REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMTIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour obtenir le *Diplôme de Master*

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées et discrètes

Par

ZEDAM Imane

Thème

Problèmes aux limites linéaires pour le Laplacien

Devant le jury:

Président:	MERZOUGUI Abdelkrim	M.C	Univ. de M'sila.
Rapporteur:	DILMI Mourad	M. C	Univ. de M'sila.
Examinateur:	MEMOU Ameur	M. C.	Univ. de M'sila.

Promotion: 2011/2012

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant pour tout remerciement :

Je tene à exprimer mes remerciements à mon encadreur de thèse Monsieur ':DILMI MOURAD' pour ses orientation, ses conseils et son aide.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble des personnes qui permettent par leur travail de faire vivre scientifiquement, administrativement et humainement l'institut de mathématiques de l'université de M'sila, en tète monsieur le directeur 'JRIOU AISSA'

Je tiens à remercier également tous mes collègues, amis de MI pour les moments de détente que nous avons parfois partagés. Enfin tous ma reconnaissance à mes professeurs de la faculté de Mathématiques et Informatique de l'université de M'sila .

A toute ma famille, puisse-t-elle me pardonner ?

L'intraitable que j'étais. . . . .et tout ce que je lui fait endurer. . . . .

Enfin un grand merci s'adresse pour chaque personne qui a aidé de prés ou de loin pour réaliser ce travail

A ce beau monde qui me permet

Devoir mon rève se réaliser.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux qui ont su me conduire

dans le bon chemain, et qui me présentent la dignité, la joie de ma vie et

surtout

L'honneur, et je leurs dis merci dans toute lettre, tout point et toute

virgule respirent leur indéfinissable soutien et leur remarquable

attention pour tous :

Mes très chers parents qui m'ont suivi au long du chemin de la vie

Ma chère grand-mère

Mes chers frères et sœurs

Mes amis qui ont suivi l'histoire......et tous les autres......

Leur amitié

Leur présence rassurante

Toutes mes amis avec qui j'ai passé mes études

Tous qui m'aiment.

Imane

Table des matières

Introduction

Dans $\mathbb{R}^n$ on désigne par Laplacien l'opérateur

$$\Delta = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Cet opérateur déjà introduit comme élément de l'équation de Schödinger [4, 10] apparâit aussi en géométrie, en physique [18] (en plus de la physique quantique, dans la description de phénomènes macroscopiques) etc....

Dans un domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, connexe de frontière $\partial\Omega$, le Laplacien conduit à des problèmes aux limites dont les plus classiques sont

$$-\Delta u + \lambda u = f \qquad \text{dans } \Omega,$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet $u = g$ sur $\partial\Omega$, de Neumann $\partial_n u = h$ sur $\partial\Omega$ ou de Fourier $u + \sigma\partial_n u = h$ sur $\partial\Omega$. ∂_n désignant la dérivation selon la normale exterieur à $\partial\Omega$.

Notre exemple de base sera l'équation de Laplace sur un ouvert Ω (borné, régulier) de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière est noté Γ ou $\partial\Omega$. Rappelons que, étant donné une fonction f (dans $L^2(\Omega)$ pour fixer les idées), nous cherchons une fonction u (dans $H^2(\Omega)$), telle que

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega,$$
$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma.$$

En dimension supérieure à 1, il n'est pas facile de démontrer que ce problème admet une solution dans le cas d'un ouvert quelconque. On ne sait « calculer » explicitement cette solution que dans quelques cas particulier (géométries simples, séparation des variables). En fait, il a fallu attendre Hilbert, à la fin du XIXe siècle pour obtenir un théorème d'existence satisfaisant.

Nous allons voir qu'une formulation différente, appelée « formulation variationnelle » où «formulation faible », couplée à des résultats abstraits d'analyse fonctionnelle permet d'énoncer un théorème général d'existence et d'unicité. Nous devrons pour cela changer de point de vue et affaiblir la notion de solution. Il sera quelque peu surprenant de définir la solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) du second ordre comme une fonction ne possédant qu'une dérivée (et encore en un sens non-classique). Les justification de ce qui peut apparaître comme un tour de passe-passe sont multiples :

– c'est dans ce cadre que l'on peut démontrer un résultat d'existence et d'unicité ;

– quand les données (et la géométrie) s'y prêtent, on retrouve les solutions classiques des EDP;

– la formulation variationnelle est à la base de ce étude, qui est le sujet de ce travail, et que nous étudierons dans les chapitres suivants ;

– la formulation faible est en réalité plus proche de la physique que la formulation usuelle, puisqu'elle s'interprète comme le principe des travaux virtuels en mécanique.

Ce mémoire se divise en trois chapitres. Dans le premier chapitre, en donnera les définitions et quelques outils sur les problèmes aux limites. On définie les espaces de Sobolev classiques, l'utilisation du formules de Green et des résultats de théorème de Lax-Milgram.

Le deuxième chapitre consacré à étudier le problème de Dirichlet et de Newman en dimension 1 puis en dimension supérieure ainsi que les conditions de théorème de Lax-Milgram en choix de l'espace V et les formes a et L.

Le troixième chapitre a pour but d'appliquer les méthodes étudies dans le chapitre 2 sur le problème de Dirichlet contact sans frottement pour le Laplacien, en verra la position du problème, la formulation variatinnelle de ce problème et puis en exposera l'idée de Lax-Milgram pour étudier le résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Chapitre 1

Quelques outils sur les problàmes aux limites

Les espaces de Sobolev [voir $1, 2, 3, 5, 22$] jouent un rôle fondamental dans la théorie variationnelle des équations aux dérivées partielles, ainsi que dans la théorie des éléments finis.

1.1 Notion de distributions

Les fonctions integrables ou les fonctions de carré integrable ne sont pas forcément dérivables (exemple des fonctions en escalier qui ne sont même pas continues). Il va pourtant falloir considérer des distributions de Laurent Schwartz.

Définition 1.1 *[6,17]. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.*

On appelle support de f l'ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ qui est l'adthérence de

$$\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

C'est aussi le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle. C'est le domaine sur lequel il est intéressant d'étudier f

Définition 1.2

note $D(\Omega)$ l'espase des fonctions $C^{\infty}(\Omega)$ à support compact dans Ω.

$$D(\Omega) = \{f \in C^{\infty}(\Omega) : \ \sup p(f) \ \textit{borné}, \ \sup p(f) \subset \Omega\}.$$

(un fermé borné est compact dans $\mathbb{R}^n$).

