



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** EDP et applications

## Thème

---

*Problème d'évolution bidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire*

---

**Présentée par :**

*M<sup>me</sup> AMROUNE* Bouchra

**Soutenu publiquement le :** 22/06/2020.

**Devant le jury composé de :**

<b>Président :</b>	<i>M<sup>r</sup> BENABDERRAHMANE</i> Benyattou	Prof.,	Université de M'sila
<b>Encadreur :</b>	<i>M<sup>r</sup> NOUIRI</i> Brahim	M.C.A,	Université de M'sila
<b>Co-Encadreur :</b>	<i>M<sup>r</sup> FERAHTIA</i> Nassim	M.A.A,	Université de M'sila
<b>Examineur :</b>	<i>M<sup>r</sup> GAGUI</i> Bachir	M.C.A,	Université de M'sila

---

# Remerciements

---

*Au NOM D'ALLAH LE CLÉMENT ET LE MISERICORDIEUX.*

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout Puissant qui m'a donné le courage et la persévérance pour la réalisation de ce modeste mémoire. Je remercie profondément Monsieur **NOURI Brahim** mon encadreur, qui m'a beaucoup aidé pour terminer ce travail malgré ses nombreuses charges, il m'a guidé durant mon recherche, et sans oublier ses précieux conseils.

Je remercie aussi co-encadreur Monsieur

**FERAHTIA Nassim.**

Mes sincères remerciements à monsieur

**BENABERRAHMANE Benyattou**, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire .

Je remercie vivement Monsieur

**GAGUI Bachir**, qui a accepté d'examiner mon travail .

Je voudrais également remercier tous mes enseignants, tous mes collègues de deuxième année Master EDP et applications, en particulier

**M. Allaoui, M. Laoudi, J. Boudayssa** je leur souhaite une bonne continuation

De tout mon cœur je remercie mes parents, et mes prières que Dieu les protège et les accorde santé et longue vie.

Enfin, j'adresse un grand remerciement à mon père Djelloul , mes oncle et tout ma famille, qui n'ont donné beaucoup de soutien constant et d'encouragement.

Merci pour tout

---

# Dédicaces

---

Je dédie ce modeste mémoire

À mes très chers parents.

À mes chères sœurs : Monira, Lakra, Hanam, Abir et Sonya.

À mes frères : Azouz, Mostafa, Abdalwahhab et Abderrahman.

À mes oncles, et tout les membres de ma famille.

À mes amis, je vous souhaite tout le succès possible dans votre carrière et dans l'avenir.

À tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude.

À tout les gents qui m'ont aimé.

BOUCHEBO

---

# Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié analytiquement et numériquement d'un problème d'évolution pour une équation d'onde fractionnaire en dimension un et en dimension deux. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour les variables d'espace et la méthode des différences finies pour la variable du temps. En se basant sur les transformées de Laplace et de Fourier, nous avons calculé la solution analytique pour le problème unidimensionnel. La stabilité et la convergence du problème discret total à été démontré par récurrence. Nous avons proposé deux algorithmes pour les deux problèmes considérés et deux exemples numériques sont présenté et avec l'utilisation de Matlab et Freefem++, nous avons validé l'efficacité de ces algorithmes.

**Mots-Clés :** Calcul fractionnaire, Équation d'onde fractionnaire, Méthode des éléments finis, Méthodes des différence finis.

---

In this work, we have studied analytically and numerically an evolution problem for a fractional wave equation in dimension one and in dimension two with Dirichlet boundary condition. We used the finite element method for the space variables and the finite difference method for the time variable. Based on the Laplace and Fourier transforms, we calculated the analytical solution for the one-dimensional problem. The stability and convergence of the total discrete problem has been demonstrated by induction. We proposed two algorithms for the two problems considered and two numerical examples are presented and with the use of Matlab and Freefem ++, we validated the efficiency of these algorithms.

**Keywords :** Fractional calculus, Fractional wave equation, Finite element method, Finite difference method.

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Préliminaires sur le calcul fractionnaire</b>	<b>8</b>
1.1	Fonctions spéciales . . . . .	9
1.1.1	Fonction Gamma . . . . .	9
1.1.2	Fonction Bêta . . . . .	9
1.2	Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . . .	11
1.3	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . . .	13
1.4	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	14
1.5	Transformation de Laplace . . . . .	14
1.6	Transformation de Fourier . . . . .	15
1.6.1	Transformation de sinus-Fourier fini . . . . .	15
1.7	Fonction Mittag-Leffler . . . . .	15
1.8	Généralité sur les matrices . . . . .	16
1.9	Les normes vectorielles et matricielles . . . . .	18
1.9.1	Normes vectorielles . . . . .	18
1.9.2	Normes matricielles . . . . .	18
1.10	Schéma de différences finies . . . . .	19
1.10.1	Stabilité et convergence . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Problème d'évolution unidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire</b>	<b>21</b>
2.1	Position du problème . . . . .	22
2.2	Résolution analytique . . . . .	22
2.3	Méthode des éléments finis . . . . .	25
2.3.1	Formulation variationnelle du problème . . . . .	25
2.3.2	Problème semi-discret . . . . .	26
2.3.3	Problème discret totale . . . . .	28
2.3.4	Algorithme . . . . .	33
2.3.5	Exemple numérique . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Problème d'évolution bidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire</b>	<b>36</b>
3.1	Position du problème . . . . .	37
3.2	Méthode des élément finis . . . . .	37
3.2.1	Formulation variationnelle du problème . . . . .	37
3.2.2	Problème discret totale . . . . .	38
3.2.3	Stabilité et convergence . . . . .	38
3.2.4	Résolution numérique par FreeFem++ . . . . .	44
3.2.5	Exemple numérique . . . . .	45

---

---

# Table des figures

---

2.1	solution exacte et approché . . . . .	35
3.1	solution exacte et solution approché en 2D . . . . .	46
3.2	solution approchée en 3D . . . . .	46

---

# Introduction générale

---

Dans ce mémoire, nous considérons le problème d'évolution pour une équation d'onde fractionnaire en temps suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t) & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ , \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T[ , \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2$ ) est un segment ouvert ou un polygone,  $u_0$ ,  $u_1$  et  $f$  sont des fonctions données. Ici  $u_t$  est la dérivée de  $u$  par rapport à la variable de temps  $t$ , et  ${}^c\mathcal{D}_0^\alpha$  est l'opérateur différentiel fractionnaire de Caputo d'ordre  $1 < \alpha < 2$  défini par :

$${}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial s^2} ds, \quad 0 < t \leq T,$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction Gamma d'Euler.

Au cours des deux dernières décennies, les méthodes numériques pour l'équation d'onde fractionnaire en temps est un domaine de recherche actif. La principale différence de ces méthodes numériques est de savoir comment discrétiser les dérivées fractionnaires. Jusqu'à présent, il existe trois approches pour discrétiser la dérivée fractionnaire : la méthode des différences finies, la méthode spectrale et la méthode des éléments finis.

Pour la première classe d'algorithmes qui utilisent la méthode des différences finies pour discrétiser la dérivée fractionnaire, voir [7, 9, 15, 17, 25, 27, 28]. Ces algorithmes sont faciles à mettre en œuvre, mais sont généralement de faible précision en temps.

Pour la deuxième classe d'algorithmes qui utilisent la méthode spectrale pour discrétiser la dérivée fractionnaire, voir [12, 13, 26, 29–31]. Ces algorithmes ont une précision élevée si la solution est suffisamment régulière. Étant donné que la singularité est une caractéristique importante des problèmes d'onde fractionnaire dans le temps, la précision d'ordre élevé de ces algorithmes est limitée. En outre, les algorithmes conduisent souvent à des systèmes denses à grande échelle à résoudre.

Pour la troisième classe d'algorithmes qui utilisent la méthode des éléments finis pour discrétiser la dérivée fractionnaire, voir [18–22]. Semblable à la première classe d'algorithmes, les systèmes discrets issus de ces algorithmes sont résolus successivement par rapport au temps. De plus, ces algorithmes possèdent une précision d'ordre élevée, et si la solution présente une singularité, ces algorithmes peuvent également avoir une précision d'ordre élevée en utilisant des grilles graduées dans la discrétisation temporelle.

En raison de la propriété non locale de la dérivée fractionnaire, les informations historiques doivent être stockées pour calculer la solution à chaque étape. Par conséquent, le coût de stockage et de calcul pour résoudre un problème d'onde fractionnaire en temps est nettement plus

cher que celui pour résoudre un problème d'onde standard. Une idée naturelle est de développer des algorithmes de précision temporelle d'ordre élevée. Cependant, il est bien connu que les problèmes d'ondes fractionnaires dans le temps ont généralement une singularité à  $t = 0$ , malgré la régularité des données initiales et aux limites. Cela rend plus difficile le développement d'algorithmes de précision d'ordre élevée. Comme mentionné précédemment, les méthodes de différences finies n'ont généralement qu'une faible précision temporelle. En outre, la précision d'ordre élevée de la méthode spectrale est limitée par la singularité des problèmes d'ondes fractionnaires dans le temps. Cela, nous motive à développer des méthodes de précision d'ordre élevé qui peuvent également aborder la singularité à  $t = 0$ .

Dans ce mémoire, nous présentons une étude analytique et numérique pour le problème (1). Nous utilisons la méthode des éléments finis pour les variables d'espace  $x$  et la méthode des différences finies pour la variable du temps  $t$ .

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous avons présenté certaines théories de base de calcul fractionnaire. Nous avons donné les définitions des fonctions Gamma et Bêta, les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que les transformations de Laplace et de Fourier. De plus, nous avons donné un rappel sur la méthode des différences finies et l'interpolation linéaire de Lagrange.

Dans le deuxième chapitre, nous avons calculé la solution analytique du problème (1) pour  $d = 1$  par l'utilisation des transformées de Laplace et de Fourier. Pour la solution numérique, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour la variable d'espace  $x$  et la méthode des différences finies pour la variable de temps  $t$  et un exemple numérique traité par **Matlab** à présentés .

Le dernier chapitre, basé sur l'étude numérique du problème (1) pour  $d = 2$  par la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies. La stabilité et la convergence sont démontrées par récurrence et un exemple numérique traité par **FreeFem++** a été présenté pour montrer l'efficacité de cette méthode.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

# PRÉLIMINAIRES SUR LE CALCUL FRACTIONNAIRE

---

Dans ce chapitre, nous avons parlé par certains théories de base du calcul fractionnaire. Nous donnons des définitions de quelques fonctions spéciales ( Gamma, Bêta et Mittag-Leffler ), ensuite nous présentons les intégrales et les dérivées fractionnaire ( au sens de Riemann-Liouville et de Caputo ), ainsi que les transformations de Laplace et de Fourier et ce chapitre contient des définitions élémentaires sur les matrices avec la définition du l'une des méthodes utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles "la méthode des différences finies".

