Université de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Departement des Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Option: Equation Aux Dérivées Partielles

Par

OUAGUENI NOURA

THÈME

L'EQUATION DES MILIEUX POREUX FRACTIONNAIRE

Soutenu le : 30/05/ 2016

Devant le jury composé de :

1)- N. Benhamidouche	Pr. Univ de M'sila Présiden
2)-Y. Arioua.	MC. Univ de M'sila Rapporteur
3)-F. Mihoubi	MA. Univ de M'sila Examinateur

Dirigé par:

Mr.ARIOUA YACINE

Année: **2015/2016**

Remerciements

Au terme de ce modeste travail, Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur ***Mr. Arioua Yacine*** *pour sa patience, sa compétence, son aide précieuse le long de la réalisation de ce travail, Les discussions scienntifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail, Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.*

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail, Je n'oublie pas mes parents, pour leur contribution, leur soutiens et leur patience, et enfin j'adresse mes plus sincères remerciements à touts mes proches, mes amis et à tous ceux qui ont contribué de près et de loin à la réalisation de ce modeste travail par l'aide, la sympathie et le soutien moral.

Merci.

Table des matières

Introduction générale

Les équations de diffusion sont liées à plusieurs phénomènes physiques et chimiques, telles que la propagation d'épidémie par exemple, l'équation de diffusion non-linéaire appartient à cette classe d'équations aux dérivées partielles qui modélise de nombreux phénomènes, on peut citer en particulier: la filtration d'un gaz à travers un milieu poreux, la dynamique des populations, l'hydrologie,..etc(cf [9], [10], [17]), l'équation de diffusion non-linéaire (ou l'équation des milieux poreux) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle\left(u^{m}\right), \text{où } m > 1$$

Mathématiquement, elle peut être classée comme équation aux dérivées partielles de second ordre de type parabolique, (Basak et Murty, 1977, 1978 [3, 4]; Nakano, 1979, 1980 [[12], [13]]) . Ces derniers temps, il a été constaté récemment un regain d'intérêt dans l'étude de l'existence et le comportement des solutions exactes (Vàzquez, J.L [18], Sachdev [16]. A ce jour, au moins quatre solutions en fonction du temps ont été découvertes, en est généralement attribuée à Zel'dovich et Kompaneets (1950 [19]) et à Pattle (1959 [15]), et les autres à Barenblatt (1953 [5]). Barenblatt et Zel'dovich (1957 [6]) et Kalashinikov (1967 [9]), respectivement.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux équations de diffusion classiques et fractionnaires. Nous avons commencé par l'étude d'une équation de diffusion en temps. Ensuite, nous avons étudié l'équation de diffusion fractionnaires (avec un Laplacien fractionnaire) en temps définie par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^{s} u^{m} = 0, \quad m > 1,\ s \in (0,1)$$

où

$$(-\Delta)^{s}(u^{m}) = \mathcal{F}^{-1}(\left|\xi\right|^{2s} \mathcal{F}u^{m}).$$

Dans notre travail, on étudier l'existence des solutions auto-similaires de l'équation des milieux poreux fractionnaire, on va détailler le travail réalisé par Yanghong Huang qui va consister la base de notre travail, voir [8].

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous donnons la définition de l'équation des milieux poreux classique, les types de solution auto-similaire recherchée, nous donnons également la condition de similarité liée à cette équation, nous étudions une solution particulière de cette équation et certaines propriétés de la solution dite "Solution de Barenblatt".

Dans le second chapitre, nous présentons la nouvelle approche pour trouver des solutions exactes des équations aux dérivées partielles sous forme d'auto similarité générale, en appliquant la méthode dite "profils mobiles", une première application intéressante de cette méthode a concerné la classe d'équation de diffusion non-linéaire appelée aussi "l'équation des milieux poreux" qui a été réalisée.

Dans le troisième chapitre nous montrons l'existence de la solution auto-similaire (la forme auto-similaire classique) de l'équation des milieux poreux fractionnaire, nous utilisons quelques fonctions spéciales pour Laplacien fractionnaire(la fonction Gamma d'Euler, la fonction hypergéométrique de Gauss, ...etc.) qui apparaissant d'après l'application de Laplacien fractionnaire sur l'équation posé, nous donnons quelques préliminaires (par exemple, la transformation de Fourier, Laplacien fractionnaire).

Dans le quatrième chapitre, le travail traite essentiellement le cas des formes auto-similaires générales, dans ce cas on utilise la méthode des profils mobiles qui nous permet de chercher la solution de l'équation des milieux poreux fractionnaire(en particulier la recherche des coefficients $a(t)$, $c(t)$ et $b(t)$).

Chapitre 1

L'équation des milieux poreux

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions une solution particulière de l'équation des milieux poreux, Nous étudions certaines propriétés de la solution dite "**Solution de Barenblatt**" détaillé dans les travaux de Vàzquez [18].

Définition 1.0.1 *On appelle "**équation des milieux poreux**" (équation de diffusion non-linéaire) l'équation aux dérivées partielles*

$$\partial_t u(x,t) = \triangle_x (u^\alpha(x,t)),$$

$x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, *où* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1.1 Solution auto-similaire "Solution de Barenblatt"

Considérons l'équation de diffusion non-linéaire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \triangle(u^m(t,x)), \tag{1.1}$$

où $u(t,x)$ est une fonction des variables d'espace ($x \in \mathbb{R}^n$), et de temps ($t > 0$) et ($m > 1$). $\triangle(u^m(t,x)) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2(u^m(t,x))}{\partial x_j^2}$ (où Δ désigne l'opérateur de Laplace).

Définition 1.1.1 *Soit $Q \subseteq (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ un ouvert. Pour $m>1$, on définit l'espace*

$$C^1_{2,m}(Q) = \{u : Q \longrightarrow [0,+\infty[\big| \ u,\ \partial_t u,\ D_x^2 u^m \in C(Q)\}$$

Une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire (1.1) *sur Q est une fonction $u \in C^1_{2,m}(Q)$ qui satisfait* (1.1) *pour tout $(t,x)\in Q$.*

1.1.1 L'invariance d'échelle

Pour obtenir une solution explicite de l'équation de diffusion non-linéaire, nous voulons utiliser la notion des solutions auto-similaires.

Supposons que u est une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire dans $Q \subseteq (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$. Si $m>1$, Nous définissons une famille $(u_\lambda)_\lambda > 0$ d'invariance d'échelle de u donnée par :

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x).$$

En cherchant les valeurs constantes de α et β pour les quelles u_λ est une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire pour tout $\lambda > 0$.

On remplace u_λ dans l'équation de diffusion non-linéaire (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}(\lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x)) \\ &= \lambda^{\alpha+1}\frac{\partial}{\partial t}(u(\lambda t, \lambda^\beta x)). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta(u_\lambda^m(t,x)) &= \Delta(\lambda^{\alpha m} u^m(\lambda t, \lambda^\beta x)) \\ &= \lambda^{\alpha m + 2\beta}\Delta(u^m(\lambda t, \lambda^\beta x)). \end{aligned}$$

on a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t,x) = \lambda^{\alpha+1}\dfrac{\partial u}{\partial t}(\lambda t, \lambda^\beta x) \\ \Delta(u_\lambda^m(t,x)) = \lambda^{\alpha m+2\beta}\Delta(u^m(\lambda t, \lambda^\beta x)) \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t,x) - \Delta(u_\lambda^m(t,x)) &= \lambda^{\alpha+1}\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda t, \lambda^\beta x) - \lambda^{\alpha m+2\beta}\Delta(u^m(\lambda t, \lambda^\beta x)) \\ &= \lambda^{\alpha+1}[\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda t, \lambda^\beta x) - \lambda^{\alpha(m-1)+2\beta-1}\Delta(u^m(\lambda t, \lambda^\beta x))]. \end{aligned}$$

pour $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$. Cela veut dire que si u est solution de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, alors u_λ est aussi une solution de l'équation de diffusion non-linéaire si

$$\lambda^{\alpha+1}[\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda t, \lambda^\beta x) - \lambda^{\alpha(m-1)+2\beta-1}\Delta(u^m(\lambda t, \lambda^\beta x))] = 0,$$

donc on divise cette équation par $\lambda^{\alpha+1}$ on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda t, \lambda^\beta x) - \lambda^{\alpha(m-1)+2\beta-1}\Delta(u^m(\lambda t, \lambda^\beta x)) = 0,$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda t, \lambda^\beta x) = \lambda^{\alpha(m-1)+2\beta-1}\Delta(u^m(\lambda t, \lambda^\beta x)).$$

alors u_λ est une solution de l'équation (1.1) si

$$\alpha(m-1) + 2\beta - 1 = 0.$$

Solution auto-similaire

Définition 1.1.2 *On appelle "solution auto-similaire", d'une équation aux dérivées partielles est une fonction f de deux variables sous forme spéciale, transforme une EDP en EDO, il ya plusieurs formes ou bien types, par example*

1. $u(x,t) = t^\alpha f(\frac{x}{t^\beta})$, type classique
2. $u(x,t) = (\tau - t)^\alpha f(\frac{x}{(\tau-t)^\beta})$, type blow up
3. $u(x,t) = e^{\alpha t} f(\frac{x}{e^{\beta t}})$, type exponentielle
4. $u(x,t) = c(t) f(\frac{x}{a(t)})$, type générale,
   où $a(t)$ et $c(t)$ sont deux fonctions qui sont déterminées, telle que $c(t)$ est dite paramètre d'amplitude et $a(t)$ est dite paramètre d'échelle.

Nous avons démontré ainsi la proposition suivante :

Proposition 1.1.1 ***(L'invariance d'échelle de l'équation de diffusion non-linéaire)*** *Soit u une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$. Si α, $\beta > 0$ sont des constantes satisfaisants :*

$$\alpha(m-1) + 2\beta - 1 = 0,$$

et si pour $\lambda > 0$, on définit :

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x).$$

Alors u_λ est une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Calcul de la solution de Barenblatt

On donne maintenant le calcul de la solution u dite **"Solution de Barenblatt"** de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$, qui est invariante par échelle d'après la proposition précédente,Voir [18] pour plus de detail.

Pour (t,x) fixé, nous cherchons la solution pour $\lambda = \frac{1}{t}$, on a donc la forme :

$$u(t,x) = t^{-\alpha}u(1.t^{-\beta}x) = t^{-\alpha}v(t^{-\beta}x),$$

où $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $v(x) = u(1,x)$.