Proposition 1.1 *$D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, i,e:*

$$\forall f \in L^2(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in D(\Omega), \|f - \varphi\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

$f \in L^2(\Omega)$ étant donnée, il existe une suite $(\varphi_n) \in D(\Omega)$ telle que $\varphi_n \longrightarrow f$ quand $n \to \infty$ au sens de la convergence dans $L^2(\Omega)$, i,e: telle que $\|f - \varphi_n\|_{L^2} \to_{n\to\infty} 0$.

Remarque 1.1 *Pour un compact K de $\mathbb{R}^n$ on a bien sûr $D(K) = C^\infty(K)$, mais là on s'interesse aux ouverts bornés Ω de $\mathbb{R}^n$. Et dans ce cas $D(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$: prendre par exemple la fonction I_Ω constante égale à 1 sur Ω, qui est bien $C^\infty(\Omega)$ mais n'est pas à support compact dans Ω.*

Espace de distribution $D'(\Omega)$

Une fonction $\varphi \in D(\Omega)$ étant $C^\infty(\Omega)$ on peut la dériver à tout ordre.
Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, et

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_i^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(x).$$

On munit $D(\Omega)$ de la convergence suivante
La suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ converge vers $\varphi \in D(\Omega)$, et on note $\varphi_n \to \varphi$ dans $D(\Omega)$, si et seulement si:

1. Les supports des φ_m restent dans un compact fixe

$$\exists K \text{ compact} \subset \Omega \ \text{ tq } \forall \varphi_m \in D(\Omega) : \sup(\varphi_m) \subset K,$$

(il existe un voisinage ouvert $O \subset \Omega$ du bord de Ω à avoir $O = \Omega - K$, tel que toutes les φ_m sont nulles dans tout O)

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ (i,e pour chaque ordre) on a $\partial^\alpha \varphi_m \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformement dans Ω, ie:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall m > M, \|\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha \varphi_m\|_\infty < \varepsilon.$$

(Convergence uniforme à tout ordre. On rappelle que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$).

On définit alors l'espace dual $D'(\Omega) = L(D(\Omega), \mathbb{R})$ i,e l'espace des formes linéaires continues (pour la notion de convergence ci-dessus) sur $D(\Omega)$.

$D'(\Omega)$ est appelé espace des distributions et ses éléments sont appelés distributions. Donc on a $T \in D'(\Omega)$ si

$$T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ vérifie :}$$

1. La linéarité: $\forall\ r \in \mathbb{R}$ et tous $\varphi, \psi \in D(\Omega)$

$$T(r\varphi + \psi) = rT(\varphi) + T(\psi) \text{ (égalité dans } \mathbb{R}),$$

2. La continuité au sens de $D(\Omega)$:

$T(\varphi_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} T(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$ dès que $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ au sens de $D(\Omega)$.

Pour $T \in D'(\Omega)$ (fonctionnelle linéaire continue), on utilise la notation du crochet de dualité:

$$T(\varphi) = (T, \varphi)_{D'(\Omega), D(\Omega)} = (T, \varphi)$$

(sans indice si aucune confusion n'est possible). Cette notation usuelle dans le cas linéaire permettra dans le cas ou T peut être représentée par une fonction de manipuler l'expression (T, φ) comme un produit scalaire $(T, \varphi)_{D'(\Omega)}$.

Proposition 1.2 *[16]*

$T \in D'(\Omega)$ alors pour tout $i = 1, ..., n$, les fonctionnelles $S_i = \dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ sont des distributions.

1.2 L'espace $L^2(\Omega)$

Pour simplifier l'exposé on se restreint aux fonctions à valeurs réelles. On considère un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^n$ (i,e un ouvert dont la frontière est paramétrable par une fonction localement C^1). Un espace de Sobolev est un espace de fonction muni d'une norme dérivant d'une intégration qui fait de cet espace un Banach, comme par exemple les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ définis par :

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p < \infty \right\}.$$

L'espaces de Sobolev qu'on considéra dans ce chapitre sont des espaces Hilbertiens (la norme qu'on considéra dérivera d'un produit scalaire).

Définition 1.3 *L'espace de Sobolev d'ordre 0 est*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f(x)|^2 < \infty \right\}.$$

Lemme 1.3 *L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$ de carré intégrable est un espace vectoriel muni du produit scalaire et de la norme associée, pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$:*

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Si un seul ouvert Ω est utilisé on note plus simplement $(.,.)_{L^2(\Omega)} = (.,.)_{L^2}$ et $\|.\|_{L^2(\Omega)} = \|.\|_{L^2}$.

On admet la proposition:

Proposition 1.4 *(Riesz-Fiecher) [7]. $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(.,.)_{L^2}$ est espace de Hilbert. On rappelle l'inégalité de Schwarz:*

$$|(f, g)_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} ,$$

$$i, e \quad (\int_\Omega f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_\Omega f^2(x)dx)(\int_\Omega g^2(x)dx), \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

1.3 Espace $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.4 *[19]. L'espace de Sobolev d'ordre 1 est*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \forall i \in 1, ..., n \right\},$$

où les dérivées partielles sont prises au sens faible.

Proposition 1.5 *[19]. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel muni du produit scalaire*

$$(f, g)_{H^1} = \int_\Omega f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx.$$

Proposition 1.6 *[13]*

L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(grad\ u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)^n$ respectivement. Comme $L^2(\Omega)$ est complet (théorem de Riesz), ces suites convergent. Notons u et $(v_1, .., v_n)$ leurs limites respectives. Pour conclure que $u \in H^1(\Omega)$, nous allons montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i, \forall i = 1, ..., n.$$

Fixons $\varphi \in C^1(\Omega)$. Comme chaque u_n est dans $H^1(\Omega)$, on a:

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le premier membre converge vers $\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ et le second vers $-\int_\Omega v_i \varphi dx$, par continuité du produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. On en déduit que, pour tout $\varphi \in C^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx,$$

par conséquent $v_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ dans $H^1(\Omega)$.
Il est clair que $C^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ (puisque les dérivées classiques sont aussi des dérivées faibles), est que l'inclusion est stricte. ■

Remarque 1.2 *On voit que $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1}$ et $\|\partial_i f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1}$.*

Remarque 1.3 *Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a*

$D(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

1.4 Espace $H^2(\Omega)$

Définition 1.5 *L'espace de Sobolev d'ordre 2 est*

$H^2(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k, \partial_\alpha u \in L^2(\Omega)\right\}.$

Proposition 1.7 *L'espace $H^2(\Omega)$ est un espace vectoriel muni du produit scalaire*

$$(f,g)_{H^2} = \int_\Omega f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx + \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j}dx.$$

C'est un espace de Hilbert. Sa norme set notée $\|.\|_{H^2}$.

