

## 1. Introduction:

Les machines asynchrones à rotor en court-circuit consomment plus de 40% de l'énergie électrique produite dans le monde [PFE05] ; elles sont largement utilisées en raison des avantages qu'elles présentent à savoir:

- la simplicité de construction et la robustesse;
- le fonctionnement sans génération d'étincelles d'où un entretien réduit;
- la normalisation des réseaux de distribution de l'énergie électrique se prête bien à l'utilisation directe de ces moteurs (tensions et fréquences constantes);
- un prix de revient relativement faible;
- un rapport masse/puissance favorable.

Par ailleurs, La machine asynchrone, malgré ses qualités, peut présenter des défauts structurels, dans ce chapitre nous portons notre attention sur la rupture totale ou partielle de barres rotoriques, tout particulièrement au niveau de la brasure barre- anneau. Pour ce faire, il convient de développer un modèle qui tient compte de la structure du rotor.

En effet, Pour étudier ces machines à induction, on fait appel soit à la théorie du champ électromagnétique (équations de Maxwell), soit à la théorie des circuits électriques (lois de Kirchhoff); ou bien la méthode mixte combinant la théorie du champ électromagnétique et la théorie des circuits électriques [BAG99].

## 2. Modèle d'étude [BAG99] :

Il est fonction du type d'approche utilisée. On en distingue deux, assez complémentaires:

- une approche dite « locale » car basée sur la signature de grandeurs locales telles que la densité du flux; il s'agit souvent de méthodes numériques par éléments finis permettant une analyse fine des phénomènes physiques locaux associés aux défauts de cages;
- une approche analytique basée, quant à elle sur la signature de grandeurs externes globales telles que: courants, couple électromagnétique; elle utilise le modèle de Kirchhoff (réseau électrique équivalent à la machine) ainsi que la transformation « des 2 axes » appliquée aux équations électriques du système multi-enroulement étudié. Cette approche s'adapte

particulièrement bien au problème posé ici et vu sa simplicité nous l'avons adopté comme démarche.

### 3. Schéma équivalent à multi enroulements [BAG99] :

Pour l'étude analytique des performances des moteurs à induction avec dissymétries rotoriques, nous avons adopté le schéma multi enroulement équivalent qui s'adapte bien au problème posé, car il décrit le rotor comme un ensemble de mailles interconnectées entre elles, chacune formée par deux barres adjacentes et les portions d'anneaux qui les relient (figure 3.1) [PFE05].

A partir d'hypothèses classiques qui supposent que la perméabilité du fer est infinie, que l'entrefer est lisse et constant et que la f.m.m. statorique est à distribution sinusoïdale, on calcule les différentes inductances propres et mutuelles qui interviennent dans les équations du circuit.

### 4. Calcul des inductances [BAG99]:

#### 4.1. Stator :

L'induction due à la bobine statorique de la phase  $m$  s'écrit:

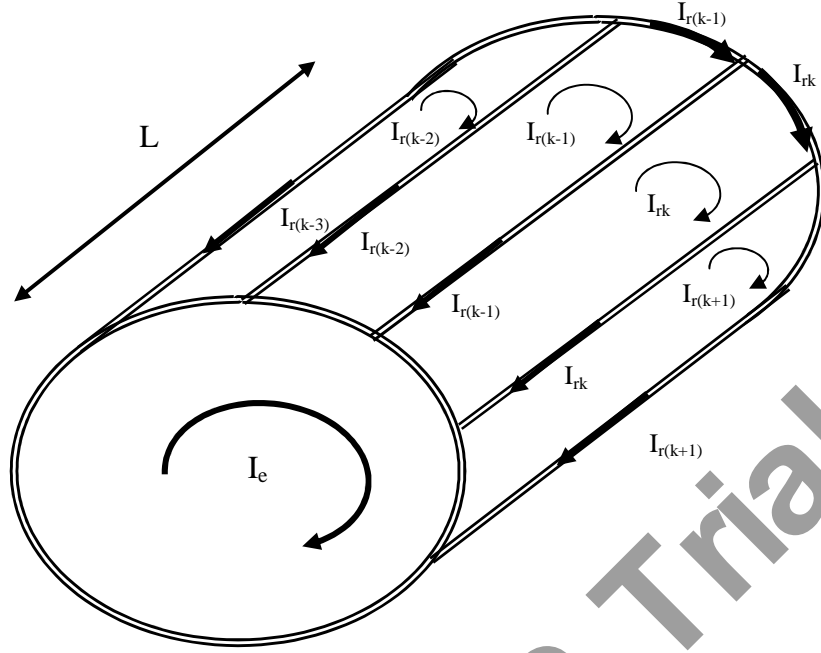
$$\text{Inductance principale : } L_{sp} = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{S^2}{ep} RL \quad (3.1)$$

$$\text{Inductance propre : } L_s = L_{sp} \quad (\text{suite}) \quad (3.2)$$

$$\text{Mutuelle inductance : } M_s = L_{sp} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{L_{sp}}{2} \quad (3.3)$$

#### 4.2. Rotor :

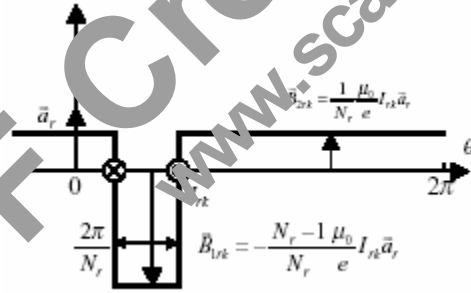
Le rotor à cage est représenté par la figure (3.2). La figure (3.3) représente la forme d'onde de l'induction produite par la maille rotorique  $k$ .



**Figure (3.1).** Structure du rotor

$I_{rk}$  Représente le courant de maille  $k$  et  $I_{bk}$  le courant de barre  $K$ , avec:

$$I_{bk} = I_{rk} - I_{r(k+1)} \quad (3.4)$$



**Figure (3.2):** Induction produite par une maille du rotor

On voit bien, à partir de la figure (3.2) qu'il n'est pas possible de retenir l'hypothèse du premier harmonique qui concerne l'induction produite par une maille du rotor. Partant de cette répartition, on calcule alors l'inductance principale d'une maille rotorique ainsi que la mutuelle entre deux mailles :

$$L_{rp} = \frac{Nr - 1}{Nr^2} \frac{\mu_0}{e} 2\pi LR \quad (3.5)$$

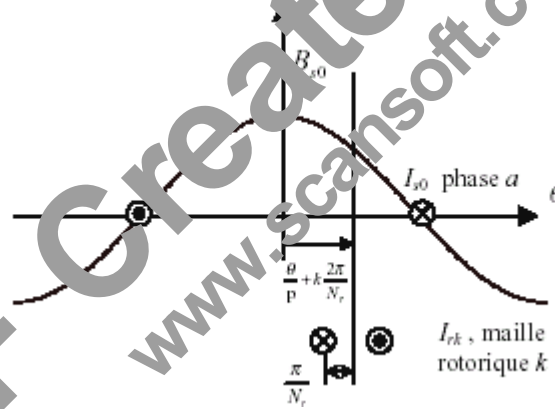
$$M_{rr} = -\frac{1}{Nr^2} \frac{\mu_0}{e} 2\pi LR \quad (3.6)$$

