

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

*Approximatio Numérique d'un Problème d'Écoulement à Surface Libre
autour d'un Obstacle*

Présentée par :

M^{elle} Bennacer Niama

Soutenu publiquement le : xx/xx/2025.

Devant le jury composé de :

Président : *M^m Khirani Amina*
Encadreur : *M^m BOUNAB Noura*
Examineur : *M^m Delloum wahiba*

MCA, Université de M'sila
M.C.B, Université de M'sila
M.C.B, Université de M'sila

Année universitaire 2024/2025.

Remerciements

Louange à Allah, qui a enseigné à l'homme ce qu'il ne savait pas,
et qui a fait de la science une lumière guidant vers le droit chemin ceux
qu'Il veut.

Ce travail représente le fruit d'un parcours scientifique marqué par l'effort
et la persévérance,

où la grâce d'Allah a joué un rôle essentiel,
et où le soutien constant de ma famille et de mes enseignants a eu un
impact profond dans l'atteinte de cette étape.

J'adresse mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à ma
respectée encadreur **Dr. Noura Bounab**, pour les efforts qu'elle a
déployés, ses orientations précieuses, ainsi que pour sa patience et son
soutien tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Je remercie également les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce
travail et pour l'avoir enrichi par leurs remarques constructives.

Enfin, j'exprime mes reconnaissance à tous ceux qui ont porté le message le
plus noble dans cette vie, à ceux qui nous ont ouvert les portes du savoir : à
tous nos enseignants, de l'école primaire jusqu'à l'université.

Dédicace

À celle qui fut le symbole de l'amour et de la tendresse, le baume de mes blessures et une source inépuisable de don... À ma chère mère, source d'affection et de pureté du cœur, j'offre le fruit de mes efforts et la réussite de ce parcours.

À mon cher père, mon pilier et mon exemple, je prie Dieu de le préserver, de le protéger, et de couronner sa vie de santé et de sérénité.

À mes chères soeurs Hassna et Amina, symboles d'innocence et de pureté, compagnes fidèles de ma vie. merci d'exister.

À mon cher frère Ala, compagnon de l'enfance et soutien dans les épreuves, celui qui a toujours été à mes côtés par ses encouragements et son affection : je t'adresse toute ma gratitude.

À tous ceux que j'ai aimés en Dieu, qui ont partagé avec moi les plus beaux jours de ma vie et ont laissé dans mon cœur les plus tendres souvenirs...

À tous ceux qui ont affronté les difficultés, persévéré malgré les épreuves, et contribué ne serait-ce qu'avec un mot, une prière ou un simple sourire...

Je vous dédie ce mémoire comme témoignage de fidélité et de reconnaissance, en espérant que Dieu fasse de nous des compagnons sur le chemin du bien, ici-bas et dans l'au-delà.

« Ô Seigneur, fais que ce travail soit accompli sincèrement pour Ton noble visage, et qu'il m'attire Ta satisfaction. »

Notation

ρ	La masse volumique (kg/m^3).
\vec{u}	Le vecteur vitesse.
\vec{a}	L'accélération.
m	La masse.
P	La pression.
S	La surface de la section de la veine du fluide (m^2).
V	La volume de la section de la veine (m^3).
C	Une courbe.
n	La normale.
f	La force.
(x,y)	Le plan.
i	Le nombre complexe.
z	La variable complexe.
ϕ	Fonction potentiel.
ψ	Fonction de courant.
D_m	Débit massique (kg/s).
D_v	Débit volumique (m^3/s)
$M_0(x_0, y_0, z_0)$	Position initiale
g	La gravité.
T	La tension de surface.

H	Hauteur d'eau.
L	Longueur de la section de la veine(m).
v	vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s).
t	Temps .

1	<i>Définitions et Préliminaires</i>	3
1.1	Définition des fluides[1]	4
1.2	Les écoulements des fluides	5
1.2.1	Écoulement stationnaire[1] :	5
1.2.2	Écoulement irrotationnel :	5
1.2.3	Écoulement uniforme[4] :	5
1.2.4	Écoulement incompressible[4] :	5
1.2.5	Écoulement potentiel[2] :	6
1.3	Débit[1]	6
1.3.1	Débit volumique :	6
1.3.2	Débit massique :	6
1.4	Description d'un fluide en mouvement	6
1.4.1	Description de Lagrange[3] :	6
1.4.2	Description d'Euler[5] :	7
1.5	Utilisation de la théorie de la variable complexe[4]	8
1.6	Quelque équations de la mécanique des fluides	9
1.6.1	Conservation de l'énergie du fluide :	9
1.6.2	Ligne et fonction de courant	10
1.6.3	Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ [8]	11
1.6.4	Théorème de Bernoulli	12
1.6.5	Équation de continuité :	12
1.6.6	Les équations de Stokes[6]	13
1.7	Transformation de Schwartz-Christoffel	13
1.8	Analyse dimensionnelle [14]	15
1.9	Nombre de Weber[9]	16
2	<i>Position du problème</i>	17
2.1	Position du problème	18
2.2	Formulation du problème	19
2.3	Résolution numérique	23

2.4	Comportement local de ξ aux points B, D et C	25
2.4.1	Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_B$	26
2.4.2	Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_D$	28
2.4.3	comportement aux voisinage de $t=0$	29
3	<i>discussion des résultats</i>	31
3.1	Formulation de la série	32
3.2	Forme de la surface libre	34
3.3	Résultats et discussions	36
3.4	Application de logiciel Fluent	37
	Conclusion générale	39

Introduction

La mécanique des fluides est la science des lois des écoulements des fluides qui étudie leur comportement au repos et en mouvement et les forces internes associées. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de ses transfert .

Cette discipline possède une longue histoire remontant aux civilisations anciennes. Les anciens Grecs furent les premiers à étudier cette science. Archimède posa les principes fondamentaux de la mécanique, puis elle connut un développement aux XVIIe et XVIIIe siècles grâce aux travaux d'Isaac Newton et de Pascal, ce qui permit une compréhension plus approfondie des forces agissant sur les fluides et de leur mouvement.

La mécanique des fluides comprend deux grandes branches :

-La statique des fluides ou hydrostatique, qui étudie les fluides au repos. Historiquement, c'est le point de départ de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.

-La dynamique des fluides, qui étudie les fluides en mouvement.

On distingue également d'autres disciplines liées à la mécanique des fluides : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ainsi que de nombreuses applications dans divers domaines tels que l'ingénierie navale, l'aéronautique, la météorologie, la climatologie, voire l'océanographie.

En mécanique des fluides, les problèmes d'écoulements à surface libre sont étudiés en raison de leur importance dans de nombreux domaines d'application. Pour les analyser, on utilise des méthodes analytiques et numériques reposant sur diverses techniques, telles que la méthode basée sur la transformation conforme, notamment la transformation de Schwartz-Christoffel, la technique de troncature de séries, ainsi que la méthode des intégrales aux limites. Ces méthodes permettent de déterminer la forme de la surface libre pour de nombreux problèmes d'écoulement potentiel autour d'obstacles de différentes formes.

Ces méthodes ont été utilisées par plusieurs auteurs, tels que Vandenberg, F. Dais. Un écoulement par émergence d'un jet bidimensionnel sous un angle a été étudié par Broeck, H. Mekias, B. Bouderah, N. Bounab , A. Gasmi , ainsi que H. Mekias, M. B. Abd-el-Malek et S. Z. Masoud.

Ce travail est dans le but de modéliser et étudier numériquement un problème non-linéaire d'un écoulement potentiel bidimensionnel autour d'un obstacle. Le fluide est considéré parfait, le et de la tension de surface est tenu

en compte mais les forces de la gravité sont négligées. L'étude numérique du problème est basée sur l'utilisation la technique de troncation de la série. Le présent mémoire comporte trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques notions fondamentales de la mécanique des fluides.