On remplace u dans l'équation de diffusion non-linéaire (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(t^{-\alpha}v(t^{-\beta}x)) \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1}v(t^{-\beta}x) + t^{-\alpha}\nabla v(t^{-\beta}x)\cdot(-\beta t^{-\beta-1}x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta(u^m) &= \Delta(t^{-\alpha m}v^m(t^{-\beta}x)) \\ &= t^{-\alpha m-2\beta}\Delta(v^m(t^{-\beta}x)),\end{aligned}$$

donc on déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^m) &= -\alpha t^{-\alpha-1}v(t^{-\beta}x) + t^{-\alpha}\nabla v(t^{-\beta}x)\cdot(-\beta t^{-\beta-1}x) - t^{-\alpha m-2\beta}\Delta(v^m(t^{-\beta}x)) \\ &= t^{-\alpha-1}[-\alpha v(t^{-\beta}x) - \nabla v(t^{-\beta}x)\cdot(\beta t^{-\beta}x) - t^{-(\alpha(m-1)+2\beta-1)}\Delta v^m(t^{-\beta}x)],\end{aligned}$$

puisque

$$\alpha(m-1) + 2\beta - 1 = 0.$$

nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u^m) = t^{-\alpha-1}[-\alpha v(t^{-\beta}x) - \nabla v(t^{-\beta}x)\cdot(\beta t^{-\beta}x) - \Delta v^m(t^{-\beta}x)]. \tag{1.2}$$

Nous multiplions (1.2) par $t^{\alpha+1}$ et utilisons le fait que u est une solution de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ on obtient :

$$\Delta(v^m)(t^{-\beta}x)+\nabla v(t^{-\beta}x)\cdot(\beta t^{-\beta}x)+\alpha v(t^{-\beta}x)=0. \tag{1.3}$$

notons $y=t^{-\beta}x$ la nouvelle variable, alors :

$$\Delta(v^m)(y)+\beta y\cdot\nabla v(y)+\alpha v(y)=0, \tag{1.4}$$

Jusqu'à présent, nous avons réduit le problème de recherche d'une solution de l'équation de diffusion non-linéaire (qui dépend du temps et de l'espace) à un problème de recherche d'une solution d'une équation qui ne contient que la variable d'espace. Par conséquent, nous essayons de trouver une solution radiale et régler pour (1.4)

$$v(y)=w(|y|),\ \text{pour } w:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

Soit $y\neq 0$, nous obtenons

$$\nabla v(y)\cdot y=w'(|y|)\ \frac{y}{|y|}\cdot y=w'(|y|)\,|y| \tag{1.5}$$

Rappelons la formule donnant le Laplacien d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^n$:
Pour tout $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a :

$$\Delta_y(\Phi)(|y|)=\Phi''(|y|)+\frac{n-1}{|y|}\Phi'(|y|),\ y\in\mathbb{R}^n$$

ainsi

$$\Delta(v^m)(y)=(w^m)''(|y|)+\frac{n-1}{|y|}(w^m)'(|y|). \tag{1.6}$$

par la représentation du Laplacien en coordonnées polaires. Soit $.r=|y|$. Insérer (1.5) et (1.6) dans (1.4), nous avons :

$$(w^m)''(r)+\frac{n-1}{r}(w^m)'(r)+\beta rw'(r)+\alpha w(r)=0. \tag{1.7}$$

Supposons que $\alpha=n\beta$, multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par r^{n-1}, on met l'égalité ci-dessus sous la forme :

$$r^{n-1}(w^m)''+(n-1)r^{n-2}(w^m)'+\beta r^n w'+nr^{n-1}\beta w=0,$$

ceci implique

$$(r^{n-1}(w^m)')' + (\beta r^n w)' = 0,\ r > 0$$

alors

$$\int (r^{n-1}(w^m)')' = -\int (\beta r^n w)',$$

ceci implique:

$$r^{n-1}(w^m)' = -\beta r^n w + Const,$$

donc en déduit que :

$$r^{n-1}(w^m)' + \beta r^n w = Const,\ r > 0$$

en supposant que $w(r) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $|y|$ soit assez grand, on trouve que la constante d'intégration ci-dessus est nulle.

L'équation différentielle devient ainsi :

$$(w^m)' + \beta r w = 0,\ \text{pour tout } r > 0,\ \text{avec } \lim_{r \longrightarrow +\infty} w(r) = 0. \tag{1.8}$$

Il est facile de résoudre cette équation différentielle. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\beta r w &= (w^m)' \\ &= ((w^{m-1})^{\frac{m}{m-1}})' \\ &= \frac{m}{m-1}(w^{m-1})^{\frac{m}{m-1}-1}(w^{m-1})' \\ &= \frac{m}{m-1} w (w^{m-1})'. \end{aligned}$$

Si $w > 0$ nous pouvons diviser par w pour obtenir :

$$(w^{m-1})' = -\frac{m-1}{m}\beta r,$$

et puisque les conditions sur le côté droit ne dépend pas de w nous pouvons résoudre pour w^{m-1} :

$$w^{m-1} = C - \frac{m-1}{2m}\beta r^2. \tag{1.9}$$

où C est une constante obtenue à partir de l'intégration. En définition 1.1.1 nous avons $u \geq 0$. Ainsi, $w \geq 0$. On prend la partie positive des deux côtés de (1.9). Nous obtenons :

$$w(r) = \left(C - \frac{m-1}{2m}\beta r^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}},\ r > 0, \tag{1.10}$$

où C est une constante positive quelconque.

on trouve que la fonction :

$$v(y) = \left(C - \frac{m-1}{2m}\beta\,|y|^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \tag{1.11}$$

est solution de l'équation :

$$\Delta(v^m)(y) + \beta y.\nabla v(y) + \alpha v(y) = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Comme la fonction w ci-dessus est clairement de classe C^1 au voisinage de $y = 0$, l'EDP :

$$\Delta(v^m)(y) + \beta y.\nabla v(y) + \alpha v(y) = 0,$$

est valable au sens des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

Enfin, pour tout $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ la solution $u(t, x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= t^{-\alpha} v(t^{-\beta} x) \\ &= t^{-\alpha} w(\left|t^{-\beta} x\right|) \\ &= \frac{1}{t^\alpha}\left(C - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Dans le calcul de u, on obtient les conditions :

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1 \text{ et } \alpha = n\beta,$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2}, \ \beta = \frac{1}{n(m-1)+2}. \tag{1.13}$$

Les formules (1.12) et (1.13) sont la solution de Barenblatt de l'équation de diffusion non-linéaire (1.1).

On résume l'analyse faite ci-dessus dans le théorème suivant.

Théorème 1.1.1 ***(Solution de Barenblatt)***[*18*].

Soient $C > 0$ une constante et :

$$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2}, \ \beta = \frac{1}{n(m-1)+2}.$$

La solution de Barenblatt de l'équation de diffusion non-linéaire (1.1) *définie par :*

$$U_{m,C}(t,x) : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

s'écrit comme :

$$U_{m,C}(t,x) = \frac{1}{t^\alpha}\left(C - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Proposition 1.1.2 ***(L'invariance d'échelle).***
Soit :

$$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2} \quad et \quad \beta = \frac{1}{n(m-1)+2}.$$

Alors pour tout $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda > 0$ *nous avons :*

$$U_{m,C}(t,x) = \lambda^\alpha U_{m,C}(\lambda t, \lambda^\beta x).$$

Preuve. Pour tout $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$. On a :

$$\begin{aligned} U_{m,C}(t,x) &= \frac{1}{t^\alpha}\left(C - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}} \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda t)^\alpha}\left(C - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{\left|\lambda^\beta x\right|^2}{(\lambda t)^{2\beta}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}} \\ &= \lambda^\alpha U_{m,C}(\lambda t, \lambda^\beta x). \end{aligned}$$

■

Ensuite, nous prouvons une propriété importante de la solution de Barenblatt de l'équation de diffusion non-linéaire.

Théorème 1.1.2 ***(Vitesse de propagation finie)***
Pour $t > 0$ *le support de* $U_{m,C}(t,.)$ *est borné. Plus précisément, nous avons :*

$$suppU_{m,C}(t,.) = \overline{B(0, r_{m,C}(t))},$$

où $r_{m,C}(t)$ *est définie par :*

$$r_{m,C}(t) : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \qquad r_{m,C}(t) = \left(\frac{2Cm}{\beta(m-1)}\right)^{\frac{1}{2}} t^\beta$$

De plus, $U_{m,C}(t,.)$ *est strictement positif sur* $B(0, r_{m,C}(t))$ *et nous avons les limites :*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} r_{m,C}(t) = 0, \qquad \lim_{t \longrightarrow \infty} r_{m,C}(t) = \infty.$$

Preuve. Si $t > 0$. puisque $U_{m,C}$ est positif

$$\text{supp} U_{m,C}(t,.) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / U_{m,C}(t,x) > 0\}},$$

maintenant, $U_{m,C}(t,x) > 0$ si et seulement si :

$$C - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}} > 0$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad C > \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{2mC}{\beta(m-1)} > \left(\frac{|x|}{t^\beta}\right)^2 \\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{2mC}{\beta(m-1)}\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{|x|}{t^\beta}, \end{aligned}$$

ce qui équivalent à

$$|x| < \left(\frac{2mC}{\beta(m-1)}\right)^{\frac{1}{2}} t^\beta = r_{m,C}(t).$$

donc

$$\text{supp} U_{m,C}(t,.) = \overline{B(0, r_{m,C}(t))},$$

■

La norme dans l'espace $L^1(\Omega)$

Définition 1.1.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, On définit la norme d'une fonction dans **l'espace** $L^1(\Omega)$ comme suite:*

$$\| f(x)\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

Théorème 1.1.3 *(**Conservation de la masse totale**).*
Si $C > 0$. La norme $\| U_{m,C}(t,.)\|_1$ est indépendante de $t > 0$.