### 4.3. Stator Rotor:

L'induction produite par la bobine statorique de la phase  $m$  induit dans la maille rotorique  $K$  le flux:

$$\Phi_{smrk} = \int_{S_{rk}} B_{sm} dS_{rk} = - \int_{\frac{\theta}{p} + k \frac{2\pi}{Nr} - \frac{\pi}{Nr}}^{\frac{\theta}{p} + k \frac{2\pi}{Nr} + \frac{\pi}{Nr}} B_{sm}(\theta') LR d\theta' \quad (3.7)$$

$$\Phi_{smrk} = -\frac{2}{\pi} \frac{\mu_0}{e p} N_s I_{sm} LR \frac{1}{p} \left[ \sin \left( p\theta' - m \frac{2\pi}{3} \right) \right]_{\frac{\theta}{p} + k \frac{2\pi}{Nr} - \frac{\pi}{Nr}}^{\frac{\theta}{p} + k \frac{2\pi}{Nr} + \frac{\pi}{Nr}} \quad (3.8)$$



**Figure (3.3) :** Position de la maille rotorique  $K$ , par rapport à la bobine statorique de la phase ( $m = 0$ )

Il en résulte la mutuelle stator rotor entre la phase statorique  $m$  et la maille rotorique  $K$  :

$$M_{smrk} = -M_{sr} \cos \left( \theta - m \frac{2\pi}{3} + k\alpha \right) \quad (3.9)$$

$$\text{Où } M_{sr} = \frac{4}{\pi} \frac{\mu_0}{ep^2} N_s L R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (3.10)$$

Et  $\alpha = p \frac{2\pi}{Nr}$  est l'angle électrique entre deux mailles rotoriques.

## 5. Mise en équation:

Nous utilisons la transformation de Clarke pour passer des grandeurs triphasées statoriques (a, b, c) aux grandeurs diphasées ( $\alpha, \beta$ ). Nous pouvons effectuer la simulation avec deux repères distincts pour le stator et le rotor [BAG99].

En vue de diminuer le temps de calcul, on élimine l'angle  $\theta$  de la machine et le couplage en choisissant le repère le plus adéquat et qui est celui du rotor. Dans ce repère, toutes les grandeurs ont une pulsation  $gW_s$  en régime permanent. Cette caractéristique peut être utilisée pour l'analyse de rupture de barres rotoriques dans la machine par l'observation du courant  $I_{ds}$ .

### 5.1. stator:

On déduit pour l'ensemble des phases statoriques

$$[V_{sabc}] = [R_s][I_{sabc}] + \frac{d}{dt}[ \Phi_{sabc}] \quad (3.11)$$

Après transformation et rotation, les équations électriques dans le repère rotorique s'écrivent:

$$V_{ds} = R_s I_{ds} - W \Phi_{qs} + \frac{d\Phi_{ds}}{dt} \quad (3.12)$$

$$V_{qs} = R_s I_{qs} - W \Phi_{ds} + \frac{d\Phi_{qs}}{dt} \quad (3.13)$$

Avec:

$$\Phi_{sdq} = \begin{bmatrix} L_{sc} & 0 \\ 0 & L_{sc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} - M_{sr} \begin{bmatrix} \cos 0\alpha & \Lambda & \cos j\alpha & \Lambda & \cos (Nr-1)\alpha \\ \sin 0\alpha & \Lambda & \sin j\alpha & \Lambda & \sin(Nr-1)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r0} \\ M \\ I_{rj} \\ M \\ I_{r(Nr-1)} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Donc:

$$\Phi_{ds} = L_{sc} I_{ds} - M_{sr} [\cos 0\alpha I_{r0} + \cos 1\alpha I_{r1} + \dots + \cos j\alpha I_{rj} + \dots + \cos(Nr-1)\alpha I_{r(Nr-1)}] \quad (3.15)$$

De la même façon pour  $\Phi_{qs}$

$$\Phi_{qs} = L_{sc} I_{qs} - M_{sr} [\sin 0\alpha I_{r0} + \sin 1\alpha I_{r1} + \dots + \sin j\alpha I_{rj} + \dots + \sin(Nr-1)\alpha I_{r(Nr-1)}] \quad (3.16)$$

Après dérivation des équations (3.15) et (3.16), on aboutit à:

$$\frac{d\Phi_{ds}}{dt} = L_{sc} \frac{dI_{ds}}{dt} - M_{sr} [\cos 0\alpha I_{r0} + \cos j\alpha I_{rj} + \dots + \cos(Nr-1)\alpha I_{r(Nr-1)}] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{r0} \\ M \\ I_{rj} \\ M \\ I_{r(Nr-1)} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Et:

$$\frac{d\Phi_{qs}}{dt} = L_{sc} \frac{dI_{qs}}{dt} - M_{sr} [\sin 0\alpha I_{r0} + \sin j\alpha I_{rj} + \dots + \sin(Nr-1)\alpha I_{r(Nr-1)}] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{r0} \\ M \\ I_{rj} \\ M \\ I_{r(Nr-1)} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

On remplace les expressions des flux (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18) dans les équations (3.12) et (3.13)

Nous obtenons:

$$V_{ds} = R_s I_{ds} + W [L_{sd} I_{ds} - M_{sr} (\sin 0\alpha I_{r0} + \sin 1\alpha I_{r1} + \dots + \sin j\alpha I_{rj} + \dots + \sin(Nr-1)\alpha I_{r(Nr-1)})] \\ + L_{sc} \frac{dI_{ds}}{dt} - M_{sr} (\cos 0\alpha \frac{dI_{r0}}{dt} + \cos 1\alpha \frac{dI_{r1}}{dt} + \dots + \cos j\alpha \frac{dI_{rj}}{dt} + \dots + \cos(Nr-1)\alpha \frac{dI_{r(Nr-1)}}{dt}) \quad (3.19)$$

Et:

$$V_{qs} = R_s I_{qs} + W [L_{sd} I_{qs} - M_{sr} (\cos 0\alpha I_{r0} + \cos 1\alpha I_{r1} + \dots + \cos j\alpha I_{rj} + \dots + \cos(Nr-1)\alpha I_{r(Nr-1)})] \\ + L_{sc} \frac{dI_{qs}}{dt} - M_{sr} (\sin 0\alpha \frac{dI_{r0}}{dt} + \sin 1\alpha \frac{dI_{r1}}{dt} + \dots + \sin j\alpha \frac{dI_{rj}}{dt} + \dots + \sin(Nr-1)\alpha \frac{dI_{r(Nr-1)}}{dt}) \quad (3.20)$$

On écrit les équations (3.19) et (3.20) sous la forme:

$$[L] \frac{d}{dt} [I] = [V] - [R][I] \quad (3.21)$$

Donc:

$$L_{sc} \frac{dI_{ds}}{dt} - M_{sr}(\cos 0\alpha \frac{dI_{r0}}{dt} + \dots + \cos j\alpha \frac{dI_{rj}}{dt} + \dots + \cos(Nr-1)\alpha \frac{dI_{r(Nr-1)}}{dt}) = V_{ds} - R_s I_{ds} \quad (3.22)$$

$$+ W L_{sc} I_{qs} - W M_{sr}(\sin 0\alpha I_{r0} + \dots + \sin j\alpha I_{rj} + \dots + \sin(Nr-1)\alpha I_{r(Nr-1)})$$