Le deuxième chapitre consiste à étudier numériquement un problème non linéaire d'un écoulement potentiel bidimensionnel devant un obstacle de forme deux triangles qui se suivent, où l'effet de la tension superficielle est considéré mais les forces de gravité sont négligées, en appliquant la technique de troncation de la série.

Le dernier chapitre englobe une lecture et une discussion des résultats trouvés dans le chapitre précédent pour des différentes valeurs de nombre de Weber.

Ce travail est terminé par une conclusion.

CHAPITRE 1

DÉFINITIONS ET PRÉLIMINAIRES

contenu

1. Définition d'un fluide
2. Les écoulement des fluides
3. Le débit
4. Description d'un fluide en mouvement
5. Utilisation de la théorie de la variable complexe
6. Quelques équations de la mécanique des fluides
7. Ligne de courant
8. Analyse dimensionnelle
9. Nombre de weber

1.1 Définition des fluides[1]

Un fluide est un milieu matériel continu, sans rigidité, parfaitement déformable et qui peut s'écouler. Il a la propriété d'épouser la forme du récipient qui le contient. On regroupe sous cette appellation les gaz qui sont l'exemple des fluides très compressibles et même extensibles (oxygène, Air, ...) et les liquides.

Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles selon leur viscosité :

- Les fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) ont une viscosité soit constante soit variable qu'en fonction de la température.
- Les fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste :le sang, les gels, les boues, les pâtes...) ont leur viscosité variant en fonction de la vitesse de l'écoulement.

Fluide parfait

Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans tenir compte des effets de frottement (viscosité nulle).

Fluide visqueux (réel)

Un fluide réel (ou visqueux) en écoulement (en mouvement) fait intervenir les forces dues aux frottements, qui font apparaître une dissipation de l'énergie mécanique en énergie thermique (la viscosité est prise en compte).

Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. C'est le cas des liquides à l'image de l'eau ou de l'huile.

Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles comme l'air ou l'hydrogène.

1.2 Les écoulements des fluides

Il existe une grande variété de problèmes d'écoulement de fluides en pratique, et il est en général commode de les classer sur les bases de caractéristiques communes afin de rendre possible leur étude par groupe. Il y a plusieurs façons de classer les problèmes d'écoulement des fluides et ici nous présentons quelques catégories générales.

1.2.1 Écoulement stationnaire[1] :

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire, si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement. c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

1.2.2 Écoulement irrotationnel :

Un écoulement est dit irrotationnel si :

$$\text{rot} \vec{u} = 0$$

Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel.

1.2.3 Écoulement uniforme[4] :

Un écoulement est dit uniforme si les vitesses de toutes les particules sont les mêmes en tout point du fluide.

1.2.4 Écoulement incompressible[4] :

Un écoulement est incompressible si le volume de toute particule de fluide reste constant au cours de son mouvement.

Les particules de fluide ayant une masse constante par construction, leur masse volumique et donc constant au cours de leur écoulement

$$\rho = \text{cte}$$

1.2.5 Écoulement potentiel[2] :

On dit que l'écoulement est potentiel si sa vecteur de vitesse est dérivé d'un potentiel
c'est-à- dire :

$$\vec{u} = \text{grad}\phi$$
$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

La fonction $\phi(x, y)$ est le potentiel des vitesses.

1.3 Débit[1]

Le débit est la quantité de fluide écoulee pendant le temps t. La quantité peut être définie par un volume ou une masse.

1.3.1 Débit volumique :

C'est le rapport du volume de la veine par unité de temps :

$$D_v = \frac{V}{t} = \frac{S.L}{t} = S.V$$

1.3.2 Débit massique :

C'est le rapport de la masse de la veine par unité de temps :

$$D_m = \frac{m}{t} = \frac{\rho.V}{t} = \rho.S.v = \rho.D_v$$

1.4 Description d'un fluide en mouvement

1.4.1 Description de Lagrange[3] :

La méthode consiste à étudier différentes grandeurs (densité, température T, pression ...etc) pour chaque particule, lors de son mouvement.

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par la trajectoire de la particule identité établie.

L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

par conséquent, la description du mouvement consiste à déterminer le vecteur de position $\vec{r}(M_0, t)$ de toutes les particules dans le fluide à tout instant t

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t).$$

C'est-à-dire

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t).$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t), \quad \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

1.4.2 Description d'Euler[5] :

Dans la description eulérienne de l'écoulement d'un fluide, on définit un élément fini appelé domaine d'écoulement ou élément de volume à travers lequel l'écoulement entre et sort. Nous n'avons pas besoin de connaître la position et la vitesse de la masse des particules de fluide. À la place, nous définissons, à l'intérieur de l'élément de volume, une variable de champ, des fonctions de l'espace et du temps. Par exemple, le champ de pression est une variable de champ scalaire pour les écoulements de fluide non stationnaire dans les coordonnées cartésiennes,

champ de pression : $p = p(x, y, z, t)$

Nous définissons le champ de vitesse comme une variable de champ vectoriel de la même façon,

champ de vitesse : $\vec{u} = \vec{u}(u, v, w)$

De même, le champ d'accélération est aussi une variable de champ vectoriel

Champ d'accélération : $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$

L'ensemble de ces variables de champ définissent le champ d'écoulement.

le champ de vitesse de l'équation peut être développé dans les coordonnées cartésiennes (x, y, z) , (i, j, k) selon :

$$\vec{u} = (u, v, w) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$

1.5 Utilisation de la théorie de la variable complexe[4]

Soient ϕ et ψ la fonction potentielle et la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. on rapport le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$, puis on définit la fonction complexe $f(z)$ par :

$$f(z) = \phi + i\psi$$

$f(z)$ est appelé le potentiel complexe de l'écoulement .puisque la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ vérifient l'équation de la place ,de plus

On a :

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

Alors les relations de Cauchy Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

La théorie des variables complexes offre une méthode ,très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulement .

Si le plan (x, y) est considéré comme plan de $z = x + iy$ la fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement .de plus la vitesse complexe est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv$$

Sera aussi analytique le plan de l'écoulement .cette très importante propriété va nous paramétré d'utiliser ,par suite,la théorie des fonctions analytiques complexe pour résoudre notre problème considéré.

1.6 Quelques équations de la mécanique des fluides

1.6.1 Conservation de l'énergie du fluide :

Nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse, en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (1.1)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (1.1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (1.2)$$

Soit, en décomposant le tenseur des contraintes comme précédemment en une partie isotrope $-p\delta_{i,j}$, et en un déviateur $d_{i,j}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \frac{\partial u_i d_{i,j}}{\partial x_j} - d_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (1.3)$$

Ou bien, en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = u \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + \nabla \cdot (u \cdot d) - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.4)$$

Enfin, en tenant compte de la condition de compressibilité ($\nabla \cdot u = 0$), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (1.32) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = \nabla \cdot [u \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} - p \right) + u \cdot d] - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.5)$$

Réécrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique sous forme intégrale, en intégrant chacun des termes sur un volume V fixe et en utilisant le théorème de la divergence :

$$(1.6)$$

Quelle est la signification physique des différents termes :

1. le premier terme du second membre est le flux d'énergie cinétique convecté par l'écoulement à travers la surface S .
2. le second terme est le travail, par unité de temps, des contraintes exercées sur la Surface S .
3. le troisième terme est le travail, par unité de temps, des forces en volume.
4. enfin, le quatrième terme est associé à la déformation du volume V . Il représente l'énergie dissipée par viscosité lors de cette déformation.

