \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\sum_{j=1}^m (\|b_j\| \|S - S_k\| \|x_{1j}\| \|x_{2j}\|)^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m |b_j S_k(x_{1j}, x_{2j})|^p \right)^{1/p} \\
 & \leq \varepsilon \left(\sum_{j=1}^m (\|b_j\| \|x_{1j}\| \|x_{2j}\|)^p \right)^{1/p} + C_k \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^m |a_1(x_{1j}) a_2(x_{2j}) b_j(y)|^q \right)^{1/q}
 \end{aligned}$$

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k$ existe et est finie, alors S est $\tau(p; q)$ -sommante et $\|S\|_{\tau(p)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$. ■

Conclusion

A la fin de ce mémoire, on conclut que plusieurs classes des applications multilinéaires dans la catégorie de sommabilité sont des cas spéciaux de la classe des applications multilinéaires $\tau(p; q)$ -sommantes.

Bibliographie

- [1] D. ACHOUR AND L. MEZRAG, *On the Cohen strongly p -summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), 55-63.
- [2] R. L. ALENCAR AND M. C. MATOS, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*. Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático de la U.C.M., Madrid (**12**) (1) (1989).
- [3] J. DIESTEL, H. JARCHOW AND A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., Cambridge University Press, Cambridge, (**43**) (1995).
- [4] S. GEISS, *Ideale multilinearer Abbildungen*. Diplomarbeit, (1984).
- [5] J. LINDENSTRAUSS, A. PELCZYŃSKI, *Absolutely summing operators in L_p -spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275-326.
- [6] M. C. MATOS, *On multilinear mappings of nuclear type*. Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid (**6**) (1993), 61–81. Zbl 0807.46022 MR 1245025
- [7] X. MUJICA, *Aplicações $\tau(p; q)$ -somantes e $\sigma(p)$ -nucleares*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matematica, Campinas 2006. <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000378266>.
- [8] X. MUJICA, *$\tau(p; q)$ -summing mappings and the domination theorem*, Portugal. Math. (N. S.) **65** (2) (2008), 211–226.
- [9] A. PIETSCH, *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math, **28** (1967), 333-353.

- [10] A. PIETSCH, *Operator ideals*. North-Holland Math. Library 20, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1980. (4)(2014), 751–765.
- [11] D. PEREZ-GARCIA, I. VILLANUEVA, *A composition theorems for multiple summing operators*. *Montsh. Math.* (146) (2005), 257-261