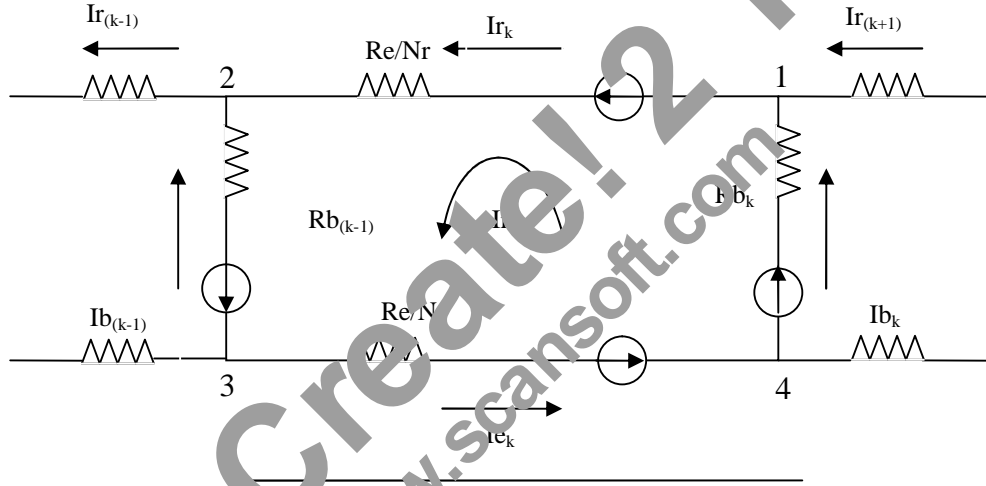
Et:

$$L_{sc} \frac{dI_{qs}}{dt} - M_{sr}(\sin 0\alpha \frac{dI_{r0}}{dt} + \dots + \sin j\alpha \frac{dI_{rj}}{dt} + \dots + \sin(Nr-1)\alpha \frac{dI_{r(Nr-1)}}{dt}) = V_{qs} - R_s I_{qs} \quad (3.23)$$

$$- W L_{sc} I_{ds} + W M_{sr}(\cos 0\alpha I_{r0} + \dots + \cos j\alpha I_{rj} + \dots + \cos(Nr-1)\alpha I_{r(Nr-1)})$$

## 5.2. rotor :

Le rotor à cage est représenté par la figure (2.8)



**Figure (3.4) :** Représentation d'une maille rotorique

Où:

$I_{rk}$  Représente le courant de maille  $K$ ,  $I_{bk}$  le courant de la barre  $K$ .

Pour le nœud n° 1

$$I_{bk} = I_{rk} - I_{r(k+1)} \quad (3.24)$$

Pour le nœud n° 2

$$I_{b(k-1)} = I_{r(k-1)} - I_{rk} \quad (3.25)$$

L'équation électrique relative à la maille  $K$  est:

$$0 = \frac{Re}{Nr} I_{rk} - R_{b(k-1)} [I_{r(k-1)} - I_{rk}] + \frac{Re}{Nr} [I_{rk} - I_e] + R_{bk} [I_{rk} - I_{r(k+1)}] + \frac{d\Phi_{rk}}{dt} \quad (3.26)$$

On remplace les formules (3.24) et (3.25) dans l'équation (3.26);

Donc l'équation électrique relative à la maille  $K$  devient:

$$0 = \frac{Re}{Nr} I_{rk} - R_{b(k-1)} I_{b(k-1)} + \frac{Re}{Nr} [I_{rk} - I_e] + R_{bk} I_{bk} + \frac{d\Phi_{rk}}{dt} \quad (3.27)$$

Le flux induit dans la maille rotorique est donné par:

$$\Phi_{rk} = L_{rp} I_{rk} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{Nr-1} I_{rj} - \frac{3}{2} M_{sr} (I_{ds} \cos K\alpha + I_{qs} \sin K\alpha) + \frac{L_e}{Nr} (I_{rk} + I_{ek}) + L_b (-I_{b(k-1)} + I_{bk}) \quad (3.28)$$

Le terme en  $L_{rp}$  représente le flux principal, celui en  $M_{rr}$  représente le flux mutuel avec les autres mailles rotoriques, puis viennent les termes de couplage avec le stator. On peut relever le facteur  $\frac{3}{2}$  par rapport à l'équation statorique à cause de la transformation de Clark.

Les termes en  $L_b$  et  $L_e$  représentent les fuites rotoriques [BAG99].

Pour pouvoir écrire l'équation (3.28) uniquement en fonction des courants de maille, on utilise les formules (3.24), (3.25) et:

$$I_{rk} - I_e = I_{ek} \quad (3.29)$$

Où:  $I_e$  représente le courant de l'anneau de court-circuit

Donc:

$$\begin{aligned} \Phi_{rk} = & L_{rp} I_{rk} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{Nr-1} I_{rj} - \frac{3}{2} M_{sr} (I_{ds} \cos K\alpha + I_{qs} \sin K\alpha) + \frac{L_e}{Nr} I_{rk} + \frac{L_e}{Nr} I_{ek} \\ & + L_b [-I_{b(k-1)} + I_{bk}] + 2L_b I_{rk} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{rk} = & L_{rp} I_{rk} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{Nr-1} I_{rj} - \frac{3}{2} M_{sr} (I_{ds} \cos K\alpha + I_{qs} \sin K\alpha) + \frac{L_e}{Nr} I_{rk} + \frac{L_e}{Nr} (I_{rk} - I_e) \\ & + L_b [-I_{r(k-1)} + 2I_{rk} - I_{r(k+1)}] \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{rk} = & L_{rp} I_{rk} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{Nr-1} I_{rj} - \frac{3}{2} M_{sr} (I_{ds} \cos K\alpha + I_{qs} \sin K\alpha) + \frac{2L_e}{Nr} I_{rk} - \frac{L_e}{Nr} I_e \\ & - L_b [I_{r(k-1)} + I_{r(k+1)}] + 2L_b I_{rk} \end{aligned} \quad (3.32)$$



Finalement, on aboutit à:

$$\Phi_{rk} = \left( L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b \right) I_{rk} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{Nr-1} I_{rj} - L_b (I_{r(k-1)} + I_{r(k+1)}) - \frac{3}{2} M_{sr} (I_{ds} \cos K\alpha + I_{qs} \sin K\alpha) - \frac{L_e}{Nr} I_e \quad (3.33)$$

$$- \frac{L_e}{Nr} I_e$$

- On calcule  $\frac{d\Phi_{rk}}{dt}$

$$\frac{d\Phi_{rk}}{dt} = \left( L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b \right) \frac{dI_{rk}}{dt} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{Nr-1} \frac{dI_{rj}}{dt} - L_b \left( \frac{dI_{r(k-1)}}{dt} + \frac{dI_{r(k+1)}}{dt} \right) - \frac{3}{2} M_{sr} \left( \frac{dI_{ds}}{dt} \cos \alpha + \frac{dI_{qs}}{dt} \sin \alpha \right) - \frac{L_e}{Nr} \frac{dI_e}{dt} \quad (3.34)$$

On remplace  $\frac{d\Phi_{rk}}{dt}$  dans l'équation (3.27)

$$0 = \frac{R_e}{Nr} I_{rk} - R_{b(k-1)} [I_{r(k-1)} - I_{rk}] - \frac{R_e}{Nr} I_e + \frac{R_e}{Nr} I_{rk} + R_{bk} [I_{rk} - I_{r(k+1)}] + \left( L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b \right) \frac{dI_{rk}}{dt} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{Nr-1} \frac{dI_{rj}}{dt} - L_b \left( \frac{dI_{r(k-1)}}{dt} + \frac{dI_{r(k+1)}}{dt} \right) - \frac{3}{2} M_{sr} \left( \frac{dI_{ds}}{dt} \cos \alpha + \frac{dI_{qs}}{dt} \sin \alpha \right) - \frac{L_e}{Nr} \frac{dI_e}{dt} \quad (3.35)$$