1.6.2 Ligne et fonction de courant

Ligne de courant :

On appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse. Son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x,y,t)} = \frac{dy}{v(x,y,t)}$$

Fonction de courant :

Si on considère l'écoulement incompressible alors l'équation de continuité sera donnée :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Nous présentons une nouvelle fonction ψ de x et y que l'on appelle fonction de courant, vérifiant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.7)$$

Les surfaces définies par $\psi = cte$ sont des lignes de courant, en effet, la différentielle exacte de ψ est donnée :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

Puisque $\psi = cte$, alors $d\psi = 0$, on trouve l'équation de la ligne de courant .

1.6.3 Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ [8]

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible non-visqueux. puisque :

$$\vec{u} = \text{grad}\vec{\phi}$$

Et

$$\text{div}\vec{u} = 0$$

Il vient que :

$$\text{div}(\text{grad}\vec{\phi} = 0)$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

C'est à dire :

$$\Delta\phi = 0$$

De même ,d'après :

$$\vec{u} = (u, v) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

Et

$$\text{rot}\vec{u} = 0$$

On trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

C'est à dire

$$\Delta\psi = 0$$

1.6.4 Théorème de Bernoulli

Premier théorème de Bernoulli[7] :

Dans un écoulement stationnaire

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{cte}$$

Second théorème de Bernoulli :

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \left[\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \frac{u^2}{2} \right] = -\nabla \hat{p} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH$$

où $\hat{p} = P + \rho g z$

1.6.5 Équation de continuité :

Soit une partie d'un fluide de masse volumique ρ délimitée par une surface fermée S_f (de volume v). soit \vec{ds} un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée.

La partie de fluide a une masse

$$m = \int \int \int_v \rho dv$$

Le débit massique sortant de la surface S_f est égale à

$$\int \int_{S_f} \rho \vec{v} \vec{ds}$$

La conservation de la masse s'écrit

$$\frac{dm_s}{dt} - \int \int_{S_f} \rho \vec{v} \vec{ds} = \int \int \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \text{ où } \frac{dm_s}{dt}$$

représente le débit massique de fluide interne au volume considéré compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puit.

Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky

$$\int \int_{S_f} \rho \vec{v} \vec{ds} = \int \int \int_v (\text{div}(\rho \vec{v})) dv.$$

L'équation de conservation de la masse peut être écrite

$$\frac{dm_s}{dt} = \int \int \int_v [\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}] dv.$$

1.6.6 Les équations de Stokes[6]

L'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\nu \nabla u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

En négligeant dans l'équation de Navier-Stokes incompressible stationnaire les termes proportionnels à la masse volumique du fluide $(u \cdot \nabla)u$, on obtient l'équation de Stokes :

$$\begin{cases} -\nu \nabla u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Plus la vitesse d'écoulement est lente en termes d'amplitude et de valeurs ω la viscosité plus le modèle de Stokes est une approximation valide des équations Navier-Stokes.

La principale différence entre les deux équations est que le terme de vitesse linéaire a disparu, l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles linéaire.

1.7 Transformation de Schwartz-Christoffel

On considère un polygone [Figure (1.5)] dans le plan Ω , ayant pour sommets A_1, A_2, \dots, A_n et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soient A_1, A_2, \dots, A_n les points correspondant respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan des [Figure(1.6)]. Transformation de Schwarz-Christoffel, transforme l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan. La transformation est donnée par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \quad (1.10)$$

Ou bien

$$\Omega = \alpha \int ((\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}) d\lambda + \beta \quad (1.11)$$

Ou α et β sont des constantes complexes. On notera que :

1. Parmi les points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ on peut en choisir trois arbitrairement.

2. Les constantes α et β déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple λ_n , à l'infini, cas dans lequel facteur de (1.12) n'existe pas.
4. polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limités de polygones

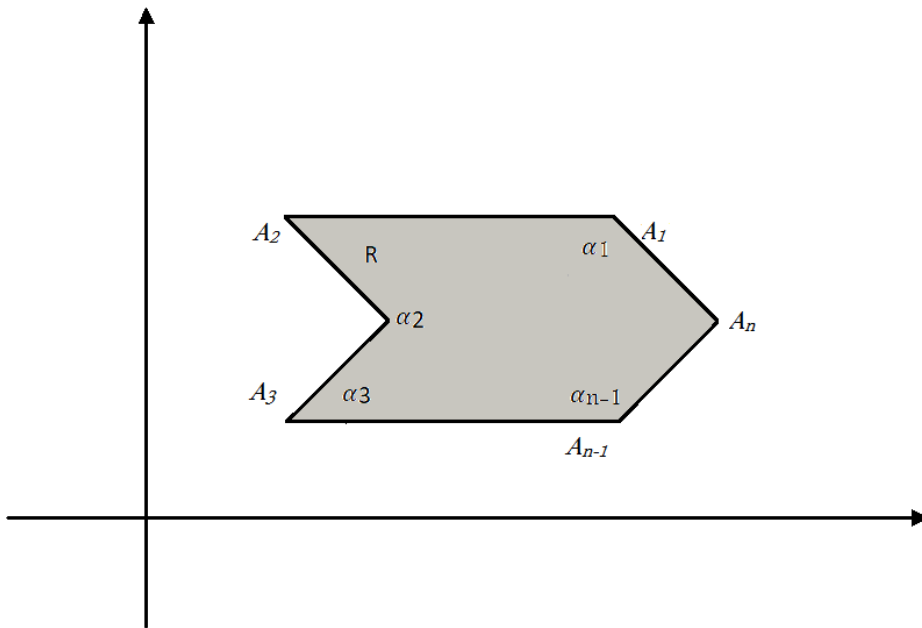


FIGURE 1.1 – Plan de Ω .

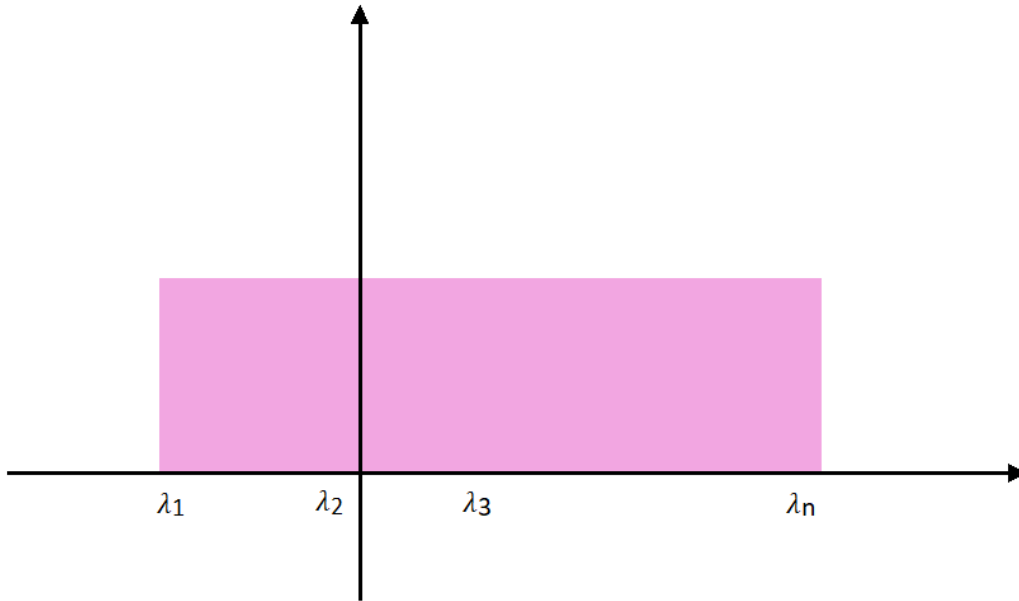


FIGURE 1.2 – Plan de variable λ .

