



N° d'ordre:

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIORAT

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

Spécialité : **Mathématiques**

Option : Mathématiques discrètes

P a r

Mr DJERAD Abdelkader

SUJET

**Etude numérique d'un écoulement réactif dans une configuration
axisymétrique par la méthode
de volumes finis**

Soutenu le :02/12/2009

Le jury dont les membres sont cités ci-après est proposé pour la soutenance de Mémoire de
MAGISTERE en Mathématiques :

Mr Benhamidouche Noureddine	Professeur	Président	Université de M'sila
Mr Bouderah Brahim	Professeur	Rapporteur :	Université de M'sila
Mr Bensalem Naceurdine	Professeur	Examineurs :	UFAS de Sétif
Mr Gasmi Abdelkader	M. de Conférence	Examineurs	Université de M'sila
Mr Chehat Abdelmadjid	M. A .C. C	Membre Invité	Université de M'sila

Promotion : 2009/2010

Table des matières

	Page
0. INTRODUCTION GENERALE	
0.1 INTRODUCTION.....	07
0.1.1 Etude bibliographique.....	10
0.1.2 Objectif du travail.....	12
0.1.3 Contenu de mémoire.....	13

CHAPITRE 01

PROCESSUS DANS LES CHAUDIERES ET NOTIONS SUR LA COMBUSTION

1.1 PROCESSUS DANS LES CHAUDIERES.....	15
1.1.1 Chaudière en acier.....	16
1.1.2 Domaine d'étude et dimensionnement.....	16
1.1.3 Position du problème.....	18

CHAPITRE 02

FORMULATION MATHÉMATIQUES ET MÉTHODES DE DISCRETISATION

2.1 FORMULATION MATHÉMATIQUE.....	23
2.1.1 Equations de l'aérothermochimie turbulent.....	24
2.1.2.Equation de continuité.....	24
2.1.3 Equations de quantité de mouvement.....	24
2.1.4 Modèle k-E.....	25
2.1.5 Equations de conservation de l'énergie.....	27
2.1.6 Equations de transfert radiatif.....	28
2.1.7 Equations de conservation des espèces chimiques.....	29
2.2 MODELISATION DE LA COMBUSTION.....	30
2.2.1 Modèle Eddy Dissipation.....	30
2.2.2 Traitement près des parois.....	31
2.2.3 Fonction de paroi standard	33

2.2.4 Conditions aux limites (CL).....	35
2.3 METHODE DE DISCRETISATION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.....	36
2.3.1 Présentation générale.....	36
2.3.2 L'approche différemment finies en dimension un.....	38
2.3.3 Approximation par différences finies en dimension supérieur.....	45
2.3.4 L'approche élément finis en dimension un.....	49
2.3.5 L'approche volumes finis.....	58

CHAPITRE 03

METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION

3.1 Méthode des volumes finis	63
3.2 Maillage	64
3.3 Discrétisation.....	65
3.3.1 Linéarisation de l'équation discrétisée.....	66
3.3.2 Sous relaxation.....	66
3.4 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement.....	67
3.4.1 Schéma du premier ordre amont.....	68

3.4.2 Schéma du second ordre amont.....	68
3.4.3 Schéma Quick.....	63
3.5 Interpolation de la pression.....	70
3.5.1 Schéma standard.....	70
3.5.2 Schéma du second ordre.....	70
3.5.3 Schéma PRESTO (option de pression décalée)	71
3.6 Discrétisation de l'équation de continuité.....	71
3.7 Couplage Vitesse–Pression	71
3.7.1 Algorithme SIMPLE.....	72
3.8 Procédure de résolution.....	73
3.9 Algorithme de calcul.....	74

CHAPITRE 04

RESULTATS ET DISCUSSIONS

5.1 Les forces de gravités nulles ($g=0$).....	77
5.1.1 Fond plat	77
5.1.2 Fond bombé.....	79
5.2 Comparaison.....	81
5.2.1 Remarque importante.....	82
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES FUTURES.....	84
REFERENCES	87

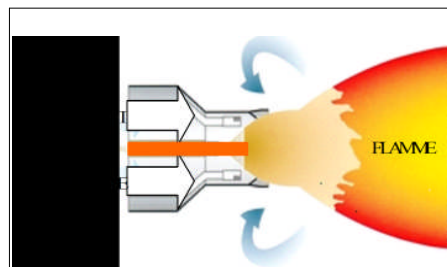
INTRODUCTION GENERALE

Introduction

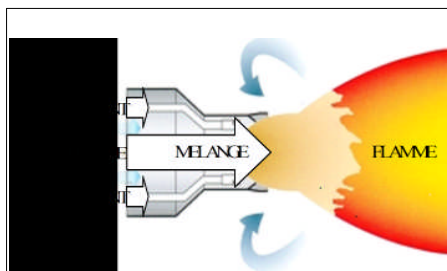
La combustion est aujourd'hui l'un des principaux moyens de conversion de l'énergie 75/80 pourcent de l'énergie produite au monde. Elle est utilisée dans des nombreux systèmes pratiques aussi bien pour produire de la chaleur (chaudières ou fours domestiques et industriels), de l'électricité (centrales thermiques), que pour le transport (moteurs automobiles et aéronautiques, moteurs, fusées,...) ou encore la destruction de déchets (incinérateurs). La combustion peut être caractérisée comme une (ou des) réaction(s) irréversible(s) fortement exothermique(s) entre un combustible et un comburant (ou oxydant) selon le schéma global :

Combustible+comburant \Rightarrow Produits de combustion+chaleur

La combustion généralement produite d'énergie, cette énergie thermique est ensuite soit utilisée directement, ou convertie en énergie mécanique dans des turbines à gaz ou des moteurs à piston. Bien évidemment, la combustion gazeuse requiert la description de l'écoulement (mécanique des fluides). Deux situations génériques idéales, schématisées sur les figures 1 et 2, ont été identifiées, selon la procédure utilisée pour introduire les réactifs dans le foyer. Dans les flammes prémélangées, les réactifs, combustible et comburant, sont mélangés avant la zone de réaction. Au contraire, dans les flammes non-prémélangées ou de diffusion, les réactifs sont introduits séparément, de part et d'autre de la flamme et sont alors essentiellement entraînés l'un vers l'autre par diffusion moléculaire.



Flamme non-prémélangée



Flamme prémélangée

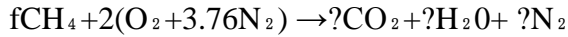
La combustion prémélangée est, a priori, plus efficace puisque les réactifs sont déjà en contact avant la combustion. Mais, une telle flamme est susceptible de se propager dans le mélange combustible / oxydant jusqu'à l'endroit où s'effectue le mélange, ce qui pose des problèmes de sécurité.

Donc :

La combustion: c'est un écoulement dans lequel on a des transformations chimiques: brûlons du gaz dans de l'air: la stoechiométrie donne :



Mais ;On n aura pas toujours exactement une mole de CH4 pour 2 moles d'air ! Que se passe t il si



Avec $f < 1$: on appelle ça la combustion PAUVRE

Avec $f > 1$: on appelle ça la combustion RICHE

Combustion pauvre ou riche

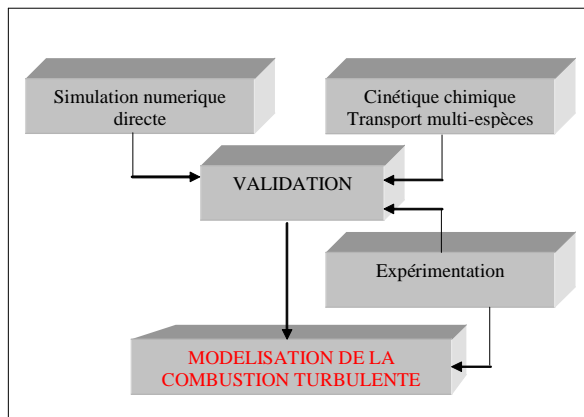
Si $f < 1$: $f\text{CH}_4 + 2(\text{O}_2 + 3.76\text{N}_2) \rightarrow f\text{CO}_2 + 2f\text{H}_2\text{O} + 2^{\ast} 3.76\text{N}_2 + 2(1-f)\text{O}_2$ Et il reste de l'oxygène

Si $f > 1$: $f\text{CH}_4 + 2(\text{O}_2 + 3.76\text{N}_2) \rightarrow \text{CO}_2 + 2f\text{H}_2\text{O} + 2^{\ast} 3.76\text{N}_2 + (f-1)\text{CH}_4$ Et il reste du CH4

Notez bien qu'on paie le CH4 mais en général pas l'air \Rightarrow mieux vaut travailler en pauvre!

L'objectif des recherches en combustion turbulente est principalement de mieux comprendre les phénomènes complexes qui entrent en jeu pour pouvoir les modéliser car l'objectif final est la simulation numérique complète d'un système industriel. Ils pourraient être sensiblement réduits en optimisant par simulation numérique un foyer avant de construire un prototype aussi proche que possible du produit final.

Compte tenu de la complexité des foyers industriels et des performances malgré tout limitées des ordinateurs les plus puissants, la simulation numérique prédictive de systèmes réels requiert la modélisation des phénomènes intervenant dans la combustion turbulente. Cette approche, bien connue pour la simulation des écoulements turbulents, est ici compliquée par la présence de la combustion. La démarche employée peut alors se résumer (figure 03) en plusieurs phases.



Démarche pour modéliser la combustion

- La modélisation proprement dite, propose des fermetures pour les termes inconnus des équations exactes. Cette étape fait la synthèse des informations acquises précédemment avant d'incorporer les fermetures proposées dans un code de simulation numérique d'écoulements réactifs turbulents.

- La validation: Il s'agit cette fois, à partir d'expériences plus proches des foyers industriels, de valider les modèles proposés en comparant résultats expérimentaux et prédictions numériques. L'étape ultime de ce processus est la validation sur un foyer réel.

Concernant les travaux numériques, les codes de simulation deviennent un outil indispensable pour l'étude des phénomènes physiques très complexes dont les écoulements réactifs en font partie et pour la validation des résultats expérimentaux. Récemment le code Fluent est devenu l'un des outils les plus utilisés pour la simulation de tous les phénomènes dans le domaine de l'énergétique tant pour l'industrie que pour la recherche.

Etude bibliographique

Ce n'est que dans les années 40 qu'on a commencé à étudier sérieusement les flammes turbulentes avec des travaux théoriques et expérimentaux. Damker [1] par exemple a montré l'influence du nombre de Reynolds sur la vitesse de la flamme en le régime turbulent et l'effet de la géométrie a été exploré.

Hotell et Hawthorne, en 1949 [2] ont montré que la longueur d'une flamme de diffusion turbulente ne dépend pas de la vitesse d'arrivée des gaz alors que celle d'une flamme de diffusion laminaire est proportionnelle à celle-ci. Kuo et al. [3] ont considéré dans leur approche que l'échelle temporelle associée à la flamme turbulente est différente de celle de la flamme laminaire. La modélisation de la combustion non prémélangée a commencé par l'approche de Bilger [4], celle-ci permet de calculer le champ des fractions massiques moyen et de leurs fluctuations sans faire appel au taux de réaction, lorsque les fractions massiques sont reliées à la fraction de mélange de façon parfaitement déterministe. La modélisation ou le taux moyen de réaction est supposé proportionnel à une « surface moyenne de flamme par unité de volume » a été proposé en 1978 par Marble et Broadwell [6]. C'est le modèle dit « de la flamme cohérente », qui a été ensuite transposé aux flammes de prémélange. Bray [7] a étudié l'interaction entre la turbulence et la combustion d'un point de vue modélisation. Borghi et Dutoya [8] ont traité le problème de fermeture du flux diffusif turbulent et la destruction moléculaire des fluctuations des espèces réactives (ou de la température) en considérant les formes de la PDF (Probability Density Function) pour les vitesses et les concentrations des espèces. Une comparaison de calcul d'expériences tiré de [9] démontre que les profils des fractions massiques des espèces chimiques sont majoritaires, ainsi que la température. Il s'agit là encore de valeurs moyennes, bien sûr. L'accord semble tout à fait satisfaisant, compte tenu des difficultés de mesure. L'influence des modèles de turbulence sur la simulation des jets et des flammes a été explorée par plusieurs auteurs comme KUCUKGOKOGLAN et al. [12] qui ont présenté dans leur travail une description de la performance de trois variantes du modèle de turbulence $k-\epsilon$: (k - Standard et k - Réalisable) pour un écoulement turbulent isotherme avec swirl, dans un four à plusieurs brûleurs. Ils ont expliqué que c'est à une distance égale à au moins une fois et demi du diamètre de ce type de brûleurs, en aval de la sortie, que l'allumage de flamme se produit généralement et que c'est dans cette région aussi qu'il y a une production d'une quantité substantielle de toutes les émissions des oxydes d'azote (NO). Ils ont trouvé que l'utilisation de ces trois variantes du modèle $k-\epsilon$, pour la simulation des écoulements turbulents isothermes avec swirl, donne des résultats plus proches des résultats expérimentaux. Les résultats numériques sont en bon accord avec les données expérimentales.

Objectifs du travail

L'objectif principal du présent travail est la simulation numérique par la méthode des volumes finis d'une combustion d'écoulement réactif turbulent dans le cas d'une flamme de diffusion (non-prémélangée) injecter par un brûleur à gaz naturel (méthane CH_4), le modèle de chaudière en acier d'un foyer cylindrique à un fond plat et un autre foyer à un fond bombé. Le modèle de chaudière étudié est celui de la fabrication de la société ECO CHAUD . L'utilisation des capacités de simulation qu'offre le code "Fluent" représente une partie non négligeable du présent travail. La construction du modèle géométrique, du maillage et des conditions aux limites est générée avec le préprocesseur "Gambit".

Contenu du mémoire

Ce mémoire s'articulera sur quatre parties:

La première partie est consacrée à quelques définitions et descriptions concernant la chaudière, foyer de combustion et des notions fondamentales sur la combustion, l'écoulement réactif, les flammes laminaires et turbulentes et une description du problème réel avec l'effet de gravitation ($g=0, g$) pour les deux fonds proposés. Dans la seconde partie, nous présenterons la formulation mathématique du problème entamé. La troisième partie détaillera les méthodes de discrétisation des équations aux dérivées partielles avec l'approche de différences finies, éléments finis et volumes finis. On y trouve les équations de l'aérothermochimie décrivant les écoulements réactifs et les deux variantes modèle $k-\epsilon$ pour la turbulence et celui de EDDY dissipation pour la modélisation de la combustion turbulente. La troisième partie sera dédiée à l'application de la procédure numérique avec laquelle le code Fluent traite les différents problèmes abordés. En fin, les résultats seront analysés, interprétés et discutés dans la quatrième partie. Une synthèse de l'étude avec une conclusion finale et des perspectives futures seront consacrés à la fin de ce mémoire.