Espace $H_0^1(\Omega)$ et l'inégalité de poincaré

Proposition 1.8 *L'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dence dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ pour la norme H^1, pour tout $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, il existe $\phi_n \in D(\mathbb{R}^n)$, telle que* $\lim \|f - \phi_n\|_{H^1} = 0$.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Définition 1.6 *On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ (pour la norme $H^1(\Omega)$. Autrement dit,*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega) \ \exists \phi_n \in D(\Omega) \ tq \ \phi_n \longrightarrow f \ dans \ H^1(\Omega) \right\}. \qquad (1.11)$$

Remarque 1.4 - $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

- Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ *avec inclusion strict.*
- $D(\Omega)$ *est dense dans* $H_0^1(\Omega)$ *pour la norme* $H^1(\Omega)$.
- $H_0^1(\Omega)$ *est un fermé de* $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.9 *(Inégalité de Poincaré). Si l'ouvert Ω est borné alors il existe une constante $c_\Omega > 0$ telle que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|\text{grad } v\|_{L^2(\Omega)},$$

où c_Ω est dépend que de Ω.(Ce résultat est évidement faux dans $H^1(\Omega)$: prendre v$\equiv$1.

Preuve. On montrera le résultat pour $v \in D(\Omega)$ puis on conclura par densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Ω étant borné, Ω est contenu dans une bande $\Omega \subset \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, a \leq x_n \leq b\}$, pour certains a et b réels. Soit $v \in D(\Omega)$ et soit $\bar{v}$ son prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^n - \Omega$. On a $\bar{v} \in D(\mathbb{R}^n)$ et $\bar{v}(x', a) = 0$ d'où:

$$\bar{v}(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n}(x', t)dt, \quad \forall (x', x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

D'où par Cauchy Schwarz:

$$| \bar{v}(x', x_n)|^2 \leq |x_n - a| \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt,$$

car $\int_a^{x_n} 1^2 dx = x_n - a$.

D'où

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \ | \bar{v}(x', x_n)|^2 \, dx' & \leq |x_n - a| \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt dx' \\ & \leq \ |x_n - v| \left\| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où en intégrant en x_n, $\bar{v}(x', .)$ étant nul à l'extérieur de $]a, b[$:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \ | \bar{v}(x', x_n)|^2 \, dx' dx_n & = \textstyle\int_a^b |x_n - a| \, dx_n \left\| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

inégalité pour $v \in D(\Omega)$ plus précise que le résultat recherché puisque

$$\left\| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_n} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\text{grad } \ v\|^2_{L^2(\Omega)^n}$$

(On rappelle que $\|\text{grad } \ v\|^2_{L^2(\Omega)^n} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$).

On a donc obtenue l'inégalité de poincaré avec $C = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$.
puisque $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, ce résultat reste vrai pour $v \in H_0^1(\Omega)$ par continuité des normes (ici lors du passage à la limite): si une suite (φ_n) de $D(\Omega)$ converge vers v dans$H^1(\Omega)$ alors en particulier les suites $(\|\varphi_n\|_{L^2})$ et $(\|\text{grad } \ \varphi_n\|_{L^2})$ convergent vers $\|v\|_{L^2}$ et $\|\text{grad } \ v\|_{L^2}$ (par définition de la norme $\|.\|_{L^2}$ puisque la convergence à écrit $\|v - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0$. ■

Remarque 1.5 *Ce resultat est évidement faux dans $H^1(\Omega)$: prendre $v \equiv 1$. Ou encore si cette égalité était vraie dans $H^1(\Omega)$ pour un v donné, elle serait encore pour $v + c$ où c est une constante, ce qui serit absurde puisque grad $(v + c) = \text{grad } v$ et on pourrait choisir la constante pour rendre l'inégalité ci-dessus fausse. Par contre pour v dans $H_0^1(\Omega)$ on ne peut pas prendre une constante autre que $c = 0$ pour garder $v + c$ dans $H_0^1(\Omega)$.*

1.5 Formules de Green dans les espaces de Sobolev

Il serait plus juste de parler des formules de Green, dans la mesure où il en existe plusieurs variantes. Nous considérons un ouvert borné (régulier) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dont le bord Γ. Nous ne chercherons pas à définir précisément la régularité exigée de Ω. Disons simplement que les domaines autorisées comprennent en particulier les domaines dont la frontière est polygonale (en dimention 2). En particulier, on peut définir une normale unitaire (sortante par convention), notée $\mathbf{n}$, continue presque partout. En dimension 2, $\mathbf{n}$ est discontinue aux sommets du polygone, et en dimension 3 elle est discontinue aux sommets et aux arêtes du polyèdre. Par contre (mais nous reviendrons sur ce point), un domaine avec une fissure n'est pas localement d'un seul coté de la frontière et n'est pas régulier.

Enfin nous noterons $d\gamma$ la mesure induite par la mesure de Lebesgue sur Γ. Nous parllons de la formule de la convergence (appelée aussi formule de Green en dimension 2, et d'Ostrogradski en dimension 3), que nous admettrons sans démonstration.

Soit $\mathbf{q} \in C(\Omega)^d$ un champ de vecteur défini sur Ω . On a

$$\int_\Omega div\ \mathbf{q} dx = \int_\Gamma \mathbf{q}.\mathbf{n} d\gamma(x).$$

À partir de cette formule de base, nous allons voir que nous pouvons en obtenir plusieurs autres qui nous seront plus directement utileser.