Preuve. Soient $t_1, t_2 > 0$ et $\lambda = \frac{t_2}{t_1}$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'invariance d'échelle de la solution de Barenblatt (D'après la proposition 1.1.2) donne :

$$\begin{aligned} U_{m,C}(t_1, x) &= \lambda^\alpha U_{m,C}(\lambda t_1, \lambda^\beta x) \\ &= \lambda^\alpha U_{m,C}(t_2, \lambda^\beta x). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |U_{m,C}(t_1,x)|\,dx &= \lambda^{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} \left|U_{m,C}(\lambda t_1,\lambda^{\beta}x)\right|dx\\ &= \lambda^{\alpha-n\beta}\int_{\mathbb{R}^n} |U_{m,C}(\lambda t_1,x)|\,dx.\end{aligned}$$

et puisque $\alpha = n\beta$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |U_{m,C}(t_1,x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |U_{m,C}(t_2,x)|\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\| U_{m,C}(t_1,.)\|_1 = \| U_{m,C}(t_2,.)\|_1.$$

■

Compte tenu du théorème 1.1.3 nous définissons

Définition 1.1.4 *(**La masse totale**).*
Si $C > 0$. Alors $\| U_{m,C}(t,.)\|_1$ est appelée masse totale de $U_{m,C}$.

De la représentation de la solution de Barenblatt, il est claire que la masse totale de $U_{m,C}$ peut être contrôlée par le paramètre libre C. Nous avons une relation explicite entre ces quantités et ce paramètre dans le lemme suivant.

Lemme 1.1.1 *Si $C > 0$ et $\gamma = \frac{1}{m-1} + \frac{n}{2}$.*
Il existe une constante $a(m,n)$ telle que :

$$\| U_{m,C}(t,.)\|_1 = a(m,n)C^{\gamma},$$

où

$$a(m,n) = \pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{m-1}{2m}\beta\right)^{-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{m}{m-1})}{\Gamma(\frac{m}{m-1}+\frac{n}{2})}.$$

telle que Γ désigne la fonction Gamma d'Euler.

Preuve. Soit $M = \| U_{m,C}(t,.)\|_1$.
Grâce au Théorème 1.1.3 il suffit de montrer qu'il existe une constante $a(m,n)$, telle que

$$M = a(m,n)C^{\gamma}$$

On définit $k = \frac{m-1}{2m}\beta$. Par conséquence

$$U_{m,C}(1,x) = \left(C - k\,|x|^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}},$$

d'où

$$\begin{aligned} M &= \| U_{m,C}(1,.)\|_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(C - k\,|x|^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} dx \\ &= nV_n \int_0^\infty \left(C - kr^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} r^{n-1} dr. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ici V_n est le volume de la boule unité de dimension n.

Nous avons utilisé $U_{m,C}(1,.)$ qui est radiale. En substituant $s = rC^{\frac{-1}{2}}$ dans (1.14), donc on a :

$$s = rC^{\frac{-1}{2}} \Longrightarrow r = sC^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow dr = C^{\frac{1}{2}} ds, \text{ et } r^{n-1} = s^{n-1}C^{\frac{n-1}{2}},$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} M &= nV_n \int_0^\infty \left(C - Cks^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} C^{\frac{n-1}{2}} s^{n-1} C^{\frac{1}{2}} ds \\ &= C^\gamma nV_n \int_0^\infty \left(1 - ks^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} s^{n-1} ds, \end{aligned} \tag{1.15}$$

On remarque que la dernière intégrale s'annule pour $s > k^{\frac{-1}{2}}$. En posant le changement de variable :

$$t = ks^2 \Longrightarrow s = \left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow ds = \frac{dt}{2k^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}, \text{ et } s^{n-1} = \left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Alors l'intégrale (1.15) devient :

$$\begin{aligned} M &= C^\gamma nV_n \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{m-1}} \left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2k^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= C^\gamma \frac{n}{2} V_n k^{\frac{-n}{2}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m}{m-1}-1} t^{\frac{n}{2}-1} dt \\ &= C^\gamma \frac{n}{2} V_n k^{\frac{-n}{2}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{m-1}\right), \end{aligned}$$

telle que B est la fonction Bêta d'Euler, telle que

$$B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{m-1}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{m-1})}{\Gamma(\frac{m}{m-1} + \frac{n}{2})} \text{ et } V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler (nous définisons cette fonction et la fonction bêta dans le chapitre 03), nous constatons :

$$M = a(m,n)C^{\gamma},$$

avec

$$\begin{aligned} a(m,n) &= \frac{n}{2}V_n k^{\frac{-n}{2}} B(\frac{n}{2}, \frac{m}{m-1}) \\ &= \frac{n}{2}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\left(\frac{m-1}{2m}\beta\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{m-1})}{\Gamma(\frac{m}{m-1}+\frac{n}{2})}. \end{aligned}$$

Nous utilisons la relation $\Gamma(\frac{n}{2}+1) = \frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2}),$ (D'après les proprietés de la fonction Gamma d'Euler), Nous obtenons :

$$a(m,n) = \pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{m-1}{2m}\beta\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{m-1})}{\Gamma(\frac{m}{m-1}+\frac{n}{2})}.$$

$\blacksquare$

Chapitre 2

Solutions profils mobiles de l'équation des milieux poreux

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une nouvelle méthode dite "The Traveling Profile Method TPM [1]" pour chercher des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Cette méthode nous permet d'obtenir des solutions exactes de grandes classes d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

On donne également dans ce chapitre une application intéressante de cette méthode sur l'équation de diffusion non-linéaire appelée aussi l'équation des millieux poreux qui va appeler "solutions profils mobiles".

2.1 La méthode des profils mobiles

Considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_x u \tag{2.1}$$

où A_x est un opérateur différentiel linéaire ou non linéaire de la variable x.

Le principe de cette méthode est de chercher une solution du problème (2.1) sous la forme :

$$u(x,t) = c(t) f(\eta), \text{ avec } \eta = \frac{x - b(t)}{a(t)}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

où f est dans L^2, qu'on va appeler "profil de base".

En réalité cette forme de solution est une généralisation de la forme "auto-similaire".

Alors on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c}f(\eta) - c\frac{\dot{a}}{a}\eta f'(\eta) - c\frac{\dot{b}}{a}f'(\eta) \\ A_x u = \frac{c^p}{a^q}A_\eta f, \quad \text{avec} \quad p, q \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Les paramètres $c(t)$, $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions dépendant du temps t, sont déterminés par la solution de problème du minimisation :

$$\min_{\dot{a},\dot{b},\dot{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u \right|^2 dx, \tag{2.3}$$

par conséquent, nous obtenons le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, f \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \eta f'_\eta \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, f'_\eta \rangle = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

L'EDP (2.1) est transformée alors dans un ensemble de trois EDOs associées :

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c}\langle f, f \rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta f'_\eta, f \rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle \ f'_\eta, f \rangle = \frac{c^{p-1}}{a^q}\langle A_\eta f, f \rangle \\ \frac{\dot{c}}{c}\langle \eta f'_\eta, f \rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta f'_\eta, \eta f'_\eta \rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle \eta f'_\eta, f'_\eta \rangle = \frac{c^{p-1}}{a^q}\langle A_\eta f, \eta f'_\eta \rangle \\ \frac{\dot{c}}{c}\langle f, f'_\eta \rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta f'_\eta, f'_\eta \rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle f'_\eta, f'_\eta \rangle = \frac{c^{p-1}}{a^q}\langle A_\eta f, f'_\eta \rangle \end{cases} \tag{2.5}$$

Approximation à priori :

Soit :

$$V_t = \left\{ f, \ \eta f'_\eta, \ f'_\eta \right\}$$

le sous espace de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions associées à f à l'instant t .

De la relation (2.4) on déduit que $\frac{\partial u}{\partial t} - A_x u$ est orthogonale à V_t.

En particulier comme $\frac{\partial u}{\partial t} \in V_t$, alors

$$\langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = 0,$$

donc si aussi $A_x u$ appartient à V_t, alors la méthode nous fournit une solution exacte faible qui s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = c(t) f\left[\frac{x - b(t)}{a(t)}\right].$$

Maintenant nous voulons établir des conditions sur la méthode pour trouver des solutions exactes de l'équation (2.1).

Le premier résultat de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 [1] *Pour $f \in C^2 \cap L^2$; l'équation (2.1) admet une solution exacte sous la forme*

$$u(x,t) = c(t)\, f\left[\frac{x - b(t)}{a(t)}\right],$$

Si

1- $A_x u = \frac{c^p}{a^q} A_\eta f$, *pour* $p, q \in \mathbb{R}$.

2- *le "profil de base" est une solution de l'équation suivante :*

$$A_\eta f = \alpha f + \beta \eta f_\eta' + \gamma f_\eta', \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t)$ et $b(t)$ sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^p}{a^q}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\beta \\ \dot{b} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\gamma \end{cases} \tag{2.7}$$

Preuve. D'après le principe de l'estimation de cette méthode, si $A_x u$ appartient au sous espace V_t; alors la fonction $u(x,t) = c(t) f(\eta)$ est une solution exacte de l'équation (2.1), dans ce cas le terme $A_\eta f$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des fonctions, f, $\eta f_\eta'$ et f_η', donc

$$A_\eta f = \alpha f + \beta \eta f_\eta' + \gamma f_\eta', \text{ pour } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Le système (2.7) est obtenu comme suit :
Quand on remplace $A_\eta f$ par la combinaison $\alpha f + \beta \eta f_\eta' + \gamma f_\eta'$, dans (2.5), nous obtenons le système :

$$MX = \frac{c^{p-1}}{a^q} MF \tag{2.8}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} \langle f, f \rangle & \langle \eta f'_\eta, f \rangle & \langle f'_\eta, f \rangle \\ \langle \eta f'_\eta, f \rangle & \langle \eta f'_\eta, \eta f'_\eta \rangle & \langle \eta f'_\eta, f'_\eta \rangle \\ \langle f'_\eta, f \rangle & \langle \eta f'_\eta, f'_\eta \rangle & \langle f'_\eta, f'_\eta \rangle \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\dot{c}}{c} \\ -\frac{\dot{a}}{a} \\ -\frac{\dot{b}}{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

La matrice M dans le système (2.8) est symétrique et inversible, alors (2.8) devient

$$\begin{aligned} X &= \frac{c^{p-1}}{a^q} M^{-1} M F \\ &= \frac{c^{p-1}}{a^q} F \end{aligned}$$

qui peut être écrite sous la forme (2.7)

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^p}{a^q}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\beta \\ \dot{b} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\gamma \end{cases} .$$

■

Résolution du système différentiel :

Nous pouvons résoudre le système (2.7) comme suit :

De (2.7) nous avons

$$\begin{cases} c(t) = K_0 \ a(t)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta} \ a(t) + K_1 \end{cases}, \text{ avec } K_0, \ K_1 \text{ constants,} \tag{2.9}$$

supposons qu'on a les conditions aux limites suivantes : $a(0) = 1; c(0) = 1; b(0) = 0$, donc $K_0 = 1$, $K_1 = -\frac{\gamma}{\beta}$.