CHAPITRE 01
Processus dans les chaudières
et
Notions de combustions

PROCESSUS DANS LES CHAUDIERS

INTRODUCTION SUR LES CHAUDIERES

Une chaudière est un réservoir contenant un Liquide caloriporteur et muni d'un système de chauffage le foyer dans le cas du bois et du charbon et d'un brûleur pour le fioul ou le gaz. Son but est de produire et stocker de l'énergie thermique dans ce liquide et d'utiliser cette énergie en action mécanique par ex: locomotive, navire ou a des fin de chauffages de locaux. Le liquide chauffé est transporté à l'aide de tuyauteries jusqu'au lieu d'utilisation. Le liquide (chaudière a tube d'eau) ou la vapeur (chaudière à tube de fumée) produite sort par une tuyauterie fixée sur sa partie haute et revient par une autre tuyauterie fixée sur sa partie basse après avoir circulé et s'être refroidi.



Chaudiere a vapeur

Définition scientifique :

système permettant d'augmenter la température d'un Liquide caloriporteur en vue de transporter de l'énergie thermique. Le liquide est qualifié de caloporteur.

Types des chaudières

On distingue les chaudières principalement par leur architecture interne: on cite les chaudière à tube de fumées, historiquement sont les premiers types de construction et les chaudières à tube d'eau.

CHAUDIERE EN ACIER

Les chaudière en acier à eau chaude se retrouvent dans tout les installations des chauffage central domestique et industrielle, avec des valeurs calorifiques variables entre domestique (de 10kw a 150 kw) et industrielle (de 100kw a 5000 kw ,et plus)



Chaudiere en acier

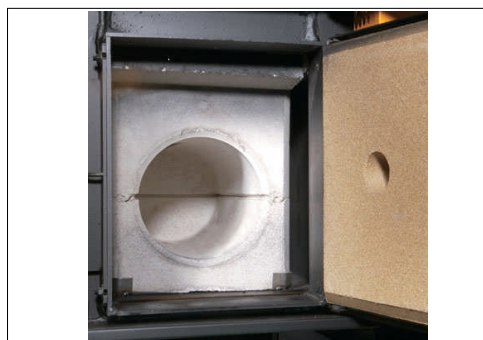
CHAUDIERE A GAZ

Une chaudière gaz est une chaudière utilisant le gaz comme combustible, gaz naturel, propane butane. La chaudière gaz est dite à simple ou double service selon le cas où la chaudière produit du chauffage ou du chauffage et de l'eau chaude sanitaire.

DOMAINE D'ETUDE ET DIMENSIONNEMENT

LA CHAMBRE DE COMBUSTION

Une chambre de combustion est une enceinte capable de résister à des changements de pression et de températures brusques, dans laquelle on déclenche volontairement une combustion entre des éléments chimiques déterminés. Cette enceinte est conçue pour obtenir, à partir des gaz issus de la combustion, un travail ou une force, avant qu'ils ne soient évacués.



La Chambre de combustion

Fonctions:

La chambre de combustion doit assurer les fonctions suivantes:

- mélanger les ergols venant du système d'alimentation
- permettre la réaction chimique entre ces ergols
- accélérer les gaz de combustion vers la tuyère

Composition:

Elle est constituée des deux sous-ensembles suivants: le système d'injection et le corps de chambre

Les injecteurs

Il existe trois principaux types d'injecteur. Le plus connu d'entre eux est l'injection séquentielle. Les injecteurs assurent la vaporisation de chaque ergol dans la chambre et permettent leur mélange. Il en existe de différents types. Chacun a ses avantages et ses inconvénients :

La stabilité de combustion:

Les instabilités de combustion résultent d'un couplage entre le processus de combustion et la dynamique des différents fluides. Ce couplage est essentiellement déterminé par les injecteurs. Ces instabilités ont le plus souvent un effet néfaste sur le comportement du propulseur et doivent donc être éliminées.

POSITION DU PROBLEME

INTRODUCTION

Comment une chaudière doit être compétitive?

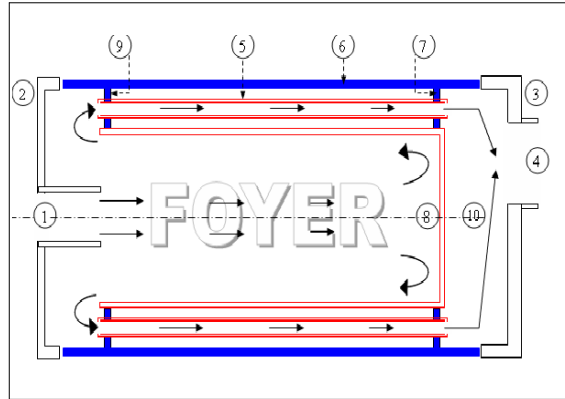
Pour qu'une chaudière soit compétitive elle doit, au risque de formuler une lapalissade, coûter le moins cher possible tout en assurant le service exigé. Réduire les coûts doit se faire à toutes les étapes de la conception de la chaudière.

1. Minimiser les surfaces d'échange : Cette surface doit être minimale sans pénaliser le rendement du brûleur.
2. Choisir les matériaux les mieux adaptés aux gammes de températures et de pressions rencontrées
3. Choisir au mieux les marges de sécurité :

L'intérieur de la chaudière est différent suivant l'architecture présente par le constructeur, mais toutes les différents types de chaudières se réunissent sur l'existence d'un foyer de combustion comme une partie principale de la chaudière, car tous les transferts chimiques et les phénomènes physiques se produisent à l'intérieur du foyer qui oblige le fabricant de concevoir un foyer qui répond à toutes les normes exigées d'une chaudière compétitive.

DESCRIPTION DE LA CHAUDIERE

Dans le cadre de ce mémoire, notre travail se base sur la chaudière de model CH01 de puissance 100 000 kcal/h (100KW) de la marque ECOCHAUD alimentée par un brûleur de marque ECOFLAM (Italien) de model BLU 150 de puissance (60 000 a 120 000) kcal/h , à air soufflé, dimensionné géométriquement. (Voir Figure (1.4)).

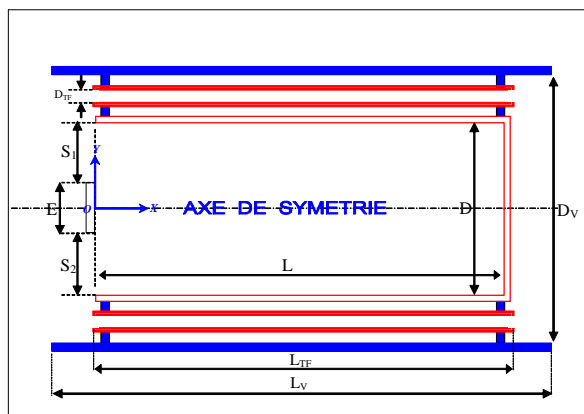


Description de la chaudière

- 1- Canon de la chaudière,
- 2- Porte avant,
- 3- Porte arrière,
- 4- Buse de fumée,
- 5- Tube de fumée,
- 6- Virole
- 7-Plaque tubulaire arrière,
- 8-Fond de foyer (plat),
- 9- Plaque tubulaire avant,
- 10- Axe de symétrie
- 11- Emplacement de brûleur
- Direction de la flamme / Gaz brûlé

Dimensionnement « géométrique » de la chaudière Model CH01 P100

On présente ci-dessous, la figure (1.5), qui est une vue de coupe de la chaudière model CH01 de puissance 100 000 kcal/h, avec le dimensionnement réel. Les métaux utilise en général c'est de l'acier lamine a chaud (LAC / E 24)(virole,plaque tubulaire), et l'acier réfractaire (tubes de fumée,foyer,fond)



Dimensionnement "géométrique" de la chaudière

L : Longueur de foyer
 L_{TF}: Longueur de tube de fumée
 L_V: Longueur de virole
 D : Diamètre de foyer
 D_V: Diamètre de virole
 D_{TF}: Diamètre de tube de fumée
 E : Entrée de flamme
 S₁: Sortie des gaz brûlés(haut)
 S₂: Sortie des gaz brûlés(bas)

	L	L _{TF}	L _V	D	D _V	D _{TF}	E	S ₁	S ₂
Dimensions / mm	800	820	1100	500	720	35	100	200	200

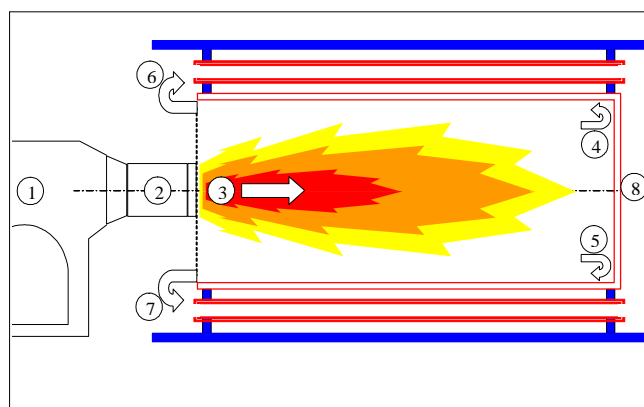
Déroulement et fonctionnement

Le rôle du brûleur est en général double: assurer le mélange carburant - comburant dans les proportions choisies (léger excès d'air par ex), et réaliser la combustion de ce mélange dans les conditions optimales (allumage et maintien de la flamme, combustion complète). Il a donc un rôle déterminant dans la qualité de la combustion, et par suite dans l'émission de polluants ou d'imbrûlés en plus ou moins grande quantité dans les fumées.

Après la mise en service du brûleur (1) une combustion (3) de gaz naturel sera présente au foyer de la chaudière, dégager au canon (2) du brûleur, le résultat est une flamme de longueur inférieure à L_F et largeur inférieure de D_F ;

PREMIER CAS

Le fond plat qui se trouve à la fin du foyer oblige les gaz brûlés de faire un retour (4) et (5) vers la direction opposée et sortir par (6) et (7) à l'aide des tubes de fumée, voir figure (1.6)



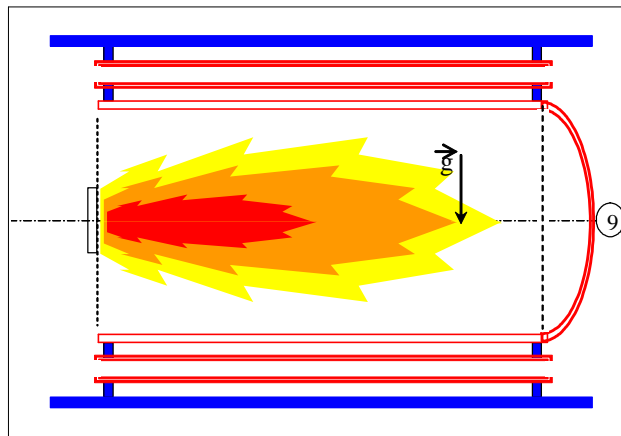
Déroulement et fonctionnement avec fond plat

- 1-Brûleur à gaz naturel,
- 2-Canon de brûleur,
- 3- Injection de gaz et direction des flammes,

- 4- Retour des gaz brûlés vers le haut,
- 5- Retour des gaz brûlés vers le bas,
- 6- Sortie des gaz brûlés vers le haut,
- 7- Sortie des gaz brûlés vers le bas,
- 8- Fond de foyer (plat).

DEUXIEME CAS

Dans ce cas on va proposer un fond de foyer (8) (voir figure (1.6)) à une forme demi sphérique (fond bombé (9)) voir figure (1.7) ; qui aide le retour rapide des gaz brûlés et faire glisser l'attaque de flamme pour ne pas causer des endommagements à la matière du fond et augmente la durée de vie du foyer et donc de la chaudière.



Foyer avec fond bombé

Et aussi faire une comparaison total de tout les résultats entre les deux cas et voir l'effet du fond bombé sur les caractères de la chaudière et leur puissance thermique.

- 9- Fond de foyer (bombé),
- g : La force de gravitation.

AUTRE CAS: Dans les deux cas précédents, on va traiter l'influence de la gravité $g=9.8m/s^2$ et le cas où $g=0$.

CHAPITRE 02
Formulation numerique
et
Methodes de discretisation

FORMULATION MATHÉMATIQUE

Equations de l'Aerothermochimie turbulente

La modelisation mathematique d'un ecoulement turbulent avec ou sans reaction chimique est classiquement menée a l'aide de la résolution des équations differentielles aux derivees partielles du type elliptique non lineaire. Ces equations expriment les principes de conservation de masse, de quantite de mouvement et des especes chimiques dans un volume elementaire de fluide (gaz, traitement Eulerien).

Equation de continuite

L'equation qui exprime la conservation de masse est donnée comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

u_i : est la composante du vecteur vitesse selon l'axe i .

Equations de conservation de quantite de mouvement

Les equations de quantite de mouvement moyennes de Navier Stokes, connues sous le nom de RANS sont pour un fluide incompressible et newtonien donnees par :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{\rho u'_i u'_j} \right) + F_i$$

$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)$:Transport convectif.

$\frac{\partial p}{\partial x_i}$:Forces dues au pression.

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right]$:Forces de viscosite.

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{\rho u'_i u'_j} \right)$:Forces generes par la turbulence.

F_i , : Forces de volume

Ou les $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ sont les composantes du tenseur des contraintes de Reynolds

Pour les relier a l'ecoulement moyen, on a recours au concept de Boussinesq [21] qui permet de les exprimer en fonction des gradients des vitesses moyennes :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\rho k + \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}$$

Modele k-ε

Le modele k-ε standard [22] est un modele semi empirique base sur les equations de transport de l'energie cinetique turbulente k et de sa dissipation ε. L'equation modelisee de l'energie turbulente est derivee de l'equation exacte. Celle de la dissipation est obtenue sur la base d'un raisonnement physique. Dans ce modele, l'ecoulement est suppose completement turbulent.

Equation de transport de l'energie cinetique turbulente

L'equation de l'energie cinetique est donnee comme suite :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon$$

- Modelisation du terme de production turbulente :

Ce terme est defini par :

$$G_k = -\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$
$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{\rho \Gamma_t} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$
$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

Ou : G_b est l'effet Buyancy (pousee d'Archimede)

- Modelisation de la viscosite turbulente :

La viscosite turbulente μ est obtenue en combinant k et ε comme suit :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Pour la constante C_μ = 0.09

Equation de transport du taux de dissipation de l'energie cinetique turbulente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + G_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon u_j)$: Transport convectif

$C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + G_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$: Terme source

Les constantes usuelles du modele de turbulence k-ε sont donnees a partir de l'experience ou de la theorie par :

C_ε = 1.44 , C_{2ε} = 1.92 , C_μ = 0.09 , σ_k = 1.00 , σ_μ = 1.30.

Equations de Conservation de l'Energie

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i E) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[k_{eff} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \sum h_j J_j + u_i (\tau_{ij})_{eff} \right] + S_h$$

Avec :

$$J_j = - \left(\rho D_{i,m} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_i}$$

$$(\tau_{ij})_{eff} = \mu_{eff} \left(\frac{u_j}{x_i} + \frac{u_i}{x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu_{eff} \frac{u_i}{x_i} \delta_{ij}$$

Dans cette equation :

$$E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{u_i^2}{2}$$

\vec{j} : Vecteur flux de chaleur du a la conduction et a la diffusion de l'enthalpie (effet Duffour).