Par exemple, en combinant la formule précédente avec la formule d'analyse vectorielle

$$div(\mathbf{q}v) = div\mathbf{q} + \mathbf{q}.\,\mathrm{grad}\ \ v,$$

il vient

$$\int_\Omega v\ div\mathbf{q} dx = -\int_\Omega \mathbf{q}.\,\mathrm{grad}\ \ v dx + \int_\Gamma v\mathbf{q}.\mathbf{n} d\gamma(x).$$

Un cas particulier que nous utiliserons au paragraphe suivant, est de prendre

$\mathbf{q} = grad\ u$, où u est fonction (régulière) définie sur Ω . La relation précédente devient dans ce cas:

$$-\int_\Omega \Delta uv dx = -\int_\Omega v\ div(\mathrm{grad}\ \ u) dx = \int_\Omega \mathrm{grad}\ \ u.\,\mathrm{grad}\ \ v dx - \int_\Gamma v\ \ \mathrm{grad}\ \ u.\mathbf{n} d\gamma(x).$$

Enfin en prenant $\mathbf{q} = u\mathbf{e}_i$, où $u \in C^1(\Omega)$ et $\mathbf{e}_i$ est le i^∞ vecteur de base, il vient

$$\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega u\mathbf{e}_i.\,\mathrm{grad}\ \ vdx = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

1.6 Théorème de Lax-Milgram

Il sagit d'un résultat absttrait relatif aux espace de Hilbert. Nous le présentons dans cette section car nous l'utiliserons seulement quand l'espace de Hilbert est un espace de Sobolev ($H^1(\Omega)$ ou l'un de ces sous-espaces).

Nous nous donnons donc un espace de Hilbert V, et nous notons $(.,.)$ le produit scalaire sur V, et $\|.\|_V$ la norme associe. Nous considérons un problème variationnel abstrait du type

$$(p_v)\begin{cases}\text{Trouver } u \in V,\ \text{tel que}\\ a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V.\end{cases}$$

i) L est un forme linéaire continue sur V : L est un application linéaire de V sur $\mathbb{R}$, et il existe $C > 0$ telle que

$$\forall v \in V,\ |L(v)| \leq C\,\|v\|_V\,.$$

ii) a est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$: les deux applications partielles $w \to a(w,v)$ et $v \to a(w,v)$ sont linéaires de V dans $\mathbb{R}$, et il existe $M > 0$ telle que

$$\forall (u,v) \in V^2, |a(u,u)| \leq M\,\|u\|_V\,\|v\|_V\,.$$

iii) a est coercive : il existe $\alpha > 0$ telle que $\forall u \in V, a(u,u) \geq \alpha\,\|u\|_V^2$,
la coercivité de a est essentielle pour pouvoir résoudre (p_v).

Proposition 1.10 *[15]. Sous les hypothèses ci-dessus, le problème (p_v) admet une unique solution $u \in V$. cette solution vérifie l'estimation:*

$$\|u\|_V \leq \frac{M}{\alpha}C.$$

Preuve. En utilisant le théorème de Riesz, nous allons introduire un opérateur linéaire sur V, et montre que notre problème est équivalent à une équation linéaire dans V. Nous monterons ensuite, en utilisant le théorème du point fixe de Banach que cette équation a une solution unique, qui vérifie $\|u\|_V \leq \dfrac{M}{\alpha} C$.

Tout d'abord, d'aprés le théorème de Riesz, il existe $f \in V$ telle que

$$L(v) = (f, v), \forall v \in V.$$

Considérons maintenant l'application $v \to a(w, v)$, $w \in V$ étant fixé. Toujours d'aprés le théorème de Riesz, il existe un élément unique de V, que nous pouvons noter $A(w)$ tel que

$$a(w, v) = (A(w), v), \forall v \in V.$$

Notre problème variationnel se met donc sous la forme d'une équation dans $V : A(u) = f$. Nous allons maintenant étudier les propriétés de l'application $A(w)$. Il est facile de voir que A est un opérateur linéaire sur V (une application linéaire $V \to V$). En effet, par définition $A(\alpha w + \beta x)$ vérifie, pour tout $v \in V$

$$w \to \ (A(\alpha w + \beta x), v) = a(\alpha w + \beta x, v) = \alpha a(w, v) + \beta a(x, v) = a(A(w), v) + a(A(x), v),$$

ce qui démontre la linéairité de A.

Notons maintenant que l'équation (linéaire) $Au = f$ peut se mettre, pour $p > 0$ à choisir, sous la forme du problème de point fixe

$$u - p(Au - f) = u,$$

qui est équivalent au problème initial.

Nous allons vérifier que l'on peut choisir p de façon que l'application $T : w \to w - p(Aw - f)$ soit strictement contractante. Calculons

$$T(w) - T(w') = w - p(Aw - f) - w' - p(Aw' - f) = w - w' - pA(w - w'),$$

puis

$$
\begin{aligned}
\| T(w) - T(w')\|_V^2 &= \|w - w'\|_V^2 + p^2 \|A(w - w')\|_V^2 - 2p(A(w - w'), w - w') \\
&= \|w - w'\|_V^2 + p^2 \|A(w - w')\|_V^2 - 2pa(w - w', w - w') \\
&\leq (1 - 2p\alpha + p^2 M^2) \|w - w'\|_V^2 .
\end{aligned}
$$

Si nous choisissons (par exemple) $p = \dfrac{\alpha}{M^2}$, nous obtenons:

$$1 - 2p\alpha + p^2 M^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{M^2} < 1,$$

de sorte que l'application T est strictement contractante. D'aprés le théorème du point fixe de Banach, T admet un unique point fixe, qui est bien solution du problème variationnel (p_v).

L'estimation $\|u\|_V \leq \frac{M}{\alpha} C$ s'obtient en prenant $v = u$ dans la formulation variationnelle, ce qui donne

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq M \|u\|_V ,$$

d'où l'inégalité cherchée.

Quand la forme bilinéaire est symétrique ($a(w, v) = a(v, w)$, pour tous $(v, w) \in V^2$), ce qui sera le cas de la plupart des exemples que nous examinerons, nous pouvons amêliorer le résultat précédent. Dans ce cas, le problème varitionnel est l'équation d'Euler d'un problème de minimisation. Introduisons la fonctionnelle J défine par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v).$$

■

Chapitre 2

problème de Dirichlet et de Newmann

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude théorique de certains problèmes aux limites. Cette étude est basée sur la formulation variationnelle de ces problèmes. Celle-ci permet d'obtenir aisément l'existence et l'unicité des solutions.