## 1.1 Fonctions spéciales

### 1.1.1 Fonction Gamma

**Définition 1.1.** ([23]). On appelle fonction Gamma, la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

**Propriétés 1.1.** Nous avons les propriétés suivantes

1.  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ .
2.  $\Gamma(n + 1) = (n)!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
3.  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 1.1.** La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entières par la formule  $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z}$  et la transition d'un intervalle à une autre  $(-1, 0)$ ,  $(-2, -1)$ , ... la fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatives entières.

**Exemple 1.1.** Soit  $z = \frac{1}{2}$  pour calculer  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  on utilise un changement de variable on pose que  $t = \tau^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau && \text{(d'après l'intégrale de Gauss)} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

### 1.1.2 Fonction Bêta

**Définition 1.2.** ([23]). La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes  $z$  et  $w$  par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(w) > 0.$$

**Proposition 1.1.** la relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par pour tout  $z, w \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(w) > 0$  on a

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}.$$

*Démonstration.* Soit  $D = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on a

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \left( \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \right) \left( \int_0^{+\infty} y^{w-1} e^{-y} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{z-1} y^{w-1} e^{-(x+y)} dx dy.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v), \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u.$$

De même que le domaine  $D'$  correspondante à  $D$  dans les coordonnées  $u, v$  est

$$D' = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\iint_D x^{z-1} y^{w-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \iint_{D'} (uv)^{z-1} (u(1-v))^{w-1} e^{-u} | -u | du dv \\ &= \iint_{D'} (u)^{z+w-1} v^{z-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 (u)^{z+w-1} v^{z-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} du dv \\ &= \left( \int_0^{+\infty} (u)^{z+w-1} e^{-u} du \right) \left( \int_0^1 v^{z-1} (1-v)^{w-1} dv \right) \\ &= \Gamma(z+w) \cdot B(z, w).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

□

## 1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soient  $\Omega = [a, b]$  avec  $(-\infty < a < b < +\infty)$  un intervalle fini sur  $\mathbb{R}$  et  $f \in L^1([a, b])$  une fonction intégrable sur  $\Omega$ , nous avons

$$I_{a+}^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

L'itération de  $(I_{a+}^1 f)$  permet d'obtenir la primitive seconde de  $f$  qui s'annule en  $a$  et dont la dérivée s'annule en  $a$ , De plus on a

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(x) &= I_{a+}^1(I_{a+}^1 f(x)) \\ &= \int_a^x I_{a+}^1 f(t) dt \\ &= \int_a^x \left( \int_a^t f(s) ds \right) dt, \end{aligned}$$

on pose  $g(t) = \int_a^t f(s) ds$ , d'après l'intégrale par partie. Nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(x) &= \left[ t \int_a^t f(s) ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(s) ds - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt \\ &= \int_a^x (x - t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Donc, pour  $n^{eme}$  itération, on obtient :

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

**Définition 1.3.** ([10,24]). Soient  $\Omega = [a, b]$  avec  $(-\infty < a < b < +\infty)$  un intervalle fini sur  $\mathbb{R}$  et  $f \in L^1([a, b])$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$

Les intégrales

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad , x > a, Re(\alpha) > 0. \quad (1.1)$$

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad , x < b, Re(\alpha) > 0. \quad (1.2)$$

Sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $Re(\alpha) > 0$ ) respectivement.

**Exemple 1.2.** Soit  $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$  on a

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt.$$

Avec le changement de variable  $t = a + s(x-a)$ , nous avons :

$$\begin{cases} t = a \Leftrightarrow s = 0, \\ t = x \Leftrightarrow s = 1, \\ dt = (x-a)ds. \end{cases}$$

Donc, avec la définition de la fonction Bêta , on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

En utilisant Proposition (1.1), on obtient :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

**Remarque 1.2.** L'intégrale d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  est donnée par

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (x-a)^{\alpha} \quad \text{et} \quad I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (b-x)^{\alpha},$$

$$f(x) = C \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 1.2.** ( [24, page34]). Soient  $f \in \mathbb{C}([a, b])$  et  $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ . Les intégrales fractionnaires de Riemann Liouville possède les propriétés suivantes

1.  $I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x).$
2.  $I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f(x) = I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x).$

## 1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.4.** ([10, page70]). Soit  $f \in L^1([a, b])$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ . Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville  $\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x)$  et  $\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $Re(\alpha) > 0$ , sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) &= \left( \frac{d}{dx} \right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x > a, \end{aligned} \quad (1.3)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) &= \left( -\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x < b. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Respectivement, où  $[Re(\alpha)]$  est la partie entière de  $Re(\alpha)$ .

**Propriétés 1.2.** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  avec  $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Nous avons :

1.  $\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$ ,
2.  $\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}$ .

**Propriétés 1.3.** 1. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordre entiers

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^m f(x) = f^{(m)}(x), \\ \mathcal{D}_{b^-}^m f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x). \end{cases}$$

2. Si  $0 < \alpha < 1$ , alors  $n = [\alpha] + 1 = 1$ . Donc, 1.3 et 1.4 devient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad x > a, \\ \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad x < b. \end{aligned}$$

3. Si  $\beta = 1$  et  $0 < Re(\alpha) < 1$ , alors la dérivée au sens de Riemann Liouville d'une fonction constante en générale n'est pas nulle

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{b^-}^\alpha 1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

4. Pour tout  $j = 1, 2, \dots, n = [Re(\alpha)] + 1$  avec  $Re(\alpha) \geq 0$ , nous avons

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (x-a)^{\alpha-j} = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-x)^{\alpha-j} = 0.$$

## 1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

**Définition 1.5.** ([10]). Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$  avec  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction telle que  $f^{(n)} \in L^1([a, b])$ . Les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  de  $f$  au sens de Caputo sont définies par

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (1.5)$$

et

$${}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}. \quad (1.6)$$

**Proposition 1.3.** ([10]). Les relations entre les dérivées au sens de Caputo (1.5), (1.6) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.3), (1.4) sont données par :

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right), \quad (1.7)$$

et

$${}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k \right). \quad (1.8)$$

On remarque que si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$  alors

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) \quad \text{et} \quad {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(x).$$

## 1.5 Transformation de Laplace

**Définition 1.6.** ([1, page 5]). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ . la transformée de Laplace est définie par :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = f^*(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad (1.9)$$

où  $s$  est la variable de transformation .

-La transformée Laplace **inverse** est réalisée selon la formule **Fourier Mellin**

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^*(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)e^{st} dt, \quad t > 0, \quad (1.10)$$

où  $c$  est un nombre fixe.

**Propriétés 1.4.** (voir [1, page 7]). Nous avons les propriétés suivantes :

1. La transformée de Laplace pour la dérivée de Riemann-Liouville est

$$\mathcal{L}\{\mathcal{D}_{R,L}^\alpha f(t)\} = s^\alpha f^*(s) - \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{D}^k I^{m-\alpha} f(0^+) s^{m-1-k} \quad \text{où } m-1 < \alpha < m.$$

2. La transformée de Laplace pour la dérivée de Caputo est

$$\mathcal{L}\{{}^c\mathcal{D}^\alpha f(t)\} = s^\alpha f^* - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} \quad \text{où } m-1 < \alpha < m. \quad (1.11)$$

– Le théorème de convolution, Souvent utilisé pour l'inversion de la transformée Laplace est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{f^*(s)g^*(s)\} &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (1.12)$$

## 1.6 Transformation de Fourier

### 1.6.1 Transformation de sinus-Fourier fini

**Définition 1.7.** ([1, page 13]). La transformée de sinus-Fourier fini est la reformulation pratique de série sinus-Fourier dans le domaine  $0 \leq x \leq L$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\xi_k) = \int_0^L f(x)\sin(x\xi_k)dx, \quad (1.13)$$

et

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi_k)\} = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\xi_k)\sin(x\xi_k), \quad (1.14)$$

où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{L} \quad ; k = 1, 2, 3, \dots$$

– La transformée sinus-Fourier fini pour la dérivée seconde d'une fonction est

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 f}{dx^2}\right\} = -\xi_k^2 \tilde{f}(\xi_k) + \xi_k [f(0) - (-1)^k f(L)]. \quad (1.15)$$

## 1.7 Fonction Mittag-Leffler

**Définition 1.8.** ([1, page 24]). La fonction Mittag-Leffler est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \quad z > 0$$

La fonction généralisée Mittag-Leffler avec deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

- Le rôle essentiel de la fonction **Mittag-Leffler** est trouvé dans le calcul de la **transformation inverse de Laplace** suivant

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + b} \right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-bt^\alpha). \quad (1.16)$$

**Propriétés 1.5.** (voir [1, page 27]). Nous distinguons les trois cas suivants :

1. Pour  $\beta = 1$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + b} \right\} = E_\alpha(-bt^\alpha) \quad (1.17)$$

2. Pour  $\beta = 2$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + b} \right\} = t E_{\alpha,2}(-bt^\alpha) \quad (1.18)$$

3. Pour  $\beta = \alpha$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + b} \right\} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-bt^\alpha). \quad (1.19)$$

## 1.8 Généralité sur les matrices

**Définition 1.9.** ([5]). Soit  $m, n \in \mathbb{N}$ . Une matrice de type  $(m, n)$  sur  $\mathbb{K}$  est un tableau de scalaires (réels ou complexes) à  $m$  lignes et  $n$  colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons les abréviations suivantes,  $A = (a_{ij})$  avec  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$  et  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices  $(m, n)$  sur  $\mathbb{K}$

**Définition 1.10.** ([5]). Soit  $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ , la **transposée** de  $A$  notée  $A^T$ , est la matrice de  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$  définie par

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, m,$$

Si  $A^T = A$  on dit que  $A$  est **symétrique**.

Soit  $A$  une matrice carrée,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de coefficients  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Définition 1.11.** ([5]). On dit que  $A$  est **inversible** s'il existe une matrice  $B$  de taille  $n$  telle que

$$AB = BA = I_n,$$

La matrice  $B$  est appelée **inverse** de  $A$  et noté  $A^{-1}$

**Définition 1.12.** ([5]). On dit que  $A$  est **tridiagonale** si  $a_{ij} = 0$ , pour tout  $i, j$  tels que  $|i - j| \geq 2$ , i.e., si les seuls coefficients non nuls sont les coefficients diagonaux, ceux juste au-dessus de la diagonale, et ceux juste en-dessous de la diagonale

**Définition 1.13.** ([5]). On dit que  $A$  est à **diagonale strictement dominante par ligne** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \text{ avec } 1 \leq i \leq n.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & a_{n-1n} & \\ & & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Théorème 1.1.** ([5]). Une matrice à **diagonale strictement dominante par ligne** est **inversible**.