Si nous remplaçons (2.9) en (2.7), Nous obtenons :

$$a^{q+\frac{\alpha}{\beta}(p-1)-1} da = -\beta K_0^{p-1} dt$$

on déduire finalement :

(i) pour $\alpha(p-1)+q\beta > 0$:

$$\begin{cases} a(t) = (1-A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1-A\beta t)^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1-A\beta t)^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \ 0 < t < T. \tag{2.10}$$

avec $A = q + \frac{\alpha}{\beta}(p-1)$, et $T = \frac{1}{\alpha(p-1)+q\beta}$.

(ii) pour $\alpha(p-1)+q\beta = 0$:

$$\begin{cases} a(t) = \exp(-\beta t) \\ c(t) = \exp(\alpha t) \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\exp(-\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \ t > 0, \tag{2.11}$$

2.2 Application à l'équation des milieux poreux

Nous présentons maintenant une application intéressante de cette méthode. L'application concerne l'équation des millieux poreux.

Soit l'équation de la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^m)_{xx}, \ m > 1, \ \text{et } x \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

elle admet une solution exacte forme "profiles mobiles"

$$u(x,t) = c(t) f\left[\frac{x - b(t)}{a(t)}\right], \ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Si

1- $A_x u = \frac{c^m}{a^2}(f^m)^{"}$, $(p = m, \ \text{et } q = 2)$

2- le "profil de base" f est une solution de l'équation suivante :

$$(f^m)^{"} = \alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta, \quad \text{où} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

dans ce cas, les coefficients $c(t)$, $a(t)$ et $b(t)$ sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{c^m}{a^2}\alpha \\ \dot{a} = -\frac{c^{m-1}}{a}\beta \\ \dot{b} = -\frac{c^{m-1}}{a}\gamma \end{cases} \tag{2.14}$$

2.3 Solution exacte sous forme des profils mobiles

Le deuxième résultat de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 [2] *La fonction*

$$u\left(x,t\right)=c\left(t\right)f\left[\frac{x-b(t)}{a(t)}\right],$$

est une solution exacte du problème (2.12), où f est le "profil de base" solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left(f^{m}\right)^{"}=\alpha f+\beta\eta f_{\eta}'+\gamma f_{\eta}',\qquad \text{où}\ \ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},$$

dans ce cas, les coefficients $c\left(t\right),a\left(t\right),$ et $b\left(t\right)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t)=\left(1-A\beta t\right)\right)^{\frac{1}{A}} \\ c(t)=\left(1-A\beta t\right)\right)^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t)=\frac{\gamma}{\beta}\left(1-A\beta t\right)\right)^{\frac{1}{A}}-\frac{\gamma}{\beta} \end{cases},\quad 0<t<T \tag{2.15}$$

si $(m-1)\alpha+2\beta>0$ où $A=2+\frac{\alpha}{\beta}(m-1)$ et $T=\frac{1}{(m-1)\alpha+2\beta}$.
et donnés par :

$$\begin{cases} a(t)=\exp\left(-\beta t\right) \\ c(t)=\exp\left(\alpha t\right) \\ b(t)=\frac{\gamma}{\beta}\exp\left(-\beta t\right)-\frac{\gamma}{\beta} \end{cases},\quad 0<t<\infty, \tag{2.16}$$

si $(m-1)\alpha+2\beta=0$.

Preuve. D'après le principe de l'estimation de cette méthode, si

$$A_{x}u=\left(u^{m}\right)_{xx}$$

appartient au sous espace V_t; alors la fonction $u(x,t)=c(t)f(\eta)$ est une solution exacte de l'équation (2.1), dans ce cas le terme $\left(f^{m}\right)^{"}$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des fonctions, f, $\eta f_{\eta}^{'}$ et $f_{\eta}^{'}$, donc

$$\left(f^{m}\right)^{"}=\alpha f+\beta\eta f_{\eta}^{'}+\gamma f_{\eta}^{'},\ \text{pour}\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

Le système (2.7) est obtenu comme suit :

Quand on remplace $(f^m)''$ par la combinaison $\alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta$, dans (2.5), nous obtenons le système (2.8) :

$$MX = \frac{c^{m-1}}{a^2} MF$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} \langle f, f\rangle & \langle \eta f'_\eta, f\rangle & \langle f'_\eta, f\rangle \\ \langle \eta f'_\eta, f\rangle & \langle \eta f'_\eta, \eta f'_\eta\rangle & \langle \eta f'_\eta, f'_\eta\rangle \\ \langle f'_\eta, f\rangle & \langle \eta f'_\eta, f'_\eta\rangle & \langle f'_\eta, f'_\eta\rangle \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\dot{c}}{c} \\ -\frac{\dot{a}}{a} \\ -\frac{\dot{b}}{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

La matrice M dans le système (2.8) est symétrique et inversible, alors (2.8) peut être écrit sous la forme (2.7) :

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{c^m}{a^2}\alpha \\ \dot{a} = \frac{c^{m-1}}{a}\beta \\ \dot{b} = \frac{c^{m-1}}{a}\gamma \end{cases}.$$

Aux limites, supposons les conditions aux limites latérales $a(0) = 1; c(0) = 1; b(0) = 0$:

On voit que d'après (2.14), nous avons :

$$\begin{cases} c(t) = a(t)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\, a(t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \tag{2.17}$$

si nous remplaçons (2.17) en (2.14) on peut déduire finalement (2.15) :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t))^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < T,$$

pour $(m-1)\alpha + 2\beta > 0$ où $A = 2 + \frac{\alpha}{\beta}(m-1)$ et $T = \frac{1}{2\beta+(m-1)\alpha}$.
et (2.16) :

$$\begin{cases} a(t) = \exp(-\beta t) \\ c(t) = \exp(\alpha t) \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\exp(-\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases} , \quad 0 < t < \infty,$$

pour $(m-1)\alpha + 2\beta = 0$. ■

Chapitre 3

L'équation des milieux poreux fractionnaire

Introduction

Dans ce chapitre nous allons voir l'équation des milieux poreux fractionnaire, nous utiliserons quelques fonctions spéciales (par exemple, la fonction Gamma d'Euler, la fonction hypergéométrique de Gauss,...) qui apparaissant d'après l'application de Laplacien fractionnaire sur l'équation posé.

3.1 Préliminaires

3.1.1 La transformation de Fourier

La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes.

Cas de multi-dimension ($x \in \mathbb{R}^N$)

Définition 3.1.1 *La transformation de Fourier pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est donné par*

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i\,\xi\cdot x}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

la transformation inverse de Fourier dans $\mathbb{R}^N$est donné par

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

On a

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$$

Propriétés de la transformation de Fourier

1. **Linéarité**

$$\mathcal{F}[\lambda f(x) + \mu g(x)](\xi) = \lambda\mathcal{F}(f)(\xi) + \mu\mathcal{F}(g)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

2. **Translation**

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi), \quad (\xi,\ a \in \mathbb{R}^N),$$

3. **Changement d'échelle**

$$\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{\lambda^N}\mathcal{F}f(\frac{\xi}{\lambda}), \quad (\xi \in \mathbb{R}^N,\ \lambda > 0)$$

Définition 3.1.2 *(**L'espace de Schwartz** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). On dit que f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $f \in C^\infty$ et si f et toutes ses dérivées sont "décroissance rapide", c'est-à-dire que leur produit par un polynôme quelconque est une fonction bornée.*

3.1.2 Laplacien fractionnaire

Nous commençons l'étude de l'opérateur Laplacien fractionnaire avec sa définition par Fourier pour les fonctions de la classe de Schwartz.

Définition 3.1.3 (Définition par Fourier) *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur $(-\Delta)^s$ est défini par sa transformée de Fourier :*

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s f)(\xi) = (4\pi^2)^s \left|\xi\right|^{2s} \mathcal{F}(f)(\xi)$$

De plus, on a :

$$(-\Delta)^s(f) = \mathcal{F}^{-1}(\left|\xi\right|^{2s}\mathcal{F}f). \tag{3.0}$$

3.1.3 Quelques fonctions spéciales pour Laplacien fractionnaire

La Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma est l'un des joyaux des mathématiques, On la retrouve en analyse, en théorie des nombres, en théorie des probabilités et en théorie des représentations des groupes. Depuis Legendre, on définit la fonction Gamma comme suite :

1. **La fonction Γ comme une fonction de variable réelle**

   Pour $x \in [0, +\infty[$, on a
   $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$
   De plus, la fonction Γ vérifie à l'équation fonctionnelle :
   $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

et à l'égalité $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.1.1 *on a*

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

2. **La fonction Γ comme une fonction de variable complexe**

   La fonction Gamma d'une variable complexe($z \in \mathbb{C}$) est définie sous la forme :
   $$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$
   et on a l'équation fonctionnelle
   $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

La Fonction Bêta d'Euler

Définition 3.1.4 *La fonction **Bêta** est un type d'intégrale d'Euler définit pour tout complexes m et n par :*
$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt,\ \ \mathrm{Re}(m) > 0,\ \ \mathrm{Re}(n) > 0.$$
Cette fonction est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :
$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},\ \forall m,\ n : \mathrm{Re}(m) > 0,\ \ \mathrm{Re}(n) > 0$$

La Fonction Hypergéométrique de Gauss

La fonction hypergéométrique de Gauss est la solution de l'équation differentielle hypergéométrique d'Euler :

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=0,$$

pour tout nombres complexes a, b, c et z. la fonction hypergéométrique de Gauss est définie comme la somme de la série :

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1,$$

telle que $(a)_n$ est le symbole de pochhammer définit comme

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},\ (n\in\mathbb{N},\ \operatorname{Re}(a)>-n,\ a\notin\mathbb{Z}_0^-:=\{0,-1,-2,....\})$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma.

Il est connu que, lorsque $b=-n$ est un entier négatif, ${}_2F_1(a,-n;c;z)$ est une fonction polynomiale de degré n. En particulier, nous avons

$${}_2F_1(a,-1;c;z)=1-\frac{a}{c}z$$

voir [11] pour plus de detail.