K_{eff} : Conductivite effective ($k + k_t$, ou k_t est la conductivite thermique turbulente).

$(\tau_{ij})_{eff}$: Tenseur effectif newtonien des contraintes visqueuses.

T : Temperature du mélange.

h : Enthalpie specifique du mélange

$D = D_{i,m}$: Coefficient de diffusion de l'espèce i dans le mélange (loi de Fick).

S_h : Energie due a la reaction chimique et au rayonnement.

Equations d'etat :

On suppose que le fluide est un mélange homogène de gaz parfait, ainsi on peut écrire les relations suivantes :

$$p = \rho R T \sum \frac{Y_i}{M_i}$$

$$h = \sum h_i(T) Y_i$$

$$h_i = \int_{T_{ref}}^T c_{p,i} dT$$

$$C_p = C_p(T) = \sum_m C_{p,i}(T) Y_i$$

C_p : est la capacite calorifique du mélange.

M_i : est la fraction massique de l'espèce i .

Equation du transfert radiatif

L'equation radiative de transfert (RTE) pour le modèle Discret Ordinate Model est :

$$\frac{\partial I_{si}}{\partial x_i} + (a + \sigma_s)I(r, s) = an^2 \frac{\sigma T^4}{\pi} + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_0^{4\pi} I(r, s') \phi(s, s') d\Omega'$$

$(a + \sigma_s)I(r, s)$: Absorption

$an^2 \frac{\sigma T^4}{\pi}$: Admission

$\frac{\sigma_s}{4\pi} \int_0^{4\pi} I(r, s') \phi(s, s') d\Omega'$: Diffusion

\vec{r} : Vecteur de position.

\vec{s} : Vecteur de direction.

\vec{s}' : Vecteur de diffusion.

s : Longueur de chemin.

a : Coefficient d'absorption.

n : Indice de refraction.

σ_s : Coefficient de diffusion.

σ : Constante de Stefan-Boltzmann.

I : Intensite de rayonnement.

T : Temperature locale.

ϕ : Fonction de phase.

Ω' : Angle plein.

Equations de conservation des especes chimiques :

La determination de la fraction massique pour chaque espece, Y_i , se fait par la solution de l'equation de transport de la ieme espece, qui a la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v Y_i) = -\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\left(\rho D_{i,m} + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) Y_i \right] + R_i$$

Y_i : est la fraction massique de l'espece i ;

Sc_t : est le nombre de Schmidt turbulent $\frac{\mu_t}{\rho D_t}$,

R_i : est le taux net de production par reaction chimique.

Calcul de la masse volumique

Dans ce travail la masse volumique est calculee suivant une loi dite des gaz parfaits incompressibles (incompressible Ideal Gaz). Celle-ci est donnee comme suit :

$$\rho = \frac{P_{OP}}{RT \sum_i \frac{Y_i}{M_{\omega,i}}}$$

R : est la constante universelle des gaz .

$M_{\omega,i}$: est la masse molaire de l'espece i .

P_{op} : est la pression de reference.

Modelisation de la combustion

La modelisation de la combustion, d'une façon generale, a ete traitée au paragraphe 11.4 du chapitre II. Dans ce qui va suivre on ne prendra en consideration que le modele Eddy Dissipation sur lequel est basee la modelisation des taux de reaction de cette etude.

Modele Eddy Dissipation

Ce travail traite sur la problematique des flammes turbulentes non premelangees (diffusion). Ce modele a donc ete utilise pour la modelisation des taux de reaction. Le modele Eddy Dissipation qui est base sur les travaux de Magnussen et Hjertager dans lequel la chimie est consideré tres rapide par rapport a la turbulence.

Dans ce cas, la combustion qui n'est controlee que par la turbulence, transporte le mélange des gaz frais avec les produits chauds dans la zone de reaction ou s'effectue rapidement la cinetique chimique. Cette derniere peut donc etre negligee.

Le taux de reaction $R_{i,r}$ de l'espece i du a la reaction est donne par le minimum des expression suivantes :

$$R_{i,r} = v'_{i,r} M_{\omega,i} A \rho \frac{\varepsilon}{k} \min \left(\frac{Y_R}{v'_{R,r} M_{\omega,R}} \right)$$
$$R_{i,r} = v'_{i,r} M_{\omega,i} A B \rho \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\sum_P Y_P}{\sum_J v''_{j,r} M_{\omega,j}} \right)$$

Ou :

Y_p : est la fraction massique d'une espece p dans les produits ;

Y_t : est la fraction massique d'une espece r dans les reactifs ;

A et B : sont des constantes empiriques qui ont respectivement des valeur 4 et 5 ;

$M_{\omega,i}$: est la masse molaire de l'espece i .

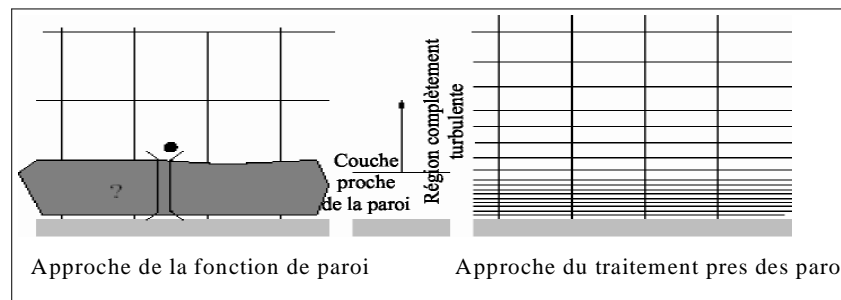
Traitement pres des parois

Les ecoulements turbulents sont affectes par la presence des parois d'une maniere signifiante. Pour l'ecoulement moyen, il doit satisfaire une condition de non glissement. En ce qui concerne l'ecoulement turbulent, tout pres des parois, l'effet de la viscosite reduit les fluctuations de la vitesse tangentielle parallele a la paroi, tandis que le blocage cinematique cause l'attenuation des fluctuations normales.

Dans la partie exterieure de la region proche de la paroi, la turbulence augmente rapidement a cause de la production de l'energie cinetique turbulente due aux forts gradients des vitesses moyennes. Le modele k - ε est principalement valide pour les regions centrales des ecoulements. Il a ete trouve que la region proche de la paroi peut etre subdivisee en trois couches :

La couche inferieure, dite sous couche visqueuse, ou l'ecoulement y est laminaire et la viscosite moleculaire joue un role dominant. La couche exterieure est completement turbulente. Entre ces deux couches, il y'a une couche transitoire ou il n'y a pas domination de l'un des effets par rapport a l'autre.

Il existe deux approches pour modeliser l'ecoulement pres des parois (figure (2.1)) : L'une se base sur des formules semi empiriques dites fonctions de paroi pour lier la couche completement turbulente et la paroi sans tenir compte des autres couches. L'autre consiste raffiner le maillage de telle sorte que la distance entre le premier noeud et la paroi soit inferieure a l'epaisseur de la sous couche visqueuse.



Traitement pres des parois dans(FLUENT)

Fonction de paroi standard

C'est la fonction prise par default dans "Fluent". Elle a ete proposée par Launder et Spalding (1974).

Quantite de mouvement

La loi de paroi pour la vitesse moyenne est :

$$U^* = \frac{1}{k} \ln(Ey^*)$$

Ou :

$$U^* = \frac{U_P C_\mu^{1/4} C_P^{1/2}}{\frac{\tau \omega}{\rho}}$$

$$y^* = \frac{\rho C_\mu^{1/4} C_P^{1/2} y_P}{\mu}$$

K : est la constante de Von Karman (= 0,42) ;

E : constante empirique qui depend de la rugosite de la paroi, egale par default a 9,81 ;

U_P : est la vitesse moyenne du fluide au point p ;

K_P : est l'energie cinetique turbulente au point p ;

Y_P : est la distance entre le point p et la paroi ;

μ : est la viscosite dynamique du fluide.

La loi logarithmique est valide pour $y^* > 30$ a 60. Pour "Fluent" elle est employee pour $y^* > 11.225$.

Dans le cas contraire, une relation lineaire (ecoulement laminaire de couette)

est utilisee : $U^* = Y^*$

A noter que "Fluent" se base beaucoup plus sur la valeur y^* que sur y^+ ($\equiv \rho U \tau / \mu$).

Elle sont approximativement les même pour une couche limite turbulente en régime développe .Dans notre cas, le code de calcul utilise :

- Pour la loi logarithmique $y^* > 11.225$
- Pour les contraintes de cisaillement laminaire $U^* = y^*$; $y^* < 11.225$

Energie

Pour la température, la modification de T près de la paroi [26] est de la forme :

$$T^* = \frac{(T_w - T_p) \rho c_p C_{\mu}^{1/4} k_p^{1/2}}{\dot{q}} = \begin{cases} Pr y^* & y^* < 11.225 \\ Pr_t \left[\frac{1}{k} \ln(E y^*) + p \right] & y^* > 11.225 \end{cases}$$

$$p = 9.24 \left[\left(\frac{Pr}{Pr_t} \right)^{\frac{3}{4}} - 1 \right] \left[1 + 0.28 e^{-0.007 \frac{Pr}{Pr_t}} \right]$$

k_f : La conductivite thermique du fluide.

ρ : La densite du fluide.

c_p : La chaleur specifique du fluide.

\dot{q} : Le flux de chaleur de la paroi

T_p : La temperature pres de la paroi.

T_w : La temperature de paroi.

Pr : Le nombre de Prandtl laminaire.

Pr_t : Le nombre de Prandtl turbulent (0,85 sur la paroi).

A : 26 constante de Van Driest.

Turbulence

Pour les modèles k-ε, l'option pour obtenir les conditions aux limites imposées sur la paroi sera :

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$$

La production de l'énergie cinétique turbulente G_k et son taux de dissipations ε dans les cellules adjacentes aux parois, sont des termes sources dans l'équation k et ε, et sont calculés :

$$G_k \approx \tau_w \frac{U}{\partial y} = \tau_w \frac{w}{k \rho C_{\mu}^{1/4} k_p^{1/2} y_p}$$

$$\varepsilon_p = \frac{C_{\mu}^{\frac{3}{4}} k_p^{\frac{3}{2}}}{k y_p}$$

Les Espèces chimiques

Pour le transport des espèces chimiques la loi est de la forme suivante :

$$Y^* \equiv \frac{(Y_{i,w} - Y_i)}{j_{i,w}} \rho C_{\mu}^{1/4} k_p^{1/2} = \begin{cases} S_C y^* & y^* < 11.225 \\ S_{Ct} \left[\frac{1}{k} \ln(Ey^*) + p_c \right] & y^* > 11.225 \end{cases}$$

Avec : S_C et S_{Ct} les nombres de Schmidt : laminaire et turbulent, $J_{i,w}$ est la diffusion du flux des espèces i à la paroi, P_c est calculée de la même manière que P dans l'équation d'énergie. La seule différence est la prise en compte du nombre de Schmidt au lieu de celui de Prandtl

Conditions aux limites (CL)

Dans le cas général on dispose de quatre types de conditions aux limites :

- a)-A l'entrée du domaine : on connaît généralement la valeur du champ Φ .
- b)-A la sortie du domaine : il est habituellement satisfaisant de supposer que le flux de diffusion est égal à zéro (régime établi) dans le sens du courant.
- c)-Paroi : au niveau des parois on peut connaître la valeur de la variable Φ . On peut aussi connaître plusieurs autres grandeurs physiques, telles que : si Φ représente le champ de température par exemple, on peut avoir comme donnée la valeur du flux de chaleur de la paroi et le coefficient externe de convection.
- d)-Sur l'axe de symétrie : le gradient de la variable suivant la direction perpendiculaire à l'axe de symétrie est nul.

Discussion des résultats

INTRODUCTION AUX METHODES DE DISCRETISATION DES EDP

Présentation générale

En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes et complémentaires : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Chacune de ces trois méthodes correspond à une formulation différente des équations de la physique :

- équilibre des forces en chaque point pour les différences finies
- minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour les éléments finis
- loi de conservation et calcul des flux pour la méthode des volumes finis.

Examinons rapidement les avantages et les inconvénients de chacune de ces trois méthodes.

Différences finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible cout de calcul.

Inconvénients : Limitation de la géométrie des domaines de calculs, difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de l'inconnue et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

Eléments finis

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les noeuds du maillage).

Avantages : Traitement possible de géométries complexes, d'termination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.

Inconvénients : Complexité de mise en oeuvre et cout en temps de calcul et en mémoire.

Volumes finis

La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est donc particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides : équation de conservation de la masse, équation de conservation de la quantité de mouvement, équation de conservation de l'énergie.

Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires sont des rectangles (ou des parallélépipèdes rectangles en dimension 3). Cependant la méthode des volumes finis permet d'utiliser des volumes élémentaires de forme quelconque, donc de traiter des géométries complexes, ce qui est un avantage sur les différences finies.

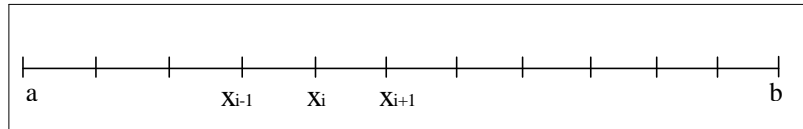
Il existe une grande variété de méthodes selon le choix de la géométrie des volumes élémentaires et des formules de calcul des flux. Par contre, on dispose de peu de résultats théoriques de convergence.

L'approche différences finies en dimension un

Toutes les méthodes numériques présupposent la discrétisation du domaine géométrique afin de passer d'un problème continu à une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

Dans le cas des différences finies en dimension un, on discrétise l'intervalle continu $[a, b]$ en un nombre fini de points x_i .

On remplace ainsi le problème continu par celui de la recherche de valeurs approchées u_i des solutions exactes $u(x_i)$ aux points x_i de la discrétisation.



Discrétisation en différences finies d'un segment $[a, b]$

Mais on ne peut plus, dans ce cas, conserver les opérateurs de dérivation qui s'appliquent à des fonctions continues. On les remplace par des analogues discrets, les différences divisées ou différences finies.

Le type de conditions aux limites conditionne le nombre d'inconnues du problème discret. Dans le cas de conditions de Dirichlet, la solution est fixée, et donc en ces points, les valeurs sont connues. Dans tous les autres cas de conditions aux limites, la valeur de la solution reste inconnue et fait donc partie du vecteur inconnu.

Quelques formules simples d'approximation des dérivées par des différences divisées.

Pour la dérivée première :

-- **différence divisée progressive d'ordre un :**

Le développement limité :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2} u''(\xi_i)$$

conduit à l'approximation suivante :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i}$$

-- **différence divisée progressive d'ordre deux :**

Pour des pas réguliers de longueur h , le développement limité :

$$u'(x_i) = \frac{-u(x_{i-2h}) + 4u(x_{i+h}) - 3u(x_i)}{2h} + \frac{h^2}{3} u^{(3)}(\xi_i)$$

donne la formule d'ordre deux progressive suivante :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \simeq \frac{-u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i}{2h}$$

-- différence divisée régressive d'ordre un :

De même le développement limité :

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} - \frac{h}{2} u''(\eta_i)$$

donne :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \simeq \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

-- différence divisée régressive d'ordre deux :

On obtient également une formule régressive d'ordre deux :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \simeq \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2h}$$

-- différence divisée centrée : on a

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\theta_i)$$

ou également

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + \frac{h}{2}) - u(x_i - \frac{h}{2})}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(3)}(\theta_i)$$

Ce qui conduit, dans le cas de discrétisations uniformes de pas constant h, à :

$$u'(x_i) = \frac{du}{dx}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \text{ ou } \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{h}$$

On a noté $u_{i+1/2}$ et $u_{i-1/2}$ les valeurs approchées de u aux points $X_{i+(h/2)}$ et $X_{i-(h/2)}$ respectivement.