2.1 Le problème de Dirichlet en dimension 1

Prenons pour Ω l'intervalle réel $]0,1[$.Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on veut trouver la solution u de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u'' = f \qquad \text{dans } \Omega, \\ \quad u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Ce système représente l'équation stationnaire d'une corde: u représente le déplacement de cette corde dans la direction perpendiculaire à celle-ci par rapport à la position de repos (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force et les conditions au bord signifient que la corde est fixée à ses extrémités (voir figure 2.1.1).

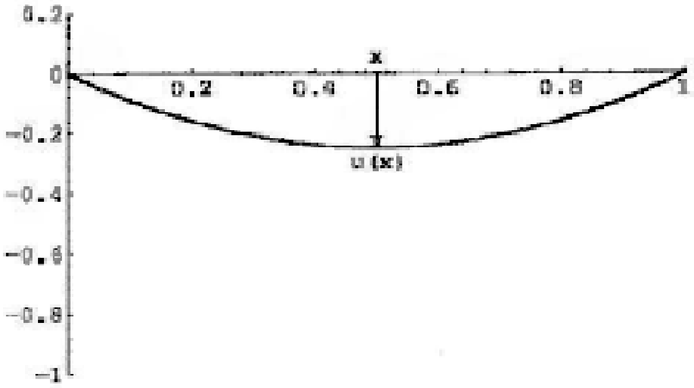

Figure 2.1 Le problème de la corde.

Supposons pour le moment qu'une solution u de (2.1.1) existe et qu'elle est suffisamment réguliàre. Alors en multipliant la première équation de (2.1.1) par une "fonction-test" $v \in H^1(\Omega)$, on obtient:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties dans le premier membre de cette identité, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Comme il n'ya aucune raison que les termes de bord soient nuls, nous prenons $v \in H_0^1(\Omega)$, cette dernière identité implique alors (puisqu'une telle fonction v satisfait $v(0) = v(1) = 0$)

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1.2}$$

Comme les conditions de bord implique que $u \in H_0^1(\Omega)$, on voit que le bon choix est de prendre:

$$V = H_0^1(\Omega),$$

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

On a ainsi montré que si $u \in H^1(\Omega)$ est une solution de (2.1.1), alors il est solution de (2.1.2), ou de manière équivalente, solution de (2.1.2) avec le choix fait ci-dessus.

Grâce au Lemme de Lax-Milgram, nous allons maintenant montrer que le problème (2.1.2) a une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. Nous vérifions les hypothèses :

- La bilinéarité de a et la linéarité de L découlent de la linéarité de l'intégrale. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz [11, 12], on vérifie que les formes a et L sont continues, en effet

$$|L(v)| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} .$$

Comme la norme L^2 est toujours plus petite que la norme H^1, on conclut la continuité de L (on procède de manière analogue pour a).

- Reste à vérifient la coercivité de la forme a sur $H_0^1(\Omega)$ qui suit de l'inégalité de poincaré-Fridrichs puisque

$$a(u,u) = |u|_{1,\Omega}^2 .$$

Le lemme de Lax-Milgam assure donc l'existence d'une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ de (2.1.2).

Montrons maintenent qu'elle est solution du problème de départ (2.1.1).

Les conditions de bord sont trivialement satisfaites puisque $u \in H_0^1(\Omega)$. Pour recupérer l'équation différentielle, comme $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, (2.1.2) implique (c'est mème équivalent par la densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in D(\Omega).$$

En conséquence, u satisfait

$$u'' = -f \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

Comme par hypothése, $f \in L^2(\Omega)$, on en déduit que u, u', u'' sont tous trois dans $L^2(\Omega)$, ce qui prouve l'appartenance de u à $H^2(\Omega)$, l'équation $-u'' = f$ dans Ω est donc satisfaite au sens de $L^2(\Omega)$.

Remarque 2.1 *[21]. Par récurrence, on montre que si $f \in H^k(\Omega)$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors u a la régularité optimale $H^{k+2}(\Omega)$.*

2.2 Le problème de Neumann en dimension 1

Comme dans la section précédente, prenons $\Omega =]0,1[$.

On considère cette fois, le problème suivant: étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver u solution de

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Supposons encore qu'une solution u de (2.2.1) existe et qu'elle appartient à $H^2(\Omega)$. Alors en multipliant la première équation de (2.2.1) par une "fonction test" $v \in H^1(\Omega)$, on obtient:

$$\int_0^1 \{-u''(x)v(x) + u(x)v(x)\}\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par partie dans le premier membre de cette identité, et en tenant compte de (2.2.1), on obtient:

$$\int_0^1 \{u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\}\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.2.2}$$

On a ainsi montré que si $u \in H^2(\Omega)$ est solution de (2.2.1), alors il est solution de (2.2.2). Ce dernier problème est équivalent à (2.2.1), en prenant

$$V = H^1(\Omega),$$

$$a(u,v) = \int_0^1 \{u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\}\, dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Grâse au Lemme de Lax-Milgram, le problème (2.2.2) a une solution unique $u \in H^1(\Omega)$. En effet, la linéarité et la continuité se démontrent comme dans l'exemple ci-dessus, la coercivité de la forme a sur $H^1(\Omega)$ est ici immédiate car

$$a(u,u) = \|u\|_{1,\Omega}^2.$$

Comme précédemment, montrons que la solution $u \in H^1(\Omega)$ de (2.2.2) appartient à $H^2(\Omega)$ et satisfait (2.2.1). En effet, comme $D(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, (2.2.2) implique (ici c'est bien une implication !)

$$\int_0^1 \{u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\}\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in D(\Omega).$$

En conséquence, u satisfait

$$-u'' + u = f \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

Comme par hypothèse, $f \in L^2(\Omega)$ et que u a au moins la régularité $L^2(\Omega)$, on en déduit que $u'' = u - f \in L^2(\Omega)$. Ceci établit que u appartient à $H^2(\Omega)$ et satisfait la première équation de (2.2.1). En revenant maintenent à (2.2.1) et en intégrant par parties, on obtient

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \forall v \in H^1(\Omega).$$

En prenant $v(x) = x$ et $v(x) = 1 - x$, on conclut que $u'(1) = 0$ et $u'(0) = 0$, c'est-à-dire les conditions aux limites de (2.2.1).

Notons que la Remarque 2.3 est aussi d'application.