1.8 Analyse dimensionnelle [14]

Avant de résoudre un problème, nous devons écrire l'équation qui régit le phénomène en variables non dimensionnelles. Pour cela, nous introduisons quelques notions et théorèmes pour passer d'une équation Physique en variables dimensionnelles à une équation dont les variables sont sans dimensions physique.

Les manipulation formelles requise sont faciles. Nous utilisons le théorème π de **vaschy -Buckingham** qui monter comment on non dimensionnelles réduit le nombre de paramètres qui détermine la solution d'un problème. Si un phénomène physique dépend de N variables dimensionnelles. On peut rendre ces variables sans dimensions en les réduisant à $N-K$, avec ($k=1, \dots, 4$) . Les quatre variables universellement connues sont la longueur L , la masse M , la température θ Et le temps t . Nous démontrons que les variables non dimensionnelles peuvent être sélectionnées de plusieurs manières .Elles paraissent relativement avec peu paramètres non dimensionnelles dans chaque cas.

Théorème π de vaschy-buckingham . Soit une phénomène physique comportant n variables, dont les dimensions desquels interviennent p grandeurs fondamentales. L'équation $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ qui régissant le phénomène peut se mettre sous la forme

$$h(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$$

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}$ Étant des produits sans dimension Indépendantes. D'après ce théorème, les produits sans dimensions peuvent être considérés comme des nouvelles variables en nombre réduit. On les appelle aussi grandeurs réduites. On note que certains de ces produits sans dimension, On trouve des nombres connus, nombre de Reynolds R , nombre de Froude F nombre de Mach M ect... Aussi trouve des rapports de deux grandeurs physique de même espèce.

1.9 Nombre de Weber[9]

Le nombre de weber α est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface d'un système multiphasique .

Il correspond au rapport des forces d'inertie et la tension de surface. on le définit de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{\rho u^2 \cdot L_c}{T}$$

Le nombre de weber est principalement utilisé pour l'étude la formation de gouttes ou bulles

CHAPITRE 2

POSITION DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, on a étudié un écoulement potentiel devant un obstacle, où l'effet de la tension de la surface est considéré mais gravité sont négligées .

Ce problème se caractérise par une condition non linéaire exprimée par l'équation de Bernoulli, appliquée à la surface libre dont la forme est inconnue .

contenu

1. Position de problème
2. Formulation du problème
3. Comportement de la vitesse au voisinage de point de stagnation
4. Résolution numérique

2.1 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide dans un canal contenant un obstacle de forme deux triangulaire situé au fond et forme an angle $\beta = \frac{\pi}{4}$ avec l'axe (OX) (Figure.1).

Le fluide est supposé non visqueux, incompressible et l'écoulement est irrotationnel et bidimensionnel. Les force de la gravité sont négligés, mais l'effet de la tension de surface est tenu en compte. Très loin en amont et en aval, l'écoulement est uniforme avec une vitesse constante U et un profondeur L .

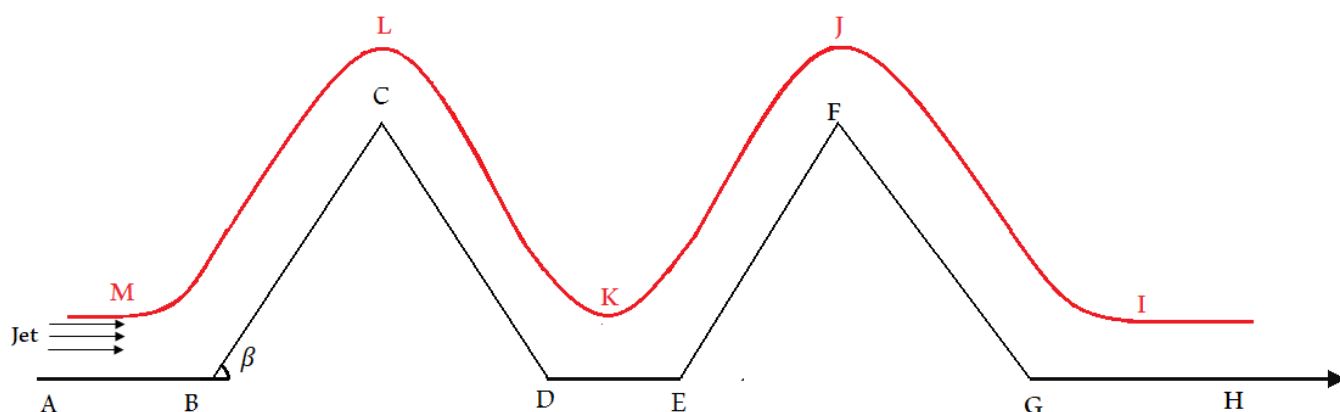


FIGURE 2.1 – Schéma de l'écoulement et du système de coordonnées

2.2 Formulation du problème

Considérons les variables sans dimension suivantes : U comme unité de vitesse et L comme unité de longueur, et on note u et v les composantes de la vitesse selon les directions x et y , respectivement.

Puisque l'écoulement est potentiel, il sera décrit à l'aide de deux fonctions : le potentiel de vitesse ϕ et la fonction de courant ξ .

à l'aide de la symétrie par rapport à l'axe (OY), on prend le triangle $ABCDE$, et on fixe $\phi = 0$ au point C et $\xi = 0$ sur la ligne de courant $IJKLM$.

Donc, on peut constater que :

1. Dans le champ lointain (lorsque $|x| \rightarrow \infty$), l'écoulement est supposé uniforme, par conséquent :

$$\phi(x, y) = Ux \quad \text{lorsque} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

2. Sur la paroi rigide ($ABCDE$), la vitesse normale doit être nulle, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

3. Sur la surface libre, la pression atmosphérique P_0 est constante; par conséquent, l'équation de Bernoulli donne :

$$p + \frac{1}{2}\rho q^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \quad \text{sur} \quad IJKLM \quad (2.3)$$

$$p - p_0 = TK \quad (2.4)$$

Avec : K est la courbure de la surface libre et T désigne la tension de surface.

En remplaçant l'équation (2.4) dans l'équation (2.3) l'équation (2.3) devient :

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}K = \frac{1}{2} \quad \text{sur} \quad IJKLM \quad (2.5)$$

tel que α est le nombre de Weber défini par :

$$\alpha = \frac{\rho U^2 L}{T} \quad (2.6)$$

Alors, notre problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans le domaine d'écoulement,} & \phi(x, y) = x, & |x| \rightarrow \infty \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}} = 0 & \text{sur les parois } ABCDE \\ \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}K = \frac{1}{2} & \text{sur la surface libre } IJ \end{cases} \quad (2.7)$$

La résolution du problème sous cette forme est particulièrement complexe, notamment en raison de la condition aux limites non linéaire qui est imposée sur une frontière inconnue (la surface libre).

Si l'on identifie le plan de l'écoulement au plan complexe, alors la vitesse complexe $\xi = u - iv$ et le potentiel complexe $f = \phi + i\psi$ sont des fonctions analytiques de la variable complexe $z = x + iy$.

Cette condition donne que la vitesse complexe ξ et la fonction potentiel f sont des fonctions analytiques.

Ainsi, nous faisons appel à toutes les propriétés essentielles des fonctions analytiques d'une variable complexe : formulations intégrales, développements en séries, applications conformes, etc. Dans le plan f , l'écoulement est alors représenté par une bande définie par $0 < \psi < 1$ (Figure 2).

On définit la fonction $\tau - i\theta$ comme suit :

$$\xi = \frac{df}{dz} = u - iv = e^{\tau - i\theta}, \quad (2.8)$$

Où : θ est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale.