On écrit l'équation (3.35) sous la forme:

$$[L] \frac{d[I]}{dt} = [V] - [R][I]$$

L'équation (3.21) devient:

$$\left( L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b \right) \frac{dI_{rk}}{dt} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{Nr-1} \frac{dI_{rj}}{dt} - L_b \left( \frac{dI_{r(k-1)}}{dt} + \frac{dI_{r(k+1)}}{dt} \right) - \frac{3}{2} M_{sr} \left( \frac{dI_{ds}}{dt} \cos \alpha + \frac{dI_{qs}}{dt} \sin \alpha \right) - \frac{L_e}{Nr} \frac{dI_e}{dt} - \left[ \left( \frac{2R_e}{Nr} + R_{bk} + R_{b(k-1)} \right) I_{rk} - R_{b(k-1)} I_{r(k-1)} - R_{bk} I_{r(k+1)} - \frac{R_e}{Nr} I_e \right] \quad (3.36)$$

Si on considère que notre modèle à 16 barres (Nr = 16) on à:

Pour k = 0:

$$\left( L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b \right) \frac{dI_{r0}}{dt} + M_{rr} \sum_{j=1}^{15} \frac{dI_{rj}}{dt} - L_b \left( \frac{dI_{r(Nr-1)}}{dt} + \frac{dI_{r1}}{dt} \right) - \frac{3}{2} M_{sr} \left( \frac{dI_{ds}}{dt} \cos 0\alpha + \frac{dI_{qs}}{dt} \sin 0\alpha \right) - \frac{L_e}{Nr} \frac{dI_e}{dt} = - \left[ \left( \frac{2R_e}{Nr} + R_{b0} + R_{b(Nr-1)} \right) I_{r0} - R_{b(Nr-1)} I_{r(Nr-1)} - R_{b0} I_{r1} - \frac{R_e}{Nr} I_e \right] \quad (3.37)$$

Pour k=1:

$$\begin{aligned}
& (L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b) \frac{dI_{r1}}{dt} + M_{rr} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{15} \frac{dI_{rj}}{dt} - L_b \left( \frac{dI_{r0}}{dt} + \frac{dI_{r2}}{dt} \right) - \frac{3}{2} M_{sr} \left( \frac{dI_{ds}}{dt} \cos 1\alpha + \frac{dI_{qs}}{dt} \sin 1\alpha \right) \\
& - \frac{L_e}{Nr} \frac{dI_e}{dt} = - \left[ \left( \frac{2R_e}{Nr} + R_{b1} + R_{b0} \right) I_{r1} - R_{b0} I_{r0} - R_{b1} I_{r2} - \frac{R_e}{Nr} I_e \right]
\end{aligned} \quad (3.38)$$

et de la même façon pour les autres barres:

**Pour l'anneau de court circuit :-**

$$L_e \frac{dI_e}{dt} - \frac{L_e}{Nr} \sum_{k=0}^{Nr-1} \frac{dI_{rk}}{dt} = - \left( R_e I_e - \frac{R_e}{Nr} \sum_{k=0}^{Nr-1} I_{rk} \right) \quad (3.39)$$

Le système complet  $[L] \frac{d[I]}{dt} = [V] - [R][I]$  devient:

$$\begin{bmatrix}
L_{sc} & 0 & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -M_{sr} \cos \alpha & \Lambda & \Lambda & 0 \\
0 & L_{sc} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -M_{sr} \sin \alpha & \Lambda & \Lambda & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
M & M & L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b & M_{rr} - L_b & M_{rr} & \Lambda & M_{rr} & M_{rr} - L_b & -\frac{L_e}{Nr} \\
M & M & M_{rr} - L_b & L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b & M_{rr} & \Lambda & M_{rr} & M_{rr} & -\frac{L_e}{Nr} \\
-\frac{3}{2} M_{sr} \cos \alpha & -\frac{3}{2} M_{sr} \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\
M & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\
M & M & M_{rr} - L_b & M_{rr} & \Lambda & M_{rr} & M_{rr} - L_b & L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b & -\frac{L_e}{Nr} \\
0 & 0 & -\frac{L_e}{Nr} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -\frac{L_e}{Nr} & L_e
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
I_{ds} \\
I_{qs} \\
\vdots \\
I_{r0} \\
M \\
I_{rj} \\
M \\
I_{r(Nr-1)} \\
\vdots \\
I_e
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
V_{ds} \\
V_{qs} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}$$
  

$$\begin{bmatrix}
V_{ds} \\
V_{qs} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
R_e & -W & \Lambda & \Lambda & M_{sr} W \sin \alpha & \Lambda & \Lambda & 0 \\
-W L_{sc} & \Lambda & \Lambda & -M_{sr} W \cos \alpha & \Lambda & \Lambda & 0 \\
0 & 0 & 2\frac{R_e}{Nr} + R_{b0} + R_{b(Nr-1)} & -R_{b0} & 0 & 0 & -R_{b(Nr-1)} & -\frac{R_e}{Nr} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\
0 & 0 & 0 & -R_{b(k-1)} & 2\frac{R_e}{Nr} + R_{bk} + R_{b(k-1)} & -R_{bk} & 0 & M \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\
0 & 0 & -R_{b(Nr-1)} & 0 & 0 & -R_{b(Nr-2)} & 2\frac{R_e}{Nr} + R_{b(Nr-2)} + R_{b(Nr-1)} & -\frac{R_e}{Nr} \\
0 & 0 & \frac{R_e}{Nr} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -\frac{R_e}{Nr} & R_e
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
I_{ds} \\
I_{qs} \\
\vdots \\
I_{r0} \\
M \\
I_{rj} \\
M \\
I_{r(Nr-1)} \\
\vdots \\
I_e
\end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Le couple électromagnétique est obtenu par dérivation de co-énergie:

$$Ce = \frac{3}{2} P [Isdq]^t \frac{\delta}{\delta \theta} \begin{bmatrix} \Lambda & -Msr \cos(\theta + k\alpha) & \Lambda \\ \Lambda & -Msr \cos(\theta + k\alpha) & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ I_{rk} \\ M \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$Ce = \frac{3}{2} PMsr \left\{ I_{ds} \sum_{k=0}^{Nr-1} I_{rk} \sin k\alpha - I_{qs} \sum_{k=0}^{Nr-1} I_{rk} \cos k\alpha \right\} \quad (3.42)$$