Propriétés

La fonction hypergéométrique de Gauss admet les propriétés simples suivantes :

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b,c;z) &= {}_2F_1(b,a,c;z),\\
{}_2F_1(a,b,c;0) &= {}_2F_1(0,b,c;z)=1,\\
{}_2F_1(a,b,b;z) &= (1-z)^{-a},\\
{}_2F_1(a,b,c;1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad (\operatorname{Re}(c-a-b)>0),\\
{}_2F_1(a,b,c;z) &= (1-z)^{c-a-b}\times{}_2F_1(c-a,c-b,c;z),
\end{aligned}$$

et les relations de différentiation suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dz}\right)^n {}_2F_1(a,b,c;z) &= \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\times{}_2F_1(a+n,b+n,c+n;z),\quad (n\in\mathbb{N}).\\
\left(\frac{d}{dz}\right)^n\left[z^{a+n-1}\times{}_2F_1(a,b,c;z)\right] &= (a)_n z^{a-1}\times{}_2F_1(a+n,b,c;z),\quad (n\in\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Théorème 3.1.1 *[8] La transformation de Fourier implique la relation suivante (avec quelques restrictions aux paramètre ρ, μ, s) pour Laplacien fractionnaire des fonctions hypergéométriques générales*
$(-\Delta)^s[{}_2F_1(\frac{N}{4}+\frac{\mu-\rho}{2}, \frac{N}{4}-\frac{\mu+\rho}{2}, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})] = 2^{2s}R^{-2s}\frac{\Gamma\left(\frac{N}{4}+\frac{\mu-\rho}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{N}{4}-\frac{\mu+\rho}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{4}+\frac{\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N}{4}-\frac{\mu+\rho}{2}\right)}[{}_2F_1(\frac{N}{4}+\frac{\mu-\rho}{2}+s, \frac{N}{4}-\frac{\mu+\rho}{2}+s, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})]$.

Lemme 3.1.1 *[8] Si les fonctions hepergéométriques ${}_2F_1(a_1, b_1, c; x)$ et ${}_2F_1(a_2, b_2, c; x)$ non constantes sont identique pour $|x| < 1$, puis l'un ou l'autre $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ ou $a_1 = b_2$, $b_1 = a_2$.*

Notation 3.1.1 *Les solutions de* (3.1) *au-dessous deviennent positives instantanément [14].*

Proposition 3.1.1 *[8] Les profils de Barenblatt de la forme :*

$$\Phi(y) = (R^2 - |y|^2)_+^q, \ \text{ou } \Phi(y) = (R^2 + |y|^2)^{-q}$$

telle que $q, R > 0$, sont des fonctions hypergéométriques spéciales c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (R^2 - |y|^2)_+^q &= R^{2q}{}_2F_1(-q, c, c; \frac{|y|^2}{R^2}), \ \forall c \in \mathbb{C}. \\ (R^2 + |y|^2)^{-q} &= R^{-2q}{}_2F_1(q, c, c; -\frac{|y|^2}{R^2}), \ \forall c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Et d'après la notation précédente, nous choisirons toujours le profil de Barenblatt :

$$\Phi(y) = (R^2 + |y|^2)^{-q},$$

et le profil que nous sommes intéressés dans ces chapitres peut être écrit comme :

$$R^{-2q}{}_2F_1(q, \tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{2}; -\tfrac{|y|^2}{R^2}),$$

c'est-à-dire $c = \frac{N}{2}$, la moitié de la dimension de l'espace, pour assortir les paramètres dans la transformation de Fourier de $\Phi(y)$.

3.2 Solution auto-similaire "solution de Barenblatt"

On considère l'équation des milieux poreux fractionnaire suivante :

$$u_t + (-\Delta)^s u^m = 0, \quad m > 1, \; s \in (0, 1), \tag{3.1}$$

où $(-\Delta)^s(u^m) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F} u^m)$.

Proposition 3.2.1 ***(L'invariance d'échelle de l'équation des milieux poreux fractionnaire).***
Soit u une solution classique de l'équation des milieux poreux fractionnaire (3.1) dans $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.
Si α, $\beta > 0$ sont des constantes satisfaisant :

$$\alpha(m-1) + 2s\beta - 1 = 0,$$

et si pour $\lambda > 0$, on définit :

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

Alors u_λ est une solution classique de l'équation des milieux poreux fractionnaire dans $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Preuve. Maintenant, on considère la forme auto-similaire suivante :

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t) \tag{3.2}$$

On remplace u_λ dans l'équation (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_\lambda(x,t)) &= \frac{\partial}{\partial t}(\lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)) \\ &= \lambda^{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial t}(u(\lambda^\beta x, \lambda t)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s(u_\lambda^m(x,t)) &= (-\Delta)^s(\lambda^{m\alpha} u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)) \\ &= \lambda^{m\alpha}(-\Delta)^s(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)), \end{aligned}$$

pour calculer $(-\Delta)^s(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t))$, on a d'après la définition de Laplacien fractionnaire (3.0), on trouve :

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s f(\xi) &= \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\,\mathcal{F}(f)(\xi)) \\ &= \int |\xi|^{2s}\,\mathcal{F}(f)(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,\end{aligned}$$

par consequence :

$$(-\Delta)^s(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)) = \int |\xi|^{2s}\,\mathcal{F}(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t))e^{ix\cdot\xi}d\xi, \tag{3.4}$$

telle que :

$$\mathcal{F}(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)) = \int u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)e^{-ix\cdot\xi}dx, \tag{3.5}$$

on fait le changement de variable suivant :

$$y = \lambda^\beta x \implies dy = \lambda^\beta dx \implies dx = \frac{1}{\lambda^\beta}dy,$$

alors (3.5) devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)) &= \int (u^m(y, \lambda t))e^{-i(\frac{\xi}{\lambda^\beta})\cdot y}\frac{1}{\lambda^\beta}dy \\ &= \frac{1}{\lambda^\beta}\mathcal{F}(u^m(\frac{\xi}{\lambda^\beta}, \lambda t)),\end{aligned} \tag{3.6}$$

on remplace le résultat (3.6) dans (3.4), on obtient :

$$(-\Delta)^s(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)) = \int |\xi|^{2s}\,\mathcal{F}(u^m(\frac{\xi}{\lambda^\beta}, \lambda t))e^{ix\cdot\xi}\frac{d\xi}{\lambda^\beta}, \tag{3.7}$$

maintenant, on fait aussi le changement de variable, posons :

$$y = \frac{\xi}{\lambda^\beta} \implies \xi = \lambda^\beta y \;\text{ et }\; dy = \frac{d\xi}{\lambda^\beta},$$

ceci implique :

$$|\xi|^{2s} = \left|\lambda^\beta y\right|^{2s} = \lambda^{2s\beta}\,|y|^{2s},$$

alors l'égalité (3.7) devient :

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)) &= \int |y|^{2s}\,\mathcal{F}(u^m(y, \lambda t))e^{i(\lambda^\beta x)\cdot y}dy \\ &= \lambda^{2s\beta}(-\Delta)^s(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)),\end{aligned}$$

finalement, on obtient :

$$(-\Delta)^s(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)) = \lambda^{2s\beta}(-\Delta)^s(u^m(\lambda^\beta x, \lambda t)), \tag{3.8}$$

Donc, on remplace (3.3) et (3.8) dans l'équation (3.1), on trouve :

$$\lambda^{\alpha+1}\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^{\alpha m+2s\beta}(-\Delta)^s(u^m) = 0.$$

d'où

$$\lambda^{\alpha+1}\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda^{\alpha m+2s\beta}(-\Delta)^s(u^m) \tag{3.9}$$

On divise cette équation par $\lambda^{\alpha+1}$, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda^{\alpha m+2s\beta-1-\alpha}(-\Delta)^s(u^m), \tag{3.10}$$

Cela veut dire que si u est solution de l'équation (3.1), alors u_λ est aussi une solution de l'équation (3.1) si

$$\alpha(m-1) + 2s\beta = 1, \quad \forall \alpha, \beta > 0$$

cette condition est dite la condition de similarité. ■

D'après la proposition 3.2.1, si on pose $\alpha = N\beta$, alors :

$$\beta = \frac{1}{2s + N(m-1)}.$$

Pour $\lambda t = 1$ fixé, nous cherchons la solution pour $\lambda = \dfrac{1}{t}$, on a donc la forme :

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha u\left(\lambda^\beta x, \lambda t\right) &= \left(\frac{1}{t}\right)^\alpha u\left(\left(\frac{1}{t}\right)^\beta x, 1\right) \\ &= t^{-\alpha}\Phi(t^{-\beta}x) \\ &= t^{-\alpha}\Phi(y), \text{ avec } y = t^{-\beta}x \end{aligned}$$

telle que $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $\Phi(x) = u(1, x)$.

Donc, cette égalité donne une autre forme auto-similaire $u(x,t) \rightsquigarrow t^{-\alpha}\Phi(y)$, on remplace u dans l'équation (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(t^{-\alpha}\Phi(y)) \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1}\Phi(y) + (-\beta x t^{-\beta-1}t^{-\alpha}) \cdot \nabla\Phi(y) \\ &= -\alpha t^{-\alpha-1}\Phi(y) - \beta t^{-\alpha-1} y \cdot \nabla\Phi(y), \end{aligned}$$

Si on pose $\alpha = N\beta$, alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta t^{-N\beta-1}\nabla\cdot(y\Phi(y)), \tag{3.11}$$

telle que

$$\nabla\cdot(y\Phi(y)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}(y_i\Phi), \quad y = t^{-\beta}x.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u^m(x,t) &= (-\Delta)^s(t^{-mN\beta}\Phi^m(y))\\ &= t^{-mN\beta}(-\Delta)^s(\Phi^m(y)),\end{aligned}$$