L'élimination de la courbure k , donne :

$$\vec{V} = e^t(\cos\vec{\theta}_i - \sin\vec{\theta}_j)$$

et dans les coordonnées intrinsèques :

$$\vec{V} = |\vec{V}| \vec{u}_T$$

Où : $\vec{u}_T = \cos\vec{\theta}_i + \sin\vec{\theta}_j$ est le vecteur unitaire tangentiel

$$\begin{aligned} \vec{u}_n &= R \cdot \frac{d\vec{u}_T}{ds} = R \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= Re^\tau \left(\frac{\partial\theta}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ &= Re^\tau \left(\frac{\partial\theta}{\partial\phi} \right) (\cos\vec{\theta}_j - \sin\vec{\theta}_i) \end{aligned}$$

\vec{u}_n : est le vecteur unitaire normal et, ds désigne l'élément de longueur sur la surface libre. Finalement, on obtient :

$$k = \frac{1}{R} = e^\tau \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|.$$

on remplace k par sa valeur dans l'équation (2.5) on trouve :

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}q \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2}$$

Où e^τ représente l'intensité de la vitesse, $e^\tau = \sqrt{u^2 + v^2}$, et θ est l'angle entre l'axe des x et le vecteur vitesse.

Alors, l'équation de Bernoulli (2.5) devient :

$$e^{2\tau} - \frac{2}{\alpha} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| e^\tau = 1 \quad \text{sur } IJ \quad (\psi = 1) \quad (2.9)$$

Nous chercherons $\tau - i\theta$ comme une fonction analytique de $f = \phi + i\psi$ dans la bande $0 < \psi < 1$, satisfaisant les conditions (2.9), (2.10) et (2.11).

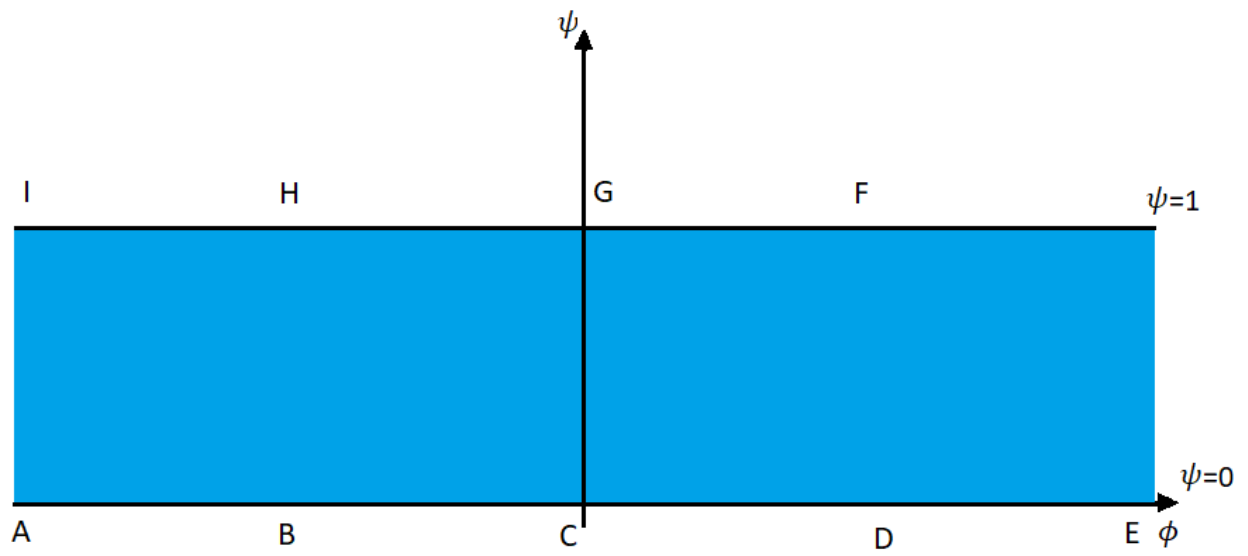


FIGURE 2.2 – L'écoulement dans le plan potentiel complexe f .

2.3 Résolution numérique

Pour résoudre numériquement ce problème, nous appliquons la technique de troncature de la série. Nous transformons le domaine occupé par le fluide dans le plan f , en un demi-disque unité dans le plan variable t par la transformation suivante. :

$$f = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \quad (2.10)$$

Les points $M L K$ et $B C D$ dans le plan f sont transformés respectivement en les points correspondants dans le plan t .

A,M	(-1,0)
B	(-0.65,0)
C	(0,0)
D	(0.65,0)
E,K	(1,0)
L	(0,1)

Cette transformation transforme le domaine d'écoulement sur la moitié supérieure du disque unité dans le plan complexe t (Figure3).

La surface libre est représentée sur la moitié supérieure du cercle unité, tandis que les parois rigides seront sur son diamètre et Le sommet C du triangle est transformé en l'origine, tandis que le sommet B en un point t_B tel que $-1 < t_B < 0$, et le sommet D en un point t_D tel que $0 < t_D < 1$. L'axe des ordonnées constitue la médiane du segment BD .

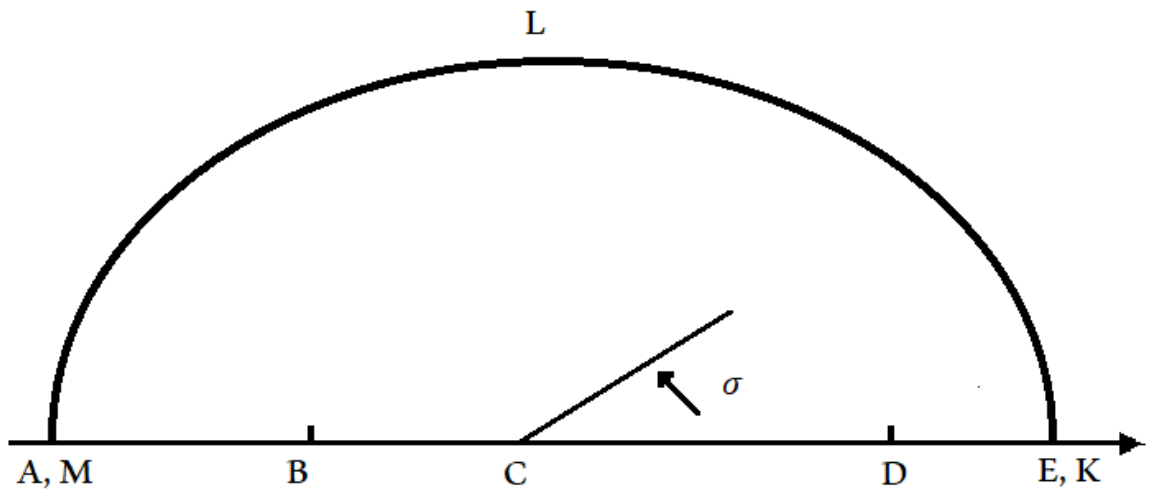


FIGURE 2.3 – Le domaine d'écoulement dans le plan t .

2.4 Comportement local de ξ aux points B, D et C

Aux points B, D et C , l'écoulement se fait autour d'un angle. Par conséquent, la fonction d'écoulement $\xi = u - iv$ est régulière partout sauf en ces points, ce qui nécessite une analyse locale du comportement de l'écoulement à la proximité de ces singularités.