Pour la dérivée seconde :

-- différence divisée centrée

Dans le cas particulier de points X_i régulièrement espacés d'un pas h uniforme, on retrouve en utilisant :

$$u''(x_i) = \frac{u'(x_i + \frac{h}{2}) - u'(x_i - \frac{h}{2})}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(4)}(\theta_i)$$

et (36) :

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\theta_i)$$

d'ou : la discrétisation centrée classique de la dérivée seconde

$$u''(x_i) = \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Pour la dérivée troisième :

-- **différence divisée progressive**

Dans le cas particulier de points X_i régulièrement espacés d'un pas h uniforme, on obtient la formule décentrée progressive (d'ordre un) :

$$u^{(3)}(x_i) = \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) \simeq \frac{u_{i+3} - 3u_{i+2} + 3u_{i+1} - u_i}{h^3}$$

On obtiendrait de même une différence divisée régressive.

-- **différences divisées centrées**

On a deux formules possibles. L'une utilisant des points milieux de segments

$$u^{(3)}(x_i) = \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) \simeq \frac{u_{i+\frac{3}{2}} - 3u_{i+\frac{1}{2}} + 3u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{3}{2}}}{h^3}$$

L'autre utilisant les noeuds du maillages.

$$u^{(3)}(x_i) = \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) \simeq \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{h^3}$$

Ces deux formules centrées sont d'ordre deux.

Pour la dérivée quatrième :

-- **différence divisée centrée**

Dans le cas particulier de points X_i régulièrement espacés d'un pas h uniforme, on retrouve en utilisant :

$$u''(x_i) = \frac{u'(x_{i+\frac{h}{2}}) - u'(x_{i-\frac{h}{2}})}{h} - \frac{h^2}{24} u^{(4)}(\theta_i)$$

deux fois la discrétisation centrée classique d'ordre deux de la dérivée quatrième

$$u^{(4)}(x_i) = \frac{d^4u}{dx^4}(x_i) \simeq \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} - u_{i-2}}{h^4}$$

On peut observer que l'on retrouve dans ces formules les coefficients du développement du binôme. Il existe un grand nombre de formules de différences divisées, le bon choix n'est pas toujours évident. On peut également obtenir des approximations des dérivées par des techniques de différences finis dites implicites, ou de Padé .

Applications en dimension un

Problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = \alpha & u(b) = \beta \end{cases}$$

Interprétations physiques

- barre élastique sous un chargement axial.
- corde élastique soumise à un chargement transverse.
- conduction thermique dans une barre.

On utilise la discrétisation centrée classique de la dérivée seconde

$$u''(x_i) = \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

On obtient ainsi le système d'équations linéaires suivant dont la résolution donne les valeurs $u_{\{i\}}$ de la solution approchée du problème (38)

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i & \text{pour } i = 1, N-1 \\ \text{avec } u_0 = \alpha & u_N = \beta \end{cases}$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_i \\ \cdot \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \cdot \\ f_i \\ \cdot \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

Il ne reste alors plus qu'à résoudre ce système linéaire par des techniques standard de factorisation (méthodes de Gauss LU ou méthode de Choleski LLT ;...).

Problème mixte Dirichlet-Neumann

Soit, maintenant, le problème

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = \alpha & u'(b) = \beta \end{cases}$$

ou l'on a, cette fois, une condition de Neumann en b.

Les modifications du problème discrétisé sont les suivantes. Tout d'abord, le nombre d'inconnues a changé. Il y a une inconnue au point b. En effet, la donnée de $u'(b)$ ne dit rien de la valeur de $u(b)$. C'est donc une nouvelle inconnue du problème. Le problème discret a donc maintenant, sur la base du même maillage,

N inconnues u_i pour $i=1$ à N. D'autre part, il faut proposer une formule discrétisée de la condition de Neumann $u'(b)=\beta$. Or, on l'a vu, plusieurs choix sont possibles pour approcher une dérivée première. C'est un des écueils des méthodes de différences finies qu'elles ne donnent pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann. Ici, il y a deux choix possibles :

-- On peut remplacer au point b la dérivée $u'(b)$ par

$$u'(b) \simeq \frac{u_{N-1} - u_N}{h}$$

formule qui, bien que seulement d'ordre un, est cohérente avec la modélisation d'un flux ou d'un effort externe, et qui maintient la symétrie du système matriciel. C'est en particulier la bonne modélisation par différences finies de l'effet d'un effort concentré au point L.

-- On peut remplacer au point b la dérivée $u'(b)$ par

$$u'(b) \simeq \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h}$$

Cette formule est d'ordre 2. Donc elle permettra de conserver globalement l'ordre 2 de l'approximation. Elle est cohérente avec la modélisation d'une condition de symétrie par une condition de Neumann. Pour retrouver la symétrie de la matrice, il faudra diviser la dernière ligne du système par 2. Ceci conduit d'ailleurs précisément à la formule que l'on obtiendra par une méthode d'éléments finis P1.

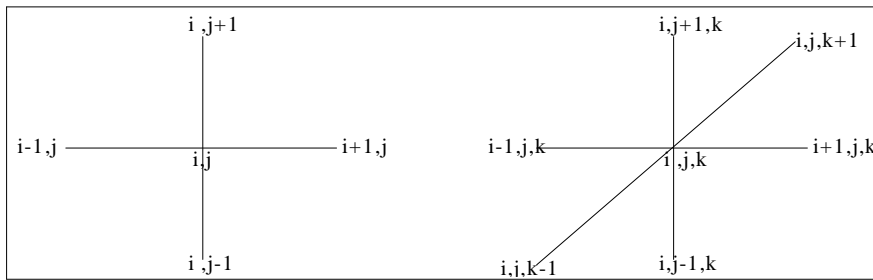
On obtient ainsi dans ce cas :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_i \\ \cdot \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \cdot \\ f_i \\ \cdot \\ f_{N-1} \\ \frac{f_N}{2} + \frac{\beta}{h} \end{pmatrix}$$

Approximation par différences finies en dimension supérieures

La méthode des différences finies a l'avantage d'être facile à exposer. Nous pouvons donc présenter son application aux problèmes multidimensionnels. Cela ne sera pas le cas des méthodes d'éléments finis pour lesquelles un exposé plus long, réparti sur plusieurs chapitres, sera nécessaire.

Comme en dimension un, la première étape consiste à discrétiser le domaine. C'est dans l'application aux problèmes bidimensionnels et tridimensionnels que la méthode des différences finies présente sa plus sévère limitation. En effet elle n'est bien adaptée qu'à la discrétisation de domaines rectangulaires ou parallélépipédiques par des maillages formés de grilles perpendiculaires. Les dérivées partielles dans chaque direction d'axe étant approchées comme les dérivées en dimension un.



Grilles différences finies bidimensionnelles et tridimensionnelles

Discrétisation géométrique

Dans le cas de domaines rectangulaires (ou parallélépipédiques en dimension 3) de cotés parallèles aux axes, on construit une grille de discrétisation en différences finies par quadrillage selon les deux (ou trois) directions d'axes. On notera Δx le pas de discrétisation selon x et de même Δy et Δz les pas de discrétisation en y et z . On obtient ainsi aux intersections des lignes du quadrillage les noeuds de coordonnées (x_i, y_j, z_k) du maillage en différences finies. Cette technique de maillage est généralisable aux assemblages de rectangles (ou de parallélépipèdes) ainsi qu'aux domaines se ramenant par bijection régulière à un rectangle (ou un parallélépipède). Par contre dans le cas de géométries complexes les discrétisations par éléments finis sont mieux adaptées.

Quelques formules simples d'approximation des dérivées partielles par différences finies

Notons, en dimension deux, $u_{i,j}$ l'approximation de la valeur exacte $u(x_i, y_j)$ pour le point d'indice i, j de la grille.

Pour les dérivées partielles premières :

-- différences divisées progressives : on a les approximations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}$$

-- différences divisées régressives : on considère cette fois les approximations :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}$$

-- différences divisées centrées : on obtient (comme en dimension un) une approximation du second ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

et avec un demi-pas :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

On en déduit, par double différentiation, l'approximation centrée d'ordre deux du laplacien

$$-\Delta u(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-u_{i,j+1} + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Et plus généralement l'approximation de l'équation l'opérateur $\text{div}(\sigma \text{grad})$ pour σ variable :

$$-\text{div}(\sigma \text{grad } u)(x_i, y_j) \simeq -\frac{\sigma\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j\right)(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \sigma\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j\right)(u_{i,j} - u_{i-1,j})}{\Delta x^2} - \frac{\sigma\left(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}\right)(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \sigma\left(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}\right)(u_{i,j} - u_{i,j-1})}{\Delta y^2}$$

Conditions aux limites de Neumann

On doit ajouter la prise en compte des conditions aux limites. Pour les conditions de Dirichlet, il suffit de fixer les valeurs de $u_{i,j}$ correspondant aux valeurs données sur la frontière Γ_d . Pour les conditions de Neumann, on doit discrétiser

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_n} = g$$

Il y a, comme pour la dérivée en dimension un, plusieurs choix possibles pour approcher la dérivée normale en différences finies.

-- Le choix décentré d'ordre un conserve la symétrie de la matrice du système linéaire global, et s'interprète de manière naturelle en terme de flux. Il consiste à remplacer, selon le coté de frontière concerné, la dérivée normale

$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_n}$ par l'une des quatre expressions

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, \quad \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}, \quad \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}$$

-- Le choix centré du second ordre conservera globalement l'ordre 2 de l'approximation. Ce choix est cohérent avec la modélisation d'une condition de symétrie par une condition de Neumann. Il consiste à remplacer, selon le coté de frontière concerné, la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma_n}$ par l'une des quatre expressions

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}, \quad \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

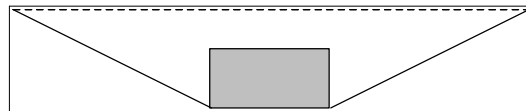
Il est ensuite nécessaire de numéroter les u_{ij} pour qu'elles constituent les composantes U_i d'un vecteur inconnu U . La numérotation influe sur la structure de la matrice. On utilise des algorithmes de numérotation optimale afin de minimiser le stockage ("profil") de la matrice. Il ne reste alors plus qu'à résoudre le système linéaire obtenu par des méthodes directes de factorisation (méthodes de Gauss LU ou méthode de Choleski LLT) ou par des méthodes itératives,

Remarque : Les formules proposées ci-dessus ne représentent qu'une petite partie des formules possibles. Ce sont les plus fréquemment utilisées. Il existe un grand nombre de formules à tous les ordres de précision.

L'approche éléments finis en dimension un

La présentation très succincte faite ici n'est qu'une première introduction à la méthode des éléments finis. Elle a pour but de donner les idées de base dans un cas extrêmement simple.

Remarquons tout d'abord que la formulation différentielle (38) du problème suppose l'existence de dérivées secondes de la solution u . Or, physiquement, on peut trouver des exemples très simples de problèmes pour lesquels u' est discontinue et donc u'' n'a pas de sens classique (il faut alors considérer u'' au sens des distributions). Prenons, par exemple, une corde soumise à un chargement discontinu. La solution prendra la forme d'une ligne brisée.



Corde élastique sous chargement

En réalité, la bonne formulation mathématique du problème consiste à écrire que la déformée de la corde réalise le minimum de l'énergie à sa position d'équilibre.

L'énergie de ce problème s'écrit

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_a^b [u'(x)]^2 dx - \int_a^b f(x)u(x) dx$$

C'est à partir de cette formulation en minimisation d'énergie que se déduit la formulation variationnelle (ou principe des puissances virtuelles) qui est à la base de la méthode des éléments finis. On comprend que les éléments finis soient particulièrement adaptés aux problèmes d'équilibre.

On introduit tout d'abord un produit scalaire de 2 fonctions selon :

$$(v, w) = \int_a^b v(x)w(x) dx$$

et l'espace $L^2[a,b]$ des fonctions de carré sommable sur $[a,b]$, c'est à dire telles que l'intégrale suivante existe :

$$\int_a^b v^2(x) dx$$

L'espace $L^2[a,b]$ muni du produit scalaire ci-dessus est un espace de Hilbert.

Soit $H^1[a,b]$ l'espace de Hilbert des fonctions v , de carré sommable et dont la dérivée est également de carré sommable.

$$v \in L^2[a,b], v' \in L^2[a,b]$$

et soit $H_0^1[a,b]$ l'espace de Hilbert des fonctions v de $H^1[a,b]$ nulles en a et b .

$$v \in L^2[a,b], v' \in L^2[a,b], v(a)=v(b)=0$$

Il est facile de vérifier que la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x) dx$$

est un produit scalaire sur $H_0^1[a,b]$. Considérons donc le problème de minimisation de la forme quadratique représentant l'énergie du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ vérifiant } u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta \\ \text{qui réalise le minimum de la forme } J \text{ définie par} \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_a^b u'(x) dx - \int_a^b f v dx \end{array} \right.$$

Ce problème de minimisation est équivalent au problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher la fonction } u \text{ vérifiant } u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta \text{ telle que :} \\ \int_a^b u'(x)v'(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1[a,b] \end{array} \right.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer $J(u+\lambda v)$ avec u solution du problème variationnel, λ réel quelconque et $v \in H_0^1[a,b]$ quelconque. Ainsi la fonction $u+\lambda v$ est une fonction quelconque de $H^1[a,b]$ vérifiant les conditions aux limites imposées en a et b . Remarquons que ce sont ces conditions aux limites de Dirichlet qui imposent le choix de fonctions v nulles en a et b .

$$J(u + \lambda v) = J(u) + \lambda \left[\int_a^b u'(x)v'(x) dx - \int_a^b f(x)v(x) dx \right] + \frac{\lambda^2}{2} \int_a^b [v'(x)]^2 dx$$

Si u minimise J , l'expression

$$\lambda \left[\int_a^b u'(x)v'(x)dx - \int_a^b f(x)v(x)dx \right] + \frac{\lambda^2}{2} \int_a^b [v'(x)]^2 dx$$

doit être positive pour λ tout réel et tout $v \in H_0^1[a,b]$ ce qui nécessite que

$$\left[\int_a^b u'(x)v'(x)dx - \int_a^b f(x)v(x)dx \right] = 0 \quad \forall v \in H_0^1[a,b]$$

Inversement si le crochet

$$\left[\int_a^b u'(x)v'(x)dx - \int_a^b f(x)v(x)dx \right]$$

est nul, on voit que $J(u) \leq J(u+\lambda v) \quad \forall \lambda$ et $\forall v$. On obtient donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $v \in H_0^1[a,b]$ l'équivalence

$$J(u + \lambda v) \geq J(u) \Leftrightarrow \int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Remarque : Observons que la formulation variationnelle revient à écrire qu'à l'équilibre, donc au minimum de l'énergie, les dérivées de J au point u dans toutes les directions v sont nulles. En effet on a, par définition de la dérivée directionnelle :

$$J'(u;v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = \int_a^b u'(x)v'(x)dx - \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Une fois la formulation variationnelle obtenue, on peut retrouver l'équation différentielle initiale (38) de la façon suivante :

On intègre par parties le terme

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx = -\int_a^b u''(x)v(x)dx + u'(b)v(b) - u'(a)v(a)$$

En prenant en compte les conditions sur v ($v(a)=v(b)=0$), on en déduit

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx - \int_a^b f(x)v(x)dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1[a,b]$$

D'où l'égalité

$$-u''(x) = f(x)$$

au sens de $L^2(a,b)$.