D'après (3.4), on a :

$$(-\Delta)^s(\Phi^m(t^{-\beta}x)) = \int |\xi|^{2s}\mathcal{F}(\Phi^m(t^{-\beta}x))e^{ix\cdot\xi}d\xi, \tag{3.12}$$

telle que :

$$\mathcal{F}(\Phi^m(t^{-\beta}x)) = \int \mathcal{F}(\Phi^m(t^{-\beta}x))e^{-ix\cdot\xi}dx, \tag{3.13}$$

nous allons utiliser même étapes avec la première forme auto-similaire pour nous obtenir à la résultat de (3.12),donc, pour (3.13), posons

$$y = t^{-\beta}x \implies dy = t^{-\beta}dx \implies dx = \frac{1}{t^{-\beta}}dy,$$

alors (3.13) devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Phi^m(t^{-\beta}x)) &= \int \Phi^m(y)e^{-i\left(\frac{\xi}{t^{-\beta}}\right)\cdot y}\frac{1}{t^{-\beta}}dy\\ &= \frac{1}{t^{-\beta}}\mathcal{F}(\Phi^m(\frac{\xi}{t^{-\beta}}),\end{aligned} \tag{3.14}$$

donc on remplace la résultat (3.14) dans (3.12),on obtient :

$$(-\Delta)^s(\Phi^m(t^{-\beta}x)) = \int |\xi|^{2s}\mathcal{F}(\Phi^m(\frac{\xi}{t^{-\beta}}))e^{ix\cdot\xi}\frac{d\xi}{t^{-\beta}}, \tag{3.15}$$

maintenant, on fait le changement de variable, posons :

$$y = \frac{\xi}{t^{-\beta}} \implies \xi = t^{-\beta}y, \text{ et } dy = \frac{d\xi}{t^{-\beta}},$$

ceci implique:

$$|\xi|^{2s} = \left|t^{-\beta}y\right|^{2s} = t^{-2s\beta}\,|y|^{2s}\,,$$

alors l'égalité (3.15) devient :

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s(\Phi^m(t^{-\beta}x)) &= t^{-2s\beta}\int |y|^{2s}\,\mathcal{F}(\Phi^m(y))e^{i(xt^{-\beta})\cdot y}dy\\ &= t^{-2s\beta}(-\Delta)^s(\Phi^m(t^{-\beta}x)),\end{aligned} \tag{3.16}$$

On remplace (3.11) et (3.16) dans (3.1), on trouve :

$$-\beta t^{-N\beta-1}\nabla\cdot(y\Phi(y)) = -t^{-Nm\beta-2s\beta}(-\Delta)^s(\Phi^m(t^{-\beta}x)),$$

ceci implique

$$\beta\nabla\cdot(y\Phi(y)) = t^{-Nm\beta-2s\beta+N\beta+1}(-\Delta)^s(\Phi^m(t^{-\beta}x)),$$

donc la condition de similarité de cette équation est :

$$-Nm\beta-2s\beta+N\beta+1=0 \Longrightarrow \beta = \frac{1}{N(m-1)+2s},$$

telle que le profil de Barenblatt Φ satisfait l'équation

$$\beta\nabla\cdot(y\Phi(y)) = (-\Delta)^s(\Phi^m(t^{-\beta}x)) \tag{3.17}$$

Si on prend

$$\Phi(y) = \lambda(R^2+|y|^2)^{-q},$$

d'après la proposition 3.1.1, le profil $(R^2+|y|^2)^{-q}$ peut écrit sous la forme :

$$R^{-2q}{}_2F_1(q,c;c,-\frac{|y|^2}{R^2}),$$

donc

$$(-\Delta)^s(R^2+|y|^2)^{-q} = (-\Delta)^s(R^{-2q}{}_2F_1(q,c,c;-\frac{|y|^2}{R^2})),$$

et d'après le théorème 3.1.1, particulièrement, quand $\rho=-q$ et $\mu=\frac{N}{2}-q$, alors :

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s(R^2+|y|^2)^{-q} &= R^{-2q}(-\Delta)^s({}_2F_1(\frac{N}{4}+\frac{\frac{N}{2}-q+q}{2},\frac{N}{4}-\frac{\frac{N}{2}-q-q}{2},\frac{N}{2};-\frac{|y|^2}{R^2}))\\ &= R^{-2q}(-\Delta)^s({}_2F_1(\frac{N}{2},q,\frac{N}{2};-\frac{|y|^2}{R^2}))\\ &= R^{-2q}(-\Delta)^s({}_2F_1(q,\frac{N}{2},\frac{N}{2};-\frac{|y|^2}{R^2}))\\ &= 2^{2s}R^{-2s-2q}\tfrac{\Gamma(q+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(q)\Gamma(\frac{N}{2})}({}_2F_1(q+s,\tfrac{N}{2}+s,\tfrac{N}{2};-\tfrac{|y|^2}{R^2})).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Donc pour dériver le profil de Barenblatt Φ en remplaçant q par mq dans (3.18), on obtient

$$(-\Delta)^s(\Phi^m(y)) = \lambda^m 2^{2s} R^{-2s-2mq\frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})}}({}_2F_1(mq+s, \tfrac{N}{2}+s, \tfrac{N}{2}; -\tfrac{|y|^2}{R^2})) \tag{3.19}$$

D'autre part, on a [8]

$$\nabla \cdot (y\Phi(y)) = \lambda N R^{-2q}{}_2F_1(q, \frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})) \tag{3.20}$$

On remplace (3.19) et (3.20) dans (3.17),on trouve :

$$\lambda^m 2^{2s} R^{-2mq} \frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})}({}_2F_1(mq+s, \frac{N}{2}+s, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})) = \beta\lambda N R^{-2q}{}_2F_1(q, \frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})),$$

par conséquence, l'équation régissante (3.17) réduit à l'identité :

$${}_2F_1(mq+s, \frac{N}{2}+s, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})) ={}_2 F_1(q, \frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})), \tag{3.21}$$

et l'équation algèbrique :

$$\lambda^m 2^{2s} R^{-2s-2mq} \frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})} = \beta\lambda N R^{-2q}, \tag{3.22}$$

puisque $\frac{N}{2}+s \neq \frac{N}{2}+1$ dans (3.21), d'après le lemme 3.1.1 qui nous donne si les fonctions hepergéométriques ${}_2F_1(a_1, b_1; c; x)$ et ${}_2F_1(a_2, b_2; c; x)$ non constantes sont identique pour $|x| < 1$, puis l'un ou l'autre $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ ou $a_1 = b_2$, $b_1 = a_2$.
Dans ce cas on a $a_1 = b_2$ et $b_1 = a_2$ telle que :

$$a_1 = mq+s,\ b_2 = \frac{N}{2}+1,\ b_1 = \frac{N}{2}+s,\ a_2 = q \text{ et } \frac{|y|^2}{R^2} < 1$$

Alors

$$\begin{cases} a_1 = b_2 \Longrightarrow mq+s = \frac{N}{2}+1 \\ b_1 = a_2 \Longrightarrow \frac{N}{2}+s = q \end{cases}$$

ou

$$m = \frac{N+2-2s}{N+2s}, \quad q = \frac{N}{2}+s \tag{3.23}$$

Par conséquent, l'identité algèbrique (3.22), peut être simplifie comme le suivant :

On divise l'équation (3.22) par λ^m, on obtient :

$$\beta\lambda^{1-m} N R^{-2q} = 2^{2s} R^{-2s-2mq} \frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})}, \tag{3.24}$$

et on a :

$$mq = \frac{N}{2} + 1 - s, \tag{3.25}$$

On remplace (3.25) dans (3.24), on trouve :

$$\beta\lambda^{1-m} N R^{-2(\frac{N}{2}+s)} = 2^{2s} R^{-2s-2(\frac{N}{2}+1-s)} \frac{\Gamma(\frac{N}{2}+1)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1-s)\Gamma(\frac{N}{2})}, \tag{3.26}$$

et nous avons d'après les propriétés de la fonction Gamma qui nous donne $\Gamma(\frac{N}{2}+1) = \frac{N}{2}\Gamma(\frac{N}{2})$, alors (3.26) devient :

$$\beta\lambda^{1-m} R^{-N-2s} = 2^{2s-1} R^{-2-N} \frac{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1-s)}, \tag{3.27}$$

Finallement, on divise (3.27) par R^{-2-N}, on obtient que l'équation (3.17) est satisfait seulement si :

$$\beta\lambda^{1-m} R^{2-2s} = 2^{2s-1} \frac{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1-s)}, \tag{3.28}$$

en même temps que la condition de la masse totale :

$$M = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)dy = \lambda\pi^{\frac{N}{2}} R^{-2s} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}, \tag{3.29}$$

telle que les deux constantes λ et R sont déterminés uniquement.

On résume l'analyse faite ci-dessus dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.1 [*8*]. *Pour tout $s \in (0,1)$, l'équation* (3.1) *admet une solution auto-similaire*

$$u(x,t) = t^{-N\beta}\Phi(xt^{-\beta}),$$

avec le profil de Barenblatt :

$$\Phi(y) = \lambda(R^2 + |y|^2)^{-q}, \ (q > 0)$$

et $\beta = \frac{1}{2s+N(m-1)}$ seulement quand $m = \frac{N+2-2s}{N+2s}$.la solution auto-similaire correspondante

$$u(x,t) = \lambda t^{-N\beta}(R^2 + \left|xt^{-\beta}\right|^2)^{-s-\frac{N}{2}}, \ q = s + \frac{N}{2},$$

est une solution classique sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ avec $u(x,t) \longrightarrow M\delta(x)$ quand $t \longrightarrow 0$ pour un certain $M > 0$.

Chapitre 4

Solution auto-similaire générale

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons voir une autre forme auto-similaire (forme générale) de l'équation des milieux poreux fractionnaire, mais dans ce cas on utilise une méthode est appellé "la méthode de profil mobile" qui nous permet de chercher la solution du problème (3.1).

4.1 L'invariance d'échelle

Soit l'équation des milieux poreux fractionnaire, qui nous avons donner dans le chapitre 3, et qui sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u^m = 0, \tag{4.1}$$

et soit la solution auto-similaire générale est de la forme :

$$u(x,t) = c(t)\Phi\left(\frac{x}{a(t)}\right), \quad a, c \in \mathbb{R}_+^*, \tag{4.2}$$

telle que $x \in \mathbb{R}^N$, et les paramètres $c(t)$ et $a(t)$ sont des fonctions réels dépendant de t doivent être déterminés.