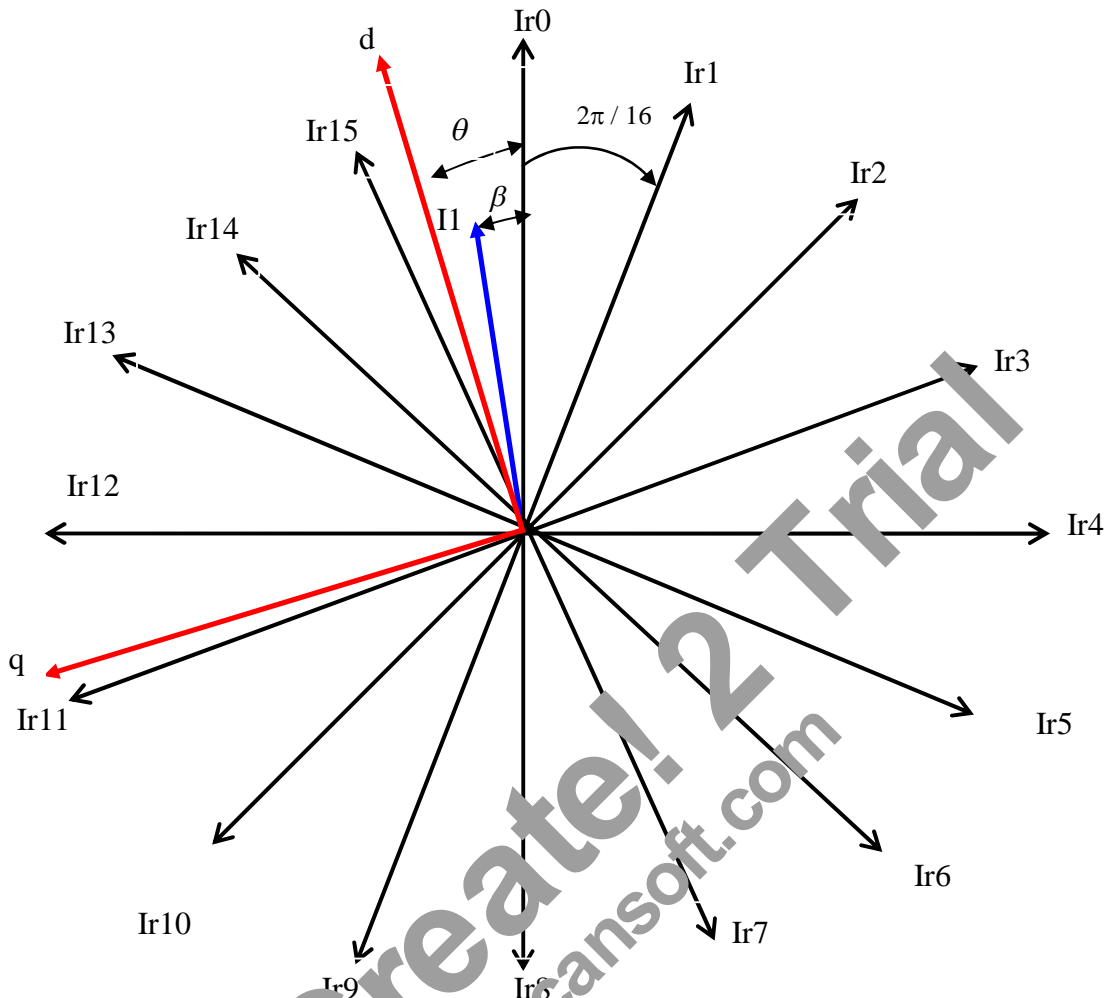
On y ajoute les équations mécaniques afin d'avoir la vitesse  $\Omega = \frac{W}{P}$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J} P (Ce - Cr - \frac{f}{P} W) \quad (3.44)$$

$$\text{Et } \frac{d\theta}{dt} = W$$

Le système ci-dessus est très compliqué (2.41) et difficile à programmer. En plus, l'exécution de sa simulation d'un tel modèle est très lente [BAG99], c'est pour cela qu'on a optés pour un autre modèle, c-à-d le modèle  $dq$ . Pour ce faire, nous avons appliqué une transformation généralisée ( $Nr$ ) qui permet de passer des  $Nr$  grandeurs équilibrées vers deux grandeurs  $dq$ . La simulation de ce modèle est plus rapide [PFE2005].

## 6. La transformation de $Nr$ grandeurs équilibrées vers deux grandeurs $dq$ :



**Figure (3.44) :** projection du modèle multi enroulement sur le modèle  $dq$

La projection de  $I1$  sur les axes  $Ir_k$  (voir figure 3.5) donne:-

$$\left\{ \begin{array}{l} Ir_0 = I1 \cos \beta \\ Ir_1 = I1 \cos(\beta + \frac{2\pi}{16}) \\ Ir_2 = I1 \cos(\beta + \frac{4\pi}{16}) \\ \vdots \\ Ir_{15} = I1 \cos(\beta + \frac{30\pi}{16}) \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Et la projection de  $I1$  sur les axes  $d$  et  $q$  donne:

$$\begin{cases} Id = I_1 \cos(\theta - \beta) \\ Iq = -I_1 \sin(\theta - \beta) \end{cases} \quad (3.46)$$

D'où:

$$\cos(\theta - \beta) = \frac{2}{16} \left[ \cos\theta \cos\beta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{16}\right) \cos\left(\beta + \frac{2\pi}{16}\right) + \Lambda \Lambda + \cos\left(\theta + \frac{30\pi}{16}\right) \cos\left(\beta + \frac{30\pi}{16}\right) \right] \quad (3.47)$$

Et:

$$\sin(\theta - \beta) = \frac{2}{16} \left[ \sin\theta \cos\beta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{16}\right) \cos\left(\beta + \frac{2\pi}{16}\right) + \Lambda \Lambda + \sin\left(\theta + \frac{30\pi}{16}\right) \cos\left(\beta + \frac{30\pi}{16}\right) \right] \quad (3.48)$$

A partir de l'équation (3.45) on trouve:

$$I_1 = \frac{I_{r0}}{\cos\beta} ; I_1 = \frac{I_{r1}}{\cos\left(\beta + \frac{2\pi}{16}\right)} ; I_1 = \frac{I_{r2}}{\cos\left(\beta + \frac{4\pi}{16}\right)} ; \dots ; I_1 = \frac{I_{r15}}{\cos\left(\beta + \frac{30\pi}{16}\right)}$$

En remplaçant les équations (3.47) et (3.48) dans l'équation (3.46) on trouve:

$$Id = \frac{2}{16} \left[ I_{r0} \cos\theta + I_{r1} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{16}\right) + I_{r2} \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{16}\right) + \Lambda \Lambda + I_{r15} \cos\left(\theta + \frac{30\pi}{16}\right) \right] \quad (3.49)$$

$$Iq = -\frac{2}{16} \left[ I_{r0} \sin\theta + I_{r1} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{16}\right) + I_{r2} \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{16}\right) + \Lambda \Lambda + I_{r15} \sin\left(\theta + \frac{30\pi}{16}\right) \right] \quad (3.50)$$

Ensuite sous forme matricielle on trouve:

$$\begin{bmatrix} Id \\ Iq \end{bmatrix} = \frac{2}{16} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{16}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{16}\right) & \Lambda \Lambda \Lambda & \cos\left(\theta + \frac{30\pi}{16}\right) \\ -\sin\theta & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{16}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{4\pi}{16}\right) & \Lambda \Lambda \Lambda & -\sin\left(\theta + \frac{30\pi}{16}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r0} \\ I_{r1} \\ I_{r2} \\ M \\ M \\ I_{r15} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} Id \\ Iq \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} I_{r0} \\ I_{r1} \\ I_{r2} \\ M \\ M \\ I_{r15} \end{bmatrix}$$

En posant  $\theta = 0$ , l'équation (3.51) devient:

$$[A] = \frac{2}{16} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos(\frac{2\pi}{16}) & \cos(\frac{4\pi}{16}) & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \cos(\frac{30\pi}{16}) \\ -\sin 0 & -\sin(\frac{2\pi}{16}) & -\sin(\frac{4\pi}{16}) & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -\sin(\frac{30\pi}{16}) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Et:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \cos(\frac{2\pi}{16}) & -\sin(\frac{2\pi}{16}) \\ \cos(\frac{4\pi}{16}) & -\sin(\frac{4\pi}{16}) \\ M & M \\ M & M \\ \cos(\frac{30\pi}{16}) & -\sin(\frac{30\pi}{16}) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

## 7. la matrice de résistance du modèle $dq$ équivalent:

$$[R]_{eq} = {}^a A [R] {}^a A^{-1} \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} R_s & -WL_{sc} & \Lambda & \Lambda & M_{sr} W \sin j\alpha & \Lambda & \Lambda & 0 \\ -WL_{sc} & R_s & \Lambda & \Lambda & -M_{sr} W \cos j\alpha & \Lambda & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_e}{Nr} + Rb_0 + kb_{(Nr-1)} & -Rb_0 & 0 & 0\Lambda & -Rb_{(Nr-1)} & \frac{R_e}{Nr} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & -Rb_{(k-1)} & \frac{2R_e}{Nr} + Rb_k + Rb_{(k-1)} & -Rb_{(k)} & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & -Rb_{(Nr-1)} & 0 & 0\Lambda & -Rb_{(Nr-2)} & \frac{2R_e}{Nr} + Rb_{(Nr-2)} + Rb_{(Nr-1)} & \frac{R_e}{Nr} \\ 0 & 0 & \frac{R_e}{Nr} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \frac{R_e}{Nr} & R_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R1 & R2 & R3 \\ R4 & R5 & R6 \\ R7 & R8 & R9 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

### 7.1. Passage du modèle polyphasé au modèle biphasé:

A fin de simplifier le calcul de la matrice ci-dessus, on la subdivise en neufs résistances équivalentes, cette subdivision nous permet de mieux comprendre, le passage du modèle de  $Nr$  grandeurs vers deux grandeurs  $dq$ .