*Démonstration.* On doit montrer que

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  et  $k$  un indice telle que  $|x_k| = \|x\|_\infty$ . Alors,

$$\begin{aligned} Ax = 0 &\Rightarrow a_{kk} \cdot x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} \cdot x_j \\ &\Rightarrow |a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot |x_j| \\ &\Rightarrow |a_{kk}| \cdot \|x\|_\infty \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot \|x\|_\infty \\ &\Rightarrow \left( \underbrace{|a_{kk}| - \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|}_{>0} \right) \cdot \|x\|_\infty \leq 0 \\ &\Rightarrow \|x\|_\infty \leq 0 \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

□

## 1.9 Les normes vectorielles et matricielles

Ici  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1.9.1 Normes vectorielles

**Définition 1.14.** ([5]). Une norme sur  $\mathbb{K}^n$  est une application  $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

1.  $\|x\| = 0$  équivalente  $x = 0_n$ , pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , pour tout  $x, y \in \mathbb{K}^n$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}^n$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , pour tout  $x, y \in \mathbb{K}^n$  (Inégalité triangulaire).

On définit la p-norme, pour  $1 \leq p \leq +\infty$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les normes les plus usuelles sont

1. La norme :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

2. La norme (norme euclidienne) :

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. La norme (norme de sup) :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

### 1.9.2 Normes matricielles

A partir de normes vectorielles, on définit les trois normes matricielles subordonnées  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ , si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p,$$

où  $p = 1, 2$ , où  $\infty$ .

**Proposition 1.4.** Pour chacune de ces trois normes, on a pour toutes  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

et

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

où  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$  où  $\|\cdot\|_2$  où  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Remarque 1.3.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors,

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^T A)}.\end{aligned}$$

## 1.10 Schéma de différences finies

**Définition 1.15.** Un maillage est un ensemble des points isolés (appelés nœuds) situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles. On appelle pas de maillage la distance entre deux nœuds voisins.

**Définition 1.16.** (voir [?]). Soit  $u(x)$  représenté une fonction d'un variable, les schémas de différences finies sont obtenus grâce aux formule de Taylor d'ordre un.

$$u(x+h) = h(x) + hu'(x) + o(h). \quad (1.20)$$

Formules de Taylor d'ordre 02

$$u(x+h) = h(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + o(h^2). \quad (1.21)$$

En un point  $x \in [l, L]$  et pour une valeur  $h$  de pas du discrétisation donne par  $\frac{L-l}{N}$ , approximation avant

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + o(h), \quad (1.22)$$

approximation arriéré

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + o(h), \quad (1.23)$$

approximation centre

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + o(h), \quad (1.24)$$

et si passant sur (1.21),(1.24) nous obtenons

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + o(h^2).$$

### 1.10.1 Stabilité et convergence

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles au moyen de leurs équivalentes discrétises . Les deux principales sont la **stabilité** et la **convergence**

**Définition 1.17.** ([2]). Un schéma aux différence finie est dite stable pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , s'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de pas de maillage , telle que

$$\|u^n\|_\infty \leq C \|u^0\|_\infty, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale  $u^0$ .

**Définition 1.18. (Erreur de troncature)** ([8]). On appelle erreur de troncature la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique , que nous désignons par  $R_i$ .

**Proposition 1.5.** ([?]). Soit  $u_i$  l'approximation de la solution exacte  $u(x_i)$ , il est naturel d'utiliser les erreurs ponctuelles  $u_i - u(x_i)$ . Si on pose  $\hat{U}$  le vecteur des valeurs exactes et  $U$  le vecteur des valeurs discrètes, alors le vecteur d'erreur  $E$  définie par

$$E = U - \hat{U}.$$

**Définition 1.19.** ([?]). Une méthode est dite convergente si

$$\|E\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

# PROBLÈME D'ÉVOLUTION UNIDIMENSIONNEL POUR UNE ÉQUATION D'ONDE FRACTIONNAIRE

---

Dans ce chapitre, nous avons calculé la solution analytique du problème d'évolution unidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire en temps avec conditions aux limites de Dirichlet par l'utilisation des transformées de Laplace et de Fourier, puis nous avons introduit la méthode des éléments finis pour ce problème et un exemple numérique est présenté pour montrer l'efficacité de cette méthode.

## 2.1 Position du problème

On considère le problème suivante

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < a, 0 < t \leq T, 1 < \alpha < 2. \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad 0 \leq x \leq a, \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = u(a, t) = 0 \quad 0 < t \leq T. \quad (2.3)$$

Où  $a, T > 0, f, u_0, u_1$  sont des fonction données et  ${}^c\mathcal{D}_0^\alpha u$  est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha$  définie par :

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) ds. \quad (2.4)$$

(2.2) sont les conditions initiales, (2.3) sont les conditions aux limites de Dirichlet et  $f(x, t)$  est un terme source.

## 2.2 Résolution analytique

**Proposition 2.1.** *La solution analytique  $u$  du problème (2.1)-(2.3) est donnée par :*

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ E_\alpha(-\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^a u_0(x) \sin(x\xi_k) dx + t E_{\alpha, \alpha}(-\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^a u_1(x) \sin(x\xi_k) dx \right. \\ & \left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\xi_k, t-\tau) d\tau \right] \sin(x\xi_k), \end{aligned} \quad (2.5)$$

où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{a}.$$

*Démonstration.* Nous appliquons la transformée de sinus-Fourier fini (1.13) à l'équation (2.1), on obtient :

$$\mathcal{F}_x({}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t)) = \mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right) + \mathcal{F}_x(f(x, t)),$$

il devient,

$${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) = \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx + \tilde{f}(\xi_k, t). \quad (2.6)$$

Pour calculer  $\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx$ , en utilisant l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx &= \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right|_0^a - \int_0^a \frac{k\pi}{a} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx \\
&= \left. \frac{-k\pi}{a} \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) u(x, t) \right|_0^a - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \int_0^a u(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx \\
&= \frac{-k\pi}{a} \left( (-1)^k u(a, t) - u(0, t) \right) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \int_0^a u(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx \\
&= -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \int_0^a u(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx \\
&= -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \tilde{u}(\xi_k, t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous remplaçons le résultat précédent (2.7) dans l'équation (2.6), on obtient :

$${}^c \mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) = (-\xi_k)^2 \tilde{u}(\xi_k, t) + \tilde{f}(\xi_k, t). \tag{2.8}$$

Nous appliquons la transformation de Laplace à l'équation (2.8), en utilisant l'équation (1.9)

$$\mathcal{L}_t \{ {}^c \mathcal{D}_{0+}^\alpha \tilde{u}(\xi_k, t) \} = -\xi_k^2 \mathcal{L}_t \{ \tilde{u}(\xi_k, t) \} + \mathcal{L}_t \{ \tilde{f}(\xi_k, t) \}.$$

D'après l'égalité (1.11), on obtient :

$$s^\alpha \tilde{u}^* - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} = -\xi_k^2 \tilde{u}^*(\xi_k, s) + \tilde{f}^*(\xi_k, s), \quad m-1 < \alpha < m,$$

ce que implique que

$$(s^\alpha + \xi_k^2) \tilde{u}^*(\xi_k, s) = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} + \tilde{f}^*(\xi_k, s). \tag{2.9}$$

et On a

$$\begin{cases} 1 < \alpha < 2, \\ \text{et} \\ m-1 < \alpha < m, \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} &= \sum_{k=0}^1 \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} \\
&= \tilde{u}(0^+) s^{\alpha-1} + \tilde{u}^{(1)}(0^+) s^{\alpha-2} \\
&= \tilde{u}_0(x) s^{\alpha-1} + \tilde{u}_1(x) s^{\alpha-2}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous remplaçons le résultat de (2.10) dans l'équation (2.9), on obtient :

$$(s^\alpha + \xi_k^2) \tilde{u}^*(\xi_k, s) = \tilde{u}_0(\xi_k) s^{\alpha-1} + \tilde{u}_1(\xi_k) s^{\alpha-2} + \tilde{f}^*(\xi_k, s),$$

ce qui donne,

$$\tilde{u}^*(\xi_k, s) = \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \xi_k^2)} \int_0^a u_0(x) \sin(\xi_k x) dx + \frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + \xi_k^2)} \int_0^a u_1(x) \sin(\xi_k x) dx + \frac{1}{(s^\alpha + \xi_k^2)} \tilde{f}^*(\xi_k, s). \quad (2.11)$$

Maintenant, en appliquant la transformation inverse de Laplace (1.10) sur l'équation (2.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{ \tilde{u}^*(\xi_k, s) \} = \tilde{u}(\xi_k, t) = & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \xi_k^2)} \right\} \int_0^a u_0(x) \sin(\xi_k x) dx \\ & + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + \xi_k^2)} \right\} \int_0^a u_1(x) \sin(\xi_k x) dx + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + \xi_k^2)} \tilde{f}^*(\xi_k, s) \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

1. D'après l'équation (1.17), on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \xi_k^2} \right\} = E_\alpha(-\xi_k^2 t^\alpha). \quad (2.13)$$

2. D'après l'équation (1.18), on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \xi_k^2} \right\} = t E_{\alpha,2}(-\xi_k^2 t^\alpha). \quad (2.14)$$

3. on pose  $z^*(s) = \frac{1}{s^\alpha + \xi_k^2}$ , et d'après (1.19), nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1} \{ z^* \} = z(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\xi_k^2 t^\alpha),$$

et d'après le théorème de convolution, on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + \xi_k^2)} \tilde{f}(\xi_k, s) \right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\xi_k, t - \tau) d\tau. \quad (2.15)$$

Nous remplaçons les résultats précédents (2.13)-(2.15) dans (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi_k, t) = & E_\alpha(-\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^a u_0(x) \sin(\xi_k x) dx + t E_{\alpha,2}(-\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^a u_1(x) \sin(\xi_k x) dx \\ & + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\xi_k, t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.16)$$

Finalement, on applique la transformée inverse de sinus-Fourier fini sur l'équation (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^1 \{ \tilde{u}(\xi_k, t) \} = u(x, t) = & \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ E_\alpha(-\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^a u_0(x) \sin(x \xi_k) dx + t E_{\alpha,2}(-\xi_k^2 t^\alpha) \int_0^a u_1(x) \sin(x \xi_k) dx \right. \\ & \left. + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\xi_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(t - \tau) d\tau \right] \sin(x \xi_k), \end{aligned}$$

Où

$$\xi_k = \frac{k\pi}{a}.$$

□

## 2.3 Méthode des éléments finis

Soit  $\Omega$  un domaine bornée, On définit l'espace  $L^2(\Omega)$  des fonctions mesurables de carré sommable dans  $\Omega$ , muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

et de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)^{\frac{1}{2}}$$

et les deux espaces

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\}$$

et

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

### 2.3.1 Formulation variationnelle du problème

Soit  $v \in H^1(0, a)$ , on multiplie l'équation (2.1) par  $v$  et on intègre sur le domaine  $[0, a]$  on obtient

$$({}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(x, t), v(x)) + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), v(x)\right) = (f(x, t), v(x)) \quad \forall v \in H^1(0, a) \quad (2.17)$$

pour calculer  $\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), v(x)\right)$  on utilise l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), v(x)\right) &= \int_0^a -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot v(x) dx \\ &= \left[-\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot v(x)\right]_0^a + \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx \end{aligned}$$

on pose  $v(0) = v(a) = 0$ , donc

$$\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), v(x)\right) = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx \quad (2.18)$$

on remplace le résultat précédent (2.18) dans (2.17), on obtient le problème variationnelle suivant :

$$\begin{cases} ({}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(x, t), v(x)) + a(u, v) = (f(x, t), v(x)) \quad \forall v \in H_0^1(0, a) \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (2.19)$$

où  $a(u, v) = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx$

### 2.3.2 Problème semi-discret

Considérons l'équation d'onde fractionnaire temporelle (2.1) avec les conditions initiales (2.2) et les conditions aux limites (2.3). Commençons d'abord par la méthode de différence finie par rapport au variable de temps. Basé sur la définition de Caputo (2.4) pour la dérivée fractionnaire.