On peut faire la démarche inverse. C'est celle que l'on rencontre dans la plupart des ouvrages. Le point de départ est alors le problème différentiel (38). On multiplie l'équation par $v(x)$ et on intègre sur $[a,b]$:

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Par intégration par parties :

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + u'(a)v(a) - u'(b)v(b)$$

On obtient la formulation variationnelle, qui, en prenant en compte les conditions sur les fonctions v appartenant à l'espace $v \in H_0^1[a,b]$

$$v(a)=v(b)=0$$

s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \in H_0^1[a,b] \text{ vérifiant } u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta \text{ t. q} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1[a,b] \end{cases}$$

Cette formulation est équivalente à la minimisation d'une forme quadratique représentant l'énergie du système qui s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \text{ vérifiant } u(a) = \alpha \quad u(b) = \beta \\ \text{qui réalise le minimum de la forme } J \text{ définie par} \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_a^b v'^2 dx - \int_a^b f v dx \end{cases}$$

On obtient ainsi 3 formes équivalentes du problème

- une forme différentielle
- une forme variationnelle (principe des travaux virtuels)
- une forme minimisation de l'énergie

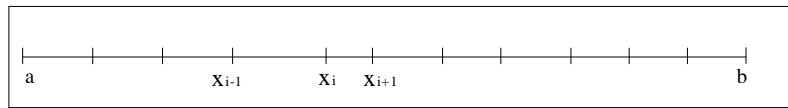
Un premier exemple simple : les éléments P1

Considérons le problème de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad a < x < b \\ u(a) = 0 \quad u(b) = 0 \end{cases}$$

dont on écrira la formulation variationnelle dans l'espace $H_0^1[a,b]$. On approche l'espace $H_0^1[a,b]$ par l'espace $V_{\{0,h\}} \subset H_0^1[a,b]$ construit de la manière suivante.

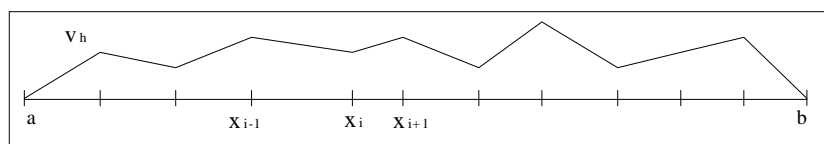
On choisit une discrétisation de l'intervalle $[a,b]$ en N sous-intervalles ou éléments $K_i=[x_{i-1},x_i]$. Les éléments K_i n'ont pas forcément même longueur. $V_{0,h}$ est alors



Discrétisation (maillage) du segment $[a,b]$ en éléments finis

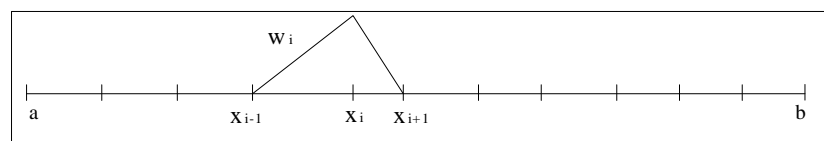
l'espace des fonctions continues affines par morceaux (c'est à dire affines sur les segments K_i) et nulles aux extrémités a et b .

L'utilisation de fonctions affines, fonctions polynomiales de degré un, justifie la dénomination d'éléments P1. Chaque fonction $v_h \in V_{0,h}$ est déterminée de manière unique par la donnée de ses valeurs aux points x_i pour $i=1, \dots, N-1$. L'espace $V_{0,h}$ est de dimension $N-1$.



Une fonction affine par morceaux

Base de Lagrange



Fonction de base de Lagrange

Considérons les $N-1$ fonctions $w_i \in V_{0,h}$ définies par les $N-1$ conditions suivantes :

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, N-1$$

Ces $N-1$ fonctions forment une base de $V_{0,h}$ et une fonction v_h quelconque s'écrit dans cette base :

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{i=N-1} v_i w_i(x)$$

avec $v_i = v_h(x_i)$. Les coefficients v_i sont donc les valeurs de v_h aux points (x_i)

Ecriture du problème approché

Ecrivons le problème approché dans $V_{0,h}$

$$\int_a^b u'_h(x) v'_h(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_{0,h}$$

Le problème étant linéaire, l'égalité est vraie pour tout v_h si elle est vraie pour une base de l'espace vectoriel $V_{0,h}$.

On peut donc remplacer dans (38) $\forall v_h \in V_{0,h}$ par $\forall w_i$ pour $i=1, \dots, N-1$.

D'autre part, écrivons u_h , solution du problème approché dans $V_{0,h}$, dans la base des w_i

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{j=N-1} u_j w_j(x)$$

avec $u_j = u_h(x_j)$ valeur approchée de la solution exacte au point (x_j)

On obtient l'écriture suivante du problème approché :

Trouver u_1, u_2, \dots, u_{N-1} tels que

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{j=N-1} u_j w_j'(x) \right) w_i'(x) dx = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

Ce que l'on peut réécrire

$$\sum_{j=1}^{j=N-1} \left(\int_a^b w_j'(x) w_i'(x) dx \right) u_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

Soit en posant

$$\int_a^b f(x) w_i(x) dx = F_i \quad \text{et} \quad \int_a^b w_j'(x) w_i'(x) dx = A_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{j=N-1} A_{ij} u_j = F_i \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

On a ainsi obtenu un système linéaire de $N-1$ équations à $N-1$ inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$AU = F$$

Chaque ligne d'indice i du système linéaire correspond au choix d'une fonction de base d'indice i de l'espace des fonctions tests $V_{0,h}$. Il y a autant d'équations que d'inconnues puisque la partie inconnue de la solution approchée s'exprime elle aussi dans la base des w_i .

L'approche volumes finis

La méthode des volumes finis, comme celle des éléments finis utilise une formulation intégrale des équations. Mais au lieu d'utiliser un produit scalaire de L^2 par des fonctions tests, on se contente d'intégrer les équations différentielles sur des volumes élémentaires ou volumes de contrôle. Ceci peut s'interpréter comme l'utilisation de fonctions tests, fonctions indicatrices des volumes élémentaires.

En dimension un

A partir d'un maillage en volumes finis, ou l'on prend les inconnues au centre x_i des volumes de contrôles qui sont dans ce cas monodimensionnel, les segments $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, on passe ainsi de

$$-u''(x) = f(x) \Leftrightarrow -(u'(x))' = f(x)$$

à

$$-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (u'(x))' dx = u'(x_{i-1/2}) - u'(x_{i+1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$$

Les $u'(x_{i-1/2})$ et $u'(x_{i+1/2})$ apparaissent comme des flux aux interfaces des volumes élémentaires, les segments $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$.

Remarque: Ceci explique, qu'à l'inverse des différences finies, ce sont, dans le cas des volumes finis, les conditions de Neumann qui sont faciles à prendre en compte et les conditions de Dirichlet qui sont plus délicates.

Si on approche les dérivées selon :

$$u'(x_{i+1/2}) = \frac{u(x_{i+h}) - u(x_i)}{h} \quad \text{et} \quad u'(x_{i-1/2}) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-h})}{h}$$

dans le cas particulier de points x_i régulièrement espacés d'un pas h uniforme, on retrouve la discrétisation centrée classique de la dérivée seconde

$$u''(x_i) = \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

L'intérêt de cette technique de volumes finis n'apparaît que dans les applications aux problèmes en dimension 2 et 3. De nombreuses variantes existent, selon la géométrie des volumes élémentaires, le choix du positionnement des inconnues aux centres ou aux sommets des volumes de contrôle, et les diverses formules de calcul des flux aux interfaces.

En dimension deux

La méthode des volumes finis, conservative par essence, est particulièrement bien adaptée à la résolution numérique de problèmes conservatifs. On l'utilise donc avec succès pour modéliser des phénomènes de transport (ou convection). Il existe un grand nombre de techniques de type volumes finis qui se distinguent

- par la situation des inconnues : au noeuds du maillage ou au centre des mailles
- par la forme des volumes de contrôle : carrés, quadrilatères quelconques, polygones quelconques réunions de triangles etc
- par le choix des formules de calcul approché des flux et en particulier leur ordre de précision.

Nous choisissons ici de nous limiter au choix originel historiquement de mailles carrées ou quadrangulaires avec les inconnues représentées au centre des mailles.

Considérons l'équation de convection

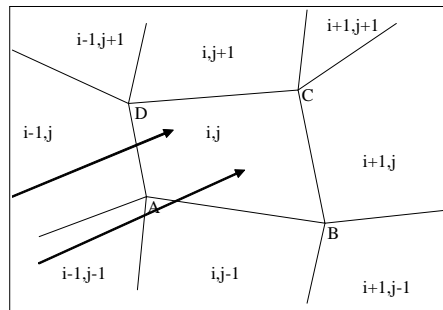
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(F(u)) = Q$$

En intégrant l'équation dans le volume de contrôle ABCD on obtient

$$\text{mes}(ABCD) \frac{du_{ij}}{dt} + \int_{ABCD} F(u) \cdot n \, ds = \text{mes}(ABCD) Q_{ij}$$

L'intégrale $\int_{ABCD} F(u) \cdot n \, ds$ représente la somme des flux sortants de F à travers les faces AB, BC, CD et DA.

Les flux doivent être calculés par des formules indépendantes de la cellule, afin d'assurer la conservation globale. En particulier, le flux sortant du volume élémentaire $\Omega_{i,j}$ à travers la face AB doit être équilibré par celui sortant de $\Omega_{i,j-1}$ à travers la même face AB.



Grille volumes finis

Schémas centrés

Toujours en se plaçant dans le cas d'inconnues au centre des mailles on a les choix suivants

$$1. \quad F_{AB} = \frac{1}{2} [F_{ij} + F_{i,j-1}] \text{ avec } F_{ij} = F(u_{ij})$$

$$2. \quad F_{AB} = F\left(\frac{u_{ij} + u_{i,j-1}}{2}\right)$$

$$3. \quad F_{AB} = \frac{1}{2} [F_A + F_B]$$

$$\text{avec } F_A = \frac{1}{4} [F(u_{ij}) + F(u_{i-1,j}) + F(u_{i,j-1}) + F(u_{i-1,j-1})]$$

$$\text{et } F_B = \frac{1}{4} [F(u_{ij}) + F(u_{i+1,j}) + F(u_{i,j-1}) + F(u_{i+1,j-1})]$$

$$\text{et } F_A = F\left(\frac{u_{ij} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4}\right) \text{ et } F_B = F\left(\frac{u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}}{4}\right)$$

Schémas décentrés

Prenons le cas d'un flux dirigé comme sur la figure (2.8) ci-dessus. Dans le cas de schémas décentrés, on calcule le flux à travers AB en prenant la valeur $F(u_{i,j-1})$ et ainsi de suite pour les flux à travers les faces BC, CD, et DA. On prend donc

$$F_{AB} = F(u_{i,j-1}) \quad F_{BC} = F(u_{ij}) \quad F_{CD} = F(u_{ij}) \quad F_{DA} = F(u_{i-1,j})$$

Ce choix conduit à des approximations du premier ordre.

CHAPITRE 03

Methode numerique de resolution

METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION

INTRODUCTION:

La discretisation des equations presentees dans le chapitre precedent traduisant l'ecoulement monophasique est l'operation de transformer ces equations differentielles en un systeme d'equations algebriques.

Plusieurs methodes de discretisation des equations differentielles aux derivees partielles sont utilisees actuellement telles que : la methode des volumes finis, des differences finies et des elements finis. La methode utilisee par "Fluent" est celle des volumes finis.

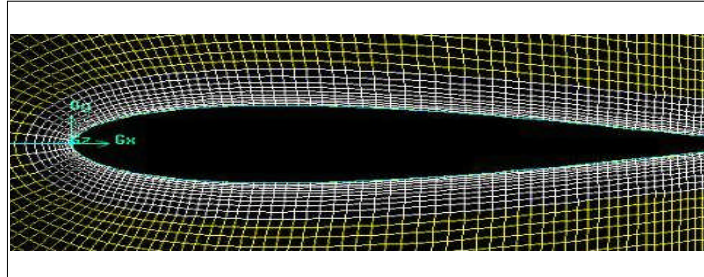
Methode des volumes finis

La methode des volumes finis est caracterisee par son avantage a satisfaire la conservation de masse, de quantite de mouvement et d'energie dans tous les volumes finis ainsi dans tout le domaine de calcul. Elle facilite la linearisation des termes non lineaires dans les equations de conservation tel que le terme source par exemple. La methode consiste a partager le domaine de calcul en plusieurs volumes, ou chaque volume entoure un noeud. En utilisant differents schemas d'approximations on peut integrer les termes des equations differentielles modelisantes sur chaque volume de controle, ou les valeurs et les quantites sont stockees aux noeuds du volume de controle.

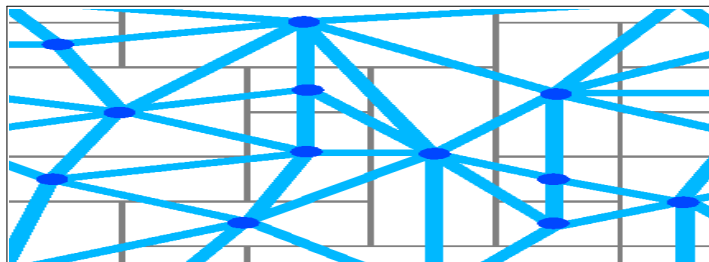
Ces equations algebriques produites expriment la conservation des quantites pour le volume de controle et pour tout le domaine de calcul.

