



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Discrètes

Par

Aissa BOUHADJA

Sujet

Sur les algèbres de Lie nilpotentes

Devant le jury :

D. MIHOUBI

Prof. Université de M'sila

Président

N. MIDOUNE

Prof. Université de M'sila

Rapporteur

L. LADJELAT

Prof. Université de M'sila

Examineur

Promotion: 2014/2015

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

*En tout premier lieu, je remercie **Allah** le tout puissant d'avoir éclairé notre vie, renforce notre courage et notre volonté pour finir ce travail, et*

*Je tiens à remercier très sincèrement **Mr. MIDOUNE Noureddine** pour ses conseils et pour ses orientations. J'ai en l'honneur et le privilège de travailler sous son assistance et de profiter de ses qualités humaines m'ont été d'une grande utilité, Son professionnelle et de sa grande expérience qu'il m'a guidé tout au long de ce travail.*

Je remercie tous les enseignants de l'université de M'sila, et en particulier mes enseignants de nos départements mathématique.

Mes remerciements vont également aux membres de jury d'avoir accepté de juger mon travail.

Je remercie vivement toute ma famille, pour m'avoir toujours soutenu au cours de mes études.

*Mes sincères remerciements s'adressent également à mes amis **Nasreddine, Hocine, Mohamed, Zakarya, Djilali, MohamedelAmine, Omira, Hasan, Noureddine, Hlitm** et tous mes collègues.*

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont près ou de loin, ont contribué à sa réalisation de ce travail.

BOUHADJA Aissa

Table des Matières

Introduction	1
Chapitre 1 : Algèbres de Lie. Généralités	
I Algèbres de Lie.....	2
I.1. Notion d'algèbre de Lie.....	2
I.2. Exemples	3
I.3. Sous algèbres de Lie.....	3
I.4. Les algèbres de Lie classiques.....	4
I.5. Idéaux.....	5
I.6. Algèbres de Lie quotients.....	5
II Algèbres de Lie nilpotentes.....	6
II.1. Suite centrale descendante.....	6
II.2. Suite centrale ascendantes.....	6
II.3. Définition des algèbres de Lie nilpotentes.....	7
Chapitre 2 : Certaines classe d'algèbres de Lie nilpotentes	
I Algèbres de Lie filiformes.....	8
I.1. Définition.....	8
I.2. Exemples.....	9
I.3. Quelques propriétés des algèbres filiformes.....	10
II Algèbres de Lie 2-nilpotentes.....	11
II.1. Définition.....	11
II.2. Structure des algèbres 2-nilpotentes.....	12
II.3. La suite caractéristique.....	13
Chapitre 3 : La classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 7	
I La classification en dimension inférieure ou égale à 6.....	14
II La classification en dimension 7.....	16

Chapitre 4 : Algèbres de Lie 2-nilpotentes et structures symplectiques	25
I Algèbre de Lie 2-nilpotente.....	25
I.1. Définition	25
I.2. Exemples	25
II Classification des algèbres dont l'idéal dérive est de petite dimension	27
III Algèbres de Lie 2- nilpotentes symplectiques.....	28
IV Classification des algèbres de Lie 2- nilpotentes symplectique de dimension ≤ 6	33
Bibliographie.....	35

Introduction

Les algèbres de Lie nilpotentes jouent un rôle qui va grandissant ces dernières années : que ce soit sur le plan algébrique sachant leur intérêt dans les problèmes de classification des algèbres de Lie, ou que ce soit sur le plan géométrique sachant la place des nilvariétés dans l'illustration, la description et la représentation de situations bien particulières.

Les premiers résultats fondamentaux sur l'étude des algèbres de Lie nilpotentes sont certainement dus à Umlauf. Dans sa thèse (Leipzig 1891) les premières classifications non trivalentes y sont exposées. L'étude systématique des algèbres réelles et complexes est commencée indépendamment par Dixmier et Morozov. Les classifications complètes en dimension inférieure ou égale à six sont données et les problèmes concernant les dimensions supérieures mis en évidence, problèmes relatifs de l'existence, dès la dimension sept, d'une infinité d'algèbres de Lie nilpotentes complexes non isomorphes. On peut également trouver ces listes (pour les algèbres complexes et réelles) dans les livres de géométrie différentielle de Vranceanu. Une approche plus formelle, s'insérant dans le cadre de la géométrie algébrique a été développée par Michèle Vergne. Les physiciens théoriciens, intéressés par les liens entre les diverses mécaniques, développent l'idée de contractions d'algèbres de Lie (Segal, Inonu, Wigner). Cet outil se révéla en fait très pratique dans la détermination des composantes. Le but de cet travail est rassembler les résultats obtenus ces dernières années que ce soit dans l'étude des algèbres nilpotentes, ou dans les problèmes de classification. On s'intéresse également à deux classes d'algèbres nilpotentes, qui sont des modèles d'algèbres nilpotentes : ce sont les algèbres filiformes et les algèbres 2-nilpotentes.

On termine par l'étude symplectique des algèbres de Lie 2-nilpotentes.

Chapitre 1

Algèbres de Lie. Généralités

I. Algèbres de Lie :

I.1. Notion d'algèbre de Lie :

Définition 1 : Une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur un corps K est un espace vectoriel sur K muni d'une multiplication, c'est-à-dire d'une application bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans \mathfrak{g} :

$$[\ , \] : (x, y) \rightarrow [x, y],$$

vérifiant les identités suivantes :

1. $[x, x] = 0$
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$
quels que soient x, y, z dans \mathfrak{g} .

Remarque :

- ❖ L'identité (2) est dite identité de Jacobi.
- ❖ L'identité (1) implique l'antisymétrie de la multiplication c'est-à-dire $[x, y] = -[y, x]$.
Notons que si la caractéristique du corps k est différente de 2, l'antisymétrie implique aussi $[x, x] = 0$.

I.2. Exemples :

1. Tout espace vectoriel peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie en prenant comme loi $[x, y] = 0$.

Cette algèbre de Lie est dite abélienne.

2. Soit l'espace $M_n(k)$ des matrices carrées d'ordre n sur K .

La multiplication :

$$[A, B] = AB - BA$$

vérifie les conditions 1 et 2. Ainsi $M_n(k)$ muni de ce crochet est une algèbre de Lie. Elle est notée $\mathfrak{gl}(n, K)$.

3. Soit V un espace vectoriel sur K . L'espace $\text{End } V$ des endomorphismes de V peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie en posant

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f, \quad \forall f, g \in \text{End } V.$$

Cette algèbre de Lie est notée $\mathfrak{gl}(V, K)$ ou $\mathfrak{gl}(V)$ si la précision du corps de référence n'est pas nécessaire.

4. Soient V l'espace vectoriel de dimension $2k+1$ et $(e_1, e_2, \dots, e_{2k+1})$ une base de V .

$$\text{Posons } [e_{2i}, e_{2i+1}] = e_1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, k,$$

$$\text{et } [e_i, e_j] = 0 \quad \text{sinon.}$$

La multiplication définie par ces relations munit V d'une structure d'algèbre de Lie.

Cette algèbre de Lie, qui va jouer un rôle prépondérant dans la théorie des algèbres de Lie nilpotentes, est appelée l'algèbre de Heisenberg et est notée H_K .

I.3 . Sous algèbres de Lie :

Définition 2 : Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur K . Un sous espace vectoriel \mathfrak{g}_1 de \mathfrak{g} est appelé sous-algèbre de Lie si la restriction de la multiplication de \mathfrak{g} munit \mathfrak{g}_1 d'une structure d'algèbre de Lie.