Premièrement, nous discrétisons le domaine temporel par :

$$t_n = n\mu, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \mu = \frac{T}{N} \quad (\text{pas de maillage temporel}),$$

donc,  $t_0 = 0$  et  $t_N = T$ .

Puis on calcule la dérivée de Caputo définie par (2.4) en point de maillage  $(x, t_n)$ , nous avons

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_0^\alpha u(x, t_n) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) ds \end{aligned}$$

d'autre part

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t_k) = \frac{u(x, t_{k+1}) - 2u(x, t_k) + u(x, t_{k-1}))}{\mu^2}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{1-\alpha} ds &= \left[ \frac{-(t_n - s)^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} \\ &= \frac{1}{2-\alpha} [(t_n - t_k)^{2-\alpha} - (t_n - t_{k+1})^{2-\alpha}] \\ &= \frac{1}{2-\alpha} [(n\mu - k\mu)^{2-\alpha} - (n\mu - (k+1)\mu)^{2-\alpha}] \\ &= \frac{1}{2-\alpha} [(n-k)^{2-\alpha} \mu^{2-\alpha} - (n-(k+1))^{2-\alpha} \mu^{2-\alpha}] \\ &= \frac{\mu^{2-\alpha}}{2-\alpha} [(n-k)^{2-\alpha} - (n-(k+1))^{2-\alpha}] \end{aligned}$$

et d'après propriétés (1.1), on a

$$(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha) = \Gamma(3-\alpha)$$

donc

$${}^C\mathcal{D}_0^\alpha u(x, t_n) = \frac{\mu^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} [(n-k)^{2-\alpha} - (n-k-1)^{2-\alpha}] \times \left[ \frac{u(x, t_{k+1}) - 2u(x, t_k) + u(x, t_{k-1}))}{\mu^2} \right]$$

On pose  $k+1 = j \Rightarrow k = j-1$ , nous avons :

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow j = 1 \\ k = n-1 \Rightarrow j = n \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}_0^\alpha u(x, t_n) &= \frac{\mu^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^n [(n-j+1)^{2-\alpha} - (n-j)^{2-\alpha}] \times [u(x, t_j) - 2u(x, t_{j-1}) + u(x, t_{j-2})] \\ &= \frac{\mu^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^n b_{n-j} \times [u(x, t_j) - 2u(x, t_{j-1}) + u(x, t_{j-2})] \end{aligned} \quad (2.20)$$

telle que  $b_{n-j} = (n-j+1)^{2-\alpha} - (n-j)^{2-\alpha} > 0$  et  $b_0 = 1 > b_1 > \dots > b_n$   
pour  $j=1$

$$\begin{aligned} u(x, t_{-1}) &= u(x, 0) - \mu u_t(x, 0) \\ &= u_0(x) - \mu u_1(x) \end{aligned}$$

et pour  $t = t_n$  dans (2.19), on a :

$$({}^C\mathcal{D}_0^\alpha u(x, t_n), v(x)) + a(u, v) = (f(x, t_n), v(x)) \quad \forall v \in H_0^1(0, a)$$

Soit  $u(x, t_n) = u^n$  et  $f(x, t_n) = f^n$ , donc

$$({}^C\mathcal{D}_0^\alpha u^n, v) + a(u^n, v) = (f^n, v) \quad \forall v \in H_0^1(0, a) \quad (2.21)$$

On remplaçant (2.20) dans (2.21), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\mu^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^n b_{n-j} [(u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}, v)] + a(u^n, v) = (f^n, v) \\ &\sum_{j=1}^n b_{n-j} [(u^j, v) - 2(u^{j-1}, v) + (u^{j-2}, v)] + \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) a(u^n, v) = \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) (f^n, v) \\ &b_0(u^n, v) + b_1(u^{n-1}, v) - b_n(u^0, v) + \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}(u^j, v) - 2b_0(u^{n-1}, v) - 2 \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}(u^{j-1}, v) \\ &+ b_{n-1}(u^{-1}, v) + \sum_{j=2}^n b_{n-j}(u^{j-2}, v) + \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) a(u^n, v) = \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) (f^n, v) \end{aligned} \quad (2.22)$$

on pose  $\mathcal{I}_1 = \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}(u^j, v)$  on effectuer le changement  $n-j = J+1 \Rightarrow J = n-j-1$ , donc

$$\begin{cases} j=0 \Rightarrow J=n-1 \\ j=n-2 \Rightarrow J=1 \end{cases}$$

on pose  $\mathcal{I}_2 = \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}(u^{j-1}, v)$  on effectuer le changement  $n-j = J$ , donc

$$\begin{cases} j=1 \Rightarrow J=n-1 \\ j=n-1 \Rightarrow J=1 \end{cases}$$

on pose  $\mathcal{I}_3 = \sum_{j=2}^n b_{n-j}(u^{j-2}, v)$  on effectuer le changement  $n - j = J - 1$ , donc

$$\begin{cases} j = 2 \Rightarrow J = n - 1 \\ j = n \Rightarrow J = 1 \end{cases}$$

en remplaçant ces changement dans (2.22), on obtient :

$$\begin{aligned} & b_0(u^n, v) + b_1(u^{n-1}, v) - b_n(u^0, v) + \sum_{J=1}^{n-1} b_{J+1}(u^{n-J-1}, v) - 2b_0(u^{n-1}, v) - 2 \sum_{J=1}^{n-1} b_J(u^{n-J-1}, v) \\ & + b_{n-1}(u^{-1}, v) + \sum_{J=1}^{n-1} b_{J-1}(u^{n-J-1}, v) + \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha) a(u^n, v) = \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha) (f^n, v) \\ (u^n, v) + \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha) a(u^n, v) & = \sum_{J=1}^{n-1} (-b_{J+1} + 2b_J - b_{J-1})(u^{n-J-1}, v) + b_n(u^0, v) + (2b_0 - b_1)(u^{n-1}, v) \\ & - b_{n-1}(u^{-1}, v) + \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha) (f^n, v) \end{aligned} \quad (2.23)$$

### 2.3.3 Problème discret totale

Maintenant, nous discrétisons le domaine d'espace par :

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad h = \frac{a}{M} = x_{i+1} - x_i \quad (\text{pas de maillage d'espace}),$$

donc,  $x_0 = 0$  et  $x_M = a$ .

Puis, on note

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} & \text{si } x_j < x < x_{j+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{1}{x_j - x_{j+1}} & \text{si } x_j < x < x_{j+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où  $j = 1, 2, \dots, M - 1$

on note l'espace  $V_h \subset H_0^1(0, a)$  par :

$$V_h = \left\{ v \in C(0, a) \text{ t.q } v = \sum_{i=1}^{M-1} a_i \phi_i(x) \text{ où } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

donc, le problème est trouvé

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h^n \in V_h, \text{ telle que} \\ (u_h^n, v) + \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha) a(u_h^n, v) = \sum_{J=1}^{n-1} (-b_{J+1} + 2b_J - b_{J-1})(u_h^{n-J-1}, v) + (2b_0 - b_1)(u^{n-1}, v) + b_n(u^0, v) \\ -b_{n-1}(u^{-1}, v) + \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha)(f^n, v) \quad \forall v \in V_h \end{array} \right. \quad (2.24)$$

on a  $u_h^n \in V_h$  donc  $u_h^n = \sum_{l=1}^{M-1} a_l^n \phi_l$ , on prend  $v = \phi_m, m = 1, 2, \dots, M - 1$ , donc, l'équation (2.24) équivalente à

$$\sum_{l=1}^{M-1} a_l^n(\phi_l, \phi_m) + \lambda \sum_{l=1}^{M-1} a_l^n \left( \frac{\partial \phi_l}{\partial x}, \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) = \sum_{J=1}^{n-1} (-b_{J+1} + 2b_J - b_{J-1})(u_h^{n-J-1}, \phi_m) + (2b_0 - b_1)(u^{n-1}, \phi_m) + b_n(u^0, \phi_m) - b_{n-1}(u^{-1}, \phi_m) + \lambda(f^n, \phi_m)$$

avec  $\lambda = \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha)$

alors, le système matricielle correspondant est

-pour  $n = 1$ , on a  $u_h^1 = \sum_{i=1}^{M-1} a_i^1 \phi_i$ , donc

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{M-1} a_l^1(\phi_l, \phi_m) + \lambda \sum_{l=1}^{M-1} a_l^1 \left( \frac{\partial \phi_l}{\partial x}, \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) &= b_1(u^0, \phi_m) + (2b_0 - b_1)(u^0, \phi_m) - b_0(u^{-1}, \phi_m) + \lambda(f^1, \phi_m) \\ &= (u_0, \phi_m) + \mu(u_1, \phi_m) + \lambda(f^1, \phi_m) \end{aligned}$$

-pour  $m = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} [a_1^1(\phi_1, \phi_1) + a_2^1(\phi_2, \phi_1) + \dots + a_{M-1}^1(\phi_{M-1}, \phi_1)] + \lambda \left[ a_1^1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) + a_2^1 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) + \dots + a_{M-1}^1 \left( \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \right] \\ = (u_0, \phi_1) + \mu(u_1, \phi_1) + \lambda(f^1, \phi_1) \end{aligned}$$

-pour  $m = 2$ , on a :

$$\begin{aligned} [a_1^1(\phi_1, \phi_2) + a_2^1(\phi_2, \phi_2) + \dots + a_{M-1}^1(\phi_{M-1}, \phi_2)] + \lambda \left[ a_1^1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + a_2^1 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + \dots + a_{M-1}^1 \left( \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] \\ = (u_0, \phi_2) + \mu(u_1, \phi_2) + \lambda(f^1, \phi_2) \end{aligned}$$