Les points de la surface libre dans le plan t sont définis par la relation suivante :

$$t = e^{i\sigma} \quad \text{tel que} \quad -\pi < \sigma < \pi \quad (2.11)$$

Et dans le plan f , par la relation suivante :

$$f = \phi, \quad -\infty < \phi < +\infty \quad (2.12)$$

La résolution du problème nécessite l'écriture de l'équation :

$$\frac{1}{2}e^{2\tau} - \frac{1}{\alpha}e^{\tau} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{sur } (MLK)$$

En remplaçant l'équation (2.13) dans l'équation (2.12), on obtient :

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log(-itan(\frac{\sigma}{2}))$$

Ce qui conduit à

$$df = d\phi = \frac{2}{\pi \sin(\sigma)} d\sigma$$

d'où

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \frac{2}{\pi \sin(\sigma)} \quad (2.13)$$

D'un autre côté, on observe sur la surface libre :

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \right| = \frac{\pi \sin(\sigma)}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}$$

Enfin, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$e^{2\tau} + \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma) e^{\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 1 \quad \text{sur}(MLK) \quad (2.14)$$

2.4.1 Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_B$

Au point B , l'écoulement se fait dans un angle de $\frac{3\pi}{4}$ dans le plan Z , et il est donc caractérisé par la fonction potentielle suivante :

$$f(t) \sim \frac{a}{n} (t - t_B)^n, \quad t \rightarrow t_B \quad (2.15)$$

et

$$n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{4}{3}$$

cela implique que

$$f(t) \sim \frac{3a}{4} (t - t_B)^{\frac{4}{3}}, \quad t \rightarrow t_B \quad (2.16)$$

puisque $\xi = \frac{df}{dt}$, nous trouvons

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a (t - t_B)^{\frac{1}{3}}, \quad t \rightarrow t_B \quad (2.17)$$

On a

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \quad \text{sur} \quad (MLK) \quad (2.18)$$

À partir de l'équation (2.17) et de l'équation (2.20), nous trouvons :

$$\frac{3a}{4} (t - t_B)^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \quad t \rightarrow t_B$$

Ainsi, nous trouvons :

$$(t - t_B)^{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3a\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

Donc

$$(t + b) = \left(\frac{8}{a\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right)^{\frac{3}{4}} \quad \text{Lorsque } t \rightarrow -b \quad (2.19)$$

$$t \sim \left(\frac{8}{3a\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right)^{\frac{3}{4}} - b \quad (2.20)$$

En substituant les équations (2.19) et (2.22), nous trouvons :

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left[\left(\frac{8}{3a\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right)^{\frac{3}{4}} - b + b \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.21)$$

Donc

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left(\frac{8}{3a\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right)^{\frac{1}{4}}$$

Nous avons :

$$\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \sim 2t \quad \text{Utilisation le développement de Taylor}$$

Alors :

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left(\frac{8}{3a}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2t}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{Lorsque } t_B \rightarrow -b$$

$$\xi \sim \frac{df}{dt} \sim c_1 t^{\frac{1}{4}}$$

tel que

$$c_1 \sim a \left(\frac{8}{3a}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2t}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

2.4.2 Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_D$

Au point D , l'écoulement se fait dans un angle de $\frac{3\pi}{4}$ dans le plan Z , et il est donc caractérisé par la fonction potentielle suivante :

$$f(t) \sim \frac{a}{n}(t - t_D)^n, \quad t \rightarrow t_D \quad (2.22)$$

et

$$n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{4}{3}$$

cela implique que

$$f(t) \sim \frac{3a}{4}(t - t_D)^{\frac{4}{3}}, \quad t \rightarrow t_D \quad (2.23)$$

Puisque $\xi = \frac{df}{dt}$, nous trouvons

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a(t - t_D)^{\frac{1}{3}}, \quad t \rightarrow t_D \quad (2.24)$$

On a

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \quad \text{sur } (MLK) \quad (2.25)$$

À partir des équation (2.24) et (2.27), on trouve :

$$\frac{3a}{4}(t - t_D)^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \quad t \rightarrow t_D$$

Alors :

$$(t - t_D)^{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3a\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

Donc

$$(t - d) = \left(\frac{8}{a\pi} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right)^{\frac{3}{4}} \quad \text{Lorsque } t \rightarrow d \quad (2.26)$$

En substituant les équations (2.26) et (2.29), nous trouvons :

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left[\left(\frac{8}{3a\pi} \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right)^{\frac{3}{4}} + d - d \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.27)$$

Donc

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left(\frac{8}{3a\pi} \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right)^{\frac{1}{4}}$$

Alors :

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left(\frac{8}{3a} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2t}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\xi \sim \frac{df}{dt} \sim c_2 t^{\frac{1}{4}}$$

tel que

$$c_2 \sim a \left(\frac{8}{3a} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2t}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}}$$

2.4.3 comportement aux voisinage de t=0

Au point C , l'écoulement se fait dans un angle de $\frac{3\pi}{2}$ dans le plan Z , et il est donc caractérisé par la fonction potentielle suivante :

$$f(t) \sim \frac{a}{n} t^n, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.28)$$

et

$$n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

cela implique que

$$f(t) \sim \frac{a}{2} t^{\frac{2}{3}}, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.29)$$

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim at, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

Ainsi, nous trouvons :

$$t^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3a\pi} \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$$

Donc

$$t = \left(\frac{4}{3a\pi} \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.31)$$

En substituant les équations (2.33) et (2.35), nous trouvons :

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left[\left(\frac{4}{3a\pi} \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{-1}{3}} \quad (2.32)$$

Donc

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left(\frac{4}{3a\pi} \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\xi = \frac{df}{dt} \sim a \left(\frac{4}{3a} \right)^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{2t}{\pi} \right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\xi \sim \frac{df}{dt} \sim c_3 t^{-\frac{1}{2}}$$

tel que

$$c_3 \sim a \left(\frac{4}{3a} \right)^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{2t}{\pi} \right)^{\frac{-1}{2}}$$

CHAPITRE 3

DISCUSSION DES RÉSULTATS

contenu

1. Formulation de la série
2. Forme de la surface libre
3. Résultats et discussions
4. Application de logiciel Fluent

3.1 Formulation de la série

On définit la fonction $\xi(t)$ comme suit

$$\xi(t) = g(t)\Omega(t)$$

Avec : $g(t)$ la fonction qui contient les singularités et les zéros de $\xi(t)$, la fonction $\Omega(t)$ est analytique, elle se développe en série entière, alors :

$$\xi(t) = g(t)\exp(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n})$$

Donc :

$$\xi = u - iv = ((t + b)^{\frac{1}{4}}(t)^{\frac{-1}{2}}(t - b)^{\frac{1}{4}})\exp(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n}) \quad (3.1)$$

Où les a_k sont des constantes réelles à déterminer. L'équation (3.1) vérifie toutes les conditions aux limites.

$$e^{2\tau} - \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right| e^{2\tau} = 1 \quad \text{sur la surface libre } MLK$$

On substitue l'équation $t = \exp(i\sigma)$ dans l'équation (3.1), on obtient :

$$\exp(\tau - i\theta) = (e^{2i\sigma} - b^2)^{\frac{1}{4}} (e^{i\sigma})^{\frac{-1}{2}} \exp(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\sigma in})$$

On trouve :

$$\exp(\tau - i\theta) = [(\cos(2\sigma) - b^2)^2 + \sin^2(2\sigma)]^{\frac{1}{8}} \times \exp(i\frac{1}{4} \arctan(\frac{\sin(2\sigma)}{\cos(2\sigma) - b^2})) \times (\exp(-\frac{1}{2}i\sigma)) \exp(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\sigma in})$$

Donc :

$$\tau - i\theta = \frac{1}{8} \log[(\cos(2\sigma) - b^2)^2 + \sin^2(2\sigma)] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\sigma n) + i\frac{1}{4} \arctan(\frac{\sin(2\sigma)}{\cos(2\sigma) - b^2}) + i \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2\sigma n) - i\frac{1}{2} \sigma$$

Donc :

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{8} \log[(\cos(2\sigma) - b^2)^2 + \sin^2(2\sigma)] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n\sigma) \quad (3.2)$$

$$\theta(\sigma) = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{\sin(2\sigma)}{\cos(2\sigma) - b^2}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2n\sigma) \quad (3.3)$$