Exemples :

1. Tout sous espace d'une algèbre de Lie abélienne est une sous algèbre de Lie abélienne.
2. Le sous espace de $gl(n, K)$ formé des matrices triangulaires (c'est-à-dire des matrices (a_{ij}) avec $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$) est une sous algèbre de Lie de $gl(n, K)$.
3. Le sous espace de $gl(n, K)$ formé des matrices diagonales est aussi une sous algèbre de Lie.

I.4. Les algèbres de Lie classiques :

1° L'algèbre de Lie $sl(n, C)$:

L'ensemble des matrices $A = (a_{ij}) \in gl(n, C)$ de trace nulle c'est-à-dire vérifiant

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$$

est une sous algèbre de Lie de $gl(n, C)$.

Elle est appelée l'algèbre spéciale linéaire complexe.

2° L'algèbre de Lie $so(n, C)$:

$$so(n, C) = \{ A = (a_{ij}) \in gl(n, C) \text{ tel que } {}^tA = -A \}.$$

où tA désigne la transposée de la matrice A .

C'est aussi une sous algèbre de $gl(n, C)$.

Elle est appelée l'algèbre de Lie orthogonale.

3° L'algèbre symplectique $sp(2n, C)$:

$$sp(2n, C) = \{ A = (a_{ij}) \in gl(2n, C) \text{ tel que } {}^tAJ = -JA \}.$$

où
$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Toute matrice $A \in sp(2n, C)$ se décompose sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

où N et P sont des matrices carrées d'ordre n symétriques et les matrices M et Q vérifient : ${}^tM = -Q$.

I.5. Idéaux :

Définition 3 : Une sous algèbre de Lie \mathfrak{g}_1 de \mathfrak{g} est un idéal de \mathfrak{g} si $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_1$ c'est-à-dire $[x, y] \in \mathfrak{g}_1$ quels que soient x dans \mathfrak{g}_1 et y dans \mathfrak{g} .

Il est clair que toute sous algèbre ne saurait être un idéal.

Exemples :

1. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Ici \mathfrak{g}_1 est un idéal de \mathfrak{g} . En effet toute matrice A peut s'écrire sous la forme :

$$A = \alpha \text{Id} + A' \text{ avec } A' \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}).$$

Soit $B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Alors

$$[A, B] = [\alpha \text{Id} + A', B] = [\alpha \text{Id}, B] + [A', B] = [A', B] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}).$$

2. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ et \mathfrak{g}_1 la sous algèbre des matrices triangulaires définie dans l'exemple 2 de I.3. Il est évident que \mathfrak{g}_1 n'est pas un idéal (dès que $n > 1$).

Remarque :

Si I et J sont deux idéaux de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors $I + J$, $I \cap J$ et $[I, J]$ sont encore des idéaux de \mathfrak{g} .

I.6. Algèbres de Lie quotients :

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et \mathfrak{i} un idéal de \mathfrak{g} .

L'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ peut être muni naturellement d'une structure d'algèbre de Lie en posant :

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]} \text{ avec } x, y \in \mathfrak{g}$$

où la barre désigne la classe d'équivalence.

II. Algèbres de Lie nilpotentes :

II.1. Suite centrale descendante :

1° Centre et idéaux centraux :

Le centre de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est l'idéal abélien

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \text{ tel que } [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Un idéal \mathfrak{t} de \mathfrak{g} contenu dans le centre sera dit central.

2° Suite centrale descendante :

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} C^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \\ C^{k+1} \mathfrak{g} = [C^k \mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad k \geq 0. \end{array} \right\}$$

Chacun des $C^i \mathfrak{g}$ est un idéal de \mathfrak{g} et l'on a

$$C^0 \mathfrak{g} \supset C^1 \mathfrak{g} \supset \dots \supset C^k \mathfrak{g} \supset \dots$$

Cette suite est appelée la suite centrale descendante de \mathfrak{g} , et l'algèbre quotient $C^{i+1}(\mathfrak{g})/C^{i+2}(\mathfrak{g})$ est un idéal central de $C^i(\mathfrak{g})/C^{i+2}(\mathfrak{g})$.

II.2. Suite centrale ascendantes :

Posons $C_0(\mathfrak{g}) = \{0\}$ et

$$C_k(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \text{ tel que } [x, \mathfrak{g}] \subset C_{k-1}(\mathfrak{g})\} \text{ pour } k \geq 1.$$

$$\text{On a } \{0\} = C_0(\mathfrak{g}) \subset C_1(\mathfrak{g}) \subset \dots \subset C_k(\mathfrak{g}) \subset \dots$$

et chacun des $C_k(\mathfrak{g})$ est un idéal de \mathfrak{g} .

Cette suite est dite suite centrale ascendante de \mathfrak{g} .

Remarquons que $C_1(\mathfrak{g})$ est le centre de \mathfrak{g} , et $C_{k+1}(\mathfrak{g})$ est l'image réciproque pour l'application canonique de \mathfrak{g} sur $\frac{\mathfrak{g}}{C_k(\mathfrak{g})}$ du centre de $\frac{\mathfrak{g}}{C_k(\mathfrak{g})}$.

II.3. Définition des algèbres de Lie nilpotentes :

Définition 4 : Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite nilpotente s'il existe un entier k tel que : $C^k \mathfrak{g} = \{0\}$.

Le plus petit entier k tel que : $C^k \mathfrak{g} = \{0\}$ est appelé l'indice de nilpotence de \mathfrak{g} .

Exemples :

1. Toute algèbre abélienne est nilpotente d'indice 1.
2. L'algèbre de Heisenberg H_k est nilpotente d'indice 2.
3. L'algèbre de dimension n définie dans une base (e_1, \dots, e_n) par les crochets $[e_1, e_i] = e_{i+1}$ $2 \leq i \leq n - 1$ est nilpotente d'indice $(n-1)$.
4. La sous algèbre de $gl(n, K)$ formée des matrices triangulaires strictement supérieures (c'est-à-dire des matrices $A = (a_{ij})$ telles que $a_{ij} = 0$ pour $i \leq j$) est nilpotente.
5. Toute sous algèbre, toute algèbre quotient d'algèbres nilpotentes est nilpotente.

Définition 5 : Une algèbre nilpotente d'indice 2 est dite **metabélienne**.

Une algèbre nilpotente de dimension n d'indice de nilpotence $(n-1)$ est dite **filiforme** (l'indice est ici maximum).

Proposition 1 : Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est nilpotente si et seulement s'il existe une suite décroissante d'idéaux

$$\mathfrak{g} = I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_K = \{0\} \text{ telle que :}$$

$$[\mathfrak{g}, I_j] \subset I_{j+1} \quad 0 \leq j \leq k-1.$$

Proposition 2 : Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est nilpotente d'indice k si et seulement si pour tout $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{g}$ on a :

$$[x_0, [x_1, [x_2, \dots [x_{k-1}, x_k]]] \dots] = 0.$$

Cela découle directement de la définition.

Chapitre 2

Certaines classes d'algèbres de Lie nilpotentes

I. Algèbres de Lie filiformes :

I.1. Définition :

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente de dimension n . Soit $C^k(\mathfrak{g})$ la suite centrale descendante de \mathfrak{g} .

Définition 1 :

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite filiforme si sa suite centrale descendante vérifie :

$$\dim C^k(\mathfrak{g}) = n - k - 1 \text{ pour } k \geq 1.$$

La propriété suivante donne une autre caractérisation des algèbres filiformes :

Proposition 1: L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est filiforme si et seulement si il existe un vecteur X non nul dans le cône $\mathfrak{g} - C^1(\mathfrak{g})$ dont la suite caractéristique $s(X)$ est $(n-1,1)$.