Maillage

"Fluent" traite plusieurs types de maillages très compliqués qui sont en général importés directement d'autres logiciels de génération de maillages ("GAMBIT" [27] par exemple). Pour l'utilisation correcte de "Fluent" et pour connaître le lien entre les nœuds (cellules) cibles et les nœuds (cellules) ou faces voisines, il est à noter que "Fluent" mentionne (dans ses mécanismes internes) les points avec les indices $i, j, k, 1, \dots$ etc. En plus il donne des topologies de certaines grilles qu'il accepte de résoudre selon le problème posé, on donne comme exemple les figures suivantes



Les différentes grilles topologiques traitées par (FLUENT)



Les différentes grilles topologiques traitées par (FLUENT)

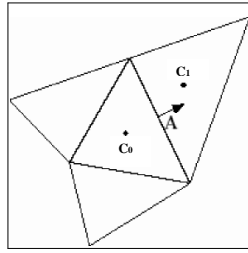
Discretisation

Le code "Fluent" utilise une technique qui consiste à intégrer les équations différentielles sur chaque volume de contrôle puis de les convertir en équations algébriques. En prenant la figure (3.2) comme exemple d'un maillage tétraédrique et pour un cas stationnaire du transport d'un scalaire Φ , la discretisation se fera par rapport aux faces des cellules comme suit :

$$\oint \rho \Phi U dA = \oint \Gamma_{\Phi} \nabla \Phi dA + \int_V S_{\Phi} dV$$

Γ_{Φ} : Coefficient de diffusion.

L'équation (51) exprime que la quantité de Φ produite par unité de temps à l'intérieur du polyèdre est égale à la quantité de Φ qui sort nette par unité de temps à travers la surface (les N faces) enveloppant le volume de contrôle V , par convection et par diffusion. Pour chaque volume de contrôle on aura :



Volume de controle

$$\sum_f^{Nfaces} \rho U_f \Phi_f A_f = \sum_f^{Nfaces} \Gamma_\Phi (\Delta\Phi)_n A_f + S_\Phi v$$

Remarque : Les valeurs discretées du scalaire sont stockées aux centres des cellules. Les valeurs aux faces du terme convectif nécessaires à la résolution de l'équation (52) sont interpolées par un schéma amont des valeurs aux centres des cellules.

Linearisation de l'équation discrétisée

La linearisation de l'équation (52) donne :

$$a_p \phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b$$

À l'exception des cellules adjacentes aux limites du domaine, les autres cellules ont un nombre de faces égal au nombre de cellules avoisinantes. Des équations similaires peuvent être écrites pour chaque cellule du maillage. Cela donne des équations algébriques avec une matrice de coefficients dispersés (sparse coefficients matrix). "Fluent" résout ce système linéaire en utilisant un solveur ponctuel implicite d'équations linéaires (Gauss-Seidel).

Sous relaxation

Pour les équations non linéaires, il est nécessaire de contrôler le changement d'un scalaire ϕ lors de la résolution. La sous relaxation réduit ce changement durant chaque itération. La nouvelle valeur dépend donc de la valeur précédente et de l'écart entre les deux valeurs :

$$\phi = \phi_{old} + \alpha \Delta\phi$$

Dans notre cas, les valeurs de sous relaxation sont donnees dans le tableau (1) :

<i>Model k - ε</i>	
<i>Pression</i>	0.3
<i>Quantite de mouvement</i>	0.7
<i>Energie cinétique turbulente k</i>	0.8
<i>Taux de dissipation ε</i>	0.8
<i>CH₄</i>	0.9
<i>O₂</i>	0.9
<i>H₂O</i>	0.9
<i>CO₂</i>	0.9
<i>Energie</i>	1

Tableau1 : Valeurs de sous relaxation

Note : En cas de probleme de divergence du calcul avec le modele, it est preferable de commencer le calcul avec des facteurs de sous relaxation inferieurs a 0,5 (pour toutes les variables), puis les augmenter au fur et mesure que le calcul converge pour acclerer la convergence.

Discretisation de l' equation de quantite de mouvement

L'equation differentielle de transport de quantite de mouvement est la suivante :

$$\oint \rho \vec{U} \vec{U} d\vec{A} = -\oint P I d\vec{A} + \oint \tau^= d\vec{A} + \int_v \vec{F} dV$$

$-\oint P I d\vec{A}$ est la force totale de pression sur les N faces du polyedre, ou :

I : est la matrice identite \vec{A} est le vecteur de surface.

A : est la force totale visqueuse sur les N faces du polyedre. Ou :

$\tau^=$: est le tenseur de contraintes.

$\int_v \vec{F} dV$: est la force totale de volume sur le volume du polyedre, ou :

\vec{F} : est le vecteur de force.

l'equation discretisee aura la forme suivante :

$$a_p U = \sum_f^{Nfaces} a_{nb} U_{nb} + \sum_f^{Nfaces} P_f \vec{A} + S$$

Ou: a et a_{nb} sont les coefficients de linearisation. L'indice nb (neighbour) correspond aux cellules adjacentes.

Schema du premier ordre amont

"Fluent" considere pour ce schema que la valeur stockée au centre d'une cellule est la moyenne de toutes les valeurs de la même cellule. Les valeurs aux faces sont egales a celles des cellules se trouvant a l'amont.

Schema du second ordre amont

Il y a lieu d'une reconstruction lineaire multidimensionnelle. C'est-à-dire qu'on effectue un developpement en serie de Taylor des valeurs aux centres des cellules. La valeur sur la face sera :

$$\Phi_f = \Phi + \nabla\Phi\Delta S$$

Φ et $\nabla\Phi$; sont la valeur du scalaire dans la cellule centrale et son gradient.
 ΔS : est le vecteur déplacement de la cellule centrale en amont vers la face centrale.
 D'apres le theoreme de divergence :

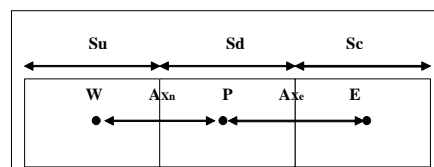
$$\nabla\Phi = \frac{1}{V} \sum_f^{Nfaces} \Phi_f \tilde{A}$$

L'equation (58) represente une deuxieme approche basee sur le calcul d'un gradient a partir d'un bilan sur un volume de controle au lieu de faire la somme des derivees dans toutes les directions.

Schema Quick

Pour un maillage quadrilateral ou hexaedrique oil il n'y a qu'une seule face ou cellule en amont et en aval (figure (3.4)), ce schema est decrit comme su

$$\Phi_e = \theta \left[\frac{S_d}{S_c+S_d} \Phi_P + \frac{S_c}{S_c+S_d} \Phi_E \right] + (1-\theta) \left[\frac{S_u}{S_c+S_u} \Phi_P + \frac{S_c}{S_c+S_u} \Phi_W \right]$$



Maillage quadrilateral structure

$\theta=1$: c'est une interpolation centree au second ordre.

$\theta=0$: c'est le schema second ordre amont.

$\theta=1/8$: c'est le schema Quick traditionnel dans le code "Fluent". θ est choisi d'une maniere dependante de la solution pour eviter d'introduire un nouvel extremum a celle-ci (a noter que pour un maillage hybride θ sera pris nul pour les faces des cellules non quadrilaterales ou non hexaedriques).

Interpolation de la pression

Les valeurs de la pression sont stockées aux centres des cellules pour obtenir les valeurs des pressions aux faces nécessaires pour la résolution de l'équation (56), "Fluent" propose plusieurs schémas d'interpolation.

Schema Standard

L'interpolation s'effectue en utilisant les coefficients de l'équation de quantité de mouvement (56). Cette procédure fonctionne bien pour de petites variations de la pression entre les centres des cellules. De forts gradients de pression entre les cellules engendrent une sous/sur estimation de la vitesse sur les faces. C'est le cas d'un écoulement tourbillonnaire à grande vitesse.

Schema du second ordre

C'est le même schéma utilisé pour la quantité de mouvement.

Schema PRESTO (option de pression décalée)

Il utilise le bilan de masse dans un volume de contrôle décalé pour la face où est calculée la pression décalée. Ce schéma est inspiré de l'idée de la grille décalée valable avec un maillage structure proposé par Patankar [29].

Discretisation de l'équation de continuité

$$\oint \rho U dA = 0$$

Sous forme discrétisée

$$\sum_f^{N_{\text{faces}}} J_f A_f = \sum_f^{N_{\text{faces}}} \rho U_n A_f = 0$$

A_f : est l'aire de l'une des N faces enveloppant le volume fini. •

U_n : est la composante de vitesse normale à la face.

L'équation de continuité sert comme équation pour la pression. On utilise l'un des algorithmes de couplage vitesse-pression pour introduire la pression qui n'apparaît pas explicitement dans l'équation (61).

Couplage Vitesse -Pression

Le couplage Vitesse-Pression est traité en résolvant les équations de quantité de mouvement et une équation pour la pression dérivée d'une combinaison de l'équation de continuité et celles de quantité de mouvement. "Fluent" dispose de trois algorithmes de couplage (SIMPLE, SIMPLEC, PISO) dont le premier sera brièvement décrit ci-dessous,

Algorithme SIMPLE (semi-implicit method for pressure linked equations)

Cet algorithme utilise une relation entre la vitesse et la correction de pression pour imposer la conservation de la masse et obtenir le champ de pression . Si l'equation de quantite de mouvement est resolue avec le champ de pression P^* , le flux resultant sur une face calcule par l'equation (62) ne satisfait pas l'equation de continuite [30] :

$$J_f^* = \hat{J}_f^* + d_f(P_{c0}^* - P_{c1}^*)$$

J_f^* :est un terme qui contient l'effet des pseudo vitesses obtenues en supposant des pression nulles dans les equations de quantite de mouvement.

d_f :est le rapport entre l'aire d'une surface f et la moyenne des coefficients de linearisation des equations de quantite de mouvement a_P .

Par consequent une correction du flux J_f' est ajoutee au flux J_f^* :

$$J_f = J_f' + J_f^*$$

La correction du flux est une fonction de la correction de pression P' :

$$J_f' = d_f(P_{c0}' - P_{c1}')$$

La correction du flux J_f' est substituee dans l'equation de continuite discretisee (61) pour obtenir une equation discrete de la correction de la pression :

$$a_P P' = \sum_{nb} a_{nb} P'_{nb} + b$$

Le terme source b est la somme algebrique des debits traversant les N faces entourant la cellule. C'est un residu qui doit s'annuler apres convergence de la solution.

$$b = \sum_f^{N_{faces}} J_f^* A_f$$

Finalement le champ de pression et le champ de flux deviennent :

$$P = P^* + \alpha_P P'$$

α_P :est un facteur de sous relaxation associe a la correction de pression.

$$J_f = J_f^* + d_f(P_{c0}' - P_{c1}')$$

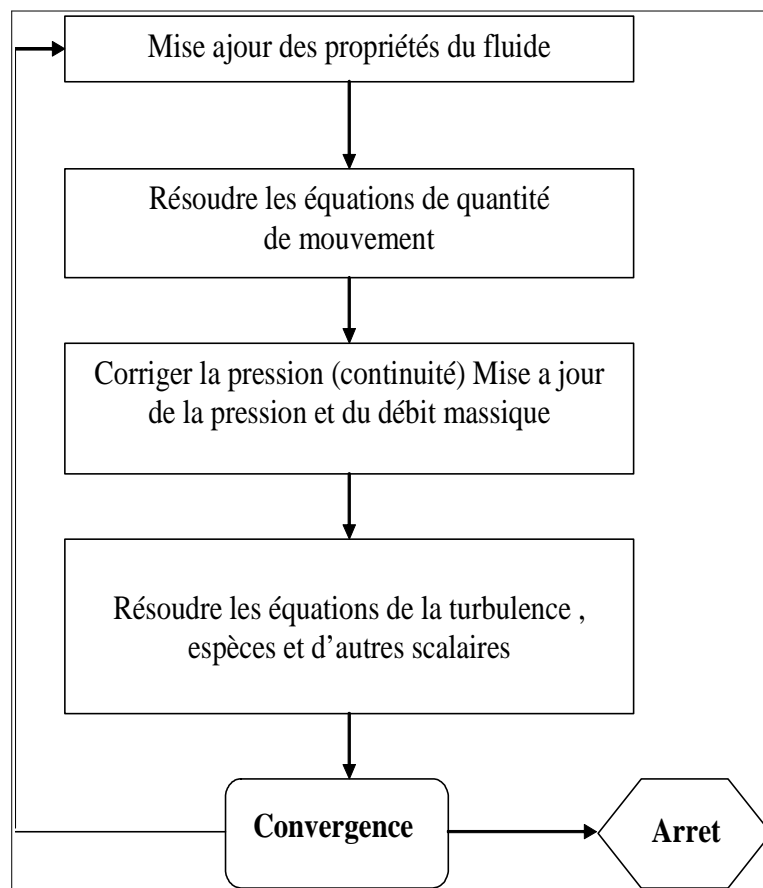
(1.1)

Procédure de Résolution

Un fichier de données (extension .cas) est créé suite à la lecture du fichier contenant les détails de la géométrie (extension .msh). Après vérification du maillage, on passe au type de solveur. Pour notre cas, c'est un solveur découplé avec une formulation implicite pour un cas dimensionnel et un écoulement stationnaire prenant en considération des vitesses absolues. D'autres équations peuvent être ajoutées selon les phénomènes étudiés (transfert de chaleur, combustion, multi phases ...).

Les autres étapes du menu "define" sont les choix du fluide (air), des conditions d'opération (introduction de l'effet de la gravité et de la pression de référence) et l'introduction des conditions aux limites.

Le dernier menu utilisé pour entamer le calcul est le menu "solve". On doit choisir les équations à résoudre, les schémas de discrétisation, les facteurs de sous-relaxations et les critères de convergence. Le calcul est initialisé d'après les conditions aux limites.



Algorithme de calcul pour un solveur découplé

Algorithme de calcul

Pour un solveur découplé, les équations qui gouvernent l'écoulement sont résolues séquentiellement (découplées l'une de l'autre). Un calcul itératif est nécessaire pour des équations non linéaires et interdépendantes. Chaque itération est constituée des étapes suivantes :

- Mise à jour des propriétés du fluide basée sur la solution actuelle. Au-delà du calcul, la mise à jour est basée sur la solution d'initialisation.

- Chaque équation de quantité de mouvement pour U, V et W est résolue en utilisant les valeurs actualisées des pressions et flux de masse pour la mise à jour du champ de vitesse.

- Si les valeurs de vitesses obtenues dans l'étape deux ne satisfont pas l'équation de continuité localement, une équation de type poisson pour la correction des pressions, dérivée de l'équation de continuité et des quantités de mouvement linéarisées, sera résolue pour obtenir les corrections des champs de pression, vitesse et flux massique nécessaires pour satisfaire la continuité.

- Si c'est OK, les équations d'autres scalaires (turbulence, énergies ...etc.) sont résolues

- Si un couplage d'interphase est inclus, les termes sources dans les équations de la phase continue nécessitent une mise à jour avec les résultats du calcul de trajectoire de la phase discrète.

Dans la résolution par la méthode découplée, chaque équation discrétisée est linéarisée en gardant une forme implicite par rapport à la variable dépendante. Pour une variable donnée, la valeur inconnue dans chaque cellule est déterminée en utilisant une relation qui contient des valeurs inconnues. Aussi dans les cellules voisines, donc, la variable inconnue, associée à une cellule, apparaît dans plus d'une équation et par conséquent le système d'équations pour cette variable doit être résolu simultanément.