La nouvelle matrice de résistance du modèle  $dq$  équivalent, en considérant que toutes les barres sont saines pourra être présentée sous la forme [PFE 2005]:

$$[R_{eq}] = \begin{bmatrix} R_s & -WL_{sc} & 0 & -\frac{Nr}{2}WM_{sr} & 0 \\ WL_{sc} & R_s & -\frac{Nr}{2}WM_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S1 & S2 & 0 \\ 0 & 0 & S3 & S4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Re \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Avec:

$$S1 = \frac{2}{16} \left[ \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b0} + R_{b15} \right) \cos^2 0\alpha + \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b1} + R_{b0} \right) \cos^2 1\alpha + \Lambda + \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b14} + R_{b15} \right) \cos^2 15\alpha \right] - \frac{4}{16} \left[ (R_{b0} \cos 0\alpha \cos 1\alpha) + (R_{b1} \cos 1\alpha \cos 2\alpha) + \Lambda + (R_{b15} \cos 15\alpha \cos 0\alpha) \right] \quad (3.57)$$

$$S2 = -\frac{2}{16} \left[ \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b0} + R_{b15} \right) \cos 0\alpha \sin 0\alpha - \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b1} + R_{b0} \right) \cos 1\alpha \sin 1\alpha - \Lambda - \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b14} + R_{b15} \right) \cos 15\alpha \sin 15\alpha \right] + \frac{2}{16} \left[ (R_{b0} \sin 0\alpha \cos 1\alpha) + (R_{b1} \sin 1\alpha \cos 2\alpha) + \Lambda + (R_{b15} \sin 15\alpha \cos 0\alpha) \right] + \frac{2}{16} \left[ (R_{b0} \cos 0\alpha \sin 1\alpha) + (R_{b1} \cos 1\alpha \sin 2\alpha) + \Lambda + (R_{b15} \cos 15\alpha \sin 0\alpha) \right] \quad (3.58)$$

$$S3 = -\frac{2}{16} \left[ \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b0} + R_{b15} \right) \cos 0\alpha \sin 0\alpha - \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b1} + R_{b0} \right) \cos 1\alpha \sin 1\alpha - \Lambda - \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b14} + R_{b15} \right) \cos 15\alpha \sin 15\alpha \right] + \frac{2}{16} \left[ (R_{b0} \sin 0\alpha \cos 1\alpha) + (R_{b1} \sin 1\alpha \cos 2\alpha) + \Lambda + (R_{b15} \sin 15\alpha \cos 0\alpha) \right] + \frac{2}{16} \left[ (R_{b0} \cos 0\alpha \sin 1\alpha) + (R_{b1} \cos 1\alpha \sin 2\alpha) + \Lambda + (R_{b15} \cos 15\alpha \sin 0\alpha) \right] \quad (3.59)$$

$$S4 = \frac{2}{16} \left[ \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b0} + R_{b15} \right) \cos^2 0\alpha + \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b1} + R_{b0} \right) \cos^2 1\alpha + \left( 2 \frac{Re}{Nr} + R_{b14} + R_{b15} \right) \cos^2 15\alpha \right] - \frac{4}{16} \left[ (R_{b0} \cos 0\alpha \cos 1\alpha) + (R_{b1} \cos 1\alpha \cos 2\alpha) + \Lambda + (R_{b15} \cos 15\alpha \cos 0\alpha) \right] \quad (3.60)$$

Si on considère que toutes les barres sont saines ( $R_{b0} = R_{b1} = \Lambda$   $\Lambda = R_{b15}$ ) les sous matrices  $S1, S2, S3$ , et  $S4$  peuvent être écrites sous la forme:

$$S1 = S4 = 2 \frac{Re}{Nr} + 2R_b(1 - \cos \alpha)$$

$$S2 = S3 = 0$$

En posant:

$$Rr = 2 \frac{Re}{Nr} + 2R_b(1 - \cos \alpha)$$

## 7.2 la matrice d'inductance du modèle $dq$ équivalent [PFE2005].

$$[L_{eq}] = {}^a A [L] {}^a A^{-1} \quad (3.61)$$

$$\begin{bmatrix} L_{sc} & 0 & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -M_{sr} \cos j\alpha & \Lambda & \Lambda & 0 \\ 0 & L_{sc} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -M_{sr} \sin j\alpha & \Lambda & \Lambda & 0 \\ \hline M & M & L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b & M_{rr} - L_b & M_{rr} & \Lambda & M_{rr} & M_{rr} - L_b & -\frac{L_e}{Nr} \\ M & M & M_{rr} - L_b & L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b & M_{rr} - L_b & M_{rr} & \Lambda & M_{rr} & M \\ -\frac{3}{2}M_{sr} \cos j\alpha & -\frac{3}{2}M_{sr} \sin j\alpha & \hline M & M & \hline M & M & M_{rr} - L_b & M_{rr} & M_{rr} & M_{rr} - L_b & L_{rp} + \frac{2L_e}{Nr} + 2L_b & -\frac{L_e}{Nr} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{L_e}{Nr} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -\frac{L_e}{Nr} & L_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L1 & L2 & L3 \\ L4 & L5 & L6 \\ L7 & L8 & L9 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$



### 7.3 Passage du modèle polyphasé au modèle biphasé

La nouvelle matrice d'inductance du modèle  $dq$  équivalent, en considérant que toutes les barres sont saines pourra être présentée sous la forme [PFE2005]:

$$[L_{sq}] = \begin{bmatrix} L_{sc} & 0 & -\frac{Nr}{2}M_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & L_{sc} & 0 & \frac{Nr}{2}M_{sr} & 0 \\ -\frac{3}{2}M_{sr} & 0 & L_{rc} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M_{sr} & 0 & L_{rc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_e \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Avec:

$$L_{rc} = L_{rp} - M_{rr} + 2\frac{L_e}{Nr} + 2L_b(1 - \cos\theta)$$

Donc en considérant que toutes les barres sont saines on pourra écrire le modèle global sous la forme:

$$\begin{bmatrix} L_{sc} & 0 & -\frac{Nr}{2}M_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & L_{sc} & 0 & \frac{Nr}{2}M_{sr} & 0 \\ -\frac{3}{2}M_{sr} & 0 & L_{rc} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M_{sr} & 0 & L_{rc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_e \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Ids \\ Iqs \\ Idr \\ Iqr \\ Ie \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Vds \\ Vqs \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_s & -W_{sc} & 0 & -\frac{Nr}{2}WM_{sr} & 0 \\ W_{sc} & R_s & -\frac{Nr}{2}WM_{sr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S1 & S2 & 0 \\ 0 & 0 & S3 & S4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Re \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ids \\ Iqs \\ Idr \\ Iqr \\ Ie \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