2.3 Le problème de Dirichlet en dimension supérieure

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, à bord lipschizien. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on veut trouver la solution u de

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \gamma_0 u = 0 \;\; \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

En dimension 2, ce problème est l'équation d'une membrane : $u(x)$ représente le déplacement perpondiculairement à celle-ci au point x (sous l'hypothèse de petits déplacement), f est la densité de force et les conditions aux bord de (2.3.1) signifient que la membrane est fixée au bord (voir figure 2.3.1)

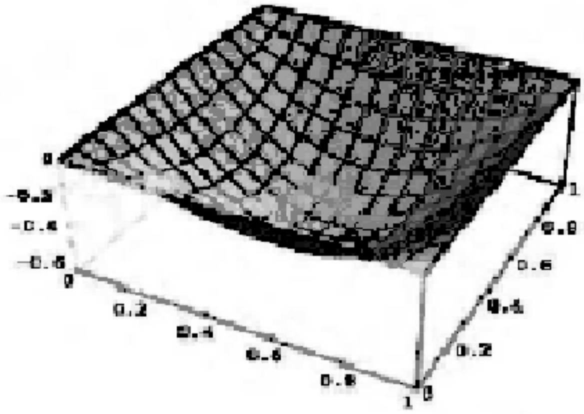

Figure 2.2 Le problème de la membrane.

Comme à la section 2.1 , par intégration par parties, on voit qu'il faut prendre:

$$V = H_0^1(\Omega),$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

En effet supposons que $u \in H^2(\Omega)$ soit une solution de (2.3.1). Alors par la formule de Green, on aura pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} v d\sigma = \int_{0} f v dx.$$

Comme u satisfait les conditions de (2.3.1) qui a un sens pour tout élément de $H^1(\Omega)$, on prend les fonctions teste $v \in H_0^1(\Omega)$. Dans ce cas l'identité ci-dessus implique alors que

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3.2}$$

La coercivité de la forme a sur $H_0^1(\Omega)$ suite de l'inégalité de poincaré-Friedrichs puisque

$$a(u,u) = |u|_{1,\Omega}^2 .$$

Comme $D(\Omega)$ est inclus dans $H_0^1(\Omega)$. la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (2.3.2) ci-dessus vérifie

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

Ainsi cette solution est aussi solution de (2.3.1) mais dans un sens plus faible car n'est satisfaite qu'au sens distributionnel. En effet de l'identité ci-dessus on ne peut conclure que $u \in H^2(\Omega)$ (le fait que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ n'est pas équivalent à $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega)$, pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$).

Comme on vient de la signaler, on peut se poser la question si la solution u du problème (2.3.1) à la régularité $H^2(\Omega)$ (ce qui garantirait l'équivalence entre (2.3.1) et la formulation variationnelle); La réponse est oui sous certaines conditions géométriques sur Ω. On peut notamment démontrer le résultat suivant:

Proposition 2.1 *[21].*

Si le bord Γ de Ω est de classe C^2, alors la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (2.3.2) (solution de (2.3.1) ou sens faible) avec $f \in L^2(\Omega)$, appartient à $H^2(\Omega)$. De plus, il existe une constante $c > 0$ (qui ne dépend que de Ω) telle que

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq c \|f\|_{0,\Omega} .$$

2.4 Le problème de Newmann en dimension supérieure

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, àbord lipschizien et $c \in C(\bar{\Omega})$ satisfaisant $c(x) \geq c_0 > 0$, pour tout $x \in \Omega$. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on veut trouver la solution u de

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Comme ci-dessus, on voit qu'il faut prendre:

$$V = H^1(\Omega),$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

La coercivité de la forme a sur $H^1(\Omega)$ découle de l'estimation suivante

$$a(u,u) \geq |u|_{1,\Omega}^2 + c_0 \|u\|_{0,\Omega}^2 \geq \min(1, c_0) \|u\|_{1,\Omega}^2 .$$

Par le Lemme de Lax-Milgram, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ (avec le choix ci-dessus) de

$$a(u,v) = L(v), \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.4.2}$$

Comme $D(\Omega)$ est inclus dans $H^1(\Omega)$, cette solution vérifie:

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

Mais on n'a pas d'information sur sa dérivée normale sur Γ car l'identité ci-dessus ne nous assure pas la régularité $u \in H^2(\Omega)$. par contre si cette solution appartient à $H^2(\Omega)$, alors par la formule de Green et l'identité ci-dessus (au sens $L^2(\Omega)$ vu la régularité de u) impliquent

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial v} v d\sigma = 0, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme on peut montrer que l'image de γ_0 est dense dans $L^2(\Gamma)$, on conclut que u satisfait ($\gamma_0 \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0$ sur Γ) si la solution $u \in H^1(\Omega)$ du problème (2.4.2) n'appartient pas à $H^2(\Omega)$, on peut simplement dir que c'est une solution formelle de (2.4.1).

Chapitre 3

Problème de Dirichlet ontact sans frottement pour le Laplacien

On donne dans ce chapitre la formulation variationnelle pour le problème au limite (P), puis en utilisant le théorème de Lax-Milgram, ainsi que la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on établit l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (P).

Avant d'étudier les résultats d'existence et d'unicité de la solution du Laplacien, nous devons introduire quelques notations.

3.1 Notations

On désigne par Ω un corps homogène, élastique et isotrope occupant un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec mesure $\Gamma_1 > 0$.

η(resp τ) désigne la normale unitaire sortant (resp la tangente unitaire dans le sens positif) sur Γ, Ω ainsi défini est par conséquent un ouvert borné à frontière lipschitziènne, tous les résultats sur ce type du domaine sont valables ici.

On notera aussi par

$$\Delta = D_x^2 u(x, y) + D_y^2 u(x, y),$$

l'opérateur de Laplace, $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$ et $\sum$ désignent respéctivement le vecteur déplacement, la densité des forces éxtérieures et le tenseur des contraintes avec

$$\sum = (\sigma_{ij}), \qquad i,j = 1,2$$

matrice d'ordre 2, les elements

$$(\sigma_{ij}), \qquad i,j = 1,2$$

sont donnés par la loi de Hook.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}, \qquad i,j = 1,2$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}),$$

est appelé tenseur de déformation linéarisé associé à u et λ, μ sont les coefficients de Lamé, avec $\mu > 0$ et $\lambda + \mu \geq 0$.