CHAPITRE 04

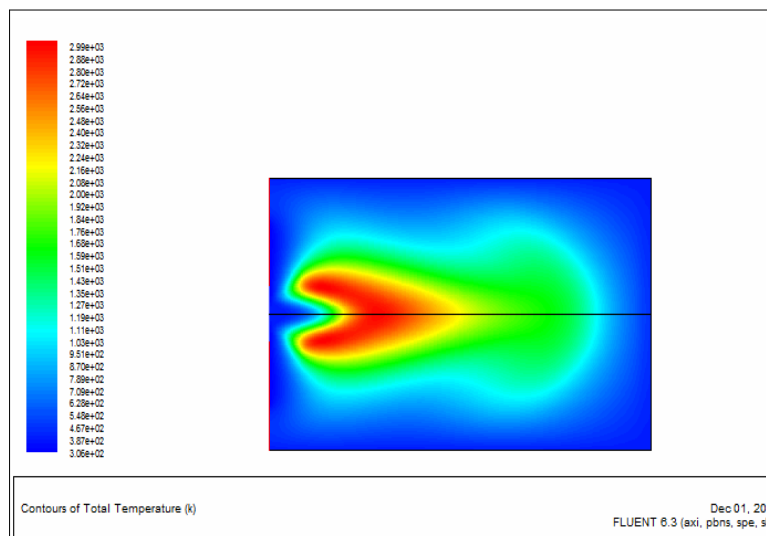
Resultats et Discussions

RESULTATS

Les forces de gravités nulles($g=0$):

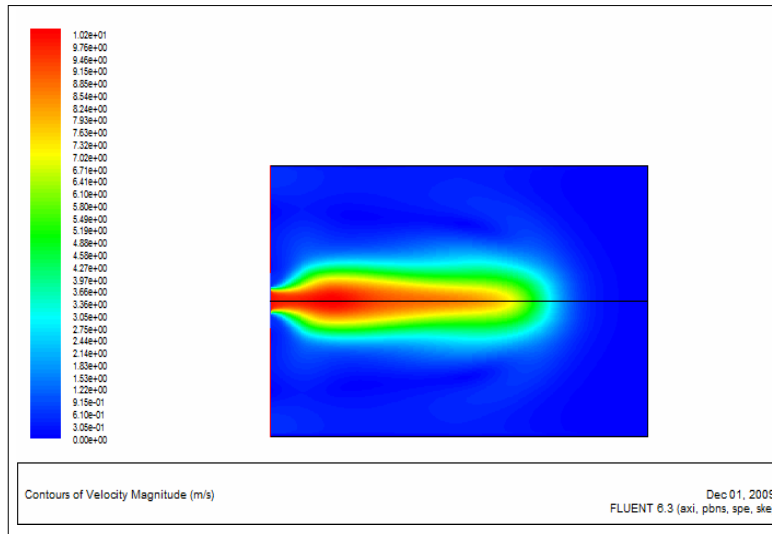
Fond plat:

LA TEMPERATURE: La variation de la température suivant la direction axiale est comme le montre la figure (4.1). Une augmentation rapide de la température, qui est l'une des manifestations les plus importantes de la combustion dans le foyer. La température maximale atteinte est de l'ordre de 2990 °K. la température augmente de forme régulière jusqu'à une distance égale à 25D (D: pas considéré au maillage) , distance pour laquelle la température atteint sa valeur maximale (appelée longueur de flamme) et qui se situe sur l'axe du jet (axe de symétrie). Ensuite, la température diminue progressivement suivant l'axe du jet.



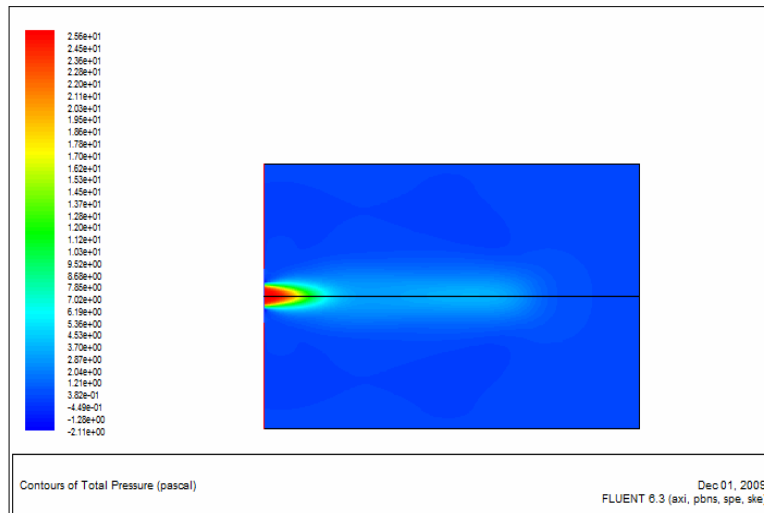
Conteur de la température dans foyer a fond plat

LA VITESSE : Sur la figure (4.2), on remarque que sur l'axe de symetrie une zone de grande vitesse varie de 3 m/s à 10.2 m/s tandis que au reste du foyer, la vitesse est presque nulle



Conteur de la vitèsse dans foyer a fond plat

LA PRESSION: Concernant le champ pression, figure(4.3), on observe que la pression est presque constante dans la majorité du foyer excepter une augmentation de 25p situé à l'entree du foyer .

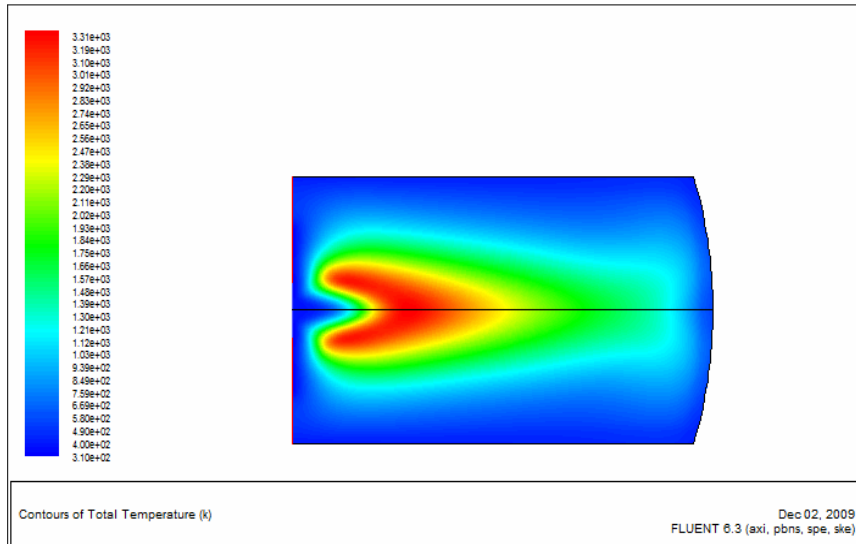


Conteur de la préssion dans foyer a fond plat

Fond bombé:

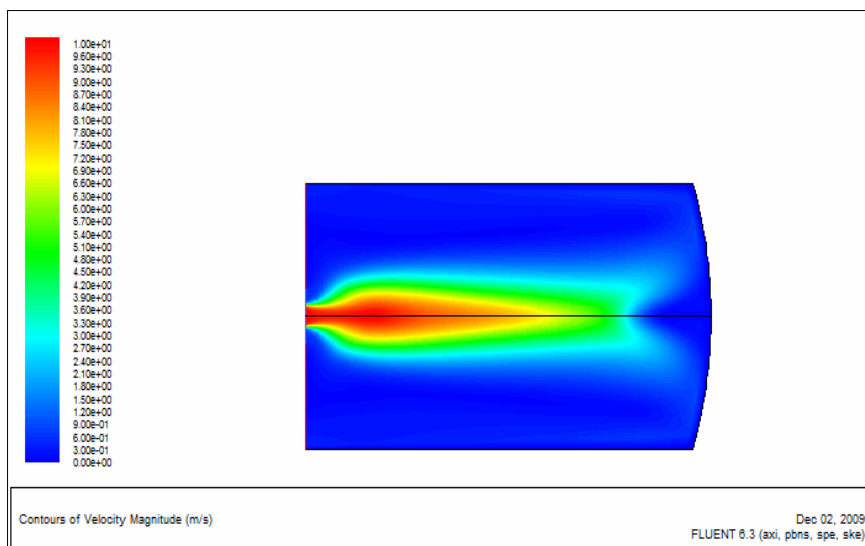
LA TEMPERATURE:

Même remarque que celle du cas précédent, la figure (4.4) montre la variation de la température suivant la direction axiale. Une croissance importante de la température dans la zone de réaction. On distingue que la température atteint 3310 °K , jusqu'à une distance égale à $40D$. Ensuite, la température diminue progressivement suivant l'axe du jet.



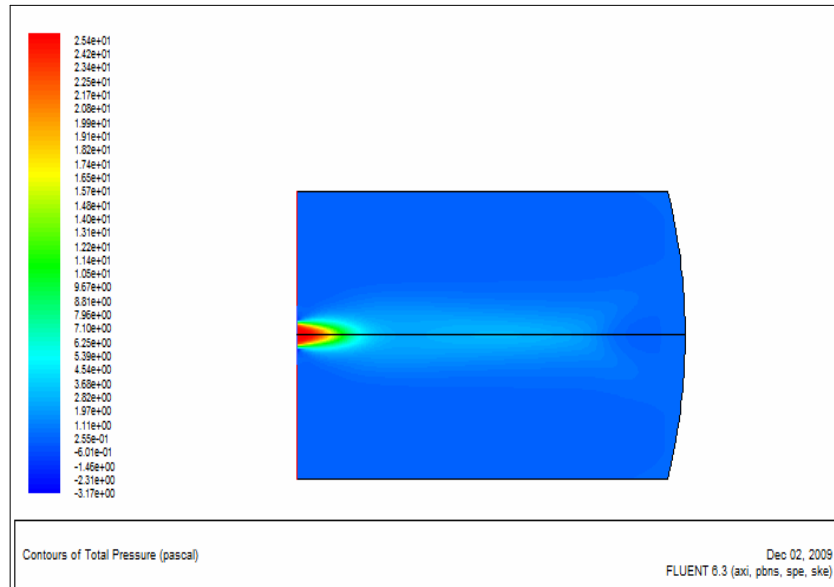
Contour de la température dans foyer a fond bombé

LA VITESSE: Sur la figure (4.5), on remarque que sur l'axe de symétrie une zone de grande vitesse varie de 2.5 m/s à 10 m/s , et la vitesse est presque nulle pour le reste du foyer



Contour de la vitesse dans foyer a fond bombé

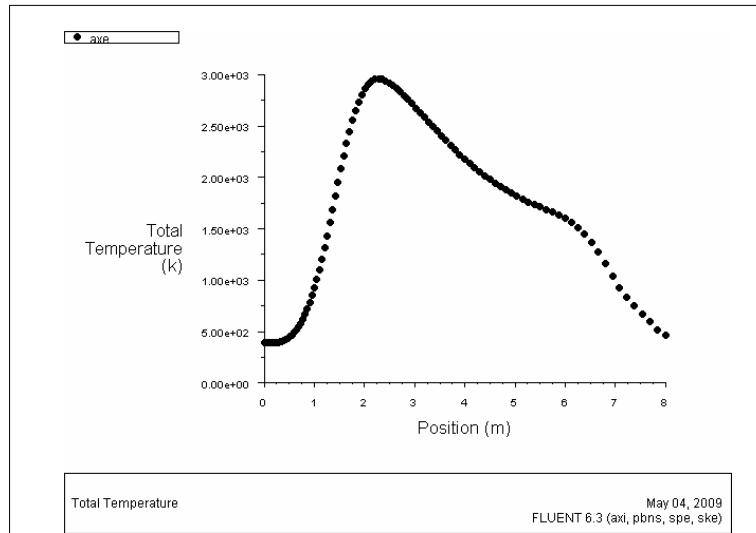
LA PRESSION: Dans figure (4.6), la pression est presque constante à la majorite du foyer, excepter une augmentation de $23.4p$ situé à l'entree du foyer



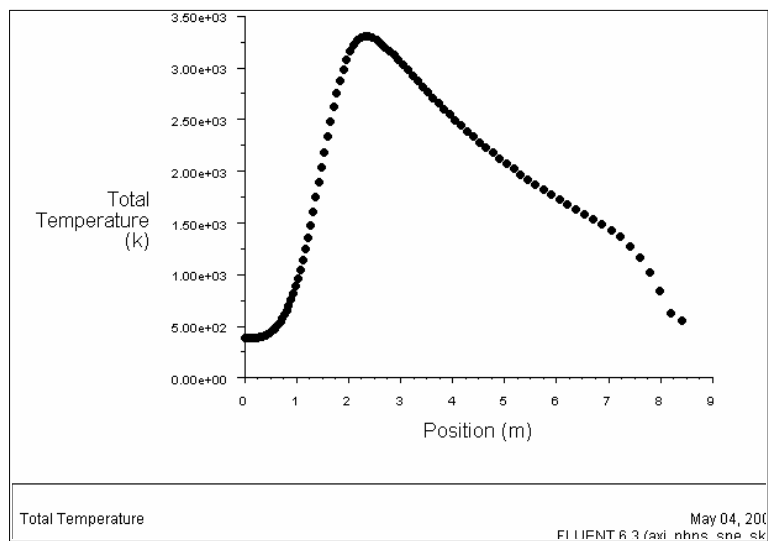
Conteur de la préssion dans foyer a fond bombé

COMPARAISON

LA TEMPERATURE SUR L'AXE DE SYMETRE



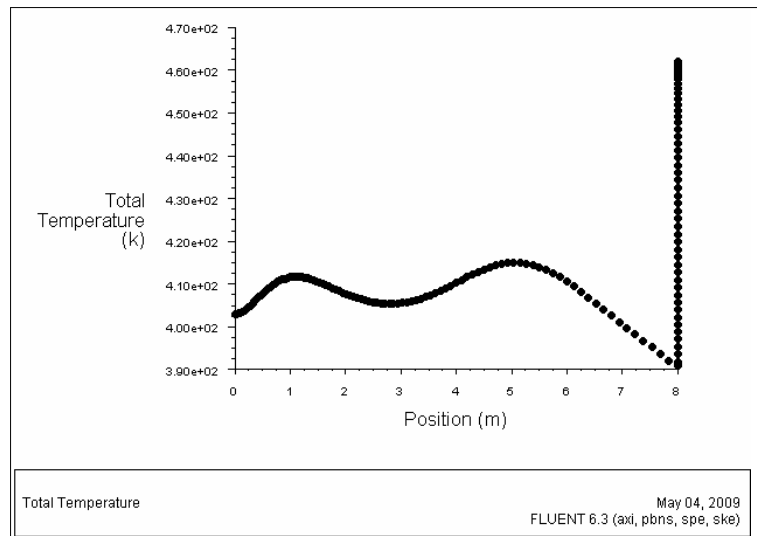
Courbe de la température sur l'axe de foyer a fond plat