### 8. Simulation du modèle $dq$ :

Pour simuler le modèle ci-dessus, on utilise les paramètres de la machine suivante [BAG99] (voir Annexe n° 1):

$$R_s = 7.828 \, \Omega$$

$$J = 0.006093 \text{ Kg m}^2$$

$$f = 0.00725 \text{ Nm s / rd}$$

$$\text{Rayon} = 0.03575 \text{ m}$$

$$\text{Longueur} = 0.065 \text{ m}$$

$$\text{Entrefer} = 0.00025 \text{ m}$$

$$N_s = 160$$

$$N_r = 16$$

$$L_{sl} = 0.018 \text{ H}$$

$$R_{bsain} = 150 \cdot 10^{-6} \Omega$$

$$R_e = 72 \cdot 10^{-6} \Omega$$

$$L_b = 10^{-7} \text{ H}$$

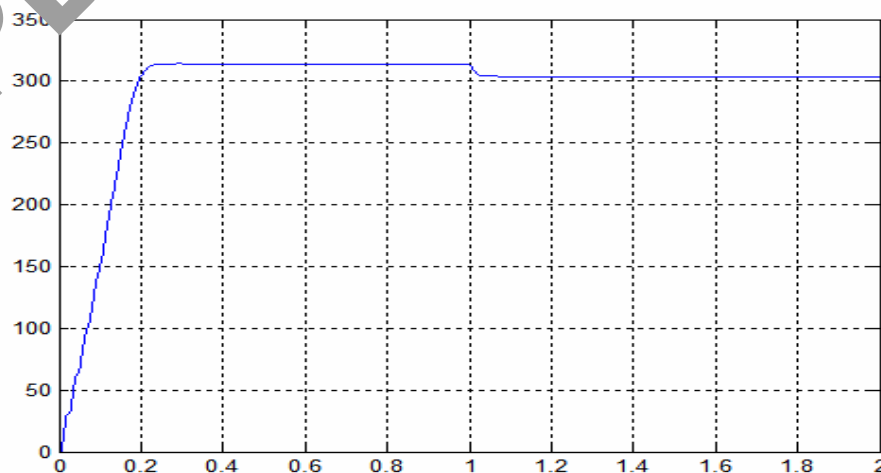
$$L_e = 10^{-7} \text{ H}$$

Sur les figures qui suivent sont présentés les résultats obtenus par simulation du modèle  $dq$ .

Les figures (3.6), (3.7), (3.8), et (3.9) montrent l'évolution de la vitesse, du couple, du courant statorique, ainsi que les courants des quatre premières barres rotoriques. Le démarrage de cette machine s'effectue à vide. Nous constatons que le temps d'établissement de ces variables est rapide (0.23 s).

Le couple atteint une valeur maximale de 18.5 N.m, avant de se stabiliser à une valeur nulle en régime permanent.

A l'instant  $t = 1$  sec on applique un couple résistant nominal de 3.2 N.m, qui nous permet de constater que le couple électromagnétique rejoint sa valeur pour compenser cette sollicitation avec une réponse quasiment instantanée. Une décroissance de la vitesse qui se traduit par un glissement.



**Figure (3.6): Evolution de la vitesse** (cas d'un moteur sain).

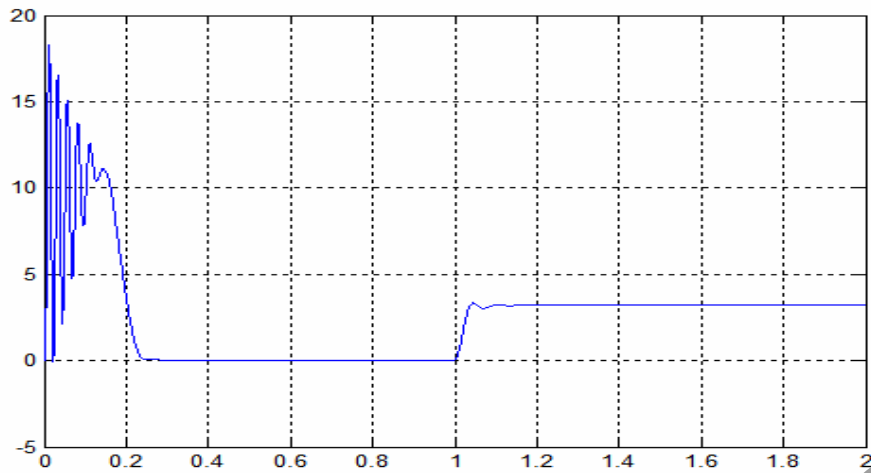


Figure (3.7): Evolution de du couple (cas d'un moteur sain).

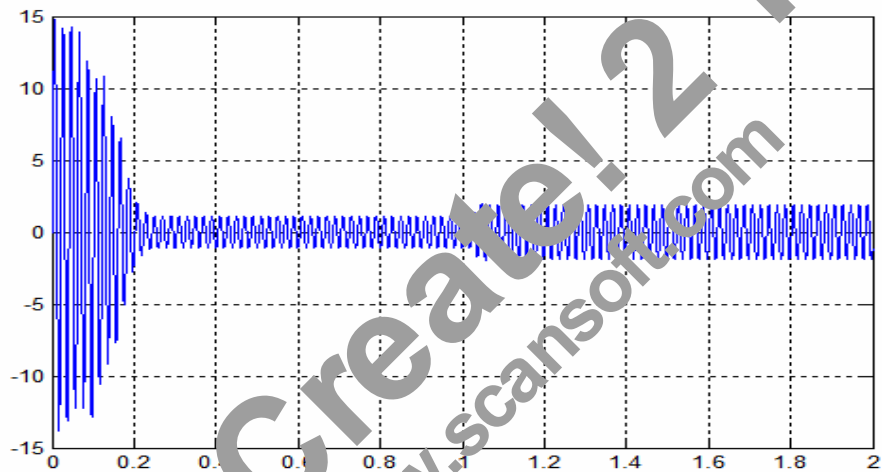


Figure (3.8): Evolution de du courant statorique (cas d'un moteur sain).

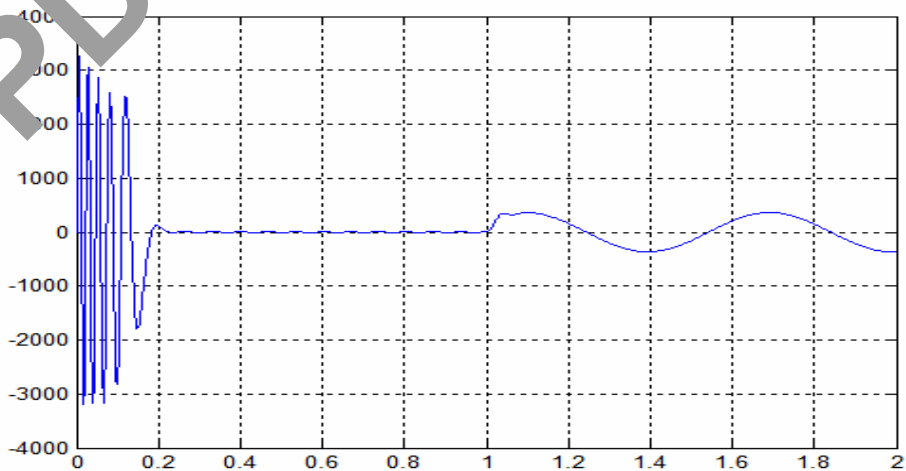


Figure (3.9): Evolution de du courant rotorique (cas d'un moteur sain).