3.2 Position du problème

On considère le problème gouverné par l'opérateur de Laplace pour $f \in L^2(\Omega)^2$ donné, en cherche u solution du problème :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \begin{cases} u.\eta = 0 \\ & \text{sur } \Gamma_2 \\ (\sum(u).\eta).\tau = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Les conditions aux limites considérées dans (P) peuvent être intèrprétées physiqyement comme suit :

Les conditions sur Γ_1 interprété comme la vitèse est nulle sur le bord et les conditions sur Γ_2 sont les conditions de contact sans frottement (les movements tangentiells sont libres et la traction tangentiel est nulle).

Lemme 3.1 *[9]*

Sur Γ_2 les conditions aux limite

$$\begin{cases} u.\eta = 0 \\ (\sum(u).\eta).\tau = 0 \end{cases}$$

sont équivalente aux conditions suivantes

$$\begin{cases} u.\eta = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}.\tau = 0 \end{cases}$$

La démonstration de ce lèmme est basé sur le résultat suivant

Lemme 3.2 *[14]. Soit u une fonction scalaire définie sur un domaine borné Ω de R^2.*

Si $u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\dfrac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ sur $\partial\Omega$.

où $\dfrac{\partial}{\partial \tau}$ désigne ici la dérivée tangentielle.

Preuve.

On a

$$(\sum(u).\eta).\tau = \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}.\eta_j.\tau_i,$$

et comme

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij},$$

donc

$$\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij}.\eta_j.\tau_i = \sum_{i,j=1}^{2} 2\mu\varepsilon_{ij}\eta_j.\tau_i,$$

car

$$\sum_{i,j=1}^{2} \lambda tr(\varepsilon(u))\gamma_{ij}\eta_j.\tau_i = \lambda tr(\varepsilon(u))\sum_{i=1}^{2} \eta_i.\tau_i = 0$$

Et par suite

$$(\sum(u).\eta).\tau = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{2} 2\mu\varepsilon_{ij}\eta_j.\tau_i = 0,$$

et comme $\mu > 0$, on aura

$$\sum_{i,j=1}^{2} 2\varepsilon_{ij}\eta_j.\tau_i = 0$$

Ce qui donne

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.\eta_j.\tau_i + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.\eta_j.\tau_i = 0$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau + \frac{\partial u}{\partial \tau}.\eta = 0$$

Et d'après le lèmme 3.2 on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} u.\eta = 0 \\ (\sum(u).\eta).\tau = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u.\eta = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}.\tau = 0 \end{array} \right.$$

L'implication inverse est trivial. ■

3.3 Formulation variationnelle du problème (P)

Supposons que u est solution de (P), en multipliant la première équation de (P) par $v \in H^1(\Omega)^2$ et intégrant sur Ω, ceci donne

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

où dx désigne la mesure sur Ω.

En utilisant la formule de Green, on obtient:

$$-\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds = \int_{\Omega} f v dx$$

où ds désigne la mesure sur $\partial\Omega$, et par suite, on a

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx-\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\eta_j v_i ds=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}f_i v_i dx$$

En utilisant le fait que

$$\begin{cases} u=0 \ \ \mathrm{sur}\,\Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\tau=0 \ \ \mathrm{sur}\,\Gamma_2 \end{cases}$$

et en observant que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta},v\right)$$

se décompose comme suit, en introduisant les vecteurs tangentes et normales

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\eta\right)(v.\eta)+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau\right)(v.\tau)$$

et par conséquent

$$\int_{\Omega}\nabla u\nabla v dx-\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial \eta}v ds-\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\eta\right)(v.\eta)\,ds=\int_{\Omega}f v dx$$

Si on pose les conditions suplimentaires

$$\begin{cases} v=0 \ \ \mathrm{sur}\,\Gamma_1 \\ v.\eta=0 \ \ \mathrm{sur}\,\Gamma_2 \end{cases}$$

il vient

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx=\int_{\Omega}f_i v_i dx.$$

Nous posons

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx=\int_{\Omega}\nabla u\nabla v dx, \\ l(v) &= \int_{\Omega}f_i v_i dx=\int_{\Omega}f.v dx, \end{aligned}$$

et

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^2 \,:\, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \,,\ v.\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \right\}.$$

Nous obtenons ainsi la formulaion variationnelle suivante

$$(P_V)\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que} \\ a(u,v) = l(v)\,,\ \forall\, v \in V \end{cases}$$

3.4 Existence et unicité de la solution faible

A fin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (P_v), on a besoin les deux lemmes suivants :

Lemme 3.3

L'espace V munit du produit scalaire de $\left(H^1(\Omega)\right)^2$ est un espace de Hilbert.

Preuve.

Il est claire que V est un sous-espace fermé de $\left(H^1(\Omega)\right)^2$, car les applications traces sur Γ_j $(j = 1, 2)$ sont continues et puisque $H^1(\Omega)^2$ est un espace de Hilbert, donc V est aussi est un espace de Hilbert par rapport à la norme induite de $\left(H^1(\Omega)\right)^2$. ■

Lemme 3.4 *[24]*

i) l est une forme linéaire continue sur V.

ii) $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$.

Preuve.i) Il est évident que l est une forme linéaire sur V, d'autre part il ressort de l'inégalité de Holder la relation suivante :

$$|l(v)| = \left| \int_\Omega f_i v_i dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)^2} \|v\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall v \in V,$$

par conséquent on a :

$$|l(v)| \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)^2} \quad \text{où } c = \|f\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

Ainsi l est une forme linéaire et continue sur V.

ii) Pour tout couple (u, v) de $V \times V$ nous avons :

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \right| \leq \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega)^2)^2} \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega)^2)^2},$$

par conséquent

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)^2} \|v\|_{H^1(\Omega)^2}$$

Ce qui implique la continuité de $a(.,.)$, reste à montrer que $a(.,.)$ est coercive, pour cela, il suffit de montrer l'existence d'une constante K strictement positive telle que :

$$\|\nabla v\|_{(L^2(\Omega)^2)^2} \geq K \ \|v\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall v \in V.$$

Nous démontrons cette inégalité par l'absurde.
En effet, si cette inégalité n'est pas vérifiée, on peut construire une suite $(v_n) \in V$, telle que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)^2} = 1 \quad \text{et} \quad \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega)^2)^2} < \frac{1}{n}.$$

La suite (v_n) est aussi borné dans $H^1(\Omega)^2$. Comme $H^1(\Omega)^2$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)^2$, on peut extraire une sous-suite notée aussi (v_n) telle que :

$$v_n \to v \ \text{ dans } L^2(\Omega)^2,$$

d'autre part, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2_{H^1(\Omega)^2} &= \|v_n - v_m\|^2_{L^2(\Omega)^2} + \|\nabla v_n - \nabla v_m\|^2_{(L^2(\Omega)^2)^2} \\ &\leq \|\nabla v_n - \nabla v_m\|^2_{(L^2(\Omega)^2)^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)^2. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc de Cauchy dans $H^1(\Omega)^2$ et par conséquent

$$v_n \to v \ \text{ dans } H^1(\Omega)^2.$$

Ceci donne

$$\nabla v_n \to \nabla v \ \text{ dans } \left(L^2(\Omega)^2\right)^2,$$

mais comme ∇v_n tend vers zéro dans $\left(L^2(\Omega)^2\right)^2$ on aura $\nabla v \equiv 0$.