⋮  
⋮  
⋮

-pour  $m = M - 1$ , on a :

$$\begin{aligned} [a_1^1(\phi_1, \phi_{M-1}) + a_2^1(\phi_2, \phi_{M-1}) + \dots + a_{M-1}^1(\phi_{M-1}, \phi_{M-1})] + \lambda \left[ a_1^1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x} \right) + a_2^1 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x} \right) + \dots + a_{M-1}^1 \left( \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x} \right) \right] \\ = (u_0, \phi_{M-1}) + \mu(u_1, \phi_{M-1}) + \lambda(f^1, \phi_{M-1}) \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} X^n &= (a_1^n, a_2^n, \dots, a_{M-1}^n)^T \\ F^n &= ((f^n, \phi_1), (f^n, \phi_2), \dots, (f^n, \phi_{M-1}))^T \\ K &= ((u_0 + \mu u_1, \phi_1), (u_0 + \mu u_1, \phi_2), \dots, (u_0 + \mu u_1, \phi_{M-1}))^T \end{aligned}$$

et les matrices  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, M - 1$  sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} (\phi_1, \phi_1) & (\phi_2, \phi_1) & (\phi_{M-1}, \phi_1) \\ (\phi_1, \phi_2) & (\phi_2, \phi_2) & (\phi_{M-1}, \phi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\phi_1, \phi_{M-1}) & (\phi_2, \phi_{M-1}) & (\phi_{M-1}, \phi_{M-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

$$B = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_{M-1}}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

alors, on obtient le système suivant

$$\begin{aligned} AX^1 + \lambda BX^1 &= \lambda F^1 + K \\ \Rightarrow (A + \lambda B)X^1 &= \lambda F^1 + K \end{aligned}$$

on note  $C = (A + \lambda B)$ , alors on a

$$CX^1 = \lambda F^1 + K$$

**Lemme 2.1.** pour  $i = 1, 2, \dots, M - 1$ , on a

$$(\phi_i, \phi_j) = \frac{h}{6} \begin{cases} 1 & \text{si } |j - i| = 1 \\ 4 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$a(\phi_i, \phi_j) = \frac{1}{h} \begin{cases} -1 & \text{si } |j - i| = 1 \\ 2 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $j = 1, 2, \dots, M - 1$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (\phi_i, \phi_i) &= \int_0^a \phi_i(x) \phi_i(x) dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 dx \\ &= \frac{h}{3} + \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi_i, \phi_{i+1}) &= \int_0^a \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx \\
&= \int_{x_{i+1}}^{x_i} \left( \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) \left( \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) dx \\
&= \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})(x - x_i) dx
\end{aligned}$$

on pose  $x - x_i = t$ , alors on a :

$$\begin{cases} x = x_i \Leftrightarrow t = 0, \\ x = x_{i+1} \Leftrightarrow t = h. \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
(\phi_i, \phi_i) &= \frac{-1}{h^2} \int_h^0 (x - x_i - h)(x - x_i) dx \\
&= \frac{-1}{h^2} \int_h^0 t(t - h) dt \\
&= \left( \frac{-1}{h^2} \right) \left( \frac{-h^3}{6} \right) = \frac{h}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi_{i-1}, \phi_i) &= \int_0^a \phi_{i-1}(x) \phi_i(x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i-1}} \left( \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \right) \left( \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) dx \\
&= \frac{-1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1} - h)(x - x_{i-1}) dx
\end{aligned}$$

on pose  $x - x_{i-1} = t$ , alors on a :

$$\begin{cases} x = x_{i-1} \Leftrightarrow t = 0, \\ x = x_i \Leftrightarrow t = h. \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
(\phi_{i-1}, \phi_i) &= \frac{-1}{h^2} \int_h^0 t(t - h) dt \\
&= \frac{h}{6}
\end{aligned}$$

$$(\phi_i, \phi_{i+2}) = (\phi_{i+2}, \phi_i) = 0$$

$$\begin{aligned}
a(\phi_i, \phi_i) &= \int_0^a \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)^2(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{(x_i - x_{i-1} - 1)^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(x_i - x_{i+1} + 1)^2} dx \\
&= \frac{(x_i - x_{i-1} - 1)}{(x_i - x_{i-1} - 1)^2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{(x_i - x_{i+1} + 1)^2} \\
&= \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}
\end{aligned}$$





La solution exacte de ce problème est

$$u(x, t) = x(1 - x)(t^2 + 1)$$

En utilisant **Matlab** nous avons représenté la solution numérique et la solution exacte de ce problème au temps de  $t = 0.002$  et  $t = 0.001$  dans le Figure 2.1 , avec  $M = 20$  et  $N = 2000$  et  $M = 10$  et  $N = 2000$

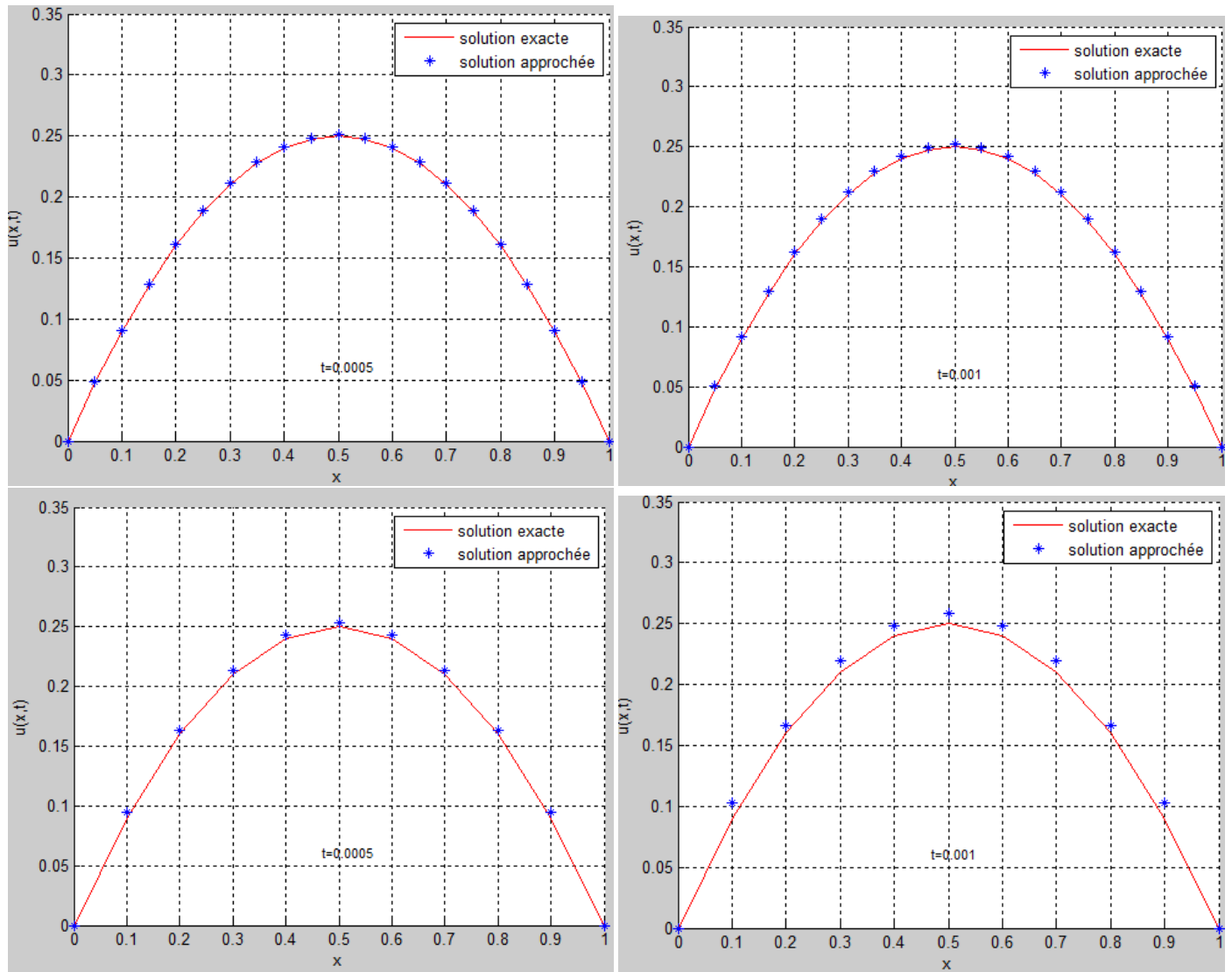


FIGURE 2.1 – solution exacte et approché

On remarque que la solution numérique et la solution exacte sont coïncides.

# PROBLÈME D'ÉVOLUTION BIDIMENSIONNEL POUR UNE ÉQUATION D'ONDE FRACTIONNAIRE

---

Dans ce chapitre, nous avons introduit la méthode des éléments finis pour le problème d'évolution bidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire en temps, la stabilité numérique et la convergence sont prouvées, et un exemple numérique est présenté.

### 3.1 Position du problème

Soient  $\Omega = ]0, a[^2, 1 < \alpha < 2$  et  $a > 0$ , on considère le problème suivante  
Trouver  $u : \Omega \times ]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$${}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t). \quad (3.1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y). \quad (3.2)$$

$$u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.3)$$

avec

$$\Delta u(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial u}{\partial y^2}(x, y, t).$$

### 3.2 Méthode des élément finis

#### 3.2.1 Formulation variationnelle du problème

Soit  $v \in H^1(\Omega)$ , on multiplie l'équation (3.1) par  $v$  et on intègre sur  $\Omega$  on obtient

$$({}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(x, y, t), v(x, y)) + (-\Delta u(x, y, t), v(x, y)) = (f(x, y, t), v(x, y)) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.4)$$

pour calculer  $(\Delta u(x, y, t), v(x, y))$ , on applique **la formule de Green**, on obtient :

$$\begin{aligned} (-\Delta u(x, y, t), v(x, y)) &= \int_{\Omega} -\Delta u(x, y, t)v(x, y) \, dx dy \\ &= - \int_{\partial\Omega} \nabla u(S, t)v(S) \, dS + \int_{\Omega} \nabla u(x, y, t)\nabla v(x, y) \, dx dy \end{aligned}$$

on pose  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$ , donc

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u(S, t)v(S) \, dS = 0$$

alors

$$(-\Delta u(x, y, t), v(x, y)) = \int_{\Omega} \nabla u(x, y, t)\nabla v(x, y) \, dx dy \quad (3.5)$$

on remplace le résultat précédent (3.5) dans (3.4), on obtient le problème variationnelle suivant :

$$\begin{cases} ({}^c\mathcal{D}_0^\alpha u(x, y, t), v(x, y)) + a(u, v) = (f(x, y, t), v(x, y)) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x, y, t)\nabla v(x, y) \, dx dy$ .