Démonstration :

Rappelons que $s(X)$ est la suite ordonnée des invariants de similitude de $\text{ad}X$.

Si $s(X) = (n-1, 1)$, il existe une base de Jordan $(X = X_1, \dots, X_n)$ de $\text{ad}X$ vérifiant $[X_1, X_2] = X_{i-1}$ pour $i = 3, \dots, n$ et $C^1(\mathfrak{g})$ est engendré par $\{X_2, X_3, \dots, X_{n-1}\}$ dès que $i \geq 2$. L'algèbre \mathfrak{g} est filiforme.

Réciproquement, on choisit une base $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ adaptée à la filtration :

$$\mathfrak{g} = C^0(\mathfrak{g}) \supset C^1(\mathfrak{g}) \supset C^2(\mathfrak{g}) \supset \dots \supset C^{n-1}(\mathfrak{g})$$

Cette base peut être choisie de manière à vérifier $s(X_0) = (n-1, 1)$.

Remarque : Les algèbres de Lie filiformes admettent un indice de nilpotence maximal et égal à $n-1$. Ces algèbres constituent donc les classes des algèbres nilpotentes les "moins" nilpotentes.

I.2. Exemples :

1. Soit L_n l'algèbre de Lie de dimension $n + 1$ définie par :

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1 \text{ où } (X_0 ; \dots X_{n+1}) \text{ est une base de } L_n.$$

Rappelons que, par convention, les crochets non définis, sont nécessairement nuls. Cette algèbre est filiforme. Elle joue un rôle très particulier dans l'étude des algèbres filiformes. C'est en quelque sorte la plus simple de ces algèbres.

2. Soit Q_n l'algèbre nilpotente définie dans la base $(X_0 ; \dots X_n)$ par :

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad , i = 1, \dots, n-1$$

$$[X_i, X_{n-i}] = (-1)^i X_n \quad , i = 1, \dots, n-1$$

Cette algèbre est aussi filiforme.

3. Soit R_n définie dans la base $(X_0; \dots; X_n)$ par :

$$\left. \begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1} & , i &= 1, \dots, n-1 \\ [X_1, X_i] &= X_{i+2} & , i &= 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\}$$

elle est filiforme.

4. Soit W_n l'algèbre dont les crochets sont dans la base (X_0, \dots, X_n) :

$$\left\{ \begin{array}{l} [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad , \quad i = 1, \dots, n-1 \\ [X_i, X_j] = \frac{6(i-1)!(j-1)!(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n-1 \\ i+j+1 \leq n \end{array} \end{array} \right\}$$

Cette algèbre filiforme est isomorphe à l'algèbre définie par :

$$\{[Y_i, Y_j] = (j-i)Y_{i+j} \quad \text{pour } i+j \leq n+1 \quad 1 \leq j \leq n+1\}$$

Ces deux algèbres R_n et W_n sont les seules algèbres à isomorphisme près, nilpotentes dont les crochets vérifient les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad , \quad i = 1, \dots, n-1 \\ [X_i, X_j] = a_{ij}X_{i+j+1} \quad \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n-1 \\ i+j+1 \leq n \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

dès que $n \geq 11$.

I.3. Quelques propriétés des algèbres filiformes :

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie filiforme. Elle est naturellement filtrée par les sous-algèbres

$$F_i(\mathfrak{g}) = C^{i-1}(\mathfrak{g}) \quad \text{pour } i \geq 1.$$

Ceci permet d'associer à toute algèbre de Lie filiforme une algèbre de Lie graduée, que l'on note $\text{gr } \mathfrak{g}$, et qui est également filiforme.

Dans ce paragraphe, on se propose de déterminer la structure de ces algèbres de Lie filiformes graduées.

Soit \mathfrak{g} de dimension $n+1$, filiforme graduée.

On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \dots + \mathfrak{g}_n$

avec $\dim \mathfrak{g}_1 = 2$, $\dim \mathfrak{g}_i = 1$ pour $2 \leq i \leq n$

et $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_{i+j}$ si $i+j \leq n$.

Théorème 1 : Il existe une base homogène $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ de \mathfrak{g} avec $X_0, X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_i \in \mathfrak{g}_i$ si $i \geq 2$ telle que :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ [X_0, X_n] = 0 \\ [X_1, X_2] = 0 \end{array} \right\}$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} [X_i, X_j] = 0 \quad \text{si } 1 \leq i < j \text{ et } i+j \neq n \\ [X_i, X_{n-i}] = (-1)^i \alpha X_n \quad \text{avec } \alpha = 0 \text{ si } n \text{ est pair} \end{array} \right\}$$

Une telle base est dite adaptée à \mathfrak{g} .

Corollaire 1: Si n est impair, il n'existe que deux algèbres de Lie filiformes graduées (à isomorphisme près) de dimension $n+1$.

Ces algèbres sont L_n et Q_n (§ I.2.).

II. Algèbres de Lie 2-nilpotentes :

II.1. Définition :

Définition 2 : Une algèbre de Lie nilpotente \mathfrak{g} est dite 2-nilpotente (ou métabélienne) si elle vérifie $C^2(\mathfrak{g}) = 0$.

$$\text{i.e. } [[x, y], z] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

Exemples :

- L'algèbre abélienne est métabélienne.
- l'algèbre de Heisenberg de dimension $2p+1$ définie par :

$$[X_1, X_2] = [X_3, X_4] = \dots = [X_{2p-1}, X_{2p}] = X_{2p+1}$$

est également métabélienne.

Cette algèbre est une sorte de modèle parmi cette classe d'algèbres.

Elle est caractérisée par la propriété suivante :

Proposition 2 : L'algèbre de Heisenberg est l'unique algèbre de Lie

(à isomorphisme près) vérifiant :

$$Z(\mathfrak{g}) = C^1(\mathfrak{g}) \text{ et } \dim Z(\mathfrak{g}) = 1.$$

II.2. Structure des algèbres 2-nilpotentes :

Notons V une supplémentaire de $C^1(\mathfrak{g})$ dans \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = C^1(\mathfrak{g}) \oplus V$$

On peut remarquer que le nombre $s = \dim V = \dim \mathfrak{g}/C^1(\mathfrak{g})$ est nombre minimum de générateurs de l'algèbre \mathfrak{g} . Comme \mathfrak{g} est 2-nilpotente, l'algèbre dérivée $C^1(\mathfrak{g})$ est contenue dans le centre et si U désigne le sous-espace $Z(\mathfrak{g}) \cap V$ alors U est un idéal abélien de \mathfrak{g} . Considérons une supplémentaire U' de U dans V . On a la décomposition suivante :

$$\mathfrak{g} = C^1(\mathfrak{g}) \oplus U \oplus U' \text{ et } Z(\mathfrak{g}) = C^1(\mathfrak{g}) \oplus U$$

où U est un idéal abélien de \mathfrak{g} . On en déduit que $\mathfrak{g}' = C^1(\mathfrak{g}) \oplus U'$ est une sous-algèbre 2-nilpotente de \mathfrak{g} vérifiant

$$Z(\mathfrak{g}') = C^1(\mathfrak{g})$$

$$C^1(\mathfrak{g}') = C^1(\mathfrak{g})$$

Ainsi toute algèbre de Lie 2-nilpotente est une extension triviale

d'une algèbre de Lie 2-nilpotente dont le centre coïncide avec l'algèbre dérivée par un idéal abélien.