On remplace la forme (4.2) dans l'équation (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(c(t)\Phi\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(c(t))\Phi\left(\frac{x}{a(t)}\right) + c(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right) \\
&= \dot{c}\Phi\left(\frac{x}{a(t)}\right) - c\frac{\dot{a}}{a^2}x\cdot\nabla\Phi\left(\frac{x}{a(t)}\right),
\end{aligned}$$

posons $y = \dfrac{x}{a(t)}$ alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c}\Phi(y) - c\frac{\dot{a}}{a}y\cdot\nabla\Phi\left(y\right), \tag{4.3}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^s(u^m(x,t)) &= (-\Delta)^s\left(c^m(t)\Phi^m\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right) \\
&= c^m(t)(-\Delta)^s\left(\Phi^m\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

D'après le chapitre 03 (l'équation (3.12)), on déduit que

$$(-\Delta)^s\left(\Phi^m\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right) = \int |\xi|^{2s}\mathcal{F}\left(\Phi^m\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right)e^{ix\cdot\xi}d\xi, \tag{4.5}$$

telle que

$$\mathcal{F}\left(\Phi^m\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right) = \int \Phi^m\left(\frac{x}{a(t)}\right)e^{-ix\cdot\xi}dx, \tag{4.6}$$

Maintenant, nous allons utiliser la même méthode avec le chapitre 03, donc pour calculer la transformation de Fourier (4.6), posons

$$y = \frac{x}{a(t)} \Longrightarrow dy = \frac{dx}{a(t)} \Longrightarrow dx = a(t)dy,$$

alors (4.6) devient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\Phi^m\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right) &= \int \Phi^m\left(y\right)e^{-i(\xi a(t))\cdot y}a(t)dy \\
&= a(t)\mathcal{F}\left(\Phi^m\left(a(t)\xi\right)\right),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

remplaçons (4.7) dans (4.5), on trouve :

$$(-\Delta)^s\left(\Phi^m\left(\frac{x}{a(t)}\right)\right) = \int |\xi|^{2s}\mathcal{F}\left(\Phi^m\left(a(t)\xi\right)\right)e^{ix\cdot\xi}a(t)d\xi, \tag{4.8}$$

posons à la deuxième fois

$$y = a(t)\xi \Longrightarrow \xi = \frac{y}{a(t)} \Longrightarrow d\xi = \frac{dy}{a(t)},$$

ceci implique :

$$|\xi|^{2s} = \left|\frac{y}{a(t)}\right|^{2s} = \frac{|y|^{2s}}{(a(t))^{2s}},$$

alors :

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s \left(\Phi^m \left(\frac{x}{a(t)}\right)\right) &= \frac{1}{(a(t))^{2s}} \int |y|^{2s} \mathcal{F}\left(\Phi^m(y)\right) e^{i\left(\frac{x}{a}\right)\cdot y} dy \\ &= \frac{1}{a^{2s}} \mathcal{F}\left(\Phi^m \left(\frac{x}{a(t)}\right)\right), \qquad (4.9)\end{aligned}$$

donc (4.4) devient :

$$(-\Delta)^s(u^m(x,t)) = \frac{c^m}{a^{2s}}(-\Delta)^s \left(\Phi^m \left(\frac{x}{a(t)}\right)\right), \qquad (4.10)$$

Si nous remplaçons (4.10) et (4.3) dans l'équation (4.1), nous trouvons

$$\dot{c}\Phi(y) - c\frac{\dot{a}}{a} y \cdot \nabla\Phi\,(y) = -\frac{c^m}{a^{2s}}(-\Delta)^s \left(\Phi^m \left(\frac{x}{a(t)}\right)\right), \quad y = \frac{x}{a(t)} \qquad (4.11)$$

On divise cette équation par c, on obtient :

$$\frac{\dot{c}}{c}\Phi(y) - \frac{\dot{a}}{a} y \cdot \nabla\Phi\,(y) = -\frac{c^{m-1}}{a^{2s}}(-\Delta)^s \left(\Phi^m\,(y)\right). \qquad (4.12)$$

Cette équation dépend de beaucoup des paramètres inconnus et notre but est de déterminer les coefficients a et c, nous employons la nouvelle approche appelée la méthode des profils mobiles, voir [2, 1] pour plus de détail.

Le principe de cette méthode est de déterminer premièrement les coefficients $a(t)$ et $c(t)$ par la résolution du problème de minimization suivant, Voir [2]

$$\min_{\dot{c},\dot{a}} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u^m\right|^2 dx,$$

donc, nous obtenons deux équations orthogonales :

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u^m, \Phi \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u^m, y\nabla\Phi \rangle = 0 \end{cases}$$

telle que $V_t = \{\Phi, y.\nabla\Phi\}$ un sous-espace de L^2 de produit par des fonctions associées à Φ à l'instant t, et $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire dans l'espace L^2.

Alors l'équation (4.1) est transformée comme :

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c}\langle\Phi,\Phi\rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle y\nabla\Phi,\Phi\rangle = -\frac{c^{m-1}}{a^{2s}}\langle(-\Delta)^s\left(\Phi^m\left(y\right)\right),\Phi\rangle \\ \frac{\dot{c}}{c}\langle y\nabla\Phi,\Phi\rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle y\nabla\Phi,y\nabla\Phi\rangle = -\frac{c^{m-1}}{a^{2s}}\langle(-\Delta)^s\left(\Phi^m\left(y\right)\right),y\nabla\Phi\rangle \end{cases}$$

danc si :

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c} = \alpha\frac{c^{m-1}}{a^{2s}} \\ -\frac{\dot{a}}{a} = \beta\frac{c^{m-1}}{a^{2s}} \end{cases}, \quad \text{avec } \alpha,\beta \in \mathbb{R}^* \tag{4.13}$$

On remplace (4.13) dans (4.12), on trouve que $(-\Delta)^s\left(\Phi^m\left(y\right)\right)$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des fonctions :

$$\alpha\Phi + \beta y\cdot\nabla\Phi\left(y\right) = -(-\Delta)^s\left(\Phi^m\left(y\right)\right), \tag{4.14}$$

alors :

$$(-\Delta)^s\left(\Phi^m\left(y\right)\right) = -\alpha\Phi(y) - \beta y\cdot\nabla\Phi\left(y\right), \quad \text{avec } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^*. \tag{4.15}$$

Détermination de $a(t)$ et $c(t)$

Proposition 4.1.1 *Les coefficients $c(t)$ et $a(t)$ sont donnés par :*

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{-\alpha}{\beta A}} \end{cases}, \quad 0 < t < T,$$

pour $\alpha(m-1) + 2\beta s > 0$, avec,

$$A = \alpha(m-1) + 2\beta s,$$

Le temps fini T est égal à :

$$T = \frac{1}{\alpha(m-1) + 2\beta s} > 0.$$

et donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = e^{-\beta t} \\ c(t) = e^{\alpha t} \end{cases}, \quad 0 < t < \infty$$

pour $\alpha(m-1) + 2\beta s = 0$.

Preuve. les coefficients $c(t)$ et $a(t)$ sont déterminés par le système (4.13). Danc, on divise la première équation de (4.13) par la deuxième équation de (4.13), on obtient

$$\frac{\dot{c}}{c}=-\frac{\alpha}{\beta}\frac{\dot{a}}{a}\Longrightarrow \ln(c(t))=\ln\left(a(t)\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}}+\ln(k_0)$$

alors

$$c(t)=k_0\left(a(t)\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}}, \tag{4.16}$$

d'où k_0 est un constant, ceci implique:

$$\dot{c}(t)=-\frac{\alpha}{\beta}k_0\left(a(t)\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}-1}\dot{a}. \tag{4.17}$$

On remplace (4.17) dans (4.13), on trouve :

$$\frac{\dot{c}}{c}=\alpha\frac{c^{m-1}}{a^{2s}}\Longrightarrow \frac{-\frac{\alpha}{\beta}k_0\left(a(t)\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}-1}\dot{a}}{k_0\left(a(t)\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}}}=\alpha k_0^{m-1}\left(a(t)\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}(m-1)-2s},$$

alors :

$$-\frac{\alpha}{\beta}k_0\left(a(t)\right)^{-1}\dot{a}\ =\alpha k_0^{m-1}\left(a(t)\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}(m-1)-2s},$$

on divise cette égalité par α et par k_0, on obtient :

$$\begin{aligned}-\frac{\dot{a}}{a}\quad &= \quad \beta k_0^{m}\left(a(t)\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}(m-1)-2s}\\ &\Longrightarrow \quad a^{\frac{\alpha}{\beta}(m-1)+2s-1}\dot{a}\ =-\beta k_0^{m},\end{aligned} \tag{4.18}$$

danc on a deux cas pour résoudre cette équation

1. Si $\frac{\alpha}{\beta}(m-1)+2s-1=-1\Longrightarrow\alpha(m-1)+2\beta s=0$, alors :

$$\int\frac{\dot{a}}{a}\ =\int-\beta k_0^{m}dt\Longrightarrow \ln(a(t))=-\beta k_0^{m}t+k_1,$$

ceci implique :

$$a(t)=k_1e^{-\beta k_0^{m}t},\quad k_1 \text{ constant} \tag{4.19}$$

d'après (4.16), on obtient :

$$c(t)=k_0\left(k_1e^{-\beta k_0^{m}t}\right)^{\frac{-\alpha}{\beta}}=k_0k_1^{\frac{-\alpha}{\beta}}e^{\alpha k_0^{m}t}, \tag{4.20}$$

Aux frontières, nous imposons les conditions de frontière $a(0)=1$, $c(0)=1$.

alors $a(0) = 1 \Longrightarrow k_1 = 1$, et $c(0) = 1 \Longrightarrow k_0 = 1$.

finalement, on obtient :

$$\begin{cases} a(t) = e^{-\beta t} \\ c(t) = e^{\alpha t} \end{cases}, \quad 0 < t < \infty,$$

2. Si $\frac{\alpha}{\beta}(m-1) + 2s - 1 > -1 \Longrightarrow \alpha(m-1) + 2\beta s > 0$, pour $T = \frac{1}{\alpha(m-1)+2\beta s} > 0$, alors :

$$\begin{aligned} \int a^{\alpha(m-1)+2\beta s-1} da \quad &= \quad \int -\beta k_0^m dt \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{\alpha(m-1)+2\beta s} a^{\alpha(m-1)+2\beta s} = -\beta t + k_2, \quad k_0 = 1 \\ &\Longrightarrow \quad a^{\alpha(m-1)+2\beta s} = (\alpha(m-1) + 2\beta s)(-\beta t + k_2) \\ &\Longrightarrow \quad a(t) = (k_3 - \beta t(\alpha(m-1) + 2\beta s))^{\frac{1}{\alpha(m-1)+2\beta s}} \\ &\Longrightarrow \quad a(t) = (k_3 - A\beta t)^{\frac{1}{A}}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

Avec, $A = \alpha(m-1) + 2\beta s$ et k_3 est constant.

d'après (4.16), on trouve :

$$c(t) = k_0 \left((k_3 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \right)^{\frac{-\alpha}{\beta}} = (k_3 - A\beta t)^{\frac{-\alpha}{\beta A}}, \ k_0 = 1 \tag{4.22}$$

alors on a :

$$\begin{cases} a(0) = 1 \\ c(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow k_3 = 1,$$

danc finalement, pour $\alpha(m-1) + 2\beta s > 0$ avec $A = \alpha(m-1) + 2\beta s$, et $T = \frac{1}{\alpha(m-1)+2\beta s} > 0$, on trouve :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{-\alpha}{\beta A}} \end{cases}, \quad 0 < t < T$$