En substituant (3.2) dans (3.3) sur la surface libre, on obtient :

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{1}{4} \log[(\cos(2\sigma) - b^2)^2 + 2\sin^2(2\sigma)] + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \cos(2n\sigma)\right) - \frac{\pi}{\alpha} \times \\ & \sin(\sigma) \left| \frac{1}{2} - \frac{1-b^2 \cos(2\sigma)}{(\cos(2\sigma)-b^2)^2 + \sin^2(2\sigma)} - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n \cos(2n\sigma) \right| \times \\ & \exp\left(\frac{1}{4} \log[(\cos(2\sigma) - b^2)^2 + 2\sin^2(2\sigma)] + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \cos(2n\sigma)\right) = 1 \quad (3.4) \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients a_n on fait une troncation de la série après N termes.

ainsi on introduit la discrétisation de l'intervalle I .

$$\sigma(j) = \frac{\pi}{N} \left(j - \frac{1}{2}\right) \quad j = 0, \dots, N - 1 \quad (3.5)$$

D'après les équations : (3.4) et (3.5), on obtient un système de N équations à N inconnus :

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{1}{4} \log[(\cos(2\sigma(j)) - b^2)^2 + 2\sin^2(2\sigma(j))] + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \cos(2n\sigma(j))\right) - \frac{\pi}{\alpha} \times \\ & \sin(\sigma(j)) \left| \frac{1}{2} - \frac{1-b^2 \cos(2\sigma(j))}{(\cos(2\sigma(j))-b^2)^2 + \sin^2(2\sigma(j))} - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n \cos(2n\sigma(j)) \right| \times \\ & \exp\left(\frac{1}{4} \log[(\cos(2\sigma(j)) - b^2)^2 + 2\sin^2(2\sigma(j))] + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \cos(2n\sigma(j))\right) = 1 \quad (3.6) \end{aligned}$$

On utilise la méthode de Newton pour résoudre ce système.

3.2 Forme de la surface libre

Après avoir trouvé les coefficients a_n , la forme de la surface libre est déterminée comme suit :

De la relation

$$\frac{1}{u - iv} = \exp(-\tau + i\theta) = \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \quad (3.7)$$

Avec

$$dz = dx + idy = \exp(-\tau + i\theta)(d\phi + id\psi) \quad (3.8)$$

Où $\psi = 0$ sur la surface libre

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \sin \theta \end{cases} \quad (3.9)$$

Et

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.10)$$

On trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \exp(-\tau(\sigma)) \cos(\theta(\sigma)) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \exp(-\tau(\sigma)) \sin(\theta(\sigma)) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.11)$$

En substituant(2.40).(2.41)et(2.15)dans(2.49), on trouve en chaque point

$$\sigma(j), j = 0, \dots, N - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \sigma(j)}(\sigma(j)) = \frac{2}{\pi \sin(\sigma(j))} \exp(-\frac{1}{8} \log[(\cos(2\sigma(j)) - b^2)^2 + \sin^2(2\sigma(j))] - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n\sigma(j))) \cos(\frac{\sigma(j)}{2} - \frac{1}{4} \arctan(\frac{\sin(2\sigma(j))}{\cos(2\sigma(j)) - b^2}) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2n\sigma(j))) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma(j)}(\sigma(j)) = \frac{2}{\pi \sin(\sigma(j))} \exp(-\frac{1}{8} \log[(\cos(2\sigma(j)) - b^2)^2 + \sin^2(2\sigma(j))] - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n\sigma(j))) \sin(\frac{\sigma(j)}{2} - \frac{1}{4} \arctan(\frac{\sin(2\sigma(j))}{\cos(2\sigma(j)) - b^2}) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2n\sigma(j))) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

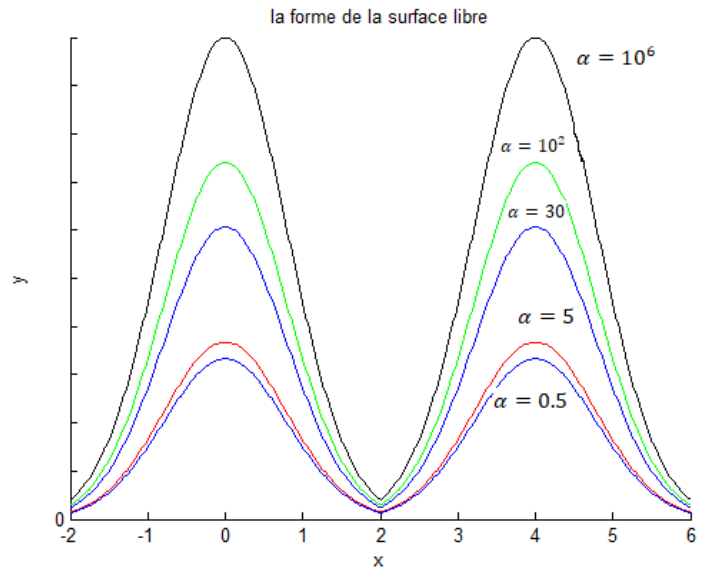


FIGURE 3.1 – La forme de la surface libre pour différentes valeurs de nombre de Weber .

3.3 Résultats et discussions

Dans ce travail, on remarque que si l'effet de la tension du surface est considéré, alors un terme non-linéaire apparait dans l'équation de Bernoulli. Pour cela, on l'a résolu numériquement en appliquant la technique de troncation de la série.

Cette dernière procédure numérique montre qu'il existe une valeur critique de nombre de Weber $\alpha^* = 0.5$ pour déterminer la solution approchée (la forme de la surface libre) du problème traité, où l'angle de l'inclinaison de l'obstacle considéré est : $\beta = \frac{\pi}{4}$.

La figure(3.1) présente les courbes de la forme de la surface libre pour différents nombres de Weber $\alpha^* < \alpha < \infty$, on remarque aussi que si $\alpha \rightarrow \infty$ ces courbes se rapprochent qui confirme la convergence de la méthode.

Les coefficients dans le système (3.12) décroissent très rapidement, ce qui permet à l'algorithme de converger en quelques itérations lorsque le nombre de Weber $\alpha > 0.5$ avec une erreur inférieure à 10^{-5} .

On remarque aussi que si $\alpha < \alpha^*$, quelques ondes commencent à apparaitre sur la surface libre, où on peut dire que la méthode utilisée commence à diverger.

3.4 Application de logiciel Fluent

En utilisant le code Fluent-Gambit, on a essayé d'analyser notre problème décrit dans le chapitre précédent pour présenter plus clairement la forme de la surface libre et aussi pour connaître quelques propriétés de fluide (Pression, fonction de courant, ...) étudié à l'intérieur du canal.