On peut donc supposer que l'algèbre \mathfrak{g} vérifie :

$$C^1(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$$

Soit $(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_{n-p})$ une base de \mathfrak{g} adaptée à la décomposition

$$\mathfrak{g} = C^1(\mathfrak{g}) \oplus V = Z(\mathfrak{g}) \oplus V \text{ avec } \dim C^1(\mathfrak{g}) = p.$$

On a évidemment $[X_i, X_j] = [X_i, Y_k] = 0$. La structure de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est entièrement déterminée par les seuls crochets :

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^p a_{ij}^k X_k, \quad 1 \leq i < j \leq n - p$$

et les conditions de Jacobi relatives aux constantes a_{ij}^k sont trivialement satisfaites.

Intrinsèquement, ceci signifie que la structure de \mathfrak{g} est définie par une application linéaire surjective

$$\varphi : \Lambda^2 V \rightarrow Z(\mathfrak{g})$$

Le point de vue dual permet une analyse plus concrète : l'application duale

$$\varphi^* : Z(\mathfrak{g})^* \rightarrow \Lambda^2 V^* \text{ est injective.}$$

Se donner une telle application φ^* (et donc φ et donc le crochet de \mathfrak{g}) est équivalent à se donner un sous espace de dimension $p = \dim Z(\mathfrak{g})$ de $\Lambda^2 V^*$.

Revenons à l'écriture du crochet dans la base fixée $(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_{n-p})$

Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{n-p})$ désigne la basé duale alors les équations de structures se ramènent à :

$$d\alpha_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n-p} a_{ij}^k \beta_i \wedge \beta_j.$$

Les 2-formes linéaires $(\theta_1 = d\alpha_1, \dots, \theta_k = d\alpha_k)$ sont des 2-formes sur V . Elles engendrent le sous espace $\varphi^*(Z(\mathfrak{g})^*)$. Il apparaît clairement, dans cette écriture, que la donnée des 2 formes θ_i équivant à la donnée des seules constantes de structure (a_{ij}^k) .

II.3. La suite caractéristique :

L'indice maximal d'une algèbre 2-nilpotente \mathfrak{g} est 2 (si on la suppose non abélienne). Ainsi la suite caractéristique de \mathfrak{g} est de la forme :

$$s(\mathfrak{g}) = (2, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1).$$

Les algèbres 2-nilpotentes les moins abéliennes ont pour suite $(2, 2, \dots, 2, 1)$. Dans ce cas si $\dim \mathfrak{g} = 2p + 1$, alors $\dim Z(\mathfrak{g}) = p$ et les équations

de structure s'écrivent :

$$d\alpha_k = \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} \alpha_{i,j}^k \beta_i \wedge \beta_j \quad k = 1, \dots, p$$

Comme ces équations définissent une structure d'algèbre de Lie (il n'y a aucune relation sur les constantes de structures $a_{i,j}^k$), l'ensemble des algèbres de Lie métabélienne dont la suite caractéristique est égale à $(2, 2, \dots, 2, 1)$ est isomorphe à l'ensemble des applications bilinéaires de $C^p \times C^p$ à valeurs dans C^p (où $2p+1$ -est la dimension de \mathfrak{g}).

Connaitre la classification de ces algèbres 2-nilpotentes revient à connaitre la classification de ces applications bilinéaires et en particulier de toutes les algèbres de Lie de dimension p .

Chapitre 3

La classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 7

I. La classification en dimension inférieure ou égale à 6 :

Rappelons que les classification données dans ce chapitre ne concernent que les algèbres de Lie complexes et que les crochets non définis sont nuls.

Dimension 1 : [Il y a une seule algèbre]

$n_1^1 = a_1 =$ l'algèbre abélienne de dimension 1.

Dimension 2 : [Il y a une seule algèbre]

$n_1^2 = a_1^2 =$ l'algèbre abélienne de dimension 2.

Dimension 3 : [Il y a 02 algèbres]

$n_1^3 = a_1^3 =$ l'algèbre abélienne de dimension 3.

$n_2^3 = h^3 =$ l'algèbre de Heisenberg définie par $[X_1, X_3] = X_2$.

A partir de dimension 4, on n'écrira plus les algèbres décomposables c'est-à-dire qui sont sommes directes d'idéaux propres.

Dimension 4 : [Il y a une seule algèbre]

n_1^4 : $[X_1, X_4] = X_3$; $[X_1, X_3] = X_2$. c'est une loi filiforme.

Dimension 5 : [Il y a 06 algèbres]

$$n_1^5: [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_1, X_3] = X_2$$

$$n_2^5: [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_4, X_5] = X_2$$

Ces deux lois filiformes de dimension 5.

$$n_3^5: [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_3] = X_2 \quad ; [X_2, X_3] = X_4$$

$$n_4^5: [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_2, X_3] = X_4$$

$$n_5^5: [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_3] = X_2 \quad ; [X_3, X_5] = X_4$$

$$n_6^5: [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_3] = X_2$$

Dimension 6 : [Il y a 20 algèbres]

$$n_1^6: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_1, X_3] = X_2$$

$$n_2^6: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_5, X_6] = X_2$$

$$n_3^6: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_3, X_6] = X_2 \quad ; [X_4, X_5] = -X_2$$

$$n_4^6: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_5, X_6] = X_3 \quad ; [X_4, X_6] = X_2$$

$$n_5^6: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_3, X_6] = X_2 \quad ; [X_4, X_5] = -X_2$$

Ces cinq lois sont les lois filiformes (algèbres filiformes).

$$n_6^6: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_2, X_6] = X_4 \quad [X_2, X_5] = -X_3$$

$$n_6^7: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_2, X_6] = X_3$$

$$n_6^8: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_4] = X_3 \quad ; [X_2, X_6] = X_2$$

$$[X_5, X_6] = X_3$$

$$n_6^9: [X_1, X_6] = X_5 \quad ; [X_1, X_5] = X_4 \quad ; [X_1, X_3] = X_2 \quad ; [X_5, X_6] = X_3$$

$$[X_4, X_6] = X_2$$

$$n_6^{10} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_5] = X_3 \quad ; \quad [X_3, X_6] = X_2 \quad ; \quad [X_4, X_5] = X_2$$

$$n_6^{11} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_5] = X_4 \quad ; \quad [X_1, X_3] = X_2 \quad ; \quad [X_2, X_3] = X_4$$

$$n_6^{12} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_5] = X_4 \quad ; \quad [X_2, X_3] = X_4$$

$$n_6^{13} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_5] = X_4 \quad ; \quad [X_1, X_4] = X_3 \quad ; \quad [X_5, X_6] = X_2$$

$$n_6^{14} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_5, X_6] = X_3 \quad ; \quad [X_4, X_6] = X_2$$

$$n_6^{15} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_4] = X_3 \quad ; \quad [X_5, X_6] = X_3 \quad ; \quad [X_4, X_6] = X_2$$

$$n_6^{16} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_4] = X_3 \quad ; \quad [X_5, X_6] = X_2$$

$$n_6^{17} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_5] = X_4 \quad ; \quad [X_5, X_6] = X_2 \quad ; \quad [X_3, X_6] = X_4$$

$$n_6^{18} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_5] = X_4 \quad ; \quad [X_3, X_6] = X_2 \quad ; \quad [X_5, X_6] = X_2$$

$$n_6^{19} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_4] = X_3 \quad ; \quad [X_2, X_6] = X_3$$

$$n_6^{20} : [X_1, X_6] = X_5 \quad ; \quad [X_1, X_4] = X_3 \quad ; \quad [X_4, X_6] = X_2$$

II. La classification en dimension 7 :

Les tableaux précédents montrent que pour les dimensions inférieures ou égales à 6, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie nilpotentes complexes. Mais dès la dimension 7, nous allons rencontrer des familles à un ou plusieurs paramètres d'algèbres deux à deux non isomorphes, ce que l'on peut traduire en disant que la variété des classes d'isomorphie est de dimension non nulle dès que la dimension des algèbres est supérieure ou égale à sept.