■

Maintenant, si on pose $\alpha = N\beta$, alors l'équation (4.15) devient :

$$(-\Delta)^s \left(\Phi^m (y) \right) = -\beta \nabla \cdot (y \Phi (y)). \tag{4.23}$$

Si on prend $\Phi(y) = \lambda(R^2 + |y|^2)^{-q}$, d'après l'équation (3.19) dans le chapitre 03, qui nous donne que le profil $\Phi^m(y)$ peut écrit sous la forme :

$$(-\Delta)^s(\Phi^m(y)) = \lambda^m 2^{2s} R^{-2s-2mq} \frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})} ({}_2F_1(mq+s, \tfrac{N}{2}+s, \tfrac{N}{2}; -\tfrac{|y|^2}{R^2})), \tag{4.24}$$

d'autre part, on a :

$$\nabla \cdot (y\Phi(y)) = \lambda N R^{-2q} {}_2F_1(q, \frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})), \tag{4.25}$$

On remplace (4.24) et (4.25) dans (4.23), on trouve :

$$\lambda^m 2^{2s} R^{-2s-2mq} \frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})} ({}_2F_1(mq+s, \tfrac{N}{2}+s, \tfrac{N}{2}; -\tfrac{|y|^2}{R^2})) = -\beta\lambda N R^{-2q} {}_2F_1(q, \tfrac{N}{2}+1, \tfrac{N}{2}; -\tfrac{|y|^2}{R^2})),$$

Par conséquent, d'aprés l'équation (3.17) dans le chapitre 03, l'équation régissante(4.23) réduit à l'identité :

$${}_2F_1(mq+s, \frac{N}{2}+s, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})) = {}_2F_1(q, \frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2})), \tag{4.26}$$

et l'équation algèbrique :

$$\lambda^m 2^{2s} R^{-2s-2mq} \frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})} = -\beta\lambda N R^{-2q}, \tag{4.27}$$

puisque $\frac{N}{2}+s \neq \frac{N}{2}+1$ dans (4.26), d'après l'application de lemme 3.1.1 sur (3.21) qui nous donne :

$$mq+s = \frac{N}{2}+1, \quad \frac{N}{2}+s = q,$$

ou

$$m = \frac{N+2-2s}{N+2s}, \quad q = \frac{N}{2}+s, \tag{4.28}$$

Par conséquent, l'identité algèbrique (4.27), peut être simplifie comme le suivant :

On divise l'équation (4.27) par λ^m,on obtient :

$$\beta\lambda^{1-m} N R^{-2q} = -2^{2s} R^{-2s-2mq} \frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})}, \tag{4.29}$$

et on a :

$$mq = \frac{N}{2}+1-s, \tag{4.30}$$

On remplace (4.30) dans (4.29), on obtient :

$$\beta\lambda^{1-m} N R^{-2(\frac{N}{2}+s)} = -2^{2s} R^{-2s-2(\frac{N}{2}+1-s)} \frac{\Gamma(\frac{N}{2}+1)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1-s)\Gamma(\frac{N}{2})}, \tag{4.31}$$

et nous avons d'après les propriétés de la fonction Gamma qui nous donne $\Gamma(\frac{N}{2}+1) = \frac{N}{2}\Gamma(\frac{N}{2})$, alors (4.31) devient :

$$\beta\lambda^{1-m}R^{-N-2s} = -2^{2s-1}R^{-2-N}\frac{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1-s)}, \tag{4.32}$$

On divise (4.32) par R^{-2-N}, on obtient finallement que l'équation (4.23) est satisfait seulement si :

$$\beta\lambda^{1-m}R^{2-2s} = -2^{2s-1}\frac{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1-s)}. \tag{4.33}$$

Discussion

Dans l'analyse faite ci-dessus on a trouver des conditions sur les paramètres α et β pour l'existence des solutions auto-similaire générales, la première condition est la condition pour l'existence de profil de Barenblatt $\Phi(y) = \lambda(R^2 + |y|^2)^{-q}$, s'écrit comme :

$$\beta = \frac{1}{2s+N(m-1)}, \text{ et } \beta\lambda^{1-m}R^{2-2s} = -2^{2s-1}\frac{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(\frac{N}{2}+1-s)}. \tag{A}$$

la deuxième condition pour l'existence des coefficients $c\,(t)$, $a\,(t)$, on a trouver deux formes sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = (1-A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1-A\beta t)^{\frac{-\alpha}{\beta A}} \end{cases}, \quad 0 < t < T = \frac{1}{\alpha(m-1)+2\beta s},$$

pour

$$\alpha(m-1) + 2\beta s > 0, \tag{B}$$

et :

$$\begin{cases} a(t) = e^{-\beta t} \\ c(t) = e^{\alpha t} \end{cases}, \quad 0 < t < \infty$$

pour

$$\alpha(m-1) + 2\beta s = 0. \tag{C}$$

Les conditions A et B nous donne

$$s > \frac{-N(m-1)}{2}.$$

Cette condition est toujours vérifiée puisque $s \in (0.1)$ et $m > 1$.

et les conditions A et C nous donne

$$s = \frac{-N(m-1)}{2}$$

Cette condition est impossible puisque $s \in (0.1)$ et $m > 1$.

On résume l'analyse faite ci-dessus dans le théorème suivant.

Théorème 4.1.1 *Pour tout* $s \in (0,1)$, *l'équation* (4.1) *admet une solution auto-similaire générale :*

$$u(x,t) = c\,(t)\,\Phi\left(\frac{x}{a\,(t)}\right),$$

avec le profil de Barenblatt :

$$\Phi(y) = \lambda(R^2 + |y|^2)^{-q},\ \ (q > 0)$$

et les coefficients $c(t)$ *et* $a(t)$ *sont données par :*

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{-\alpha}{\beta A}} \end{cases},\quad 0 < t < T = \frac{1}{\alpha(m-1) + 2\beta s},$$

où $A = \alpha(m-1) + 2\beta s$, *et* $\beta = \dfrac{1}{2s + N(m-1)}$.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons présenté une étude intéressante concerne l'équation des milieux poreux de type classique, nous étudions une solution particulière de cette équation et certaines propriétés de la solution dite "Solution de Barenblatt".

On a présenté des nouvelles solutions particulières explicite pour cette équation de diffusion non linéaire appelées "solutions profils mobiles [2]": Une application intéressante concernant les équations de diffusion non linéaires a été présentée.

Nous avons également étudé l'existence des solutions auto-similaires de l'équation des millieux poreux fractionnaire.

Cette étude ouverte quelques perspectives notamment, la recherche d'autres formes des solutions en appliquant le même principe, et l'existence des solutions "profils mobiles".

Enfin, une généralisation de la méthode du profil mobile est donnée avec une application bien évidement sur l'équation des millieux poreux fractionnaire, cette généralisation ouvre plusieurs perspectives concernant l'application de cette méthode à plusieurs dimensions, et surtout l'étude d'existence des solutions qui n'est pas encore établie.

Bibliographie

[1] Y. Arioua, N. Benhamidouche. *New method for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Int. J. Nonlinear Science., 2009, 7: 395 - 398.*

[2] Y. Arioua, N. Benhamidouche. *Traveling profiles solutions to heat equation with a power-law nonlinearity, Journal of Advanced Research in Applied Mathematics. 7 (2015), 1–6.*

[3] P. Basak, V.V.N. Murty. *Nonlinear diffusion applied to groundwater contamination problem. J Hydrol. 35 (1977), 357–363.*

[4] P. Basak, V.V.N. Murty. *Concentraction dependent diffusion applied to groundwater contamination problems*, *J Hydrol. 37 (1978), 333–337.*

[5] G.I. Barenblatt. *On a class of exact solutions of the plane onedimensional problem of unsteady filtration into a porous medium*, *Prikl. Mat. Mek. 17 (1953), 739–742.*

[6] G.I. Barenblatt and Zeldovich, YA. B. *On the dipole-type solution in problems of unsteady gas filtration in the polytropic regime*, *Prikl. Mat. Meh. 21 (1957), 718–720.*

[7] N. Benhamidouche. *Exact solutions to some nonlinear PDEs, travelling profiles method. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2008, 15: 1 - 7.*

[8] Y.Huang. *Explicit Barenblatt profiles for fractional porous medium equation. impress, 1-13.*

[9] A.S. Kalashnikov. *The occurrence of singularities in solutions of the nonsteady seepage equation*, *Z. Vycisk. Mat. i Mat. Fiz. 7 (1967), 440–444. (Translated as : USSR Computational Math. and Math. Phys). 7 (1967), 269–275.*

[10] N.A. Kolmogorov,I.G. Petrovsky, N.S. Piskunov. *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, Bulletin Université d'état à Moscou (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ), Série A. 1(1937), 1–26.*

[11] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni. *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics,Third enlarged edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52, Springer-Verlag New York,Inc.,New York, 1966.*

[12] Y. Nakano. *Application of recent results in functional analysis to the problem of water tables, Adv. Water Resour. 2 (1979), 185–190.*

[13] Y. Nakano. *Particular solution to the problems of horizontal flow of water and air through porous media near a wetting front. Water Resour, 3 (1980), 81-85.*

[14] A.DE Pablo, F.Quirós, A.Rodríguez, and J.L.Vàzquez. *A general fractional porous medium equation.Comm. Pure Appl. Math., 65(9):1242-1284, 2012.*

[15] R.E. Pattel. *Diffusion from an instantaneous point source with concentration dependent coefficient, Quart. J. Mech. Appl. Math. 12 (1959), 407–409.*

[16] P.L. Sachdev, C.R. Srinivasa. *Large Time Asymptotics for Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC (2010).*

[17] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Equation, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2004).*

[18] J.L.Vàzquez. *The Porous Medium Equation Mathematical Theory, Clarendon Press, OXFORD (*2007).

[19] Ya. B, Z'eldovich, and S.A, Kompaneets. *On the theory of heat propagation for temperature-dependent thermal conductivity, in "Collection Commemorating the Seventieth Birthday of Academician X. F. Ioffe", Izdat. Akad. Nauk SSSR, Rloscow, (1950), 61-72.*