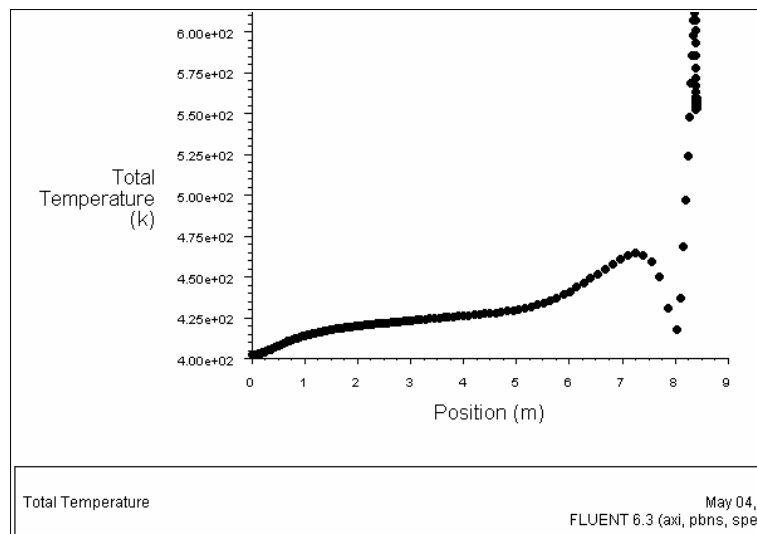
Courbe de la température sur l'axe de foyer a fond bombé

	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T _{Max}
Fond plat	403	412	407	405	410	415	410	400	390	415
Fond bombé	405	412	420	424	426	430	447	465	415	470

LA TEMPERATURE SUR LES PAROIS



Courbe de la température sur les parois de foyer a fond plat



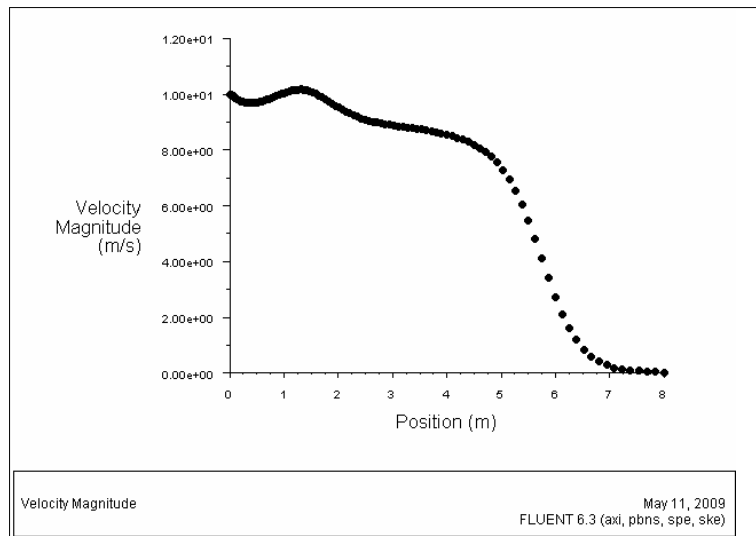
Courbe de la température sur les parois de foyer a fond

	T ₀	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T _{Max}
Fond plat	403	412	407	405	410	415	410	400	390	415
Fond bombé	405	412	420	424	426	430	447	465	415	470

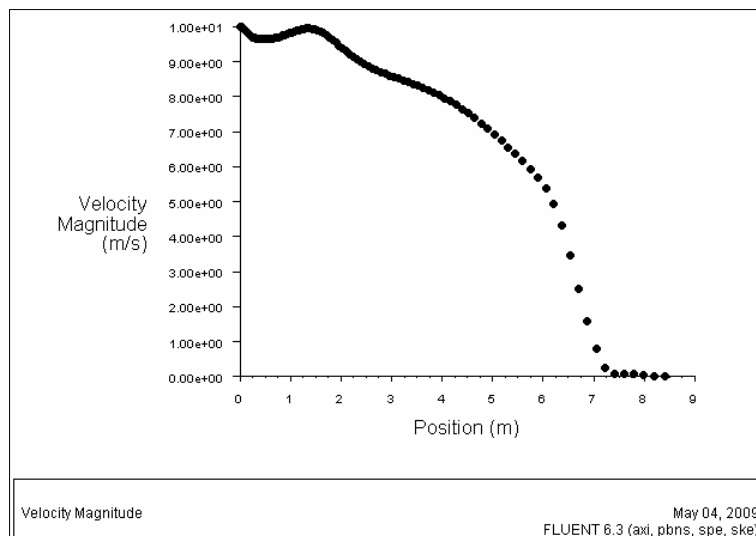
Dans les positions xi (i=0,5) le cas de fond bombé la température est supérieur a c'elle ou le cas de fond plat

$$(T_i)_{FB} > (T_i)_{FP} \quad \forall i=1,5$$

LA VITESSE



Courbe de la vitesse sur l'axe de foyer a fond plat

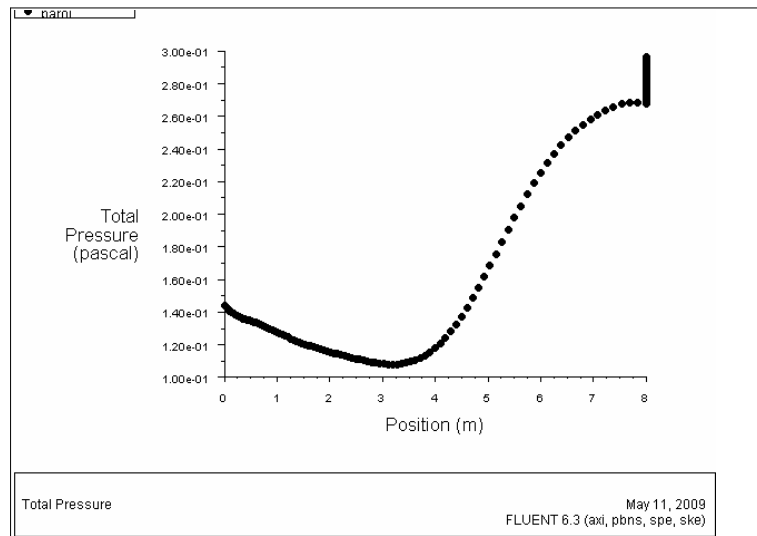


Courbe de la vitesse sur l'axe de foyer a fond bombé

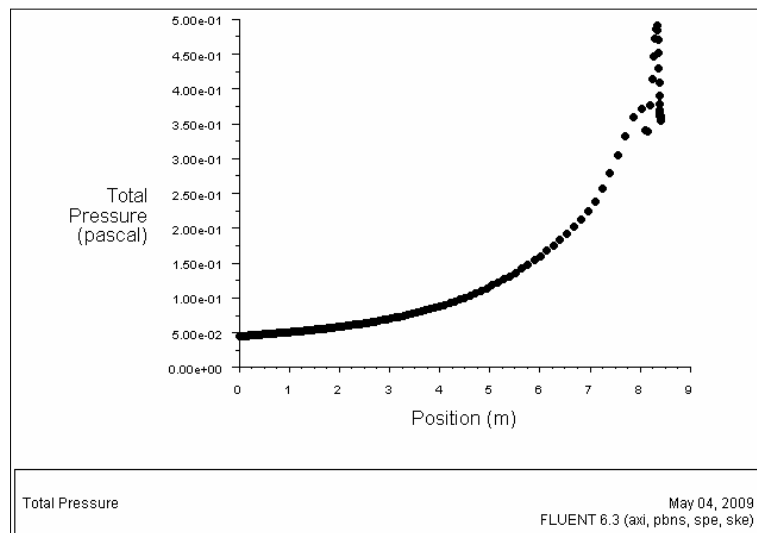
	V ₀	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆	V ₇	V ₈	V _{Max}
Fond plat	10	10	9.5	8.8	8.5	7	2.8	0.3	0	10.2
Fond bombé	10	9.8	9.3	8.5	8	6.8	5.4	1	0	10

Dans les positions xi (i=0,3) le cas de fond bombé la vitesse est supérieure à celle du cas de fond plat
 $(V_i)_{FB} > (V_i)_{FP} \quad \forall i=1,3$

LA PRESSION SUR LES PAROIS



Courbe de la pression sur les parois de foyer a fond plat



Courbe de la pression sur les paroi de foyer a fond bombé

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P _{Max}
Fond plat	14.5	12.5	11.5	10.9	11.3	17	23	26	27	27
Fond bombé	4.8	5	6	7	8	12	16	24	37	37

Dans les positions xi (i=0,3) le cas de fond plat la pression est superieur a c'elle ou le cas de fond bombé
 $(P_i)_{FP} > (P_i)_{FB} \quad \forall i=1,3$

REMARQUE IMPORTANTE:

D'apres notre étude pour (g), on distingue les memes resultats obtenues pour le cas precedant (g=0), ce qui nous montre qu'on peut negliger les forces gravitationnelles.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES FUTURES

Le présent travail repose essentiellement sur l'application de l'approche des volumes finis utilisée par le code de calcul FLUENT en simulation numérique des phénomènes de l'aerothermnochimie turbulente dans la combustion a des flammes non prémélangées. Cette étude basée sur un jet axisymétrique et turbulent en dimension deux, dans un foyer de chaudière en acier pour deux fonds différents : fond plat et un fond bombé. En utilisant le modèle k-E et le modèle Eddy Dissipation pour la modélisation de la combustion, qui a donné de résultats pertinente.

On peut citer quelques remarques importantes après cette étude :

- 1) Pour ce qui est de la température, on observe une augmentation de cette dernière, signe caractéristique d'une réaction de bonne combustion dans le cas du fond bombé qui est le rapport direct d'augmenter la puissance de la chaudière.
- 2) D'autre part, les résultats de la vitesse donnée au foyer de fond bombé, a une priorité de bonne géométrie, car l'augmentation des valeurs de la vitesse qui est un signe de bonne circulation des gaz injecter au foyer et aussi les gaz brûlée sortant du même foyer.
- 3) La diminution des valeurs de la pression répond a la demande de la pression idéal au foyer de combustion pour réserver toutes les caractéristique des parois du foyer donc augmenter la dure de vie de la chaudière.

Pour conclure notre travail, une étude future en 3D, nous parait intéressante, et serait peut être judicieux de traiter un exemple plus compliqué, tenant compte de l'apport de la circulation de l'eau autour de les parois et pour lequel la simulation numérique qui s'impose prendrait en compte des nouveaux condition aux limites, certainement, d'approcher avec plus de précision le comportement réel du problème complexe de la combustion dans un foyer de chaudière.

REFERENCES

- [1] G. DAMKOHLER. « The Effect of Turbulence on the Flame Velocity in a Gas Mixture ». English translation. NACA TM 1112, April (1947).
- [2] HOTELL HC, HAWTHORNE WR (1949) 3rd symposium on combustion, Williams and Wilkins, Baltimore, p.254.
- [3] K. K. KUO. « Principles of Combustion ». Ed. John Wiley. New York, (1986).
- [4] BILGER RW (1976) prog. Energy. Comb.sc, 1,87.
- [5] Magnussen B, Hjertager BH(1976) 16th symposium (Mt.) on combustion, 719-729, The Combustion Institute, Pittsburgh.
- [6] Marble F, Broadwell J (1977) The coherent flame model for turbulent chemical reactions. TRW Report, Redondo Beach, Californie.
- [7] Bray (1979) "The interaction between turbulence and combustion" In P.A Libby and F.A. Williams (Ed), Topics in applied physics, 44 pp 115, New York, Springer Verlag.
- [8] Borghi et Dutoya "On the scales of fluctuations in Turbulent Combustion", colloquium on turbulent combustion interaction, combustion institute.
- [9] Bilger RW, beck RE (1975) 15th symposium (Int.) on combustion, p. 541, the combustion institute Pittsburgh.
- [10] Borghi R, Vervisch L, Garretton D (1991) The calculations of local fluctuations in non-premixed turbulent flames. In: heat transfer in radiating combustng systems (Carvalho MG, Lockwood F, TaMe J, eds.) 83-113, Springer Verlag, Berlin.
- [11] Masri AR, Dibble RW, Bilger RW (1988) Composition and flame, 71,245.
- [12] S. KUCUKGOKOGLAN, A. AROUSSI, S. J. PICKERING. « Prediction of Interaction Between Burners In Multi-Burner Systems ». University of Nottingham, Nottingham, NG7 2RD, UK, p. 1, (1999).
- [13] Y. DEMAGH Wodelisation par Elements Finis des transferts Thermiques : application au four de la cimenterie de Hamma Bouziane», Memoire de Magistere, University de Batna (2002).
- [14] R. BORGHI. « Recent Advances in Aerospace Science ». (C Bruno, C Casci. Eds). Plenum Pub. Corp. p. 117, (1985).
- [15] L. VERVISCH & D. VEYNANTE Turbulent combustion, cours presentes a l'institut de Von Karman (1999).
- [16] A. BOUKHALFA Combustion a l'etude de la structure scanner dans les flammes turbulentes premelangees de type BUNSEN, these de doctorat d'etat, universite d'Orleans (1988).
- [17] R.BORGHI & M. DESTERIAU La combustion et les flammes, TECHNIP (1975).
- [18] R.BORGHI & M. CHAMPION Modelisation et theorie des flammes, TECHNIP (2000).
- [19] B. E. LAUNDER, D. B. SPALDING. « Mathematical Models Of Turbulence». Academic Press, London and New York (1972).
- [20] D. B. SPALDING. « Development of the Eddy-Break-Up Model of Turbulent Combustion », Sixteenth International Symposium on Combustion, Ed. The Combustion Institute, p. 1657, (1977).
- [21] FLUENT 6.0 documentation. User's Guide. Fluent. Inc. (2001).
- [22] J.O. Hinze. Turbulence. McGraw-Hill Publishing Co., New York, 1975.
- [23] B. E. LAUNDER, D. B. SPALDING. « Lectures Mathematical Models of Turbulence. ». Academic Press, London, England, (1972).
- [24] G. D. Raithby and E. H. Chui. A Finite-Volume Method for Predicting a Radiant Heat Transfer in Enclosures with Participating Media. J. Heat Transfer, 112:415-423, (1990).
- [25] E. H. Chui and G. D. Raithby. Computation of Radiant Heat Transfer on a Non Orthogonal Mesh Using the Finite-Volume Method. Numerical Heat Transfer, Part B, 23:269-288, 1993.
- [26] J. R. Viegas, M. W. Rubesin, and C. C. Horstman. On the Use of Wall Functions as Boundary Conditions for Two-Dimensional Separated Compressible Flows. Technical Report 23rd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, 1985.

- [27] GAMBIT 2.0 Documentation : User's guide. Modelling guide. Tutorial guide. Fluent. Inc.2001.
- [28] B. P. Leonard and S. Mokhtari. ULTRA-SHARP Nonoscillatory Convection Schemes for High-Speed Steady Multidimensional Flow. NASA TM 1-2568 (ICOMP-90-12), NASA Lewis Research Center, 1990
- [29] S. V. PATANKAR. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere. Washington, D,C. PP 115-120. 1980
- [30] C. M. Rhie and W. L. Chow. Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation. AIAA Journal, 21(11):1525{1532, November 1983.
- [31] C. Bailly, G.Compte-bellot (2003). "Turbulence", Editions CNRS.