Outre la décomposition de ces familles à un paramètre, la classification en dimension 7 (et au-delà) est quelque peu difficile à établir compte tenu du grand nombre de classes d'isomorphie correspondant à des points isolés dans la variété des classes. Ceci rend quelque peu suspectes toutes les listes que l'on peut présenter.

Nous allons tout de même en proposer une afin de donner une idée de la grande difficulté rencontrée lors de la vérification de cette liste. A l'heure actuelle, on possède trois voire quatre listes établies par des auteurs différents. Malheureusement les techniques employées et surtout les invariants essentiels utilisés étant propres à chacun d'eux (suite caractéristique, rang, extension), les classifications établies sont difficilement comparables.

Théorème 8: Il existe six familles à un paramètre d'algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7 deux à deux non isomorphes.

$$\begin{array}{ll}
 n_7^{1,\alpha}: [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 3, \dots, 7 \\
 [X_4, X_7] = \alpha X_2 & [X_5, X_7] = (1 + \alpha)X_3 \\
 [X_5, X_6] = X_2 & [X_6, X_7] = (1 + \alpha)X_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 n_7^{2,\alpha}: [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 4, \dots, 7 \\
 [X_2, X_6] = X_3 & [X_2, X_7] = X_3 + X_4 \\
 [X_5, X_7] = \alpha X_3 & [X_6, X_7] = \alpha X_4 + X_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 n_7^{3,\alpha}: [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 3, 4, 5, 7 \\
 [X_4, X_5] = X_6 & [X_4, X_7] = \alpha X_2 \\
 [X_5, X_6] = X_2 & [X_5, X_7] = (1 + \alpha)X_6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 n_7^{4,\alpha} [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 3, 4, 5, 7 \\
 [X_4, X_7] = \alpha X_2 & [X_5, X_6] = X_2 \\
 [X_5, X_6] = (1 + \alpha)X_3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^{5,\alpha} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,5,7 \\
 [X_5, X_6] &= [X_6, X_7] = X_2 & [X_4, X_5] &= \alpha X_2 \\
 & & [X_5, X_7] &= X_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^{6,\alpha} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 4,6,7 \\
 [X_4, X_7] &= X_2 & ; \quad [X_2, X_4] &= \alpha X_5 \\
 [X_2, X_7] &= [X_3, X_4] = X_5
 \end{aligned}$$

Remarque : La famille $n_7^{1,\alpha}$ est constituée de lois filiformes et chaque loi de la famille $n_7^{2,\alpha}$ est caractéristiquement nilpotente.

La classification en dimension 7 :

Algèbres de Lie ayant comme suite caractéristique $s(\mathfrak{g}) = (6,1)$

(Algèbres de Lie filiformes) : [Il y a 08 algèbres]

$$\begin{aligned}
 n_7^{1,a} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 3 \leq i \leq 7, \\
 [X_4, X_5] &= aX_6 & [X_5, X_7] &= (1+a)X_3 \quad a \neq 0 \\
 [X_5, X_6] &= X_2 & [X_6, X_7] &= (1+a)X_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^2 : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 3 \leq i \leq 7, \\
 [X_4, X_7] &= X_2 & [X_5, X_7] &= X_3 & [X_6, X_7] &= X_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^3 : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 3 \leq i \leq 7, \\
 [X_4, X_7] &= X_2 & [X_5, X_7] &= X_3 & [X_6, X_7] &= X_2 + X_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^4 : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 3 \leq i \leq 7, \\
 [X_4, X_7] &= X_2 & [X_5, X_6] = -X_2 \\
 [X_5, X_7] &= X_2 & [X_6, X_7] = X_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^5 : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 3 \leq i \leq 7, \\
 [X_5, X_7] &= X_2 & [X_6, X_7] = X_2 + X_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^6 : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 3 \leq i \leq 7, \\
 [X_5, X_7] &= X_2 & [X_6, X_7] = -X_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^7 : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 3 \leq i \leq 7, \\
 [X_6, X_7] &= X_2
 \end{aligned}$$

$$n_7^8 : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \quad 3 \leq i \leq 7,$$

Algèbres de Lie avec pour suite caractéristique $s(\mathfrak{g}) = (5,1,1)$:

[Il y a 38 algèbres]

$$\begin{aligned}
 n_7^9 : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 4 \leq i \leq 7, \\
 [X_2, X_6] &= \frac{1}{2} X_3 & [X_5, X_6] = \frac{1}{2} X_3, \quad [X_2, X_7] = X_3 - \frac{1}{2} X_4 \\
 [X_5, X_7] &= X_3 - \frac{1}{2} X_4 & [X_6, X_7] = \frac{1}{2} X_3 + \frac{1}{2} X_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^{10} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & 4 \leq i \leq 7, \\
 [X_4, X_7] &= X_2 & [X_5, X_6] = -X_2 \\
 [X_5, X_7] &= X_3 & [X_6, X_7] = X_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^{28} : \quad & [X_1, X_i] = X_{i-1} && 4 \leq i \leq 7, \\
 & [X_2, X_6] = X_3 && [X_2, X_7] = X_3 + X_4, \quad [X_5, X_6] = X_3 \\
 & [X_5, X_7] = X_4 && [X_6, X_7] = X_5 \\
 n_7^{42} : \quad & = n_6^1 \oplus a_1 && n_7^{43} := n_6^2 \oplus a_1 \quad n_7^{44} := n_6^3 \oplus a_1 \\
 n_7^{45} : \quad & = n_6^4 \oplus a_1 && n_7^{46} := n_6^5 \oplus a_1
 \end{aligned}$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique est $s(\mathfrak{g}) = (4,1,1,1)$:

[Il y a 13 algèbres]

$$\begin{aligned}
 n_7^{47} : \quad & [X_1, X_i] = X_{i-1} && 5 \leq i \leq 7, \\
 & [X_2, X_3] = X_4 && [X_2, X_6] = X_4 \\
 & [X_2, X_7] = X_5 && [X_6, X_7] = X_4 \\
 n_7^{48} : \quad & [X_1, X_i] = X_{i-1} && 5 \leq i \leq 7, \\
 & [X_2, X_3] = X_4 && [X_2, X_6] = X_4, \quad [X_2, X_7] = X_5 \\
 n_7^{53} : \quad & = n_6^6 \oplus a_1 && n_7^{54} := n_6^8 \oplus a_1 \quad n_7^{55} := n_6^9 \oplus a_1 \\
 n_7^{56} : \quad & = n_6^{10} \oplus a_1 && n_7^{57} := n_6^{11} \oplus a_1 \quad n_7^{58} := n_5^1 \oplus a_2 \\
 n_7^{59} : \quad & = n_5^2 \oplus a_2
 \end{aligned}$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique est $s(\mathfrak{g}) = (4,2,1)$:

[Il y a 25 algèbres]

$$\begin{aligned}
 n_7^{60} : \quad & [X_1, X_i] = X_{i-1} && i = 3,4,5,7, \\
 & [X_3, X_5] = X_6 && [X_4, X_5] = X_7, \quad [X_5, X_7] = X_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{61} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,5,7, \\ [X_3, X_5] &= X_6 & [X_4, X_5] &= X_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{72} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,5,7, \\ [X_6, X_7] &= X_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{73} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,5,7, \\ [X_4, X_7] &= X_2 & [X_5, X_6] &= X_2, [X_5, X_7] = 2X_3 + X_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{82} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,5,7, \\ [X_4, X_5] &= X_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{83} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,5,7, \\ [X_5, X_7] &= X_2 \end{aligned}$$

$$n_7^{84} : \quad [X_1, X_i] = X_{i-1} \quad i = 3,4,5,7,$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique est $s(\mathfrak{g}) = (3,3,1)$:

[Il y a 17 algèbres]

$$\begin{aligned} n_7^{85} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,6,7, \\ [X_4, X_7] &= X_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{86} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,6,7, \\ [X_4, X_7] &= X_2 & [X_3, X_4] &= X_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{92} : \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3,4,6,7, \\ [X_3, X_4] &= X_2 + X_5 & [X_3, X_7] &= X_5 \end{aligned}$$

$$[X_4, X_7] = X_6$$

$$n_7^{93} : \begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 3,4,6,7, \\ [X_3, X_4] = X_2 & [X_6, X_7] = X_5 \end{array}$$

$$n_7^{100} : \begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 3,4,6,7, \\ [X_3, X_7] = X_2 & [X_4, X_6] = X_2 \end{array}$$

$$n_7^{101} : \begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 3,4,6,7, \\ [X_3, X_4] = X_2 & \end{array}$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique $s(\mathfrak{g}) = (3,2,1,1)$:

[Il y a 40 algèbres]

$$n_7^{102} : \begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 4,6,7, \\ [X_4, X_7] = X_2 & \end{array}$$

$$n_7^{103} : \begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 4,6,7, \\ [X_4, X_7] = X_5 & [X_6, X_7] = X_2 \end{array}$$

$$n_7^{121} : \begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 4,6,7, \\ [X_2, X_7] = X_3 & [X_6, X_7] = X_3 \end{array}$$

$$n_7^{122} : \begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i-1} & i = 4,6,7, \\ [X_2, X_4] = X_3 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^{134} &: = n_6^{13} \oplus a_1 & n_7^{135} &:= n_6^{14} \oplus a_1 & n_7^{136} &:= n_6^{19} \oplus a_1 \\
 n_7^{137} &: = n_6^{20} \oplus a_1 & n_7^{138} &:= n_6^{17} \oplus a_1 & n_7^{139} &:= n_6^{18} \oplus a_1 \\
 n_7^{140} &: = n_4^1 \oplus n_3^1 & n_7^{141} &:= n_6^{15} \oplus a_1
 \end{aligned}$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique $s(\mathfrak{g}) = (3,1,1,1,1)$:

[Il y a 05 algèbres]

$$\begin{aligned}
 n_7^{142}: \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 6, 7, \\
 [X_2, X_3] &= X_5 & [X_4, X_7] &= X_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^{143} &: = n_5^3 \oplus a_2 & n_7^{144} &:= n_6^{22} \oplus a & n_7^{145} &:= n_5^4 \oplus a_2 \\
 n_7^{146} &: = n_5^5 \oplus a_2
 \end{aligned}$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique $s(\mathfrak{g}) = (2,2,2,1)$:

[Il y a 04 algèbres]

$$\begin{aligned}
 n_7^{147}: \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3, 5, 7, \\
 [X_3, X_5] &= X_4 & [X_5, X_7] &= X_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^{148}: \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3, 5, 7, \\
 [X_3, X_5] &= X_6 & [X_5, X_7] &= X_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_7^{149}: \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i &= 3, 5, 7, \\
 [X_5, X_7] &= X_2
 \end{aligned}$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique $s(\mathfrak{g}) = (2,2,1,1,1)$:

[Il y a 06 algèbres]

$$\begin{aligned} n_7^{151}: \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i = 5, 7, \\ [X_2, X_3] &= X_4 & [X_2, X_5] = X_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{152}: \quad [X_1, X_i] &= X_{i-1} & i = 5, 7, \\ [X_2, X_3] &= X_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_7^{153}: &= n_6^{21} \oplus a & n_7^{154}: &= n_6^{23} \oplus a & n_7^{155}: &= n_6^{24} \oplus a \\ n_7^{156}: &= n_5^5 \oplus a_2 \end{aligned}$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique $s(\mathfrak{g}) = (2,1,1,1,1,1)$:

[Il y a 03 algèbres]

$$n_7^{157}: \quad [X_1, X_7] = X_6 \quad [X_2, X_3] = X_6 \quad [X_4, X_5] = X_6$$

$$n_7^{158}: \quad = n_5^6 \oplus a_2 \quad n_7^{159}: \quad = n_3^1 \oplus a_4$$

Algèbres de Lie dont la suite caractéristique $s(\mathfrak{g}) = (1,1,1,1,1,1,1)$:

[Il y a une seule algèbres]

$$n_7^{160}: \quad a_7.$$

Chapitre 4

Algèbres de Lie 2-nilpotentes et structures symplectiques

I. Algèbre de Lie 2-nilpotente :

I.1. Définition 1 : Une algèbre de Lie 2-nilpotente A est une algèbre de Lie telle que DA est contenu dans $Z A$, c'est -à-dire :

$$\forall x, y, z \in A, [[x, y], z] = 0.$$

On appelle corang de A l'entier $s = \dim Z A - \dim DA$, codimension de DA dans $Z A$.

(On désigne par DA l'idéal dérivé, et par $Z A$ le centre de A).

i.e. $DA = \langle [x, y] \rangle, x, y \in A$.

et $Z A = \{x \in A / [x, y] = 0, \forall y \in A\}$.

I.2. Exemples :

- Une algèbre abélienne est 2-nilpotente.
- L'algèbre de Heisenberg de dimension $2k + 1$ est 2-nilpotente.

Proposition 1 : Toute algèbre de Lie 2-nilpotente A est produit direct d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie 2-nilpotente de corang nul, uniques à isomorphismes près.

Toute algèbre de Lie 2-nilpotente de corang nul est isomorphe à une algèbre de Lie $B = V \oplus W^*$ où W est un sous-espace vectoriel de support maximal de $\Lambda^2 V^*$, dont le crochet est celui défini ci-dessus.

Remarque 1 : On appelle $(n = \dim V, r = \dim W)$ le type de l'algèbre de Lie B ; à une algèbre de Lie 2-nilpotente, on associe ainsi trois entiers n, r et s , invariants arithmétiques qui vérifient :

$$\dim D(A) = r, \dim Z(A) = r + s \text{ et } \dim A = n + r + s.$$

Ont décrites les algèbres de Lie 2-nilpotentes ayant $n \leq 4$ générateurs.

Comme $DA = ZA$, le crochet sur A est connu quand il l'est pour deux vecteurs quelconques d'un supplémentaire V de ZA dans A : c'est une fonction bilinéaire alternée de $V \times V$ dans $W = DA$, donc une application linéaire $\varphi : \Lambda^2 V \rightarrow W$ surjective.

Par dualité, cela équivaut à la donnée de $\psi = \iota_\varphi : W^* \rightarrow \Lambda^2 V^*$

application linéaire injective et on indentifie W^* à son image dans $\Lambda^2 V^*$ qui est un sous-espace vectoriel W' de $\Lambda^2 V^*$.

Proposition 2 : Il y a une correspondance naturelle entre sous-espace vectoriels de $\Lambda^2 V^*$ de radical nul et algèbre de Lie 2-nilpotentes

$A = V \oplus DA$, où $ZA = DA$.