## 9. Modélisation des défauts dans le cas d'une cassure d'une barre ou de deux barres

Le modèle (Eq.3.64) élaboré ci-dessus permet de simuler la rupture de barres au rotor. En effet, dans le cas où on veut simuler la rupture d'une barre ou de deux barres les seules valeurs qui vont changer sont: S1, S2, S3 et S4.

### 9.1. Cassures de barres :

La cassure des barres est un des défauts les plus fréquents du rotor. La simulation numérique nous permettra d'identifier les signatures de ce défaut et de prévoir les détériorations provoquées dans le moteur.

Pour illustrer la cassure totale de barres dans le modèle de la machine, la valeur de la résistance barre cassée sera considérée égale à onze (11) fois la valeur de la résistance initiale [BAG99].

#### ➤ La cassure d'une barre

Pour simuler la rupture de la première barre ( $k=0$ ) donc  $R_{b \text{ cassé}} = 11 * R_{b \text{ sain}}$

Les valeurs de S1, S2, S3 et S4 deviennent:-

$$S1 = 3.29213 * 10^{-5}$$

$$S2 = 5.45625 * 10^{-6}$$

$$S3 = 5.45625 * 10^{-6}$$

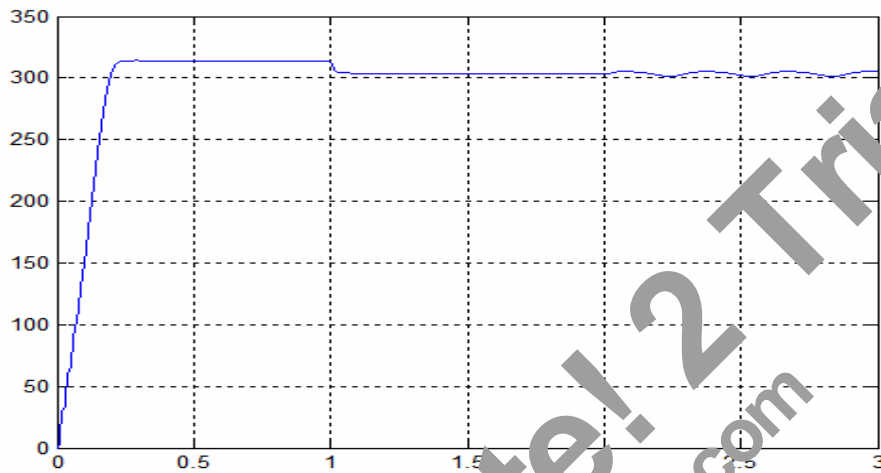
$$S4 = 3.29213 * 10^{-5}$$

### 9.2 Simulation de défauts rotoriques en présence d'une charge sur l'arbre du moteur (Résultats et analyses)

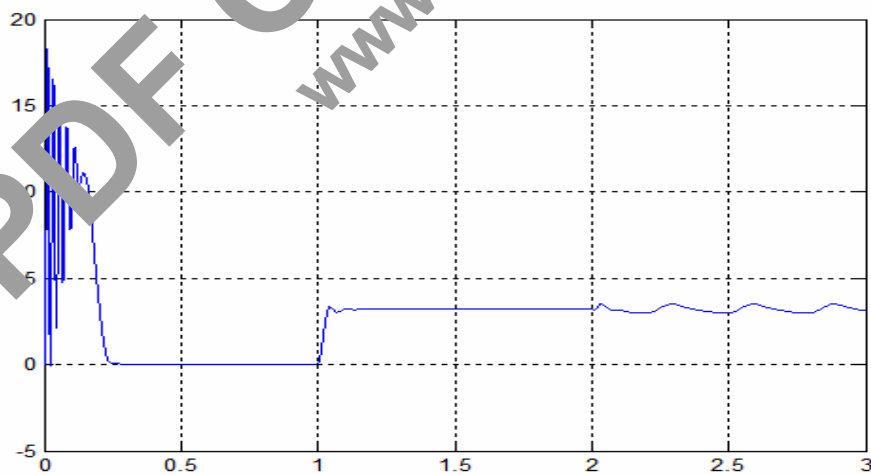
- Les figures suivantes présentent les résultats obtenus par simulation du modèle précédent (eq.3.64);
- Les figures (3.10, 3.11, 3.12) montrent l'évolution de la vitesse, courant statorique et du couple électromagnétique lors de cet essai;
- Le démarrage s'effectue à vide;
- A partir de l'instant  $T=1$  s le couple résistant nominal de 3.5 N.m est appliqué;
- La vitesse chute à 303.6 rad/sec figure (3.10), et le couple électromagnétique vient équilibrer le couple résistant (voir figure 3.11);
- A  $t = 2$ s, nous provoquerons le premier défaut avec la rupture de la première barre ( $K=0$ ), nous constatons:

- La détérioration de la barre réduit la valeur moyenne du couple électromagnétique et fait apparaître les oscillations présentées sur la figure (3.11);
- L'oscillation sur la vitesse figure (3.10);
- Les courants des phases statoriques sont toujours déphasés entre eux de  $120^\circ$ .

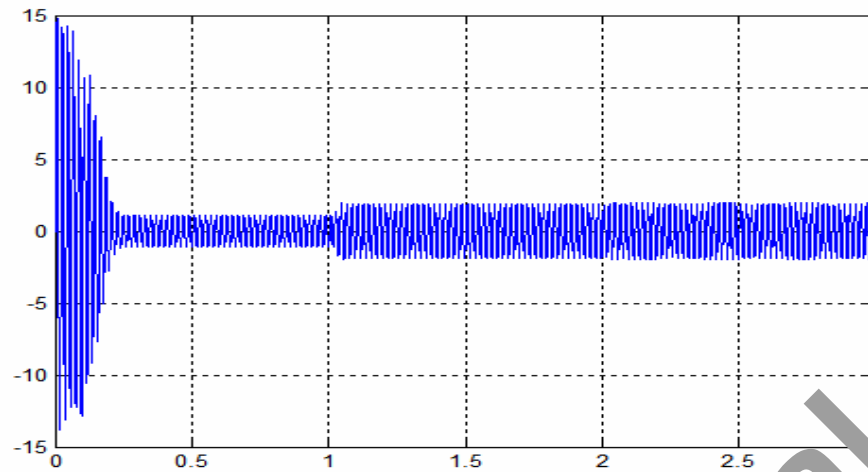
Cependant une ondulation de l'amplitude des courants apparaît avec la cassure de la barre, la figure (3.12) illustre cette ondulation.



**Figure (3.10):** Evolution de la vitesse (au démarrage, en charge et lors de la rupture de barres)



**Figure (3.11):** Evolution du couple (au démarrage, en charge lors de la rupture de barres)



**Figure (3.12):** Evolution du courant statorique (au démarrage en charge lors de la rupture de barres)

## 10. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le modèle multi-enroulement, en considérant que le rotor est constitué de plusieurs résistances séparées, et chaque résistance représente une barre de la cage d'écureuil. Ce modèle nous a permis de simuler les défauts rotoriques, tels que les cassures de barres rotoriques.

Les résultats obtenus permettent de conclure, que la cassure de barres fait apparaître des oscillations sur le courant, le couple et la vitesse. D'autre part les défauts sont caractérisés par des cumulatifs lors de la rupture de barres.

Les résultats obtenus peuvent être utilisés en diagnostic en analysant les harmoniques des courants statoriques qui permettent de constater une corrélation entre le défaut et les amplitudes des composantes à la fréquence égale à  $fs(1 \pm 2.g)$ .

Le chapitre suivant sera consacré à la modélisation de la machine dans le système triphasé, pour faire en sortir les défauts statoriques. Dans ce cas on considérera que la cage est saine et on va tenir compte seulement des courts-circuits entre spires.