Pour  $t = t_n$  dans l'équation (3.6) et avec les mêmes calculs du chapitre 2, on obtient :

$$\begin{aligned} (u^n, v) + \lambda a(u^n, v) &= \sum_{J=1}^{n-1} (-b_{J+1} + 2b_J - b_{J-1})(u^{n-J-1}, v) + (2b_0 - b_1)(u^{n-1}, v) + b_n(u^0, v) \\ &\quad - b_{n-1}(u^{-1}, v) + \lambda(f^n, v) \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Problème discret totale

Maintenant, nous discrétisons le domaine d'espace par :

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad y_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

donc  $x_0 = y_0 = 0$  et  $x_M = y_M = a$ .

on note l'espace  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  par

$$V_h = \left\{ v \in C(\Omega) \text{ t.q } v = \sum_{i=1}^{M-1} a_i \phi_i(x, y) \text{ où } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

donc, le problème est trouvé

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h^n \in V_h, \text{ telle que} \\ (u_h^n, v) + \lambda a(u_h^n, v) = \sum_{J=1}^{n-1} (-b_{J+1} + 2b_J - b_{J-1})(u_h^{n-J-1}, v) + (2b_0 - b_1)(u^{n-1}, v) + b_n(u^0, v) \\ \quad - b_{n-1}(u^{-1}, v) + \lambda(f^n, v) \quad \forall v \in V_h \end{array} \right. \quad (3.8)$$

### 3.2.3 Stabilité et convergence

**Lemme 3.1.** soit  $u^{-1} = u^0 - \mu u_1$  et  $\epsilon^{-1} = u(x, y, t_{-1}) - u^{-1}$ , on suppose que  $u_t \in L^2(0, T, H^{k+1}(\Omega))$ , alors

$$|\epsilon^{-1}| \leq C\mu^2 \quad \text{et} \quad \|u_h^{-1}\| \leq C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)$$

*Démonstration.* Premièrement, on montre que  $|\epsilon^{-1}| \leq C\mu^2$ , par la définition de  $\epsilon^{-1}$ , on a :

$$|\epsilon^{-1}| = |u(x, y, t_{-1}) - u^{-1}| = |u(x, y, t_{-1}) - u^0 + \mu u_1|$$

d'autre part, par la formule de Taylor, on a :

$$u_{tt}(x, y, t_k) = \frac{u_t(x, y, t_k) - u_t(x, y, t_{k-1})}{\mu}$$

donc

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, y, t_0) &= \frac{u_t(x, y, t_0) - u_t(x, y, t_{-1})}{\mu} \\ \Rightarrow \mu u_{tt}(x, y, 0) &= u_t(x, y, 0) - u_t(x, y, t_{-1}) \\ &= u_1(x, y) - \left[ \frac{u(x, y, t_0) - u(x, y, t_{-1})}{\mu} \right] \\ \Rightarrow \mu^2 u_{tt}(x, y, 0) &= \mu u_1(x, y) - u^0(x, y) + u(x, y, t_{-1}) \\ &\Rightarrow |\epsilon^{-1}| = |\mu^2 u_{tt}(x, y, 0)| \\ &\leq C\mu^2 \end{aligned}$$

depuis, on montre que  $\|u_h^{-1}\| \leq C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)$ , on sait que

$$\int_{\Omega} u_h^{-1} v \, dx dy = \int_{\Omega} (u^0 - \mu u_1) v \, dx dy$$

et on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} uv \, dx dy &= \int_{\Omega} \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) (\sqrt{2}v) \, dx dy \\ &\leq \int_{\Omega} \left|\frac{u}{\sqrt{2}}\right| |\sqrt{2}v| \, dx dy \\ &\leq \frac{1}{4} \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned} \quad (\text{d'après l'inégalité de Young})$$

alors, pour tout  $v \in V_h$ , on prend  $v = u_h^{-1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|u_h^{-1}\|^2 &= \int_{\Omega} u_h^{-1} u_h^{-1} \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} u^0 u_h^{-1} \, dx dy - \int_{\Omega} \mu u_1 u_h^{-1} \, dx dy \\ &\leq \frac{1}{4} \|u_h^{-1}\|^2 + \|u^0\|^2 + \frac{1}{4} \|u_h^{-1}\|^2 + \mu^2 \|u_1\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_h^{-1}\|^2 + [(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)^2 - 2\mu \|u^0\| \|u_1\|] \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_h^{-1}\|^2 + (\|u^0\| + \mu \|u_1\|)^2 \end{aligned}$$

donc

$$\|u_h^{-1}\| \leq C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)$$

□

**Théorème 3.1.** *le schéma discret par la méthode des élément finis est inconditionnellement stable, et pour tout  $\mu > 0$  et  $h > 0$ , on a :*

$$\|u_h^n\| \leq C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|) \quad (3.9)$$

*Démonstration.* dans l'expression (3.8), on pose  $v = u_h^n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (u_h^n, u_h^n) + \lambda a(u_h^n, u_h^n) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})(u_h^{n-j-1}, u_h^n) + b_n(u^0, u_h^n) + (2b_0 - b_1)(u_h^{n-1}, u_h^n) \\ &\quad - b_{n-1}(u_h^{-1}, u_h^n) + \lambda(f^n, u_h^n) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (u_h^n, u_h^n) = \|u_h^n\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})(u_h^{n-j-1}, u_h^n) + b_n(u^0, u_h^n) + (2b_0 - b_1)(u_h^{n-1}, u_h^n) \\ &\quad - b_{n-1}(u_h^{-1}, u_h^n) \end{aligned} \quad (3.10)$$

en utilise la démonstration par récurrence

-pour  $n = 1$

$$\begin{aligned} (u_h^1, u_h^1) &\leq b_1(u^0, u_h^1) - b_0(u_h^{-1}, u_h^1) + (2b_0 - b_1)(u^0, u_h^1) \\ &\leq |b_1(u^0, u_h^1) - b_0(u_h^{-1}, u_h^1) + (2b_0 - b_1)(u^0, u_h^1)| \\ &\leq b_1 \|u^0\| \|u_h^1\| + b_0 \|u_h^{-1}\| \|u_h^1\| + (2b_0 - b_1) \|u^0\| \|u_h^1\| \quad (\text{d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz}) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|u_h^1\| &\leq b_1 \|u^0\| + b_0 \|u_h^{-1}\| + (2b_0 - b_1) \|u^0\| \\ &\leq 2b_0 \|u^0\| + b_0 \|u_h^{-1}\| \\ &\leq 2 \|u^0\| + C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|) \\ &\leq C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|) \end{aligned}$$

-on suppose que

$$\|u_h^k\| \leq C (\|u^0\| + \mu \|u_1\|) \quad \text{pour } n = k, k > N$$

-on montre ça pour  $n = k + 1$ , i.e

$$\|u_h^{k+1}\| \leq C (\|u^0\| + \mu \|u_1\|)$$

dans l'équation (3.10), on pose  $v = u_h^{k+1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} (u_h^{k+1}, u_h^{k+1}) &\leq \sum_{j=1}^k (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})(u_h^{k-j}, u_h^{k+1}) + b_{k+1}(u^0, u_h^{k+1}) + (2b_0 - b_1)(u_h^k, u_h^{k+1}) - b_k(u_h^{-1}, u_h^{k+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^k |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| |(u_h^{k-j}, u_h^{k+1})| + b_{k+1} |(u^0, u_h^{k+1})| + (2b_0 - b_1) |(u_h^k, u_h^{k+1})| \\ &\quad - b_k |(u_h^{-1}, u_h^{k+1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^k |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| \|u_h^{k-j}\| \|u_h^{k+1}\| + b_{k+1} \|u^0\| \|u_h^{k+1}\| + (2b_0 - b_1) \|u_h^k\| \|u_h^{k+1}\| \\ &\quad - b_k \|u_h^{-1}\| \|u_h^{k+1}\| \\ \Rightarrow \|u_h^{k+1}\| &\leq \sum_{j=1}^k |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| \|u_h^{k-j}\| + b_{k+1} \|u^0\| + (2b_0 - b_1) \|u_h^k\| - b_k \|u_h^{-1}\| \end{aligned}$$

comme  $b_j > b_{j+1}$ , donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| &= \sum_{j=1}^k |(b_{j+1} - 2b_j + b_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^k |b_{j+1} - b_j + b_{j-1} - b_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^k |b_j - b_{j+1}| + \sum_{j=1}^k |b_{j-1} - b_j| \\ &= b_0 + b_1 - b_k - b_{k+1} \end{aligned}$$

par le lemme (3.1) et la propriété de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u_h^{k+1}\| &\leq \sum_{j=1}^k |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| (C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)) + b_{k+1}(C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)) \\
&\quad + (2b_0 - b_1)(C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)) + b_k(C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)) \\
&\leq C \left[ \sum_{j=1}^k |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| + b_{k+1} + 2b_0 - b_1 + b_k \right] (\|u^0\| + \mu \|u_1\|) \\
&\leq C(b_0 + b_1 - b_k - b_{k+1} + 2b_0 - b_1 + b_k + b_{k+1})(\|u^0\| + \mu \|u_1\|) \\
&\leq 3C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)
\end{aligned}$$

alors

$$\|u_h^{k+1}\| \leq C(\|u^0\| + \mu \|u_1\|)$$

□

Ce qui signifie que le schéma est stable

**Théorème 3.2.** soit  $u^n = u(x, y, t_n)$  la solution exacte de (3.1) et  $u_h^n$  la solution approchée du problème discret par la méthode des éléments finis, on suppose que  $u^n \in L^2(0, T, H^{k+1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, H^{k+1}(\Omega))$  et  $u_{tt}^n \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$  avec  $u_0, u_1 \in H^{k+1}(\Omega)$ , alors

$$\|u^n - u_h^n\| \leq C \frac{T^{\alpha-1}}{2-\alpha} \left( \mu^{1-\alpha} h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^{3-\alpha} \right)$$