II. Classification des algèbres dont l'idéal dérivé est de petite dimension :

- **Le cas où $\dim DA = 1$** : est bien connu et facile : alors l'algèbre A est produit direct de l'algèbre de Heisenberg H_k de dimension $2k+1$ et d'une algèbre abélienne. L'algèbre H_k a pour base $e_i, 1 \leq i \leq 2k$ et f avec $[e_{2j-1}, e_j] = f$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$, tous les autres crochets étant nuls.
- **Dans le cas où $\dim DA = 2$, et $\dim V = 2n$** , le cas $n = 2$ donne deux algèbres non isomorphes $H_1 \times H_1$ et l'algèbre L_6 de base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2\}$ avec $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = f_1$ et $[e_1, e_3] = f_2$.

Proposition 3 : Sur un corps K de caractéristique différente de 2 et 3,

$\Lambda^2 K^6$ admet sept types de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$, on désigne par $\{e_1, \dots, e_6\}$ une base de K^6 .

$$H_1 \quad u_1 = e_1 e_3 + e_2 e_4 \quad u_2 = e_1 e_5 + e_2 e_6$$

$$H_2 \quad u_1 = e_1 e_4 + e_2 e_5 + e_3 e_6 \quad u_2 = e_1 e_2$$

$$H_3 \quad u_1 = e_1 e_4 + e_2 e_5 + e_3 e_6 \quad u_2 = e_1 e_2 + e_3 e_4$$

$$H_4 \quad u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 \quad u_2 = e_1 e_3 + e_5 e_6$$

$$H_5 \quad u_1 = e_1 e_2 \quad u_2 = e_3 e_4 + e_5 e_6$$

$$H_6 \quad u_1 = e_1 e_2 + e_5 e_6 \quad u_2 = e_1 e_2 + e_3 e_4$$

$$H_6(p, q) \quad u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 + e_5 e_6 \quad u_2 = e_1(e_4 + p e_5) + e_2 e_6 + q e_3 e_5$$

Il n'y a donc, qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme d'algèbre de Lie 2-nilpotente de dimension 8 dont l'idéal dérivé est de dimension au plus 2.

Le cas général avec $\dim DA = 2$, sur un corps algébriquement clos, se traite de la même manière et on a le

Théorème 1 : Soit H un plan de $\wedge^2 K^{2n}$ dont l'invariant γ_n est une forme binaire à racines distinctes. Alors il existe une base $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 2n$ de K^{2n} et des scalaires $\lambda_4, \dots, \lambda_n \notin \{0, 1\}$ tels que H a une base :

$$u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 + \dots + e_{2n-3} e_{2n-2}$$

$$u_2 = e_3 e_4 + \lambda_4 e_5 e_6 + \dots + \lambda_n e_{2n-3} e_{2n-2} + e_{2n-1} e_{2n}.$$

III. Algèbres de Lie 2-nilpotentes symplectiques :

Définition 2 : Un 2-cocycles ω de A à valeurs dans K , est une forme bilinéaire alternée vérifie :

$$\omega([x, y], z) + \omega([y, z], x) + \omega([z, x], y) = 0$$

quels que soient x, y et z dans A .

L'espace des 2-cocycles est noté $Z^2(A, K)$.

Un 2-cobord ω de A à valeurs dans K , est une forme bilinéaire alternée vérifie :

$$\omega(x, y) = f([x, y]) \text{ où } f \in A^*.$$

L'espace des 2-cobords est noté $B^2(A, K)$.

L'espace de cohomologie est $H^2(A, K) = Z^2(A, K)/B^2(A, K)$.

Une algèbre de Lie A est dite symplectique, s'il existe un 2-cocycles $\omega \in Z^2(A, K)$, non dégénérée.

A part la condition que l'algèbre est de dimension paire, il n'y a pas des conditions nécessaires (ou suffisantes) simple assurant qu'une algèbre de Lie soit symplectique.

Comme les algèbres 2-nilpotentes A sont particulièrement maniables, on peut se demander s'il existe dans ce cas des critères permettant de savoir si A est symplectique ou non.

Par exemple, un calcul facile donne le résultat si $\dim DA = 1$.

Proposition 4 : Soit $A = H_k \times K^{2j+1}$ le produit direct de H_k (algèbre de Heisenberg de dimension $2k + 1$) par une algèbre abélienne de dimension impaire : A est symplectique si et seulement si $k = 1$.

Si $k = 1$, $A = H_1 \times K^{2j+1}$, soient $\{g_1, \dots, g_{2j+1}\}$ une base de K^{2j+1}

et $\{e_1, e_2, f\}$ une base de H_1 avec $[e_1, e_2] = f$.

On calcul $d\omega(x, y, z) = \omega([x, y], z) + \omega([y, z], x) + \omega([z, x], y) = 0$, pour $x, y, z \in \{e_1, e_2, f, g_1, \dots, g_{2j+1}\}$.

On trouve $\omega(f, f) = 0$; $\omega(f, g_i) = 0$, pour $i \in \{1, \dots, 2h + 1\}$.

Dans ce cas on peut trouver une forme bilinéaire alternée :

$$\omega = e_1^* f^* + e_2^* g_1^* + \sum_{i=1}^j g_{2i}^* g_{2i+1}^*$$

qui est non dégénérée, d'où A est symplectique.

Si $k > 1$, il existe une base $\{e_i\}$, $i \in \{1, \dots, 2k + 1\}$ de A , avec :

$$[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = \dots = [e_{2k-1}, e_{2k}] = e_{2k+1}$$

et tous les autres crochets de A sont nuls.

En appliquant la relation des cocycles avec : $x = e_1$, $y = e_2$, $z = e_i$

où $i > 2$. puis $x = e_1$ ou e_2 et $(y, z) = (e_3, e_4)$ à $\omega \in Z^2(A, Z)$

on voit que $e_{2k+1} \in \text{Rad } \omega$.

➤ **Le cas où $\dim \mathbf{D}(A) = 2$** : est déjà plus délicat puisque comme on le verra $H_1 \times H_1$ est symplectique.

Soit A une algèbre de Lie 2-nilpotente, x un élément non nul de A .

Le centralisateur $Z(x)$ de x dans A , $\ker \text{ad}x$, contient $Z(A)$, donc $D(A)$; c'est donc un idéal de A et on désigne par D_x son idéal dérivé,

i.e. $D_x = [\ker \text{ad}x, \ker \text{ad}x]$.

Soit maintenant A une K -algèbre de Lie, on définit les ensembles suivants :

$$\Delta_1(A) = \bigcap_{x \in A} D_x \text{ et } \Delta_2(A) = \bigcap_{\omega \in Z^2(A, K)} \text{Rad} \omega$$

$\Delta_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de A .

Proposition 5 : Pour toute K -algèbre de Lie A , on a :

$$\Delta_1(A) \subset \Delta_2(A) \subset Z(A).$$

On a $Z(A) = \bigcap_{\omega \in B^2(A, K)} \text{Rad} \omega$:

si $x \notin Z(A)$, $\exists y \in A$, $[x, y] \neq 0$ et $\exists f \in A^*$ tel que :

$$f([x, y]) \neq 0.$$

i.e. $d_f(x, y) \neq 0$, donc $x \notin \text{Rad}(d_f)$.

Soit $y \in \Delta_1(A)$ et $z \in A$. Comme $y \in D_x$, il existe $u_i, v_i \in \ker \text{ad}x$ tel que :

$$y = \sum_i [u_i, v_i], \text{ pour } \omega \in Z^2(A, Z)$$

$$\omega(y, z) = \sum_i \omega([u_i, v_i], z) = - \sum_i [\omega(u_i, [v_i, x]) + \omega(v_i, [x, u_i])] = 0,$$

$$\text{car } [v_i, x] = [x, u_i] = 0$$

donc $\omega(y, z) = 0$ et $\Delta_2(A)$ contient $\Delta_1(A)$.