FIGURE 3.2 – Discrétisation du domaine de l'écoulement

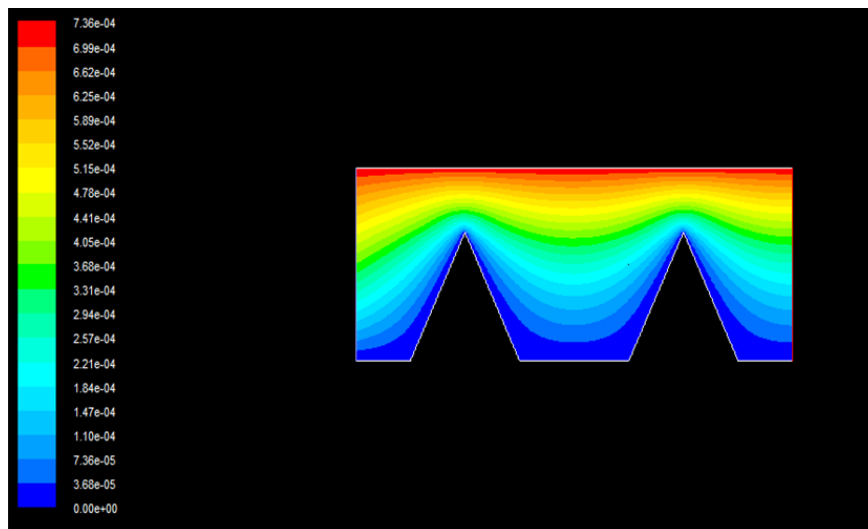


FIGURE 3.3 – Contour de la fonction de courant

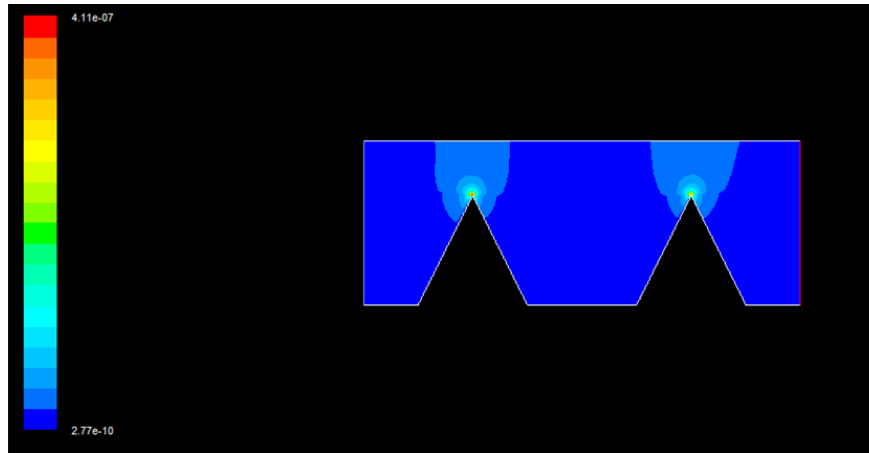


FIGURE 3.4 – La Pression Dynamique

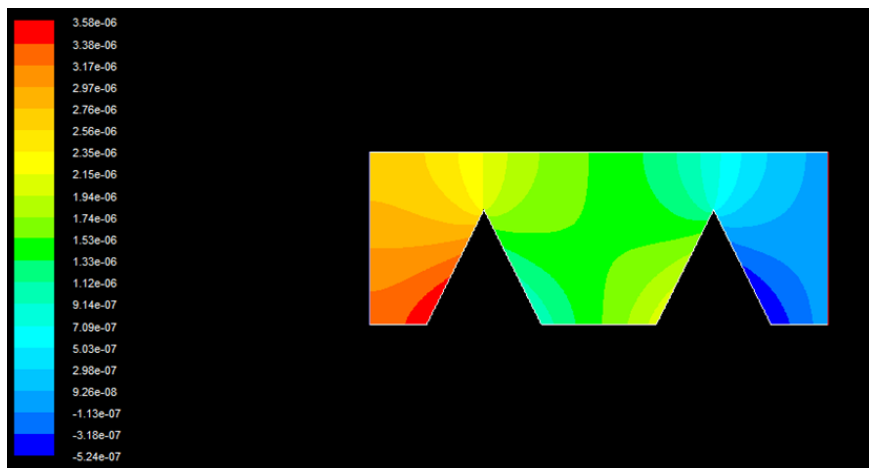


FIGURE 3.5 – La pression Statique

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, on a étudié numériquement un problème non linéaire concernant un écoulement potentiel bidimensionnel dans un canal avec un obstacle en bas de forme deux triangles, en tenant compte de l'effet de la tension superficielle, tandis que les forces de gravité sont négligées. Le fluide est supposé parfait

Les résultats obtenus dans ce travail montrent que la solution approchée existe pour des différentes valeurs de nombre de Weber $\alpha > \alpha^* = 0.5$ qui nous permet de dire que la méthode de troncation de la série utilisée dans le dernier chapitre est efficace dans le calcul de la solution approchée quand le terme non-linéaire apparaisse dans l'équation de Bernoulli.

Notre perspective est déterminer la forme de surface libre dans le même cas ou d'autre problèmes si les forces de gravité sont considérés là où un autre paramétré sera apparait qui est le nombre de Froude. Aussi l'application d'autre méthodes numériques, ou bien si on change quelques caractéristiques de fluide.

- [1] Dr, LABDELLI ABBES *mécanique des fluides theorie et applications* .Ecole Supérieure d'Agronomie de Mostaganem
- [2] Zaouche Meftah. *Simulation Numérique d'un écoulement autour d'un obstacle*. 2020.mémoire de master. Université de M'sila.
- [3] A.Laidi, *Effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles*,Thèse de Magistère,2012.(Université Kasdi Merbah Ouargla).
- [4] Setta Amel.*résolution numérique d'un problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel dans un cavité avec tension de la surface* .2023.mémoire de master. Université de M'sila.
- [5] Cengel, Yunus A, John M. Cimbala. *Mécanique Des Fluides* . De Boeck Supérieur, 2017.
- [6] Z.Salloum, *Étude mathématique d'écoulement de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers*,Mathématiques générales[math.GM],2008.(Université Paris-Est).
- [7] A.Laidi,*Effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles*,Thèse de Magistère,2012.(Université Kasdi Merbah Ouargla)
- [8] Ancey, christophe. *Analyse Différentielle Outils Mathématiques pour la Dynamique Des Fluides*.École Polytechnique Fédérale de Lausanne,Écublens

- [9] N. Bounab and B. Bouderah, *Computing Solution of the Flow due to a Nozzle*.I. J of computer Application, 67 (13) (2013), 14-18.
- [10] Batchelor, G.K., (1967). An introduction to uid dynamics. Combridge.
- [11] Gasmi, A., Bounif, M., (2021). First order perturbation Approach for the free surface ow over a step with a large Weber number. INCAS. 13(2), 11-19.
- [12] Vanden-Broeck, J.M., Dias, F., (1991). Nonlinear free-surface ow past a submerged inclined at plate, Phys. Fluids, A3 2995-3000.
- [13] S.J.Chapman ,J.M.Vanden Broeck ,Exponential asymptotics and capillary waves,*Siam J.Appl.Math.*,Vol.62,No.6(2002),1872–1898/
- [14] Wahiba Delloum .*Résolution numériques d'un problème non linéaire dans un domaine à frontière libre devant un obstacle -Modèle House-*. thèse de Magistère,2004.Université de M'sila .

Résumé :

Ce travail est dans le but de modéliser et étudier numériquement un problème non-linéaire d'un écoulement potentiel bidimensionnel autour d'un obstacle. Le fluide est considéré parfait, l'effet de la tension de surface est tenu en compte mais les forces de la gravité sont négligées. L'étude numérique du problème est basée sur l'utilisation la technique de troncation de la série.

Mots Cles :

Écoulement potentiel; Méthode de troncation de la série; Nombre de Weber; Surface libre

Abstract :

This work aims to model and numerically study a nonlinear problem of a two-dimensional potential flow around an obstacle. The fluid is considered perfect, the effect of surface tension is taken into account, but gravitational forces are neglected. The numerical study of the problem is based on the use of the series truncation technique.

Keywords :

Potential flow; Series truncation method; Weber number; Free surface

ملخص :

يهدف هذا العمل الى نمذجة ودراسة عددية لمشكلة لاختية لتدفق محتمل ثنائي الابعاد حول عائق. يعتبر السائل مثاليا, يؤخذ تأثير التوتر السطحي بعين الاعتبار, بينما تهمل قوى الجاذبية. تعتمد الدراسة العددية للمشكلة على استخدام يشمل هذا العمل.

الكلمات المفتاحية :

تدفق محتمل. طريقة تقطيع السلسلة. عدد ويبير. السطح الحر