*Démonstration.* pour estimer l'erreur, premièrement on estime l'erreur on  $t = t_n$  avec  $n = 1, 2, \dots, N$ , on définit  $e^n = u^n - u_h^n$ , donc, par la soustraction de (3.8) de (3.7), on trouve

$$(e^n, v) + \lambda a(e^n, v) = \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})(e^{n-j-1}, v) + b_n(e^0, v) - b_{n-1}(e^{-1}, v) + (2b_0 - b_1)(e^{n-1}, v) \quad (3.11)$$

depuis, on montre que  $\|e^{-1}\| = \|u(x, y, t_{-1}) - u_h^{-1}\| \leq C(h^{k+1} \|u^0\|_{k+1} + \mu^2)$  pour  $U^n \in V_h$ , on définit  $\phi^n$  et  $\varphi^n$  par  $\phi^n = u^n - U^n$  et  $\varphi^n = U^n - u_h^n$ , alors

$$\begin{aligned}
\|e^{-1}\| &= \|u(x, y, t_{-1}) - u_h^{-1}\| \\
&= \|u(x, y, t_{-1}) - u^{-1} + u^{-1} - u_h^{-1}\| \\
&= \|\epsilon^{-1} + u^{-1} - u_h^{-1}\| \\
&= \|\epsilon^{-1} + u^0 - \mu u_1 - (u^0 - \mu u_1)_h\| \\
&= \|\epsilon^{-1} + u^0 - u_h^0 - \mu(u_1 - u_{ih}^0)\| \\
&= \|\epsilon^{-1} + u^0 - U^0 + U^0 - u_h^0 - \mu(u_t^0 - U_t^0 + U_t^0 - u_{ih}^0)\| \\
&= \|\epsilon^{-1} + \phi^0 + \varphi^0 - \mu(\phi_t^0 + \varphi_t^0)\|
\end{aligned}$$

et par le lemme (3.1)  $\|\epsilon^{-1}\| \leq C\mu^2$ , et on a

$\|\varphi^o\| = \|\varphi_t^o\| = 0, \|\phi^0\| \leq Ch^{k+1} \|u^0\|_{h^{k+1}}$  et  $\|\phi_t^0\| \leq Ch^{k+1} \|u^1\|_{h^{k+1}}$  alors

$$\begin{aligned} \|e^{-1}\| &\leq \|\epsilon^{-1}\| + \|\phi^0\| + \mu \|\phi_t^0\| \\ &\leq C\mu^2 + Ch^{k+1} \|u^0\|_{H^{k+1}} + C\mu h^{k+1} \|u^1\|_{H^{k+1}} \\ &\leq C \left[ h^{k+1} \|u^0\|_{k+1} + \mu^2 \right] \end{aligned}$$

maintenant, on prend  $v = e^n$  dans (3.11), alors on a :

$$\begin{aligned} (e^n, e^n) + \lambda a(e^n, e^n) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})(e^{n-j-1}, e^n) + b_n(e^0, e^n) - b_{n-1}(e^{-1}, e^n) + (2b_0 - b_1)(e^{n-1}, e^n) \\ \Rightarrow \|e^n\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| |(e^{n-j-1}, e^n)| + |b_n| |(e^0, e^n)| - |b_{n-1}| |(e^{-1}, e^n)| \\ &\quad + |(2b_0 - b_1)| |(e^{n-1}, e^n)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| \|e^{n-j-1}\| \|e^n\| + b_n \|e^0\| \|e^n\| + b_{n-1} \|e^{-1}\| \|e^n\| \\ &\quad + (2b_0 - b_1) \|e^{n-1}\| \|e^n\| \\ \Rightarrow \|e^n\| &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| \|e^{n-j-1}\| + b_n \|e^0\| + b_{n-1} \|e^{-1}\| + (2b_0 - b_1) \|e^{n-1}\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| \|e^{n-j-1}\| + (2b_0 - b_1) \|e^{n-1}\| + Cb_{n-1}(h^{k+1} \|u^0\|_{H^{k+1}} + \mu^2) \end{aligned}$$

comme  $\|e^0\| = 0$  et par la majoration de  $\|e^{-1}\|$ , on obtient :

$$\|e^n\| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| \|e^{n-j-1}\| + (2b_0 - b_1) \|e^{n-1}\| + Cb_{n-1}(h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1})} + \mu^2) \quad (3.12)$$

depuis, en utilisant la démonstration par récurrence pour montre que

$$\|e^n\| \leq Cb_{n-1}^{-1} \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \quad (3.13)$$

on remplacent  $n = 1$  dans (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \|e^1\| &\leq C \left( h^{k+1} b_0 \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \\ &= Cb_0^{-1} \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \end{aligned}$$

on suppose que l'inégalité (3.13) est vrai pour  $n = J$ , c'est à dire

$$\|e^J\| \leq Cb_{J-1}^{-1} \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right)$$

et on montre cette inégalité pour  $n = J + 1$

$$\|e^{J+1}\| \leq Cb_J^{-1} \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right)$$

on sait que  $b_j^{-1} < b_{j+1}^{-1}$  et  $0 \leq b_j \leq 1$  pour tout  $j \geq 0$ , donc, on a

$$\begin{aligned} \|e^{J+1}\| &\leq \left[ \sum_{j=1}^J |b_{j+1} - 2b_j + b_{j-1}| \|e^{J-j}\| + (2b_0 - b_1) \|e^J\| + Cb_J \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \right] \\ &\leq Cb_{J-j-1}^{-1} \sum_{j=1}^J |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \\ &\quad + Cb_{J-1}^{-1} (2b_0 - b_1) \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) + Cb_J \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \\ &\leq C \left[ \sum_{j=1}^J |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| b_{J-j-1}^{-1} + (2b_0 - b_1) b_{J-1}^{-1} + b_J \right] \times \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \\ &\leq C \left[ \sum_{j=1}^J |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| b_{J-j-1}^{-1} + (2b_0 - b_1) b_{J-1}^{-1} + b_J^{-1} \right] \times \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \\ &\leq C \left[ \sum_{j=1}^J |(-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1})| + 2b_0 - b_1 + b_0 \right] b_J^{-1} \times \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \\ &\leq C (b_0 + b_1 - b_J - b_{J+1} + 2b_0 - b_1 + b_0) b_J^{-1} \times \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \\ &\leq 4Cb_0 b_J^{-1} \times \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \\ \Rightarrow \|e^{J+1}\| &\leq Cb_J^{-1} \left( h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^2 \right) \end{aligned}$$

et on a  $n^{1-\alpha} b_{n-1}^{-1} \rightarrow \frac{1}{2-\alpha}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , donc

$$b_{n-1}^{-1} = n^{1-\alpha} b_{n-1}^{-1} n^{\alpha-1} \mu^{\alpha-1} \mu^{1-\alpha} \leq \frac{T^{\alpha-1}}{2-\alpha} \mu^{1-\alpha}$$

on remplace cette dernier dans (3.13) on obtient

$$\|u^n - u_h^n\| \leq C \frac{T^{\alpha-1}}{2-\alpha} \left( \mu^{1-\alpha} h^{k+1} \|u\|_{L^\infty(H^{k+1}(\Omega))} + \mu^{3-\alpha} \right)$$

□

ce que signifie que l'affirmation du théorème est toujours valide

### 3.2.4 Résolution numérique par FreeFem++

```

real x0=0, x1=pi;
real y0=0, y1=pi;
real alpha=1.75;
real t1=0.05;
real mu=0.05;
real lampda=0.09;
int n=20;
int m=20;
int T=1;
mesh Th1=square(n,m,[x0+(x1-x0)*x,y0+(y1-y0)*y]);
plot(Th1,wait=1);
//////////
border a(t=0,1){x=t;y=0;label=1;};
border b(t=0,1){x=1;y=t;label=2;};
border c(t=0,1){x=1-t;y=1;label=3;};
border d(t=0,1){x=0;y=1-t;label=4;};
//plot(a(1)+b(2)+c(3)+d(4),wait=1);
mesh Th2=buildmesh(a(10)+b(10)+c(10)+d(10));
//plot(Th2,wait=1);
//espace d'approximation
fespace Vh(Th1,P1);
Vh u,v;
func f=((16.59/2)*t1^2+2*t1^(2+alpha))*sin(x)*sin(y);
func u0=0;
func u1=0;
problem pbdirect(u,v,solver=Cholesky)=int2d(Th1)(u*v+lampda*dx(u)*dx(v)
+lampda*dy(u)*dy(v))-int2d(Th1)(f*v-u0*v-mu*u1*v)
+on(1,2,3,4,u=0);
// Résoudre le problème
pbdirect;
// Affichage
plot(u,wait=1);

```

### 3.2.5 Exemple numérique

Dans cette section, nous avons implémenté notre méthode dans  $\mathbb{R}^2$  sur un exemple qui supporte l'analyse numérique

**Exemple 3.1.** Soit  $u : ]0, \Pi]^2 \times ]0, 1]$  solution du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, y, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + \left( \frac{\Gamma(3 + \alpha)}{2} t^2 + 2t^{2+\alpha} \right) \sin(x) \sin(y), & \alpha = 1.75 \\ u(x, y, 0) = 0 & u_t(x, y, 0) = 0 \\ u(x, y, t) = 0 & (x, y, t) \in \partial\Omega \times ]0, 1] \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est

$$u(x, y, t) = t^{2+\alpha} \sin(x) \sin(y)$$

En utilisant **Freefem** nous avons représenté la solution numérique et la solution exacte de ce problème au temps  $t = 0.05$ , avec  $M = 20$  et  $N = 20$ .