Corollaire 1 : Si $\Delta_1(A) \neq \{0\}$, A n'est pas symplectique.

Lemme 1 : Soit H_k l'algèbre de Heisenberg de dimension $2k + 1$, alors :

$$\Delta_1(H_k) = Z(H_k), \text{ pour } k \geq 2.$$

Un simple calcul, donne :

$$D_{e_i} = Z(H_k), \text{ pour tout } i, \quad 1 \leq i \leq 2k + 1.$$

D'où $\Delta_1(H_k) = Z(H_k)$.

Ceci montre bien, que pour $k \geq 2$, l'algèbre A de proposition 4 , n'est jamais symplectique.

Lemme 2 : Une condition nécessaire pour que A soit symplectique est que :
pour tout $\omega \in Z^2(A, K)$; $D(A) \perp_{\omega} Z(A)$.

En effet, pour $z \in Z(A)$, la relation des cocycles donnent :

$$\omega([x, y], z) = -\omega([y, z], x) - \omega([z, x], y) = 0.$$

Ce qui signifie que $D(A)$ est totalement isotrope et que :

$$\dim D(A) + \dim Z(A) \leq \dim(A).$$

On a donc le :

Lemme 3 : Si A est une algèbre de Lie 2-nilpotente ($A \supset Z(A) \supset D(A)$)
avec $\dim D(A) > \frac{1}{2} \dim A$, A n'est pas symplectique.

Nous allons donner quelques exemples des algèbres de Lie 2-nilpotentes symplectiques dont l'idéal dérivé est de petite dimension :

➤ **Cas $\dim D(A) = 2$ et $\dim V = 2n$:** pour $n = 2$,

A est de dimension 6, alors

$A = H_1 \times H_1 = L_{6,2}$, l'algèbre de Lie générique pour ce type,
est symplectique.

En effet, soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2\}$ une base de A avec :

$$[e_1, e_2] = f_1 ; [e_3, e_4] = f_2.$$

On remarque que $D_{e_i} = Kf_2$, pour $i = 1, 2$ et Kf_1 , pour $i = 3, 4$.

Dans ce cas $\Delta_1(A) = \{0\}$.

Le calcul de $d\omega(x, y, z) = 0$, se fait simplement :

$$\omega(f_1, e_3) = \omega(f_1, e_4) = \omega(f_2, e_1) = \omega(f_2, e_2) = 0.$$

La forme bilinéaire alternée $\omega = e_1^*e_3^* + e_2^*f_1^* + e_4^*f_2^*$ est non dégénérée,

car $\gamma_3(\omega) \neq 0$.

Si A est l'algèbre $L_{6,3}$ de base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2\}$ avec

$$[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = f_1 \text{ et } [e_1, e_3] = f_2.$$

A est encore symplectique : le même calcul donnent

$$\omega(f_1, e_3) = \omega(f_2, e_2), \omega(f_1, e_1) = \omega(f_4, e_2)$$

$$\text{et } \omega(f_1, e_4) = \omega(f_1, e_2) = \omega(f_1, f_2) = 0.$$

On vérifie que :

$$\omega = e_2^*f_2^* + e_3^*f_1^* + e_1^*f_1^* + f_2^*e_4^* + e_3^*e_4^*$$

où $\{e_i^*\}$ est la base duale de $\{e_i\}$, fait de $L_{6,3}$ une algèbre de Lie symplectique.

Pour $n = 3$ et A est de dimension 8, on prend l'algèbre $A = H_k \times H_1, k = 2$.

Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, f_1, f_2\}$ une base de A avec :

$$[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = f_1 \text{ et } [e_5, e_6] = f_2$$

alors $D_{e_i} = D(A)$, pour $i \leq 4$ et Kf_1 , pour $i = 5, 6$.

Dans ce cas $\Delta_1(A) = Kf_1 \neq \{0\}$, alors A n'est pas symplectique.

Ce résultat est vrai pour $k \geq 3$, dans ce cas $\dim A = 2k + 4$

et $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = \dots = [e_{2k-1}, e_{2k}] = f_1, [e_{2k+1}, e_{2k+2}] = f_2.$

Alors $\Delta_1(A) = Kf_1 \neq \{0\}.$

➤ **Cas $\dim D(A) = 3$ et $\dim A = 6$:** on prend A l'algèbre $L_{6,1}$ et soit

$\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$ une base de A avec :

$$[e_1, e_2] = f_3, [e_1, e_3] = f_2 \text{ et } [e_2, e_3] = f_1.$$

Le calcul de $d\omega$ donnent : $\omega(f_3, e_3) + \omega(f_1, e_1) - \omega(f_2, e_2) = 0,$

la 2-forme sur $L_{6,1}, \omega = e_1^*f_1^* + e_2^*f_2^* + e_3^*f_1^* + e_1^*f_3^*$

fait de $L_{6,1}$ une algèbre symplectique.

Proposition 6 : Les algèbres données par le théorème 1, Où $n \geq 3$, c'est-à-dire de dimension supérieure ou égale à 8 et d'idéal dérivé de dimension 2 ne sont pas symplectiques.

IV. Classification des algèbres de Lie 2-nilpotentes symplectique de dimension ≤ 6

Toute algèbre de Lie 2-nilpotente symplectique de dimension ou égale à 6 est l'un des types suivant :

Dimension 2 :

$$K^2$$

Dimension 4 :

$$K^4$$

$$H_1 \times K$$

Dimension 6 :

$$\mathbb{K}^6$$

$$H_1 \times \mathbb{K}^3$$

$$H_1 \times H_1 = L_{6,2} \quad (D(A) = Z(A))$$

$$L_{5,1} \times \mathbb{K} \quad \text{ou} \quad L_{5,1} = \{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2\}, \text{ avec}$$

$$[e_1, e_2] = f_1 \text{ et } [e_1, e_3] = f_2$$

$$L_{6,1} \quad (D(A) = Z(A))$$

$$L_{6,3} \quad (D(A) = Z(A))$$

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier les algèbres de Lie nilpotentes.

Des définitions, des propriétés premières et quelques exemples d'algèbre de Lie nilpotentes ont été donnés dans ce mémoire.

Nous étudions aussi les algèbres de Lie 2-nilpotentes à structure symplectique.

Bibliographie

- [1] **N.BOURBAKI**, Algèbre, chapitre 9, Hermann, Paris, 1959.
- [2] **R .CARLES**, variétés des algèbres de Lie de dimension inférieure ou égale à 7.C.R.A.Sc.Paris, Sér. A, 1979, t, 289, 263, 266.,
- [3] **G .FAVRE**, Une algèbre de Lie caractéristiquement nilpotente de dimension 7. C.R.A.Sc.,Paris, sér. A, 1972, t. 274, 1338-1339.
- [4] **G. LEGER, TOGO. S**, characteristically nilpotent Lie algebras. Duke Math. J., 1959,v. 26,N° 4, 623-628.
- [5] **M.GOZE et You KHAKIMDJANOV**, algèbres de Lie nilpotentes complexes, Université de haute alsace, 1992-1993 .
- [6] **N. MIDOUNE**, Algèbres de Lie 2-nilpotentes et structures symplectique .Journal of Lie theory, 23(2013) ,NO,1,217-228.
- [7] **Ph. REVOY**, Algèbre de Lie métabéliennes, Annales Faculté des sciences Toulouse, II, (1980), 93-100.
- [8] **J.SCHEUNEMAN**, Two-step nilpotent Lie algebras, J. algebra ,7, (1967), 152-159.

نَجْمِ الْكَلْبِ