La limite v est donc une constante, est puisque elle est dans V, elle est donc nulle puisque Ω est connexe, mais ceci est en contradiction avec l'égalité

$$\|v\|_{\left(L^2(\Omega)^2\right)} = 1.$$

Ainsi nous avons montré que $a(.,.)$ est coercive, ce qui achevé la démonstration. ■

Corolaire 3.5 *Le problème* (P_V) *admet une solution unique* $u \in V$.

Preuve.

Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram et les deux lemmes précédents. ■

3.5 Interprétation variationnelle

Dans cette section nous allons montrer que l'unique solution du problème faible (P_V) est l'unique solution de (P).

En effet, la fonction u vérifie

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in V,$$

en particulier, elle vérifie

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^2.$$

En utilisant la formule de Green, il vient

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^2.$$

La fonction u est vérifie donc au sens des distributions l'équation suivante :

$$-\Delta u = f,$$

Il reste donc à montrer que

$$\left(\sum(u).\eta\right).\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

c'est-à-dire que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau\right) = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

En utilisant cette fois ci la formule de Green dans le problème faible, on obtient la relation :

$$-\int_{\Omega} \Delta uvdx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}.vds = \int_{\Omega} fvdx \ \ \forall v \in V,$$

et comme

$$-\Delta u = f \text{ dans } L^2(\Omega)^2,$$

on aura

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}.vds = 0 \ \ \forall v \in V,$$

en utilisant les conditions:

$$\begin{cases} v = 0 & \text{sur } \Gamma_1; \\ v.\eta = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases}$$

on obtient

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta}.vds = 0 \ \ \forall v \in V,$$

et donc

$$\int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau\right).(v.\tau) = 0,$$

mais puisque $(v.\tau)$ arbitrairement, il en résulte que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}.\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_2,$$

et comme $u \in V$ alors u est solution du problème (P).

Résumé

Dans ce travail, on a étudié trois problèmes pour l'opérateur de Laplace sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière avec les conditions aux limites de Dirichlet, Neumann et de Dirichlet contact sans frottement. L'objectif de ce travail n'est pas le calcul direct de la solution, mais on donne la formulation variationnelle pour ces problèmes on utilisant la formule de Green puis on appliquant le théorème de Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème variationnelle.

Bibliographie

[1] AUPHAN T., 2011, *Equations aux dérivées partielles,* Séminaire doctorants, Université de Provence.

[2] BARDOS C. ET PAUL T., 1993, *Equations aux dérivées partielles,* Université Polytechnique, France.

[3] BOUTET DE MONVEL L., *Introduction aux équations aux dérivées partielles,* Cours de Maitrise,

[4] BOYER F., 2011, *Analyse numérique des EDP elliptiques,* Université d'Aix-Marseille.

[5] BREZIS H., 1983, *Analyse fonctionnelle, théorie et application,* Masson, Paris.

[6] CIARLET. P. G., 1980, *The Finite Élément Method for Eliptic Problems,* In Applied Mathematics (SIAM), North-Holland.

[7] COHEN A., *Approximation variationnelles des EDP,* Notes du cours de M2, Université de Jussieu.

[8] COURANT R. AND HILBERT D., 1955, *Methods of Mathematical Physics,* Interscience Publishers, New york.

[9] DILMI M., 2001, *A/ternative de fredholm relative du problème de Dirichlet-Contact sans frottement dans un polygone ou polyèdre*, Thèse de Magister, Université de Sétif.

[10] DURANT G.J.L., 1972, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris.

[11] ERN A. ET GUERMOND J. L., 2002, *éléments finis: Théorie, applications, mise en oeuvre*, Numéro 36 dans Mathématiques et Applications, Springer.

[12] FREY P. J., ET GEORGNE P. L., 1999, *Maillanges applications aux éléments finis*, Hernes, Paris.

[13] HELFER. B., 2006, *Introduction aux équations aux dérivées partielles*, Département de Mathématiques, Cours ESI, Vienne.

[14] HUCHES T.J.R., 2000, *Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* Dover Publications, New-York.

[15] KERN M., 2004-2005, *Introduction à la méthodes des éléments finis*, École nationale superieur des mins de Paris, 53733/53735.

[16] KNABNER P. ET ANGERMAN, 2003, *Numerical Methode for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations,* Numéro 44 dans texts in Applied Mathematics.

[17] LEBORGNE G., 2003, *Approximation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques et éléments finis,* ISIMA.

[18] MAGNUS A., 2009-2010, *Equations aux dérivées partielles 2*, Université Catholique de Louvain, Mat 2410.

[19] MUNNIER A. 2007-2008, *Espaces de Soboloev et introduction aux équations aux dérivées partielles,* Université de Nancy.

[20] NEDELEC J. C., 1991, *Notions sur les téchniques d'éléments finis*, Numéro 7 dans Mathématiques et Applications, Ellipses.

[21] NICAISE S., 2000, *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris.

[22] RAVIART P. ET THOMAS J., 1983. *Introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles,* Collection Mathématiques Appliquées pour la Mâtrise, Masson, Paris.

[23] VOULLE. G ET TIJANI. S. M., 1978, *La méthode des éléments finis*, Notes de cours, École des Mines de Paris.

[24] ZIENKIENCZ O. C ET TAYLOR. R.L., 1991, *La méthode des éléments finis: Formulation de base et problèmes,* texte imprimé AFNOR.

[25] http//Perso uclovain.be/Alphonse magnus.