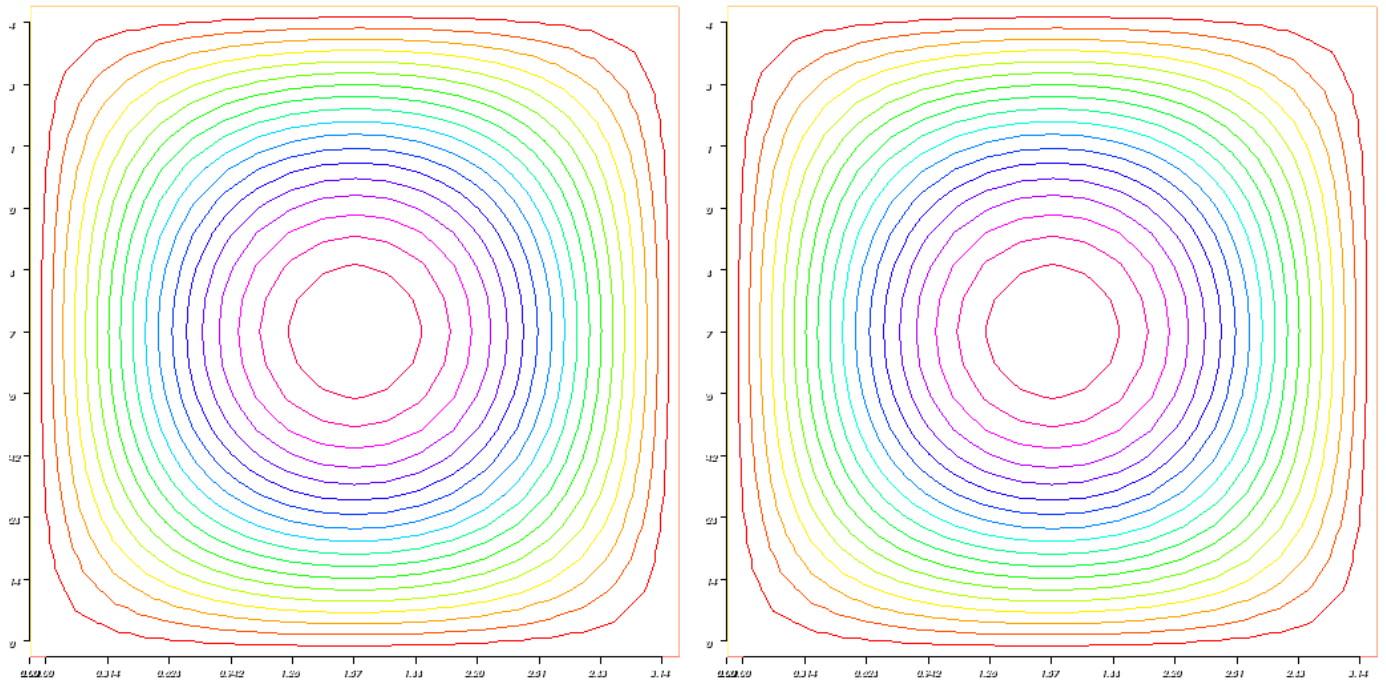


FIGURE 3.1 – solution exacte et solution approché en 2D

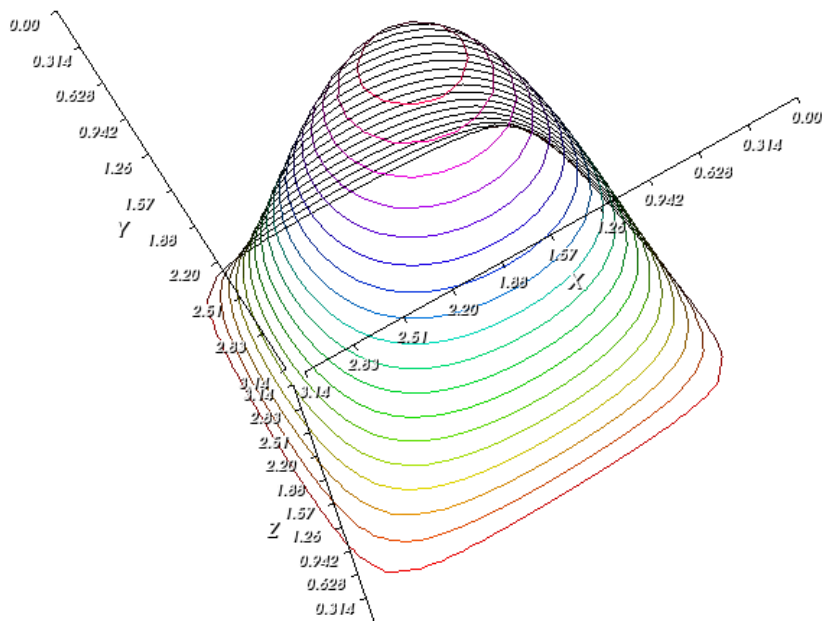


FIGURE 3.2 – solution approchée en 3D

---

# Conclusion générale

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème d'évolution bidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire de Caputo en temps avec les conditions aux limites de Dirichlet.

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Étude analytique et numérique du problème d'évolution unidimensionnel :** nous avons calculé la solution analytique de l'équation (2.1) avec des conditions initiales et des conditions aux limites de Dirichlet, en utilisant les transformées de Laplace et de Fourier. Cette solution analytique est exprimée par des fonctions de type Mittag-Leffler. Pour la solution numérique, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour le variable d'espace  $x$  et la méthode des différences finis pour le variable de temps  $t$  et un exemple numérique à présentés .
- ✓ **Étude numérique du problème d'évolution bidimensionnel :** nous avons introduit la méthode des éléments finis sur les variables d'espaces  $x$  et  $y$  pour le problème d'évolution bidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire en temps (3.1)-(3.3), la stabilité numérique et la convergence sont prouvées par récurrence, et un exemple numérique est présenté pour montrer l'efficacité de cette approximation.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Analyse mathématique et numérique d'un problème d'onde fractionnaire en temps dans un domaine hétérogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} u(x, y, t) = \operatorname{div}(a(x, y)\nabla u(x, y, t)) + f(x, y, t), \\ + \text{Condition initiale,} \\ + \text{Conditions aux limites.} \end{array} \right.$$

Où  $a$  et  $f$  sont des fonctions données et  $1 < \alpha < 2$ .

- ☞ Analyse mathématique et numérique d'un problème d'onde fractionnaire en espace et en temps suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x, y, t) = {}^c\mathcal{D}_x^{\beta} u(x, t) + f(x, y, t), \\ + \text{Condition initiale,} \\ + \text{Conditions aux limites.} \end{array} \right.$$

Où  $a$  et  $f$  sont des fonctions données et  $1 < \alpha, \beta < 2$

---

# Bibliographie

---

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Nauka, Mos-cow, 1979.
- [2] G. Allaire. *Analyse Numérique et optimisation*. Pris, Janvier 2005.
- [3] N. Allaoui. Problème inverse pour une équation de diffusion-onde fractionnaire. Master's thesis, Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Algérie, 2019.
- [4] S. Atallah. A finite element method for time fractional partial differential equation. Master's thesis, University of Chaster, England, 2011.
- [5] C. Bolley. *Analyse numérique*. École Centrale de Nantes, 2012.
- [6] M. Bounif. Problème d'évolution pour une équation de diffusion-onde fractionnaire définie dans un domaine borné. Master's thesis, Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Algérie, 2018.
- [7] G. Gao and Z. Sun. A compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 230(3) :586–595, 2011.
- [8] R. Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Université Aix Marseille 1, 2008.
- [9] J. Huang, Y. Tang, L. Vázquez, and J. Yang. Two finite difference schemes for time fractional diffusion-wave equation. *Numerical Algorithms*, 64(4) :707–720, 2013.
- [10] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.
- [11] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [12] B. Li, H. Luo, and X. Xie. A time-spectral algorithm for fractional wave problems. *Computers and Mathematics with Applications*, arXiv :1708.02720, 2017.
- [13] X. Li and C. Xu. A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(8) :2108–2131, 2009.
- [14] F. Liu, P. Zhuang, V. Anh, and I. Turner. Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 191 :12–20, 2007.
- [15] Q. Liu, F. Liu, I. Turner, and V. Anh. Finite element approximation for a modified anomalous subdiffusion equation. *Applied Mathematical Modeling*, 35(8) :4103–4116, 2011.
- [16] M. Louassef. Identification numérique d'un paramètre pour un problème elliptique sous forme divergence. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2015.
- [17] M.M. Meerschaert and C. Tadjeran. *Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations*. Elsevier Science Publishers B.V., 2004.

- [18] K. Mustapha. *Time-stepping discontinuous Galerkin methods for fractional diffusion problems*. Springer-Verlag New York, Inc., 2015.
- [19] K. Mustapha, B. Abdallah, and K. Furati. A discontinuous petrov-galerkin method for time-fractional diffusion equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 52(5) :2512–2529, 2014.
- [20] K. Mustapha and W. Mclean. Discontinuous galerkin method for an evolution equation with a memory term of positive type. *Mathematics of Computation*, 78(268) :1975–1995, 2009.
- [21] K. Mustapha and W. Mclean. Uniform convergence for a discontinuous galerkin, time-stepping method applied to a fractional diffusion equation. *Ima Journal of Numerical Analysis*, 32(3) :906–925, 2012.
- [22] K. Mustapha and W. Mclean. Superconvergence of a discontinuous galerkin method for fractional diffusion and wave equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(1) :491–515, 2012.
- [23] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [24] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [25] Z. Sun and X. Wu. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. *Applied Numerical Mathematics*, 56(2) :193–209, 2006.
- [26] Y. Yang, Y. Chen, Y. Huang, and H. Wei. Spectral collocation method for the time-fractional diffusion-wave equation and convergence analysis. *Computers and Mathematics with Applications*, 73(6) :1218–1232, 2017.
- [27] S.B. Yuste. Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 216(1) :264–274, 2006.
- [28] S.B. Yuste and L. Acedo. An explicit finite difference method and a new von neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(5) :1862–1874, 2005.
- [29] M. Zayernouri and G. E. Karniadakis. Discontinuous spectral element methods for time and space-fractional advection equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(4) :B684–B707, 2012.
- [30] M. Zayernouri and G. E. Karniadakis. Exponentially accurate spectral and spectral element methods for fractional odes. *Journal of Computational Physics*, 257(2) :460–480, 2014.
- [31] M. Zayernouri and G. E. Karniadakis. Fractional spectral collocation method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(1) :A40–A62, 2014.
- [32] X. Zhang, P. Huang, X. Feng, and L. Wei. Finite element method for two-dimensional time-fractional tricomi-type equation. 2012.
- [33] Y.D. Zhang, Y.M. Zhao, F.L. Wang, and Y.F. Tang. High-accuracy finite element method for 2d time fractional diffusion-wave equation on anisotropic meshes. *International Journal of Computer Mathematics*, 2017.
- [34] L. Zhou and H. M. Selim. Application of the fractional advection-dispersion equations in porous media. *Soil Science Society of America Journal*, 67 :1079–1084, 2003.

**ملخص:** في هذه المذكرة ، درسنا من الناحية التحليلية والعددية مسألة تطور لمعادلة الموجة الكسرية في البعد الأول وفي البعد الثاني ذات شرط حدودي لدريكلي. استخدمنا طريقة العناصر المنتهية للمتغيرات الفضائية وطريقة الفروق المنتهية للمتغير الزمني. استنادًا إلى تحويلي لابلاس وفورييه ، قمنا بحساب الحل التحليلي للمسألة أحادية البعد. وقد أثبتنا الاستقرار وتقارب المسألة المتقطعة تماما عن طريق البرهان بالتراجع. لقد اقترحنا خوارزميتين للمسألتين وتم تقديم مثالين عددين وباستخدام برنامجي Matlab و Freefem++ ، قمنا بالتحقق من كفاءة هذين الخوارزميتين.

**كلمات مفتاحية:** حساب كسري ، معادلة الموجة الكسرية ، طريقة العناصر المنتهية ، طريقة الفروق المنتهية.

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié analytiquement et numériquement d'un problème d'évolution pour une équation d'onde fractionnaire en dimension un et en dimension deux. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour les variables d'espace et la méthode des différences finies pour la variable du temps. En se basant sur les transformées de Laplace et de Fourier, nous avons calculé la solution analytique pour le problème unidimensionnel. La stabilité et la convergence du problème discret total à été démontré par récurrence. Nous avons proposé deux algorithmes pour les deux problèmes considérés et deux exemples numériques sont présenté et avec l'utilisation de Matlab et Freefem++, nous avons validé l'efficacité de ces algorithmes..

**Mots-Clés :** Calcul fractionnaire, Équation d'onde fractionnaire, Méthode des éléments finis, Méthodes des différence finis.

---

In this work, we have studied analytically and numerically an evolution problem for a fractional wave equation in dimension one and in dimension two with Dirichlet boundary condition. We used the finite element method for the space variables and the finite difference method for the time variable. Based on the Laplace and Fourier transforms, we calculated the analytical solution for the one-dimensional problem. The stability and convergence of the total discrete problem has been demonstrated by induction. We proposed two algorithms for the two problems considered and two numerical examples are presented and with the use of Matlab and Freefem ++, we validated the efficiency of these algorithms..

**Keywords :** Fractional calculus, Fractional wave equation, Finite element method, Finite difference method.