UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Option : Géométrie des espaces de Banach et Analyse Harmonique

Spécialité : Mathématiques

Par

BOUZERBA Rabiaa

Sujet

Le théorème de domination des opérateurs sous-linéaires fortement p-sommants

Soutenu le 25/06/2013 devant le jury compose de .

President	:	Saadi Khalil	MC.B	Univ M'sila
Rapporteur	:	Tiaiba Abdelmoumen	MC.A	Univ M'sila
Examinateur	:	Heraiz Rabah	MA.A	Univ M'sila

Promotion : 2012/2013

Table des matières

Introduction 1

1 Les opérateurs linéaires fortement $p-$sommants 2

1.1 Espaces des suites 2

1.2 Les opérateurs linéaires $p-$sommants 4

1.2.1 Définitions et propriétés 4

1.2.2 Théorème de domination 7

1.3 Opérateurs linéaires fortement $p-$sommants 9

1.3.1 Définitions et propriétés 9

1.3.2 Relation entre $D_p(X,Y)$ et $\pi_p(X,Y)$ 11

1.3.3 Caractérisation des opérateurs fortement $p-$sommant 14

2 Les opérateurs sous-linéaires positivement $p-$sommants 15

2.1 Les espaces de Banach réticulés 15

2.2 Caractérisation des opérateurs sous-linéaires 17

2.3 Opérateurs sous-linéaires positivement $p-$sommants . . 26

2.3.1 Définitions et propriétés 26

2.3.2 Théorème de domination 28

3 Les opérateurs sous-linéaires fortement $p-$sommants 30

3.1 définitions et propréités 30

3.2 Théorème de domination 33

Introduction

Pietsch a montré dans [Pie(67)] que l'identité de l_1 dans l_2 est $2-$absolument sommant mais l'opérateur adjoint n'est pas $2-$absolument sommant. Pour cela, le concept des opérateurs linéaires fortement $p-$sommants $(1 \leq p < \infty)$ a été introduit par J. S. Cohen[Coh73] comme une caractérisation du conjugué d'un opérateur linéaire absolument p^*-sommant (p^* est le conjugué de p, i.e., $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$). Un opérateur linéaire u entre deux espaces de Banach X et Y est fortement $p-$sommant pour $(1 < p < \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{1 \leq i \leq n} \|(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{1 \leq i \leq n} |\langle y_i^*, y \rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.$$

La petite constante C vérifiant l'inégalité précédente est notée par $d_p(u)$, qui est une norme dans $\mathcal{D}_p(X, Y)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires fortement $p-$sommants entre deux espaces de Banach X et Y. On a $\mathcal{D}_1(X, Y) = B(X, Y)$, l'espace vectoriel de tout les opérateurs linéaires bornés de X dans Y.

Ce mémoire est organisé comme suivant:

Dans le premier chapitre on va prendre en étude la classe d'opérateurs linéaires fortement p- sommants. Cette classe d'opérateurs a été trouvée la première fois par Cohen dans un article en 1973 [Coh73].

Dans le deuxième chapitre, on a donné quelques définitions de bases et terminologies concerne les Banach réticulés [DJT95] , [LT96] et [MN91] . On va donner aussi quelques notations standard. Comme suite de chapitre. On a annoncé quelques définitions et propriétés concernant les opérateurs sous linéaires [AM04] ,[AM02], [AMT07] et [MT04]. A la fin on va faire un survole concernant la définition des opérateurs positivement $-p$-sommants crier par O. Blasco [Bla86], [Bla88] et [Bla87].

On finit ce travail par l'étude détaillée de la généralisation de la notion fortement $p-$sommant pour $(1 < p < \infty)$ aux opérateurs sous-linéaires et on donnera un analogue au théorème de domination de Pietsch pour cette catégorie. Ce théorème est l'un des principaux résultats de ce travail. Cohen a déduit le théorème de domination au cas linéaire simplement à partir de l'opérateur adjoint qui est p^*-sommant. Ce n'est pas le cas pour les opérateurs sous-linéaires car l'adjoint d'un opérateur sous-linéaire n'est pas encore bien développé. IL est été démontré directement en utilisant le lemme de Ky Fan. On terminera le mémoire par une étude relationnelle pour cette notion entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires. D'autre terme on va prendre en étude détaillée le travail fait par D.Achour, L.Mezrag et A.Tiaiba en 2007 [AMT07].

Bibliographie

[AM04] D. ACHOUR AND L. MEZRAG. *Little Grothendieck's theorem for sublinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **296** (2004), 541-552.

[AM02] D. ACHOUR ET L. MEZRAG. *Factorisation des opérateurs sous-linéaires par $L_{p\infty}(\Omega,\nu)$ et $L_{q1}(\Omega,\nu)$.* Ann. Sci. Math. Quebec **26** (2002) 2, 109-121.

[AMT07] D. ACHOUR, L. MEZRAG AND A. TIAIBA. *On the strongly $p-$summing sublinear operators.* Taiwanesse J. Math.Vol. 11, No. 4,pp. 969-973, September 2007.

[Bla86] O. BLASCO. *A class of operators from a Banach lattice into a Banach space.* Collect. Math. **37** (1986), 13-22.

[Bla88] O. BLASCO. *Positive $p-$summing operators from L_p-spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **31** (1988), 275-280.

[Bla87] O. BLASCO. *Positive $p-$summing operators, vector measures and tensor products.* Proc. Edinburgh. Math. Soc. **100** (1987), 179-184.

[Coh73] J. S. Cohen, *Absolutely $p-$summing, $p-$nuclear operators and their conjugates.* Math. Ann. **201** (1973), 177-200.

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press, (1995).

[LT96] J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI. *Classical Banach Spaces, I and II.* Springer-Verlag, Berlin (1996).

[MN91] P. Meyer-Nieberg. *Banach lattices.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, (1991).

[MT04] L. Mezrag and A. Tiaiba. *On the sublinear operators factoring through L_q.* Int. J. Math. Math. Sci., **50** (2004), 2695-2704.

[Pie(67)] A.Pietsch, Absolut $p-$summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math, **28,** (1967), 333, 353; 1-103

Résumé

Soit $SB(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs sous linéaires d'un espace de Banach X dans un espace de Banach complètement réticulé Y , Dans notre mémoire on va pendre en étude détaillée le travail qui introduira à ce type des opérateurs le concept de fortement p -sommant. Qui donne aussi un analogue du théorème de domination de Pietsch avec une démonstration et techniques totalement déférents au cas linaire cité dans le premier chapitre, avec une étude de quelques comparaisons entre les opérateurs linéaires $u \in \nabla T \ \{opérateurs\ linéaires\ u : X \to Y\ telle\ que\ u \leq T\}$ et les opérateurs sous linéaires T .

Abstract

Let $SB(X,Y)$ be the set of the bounded sub linear operators from a Banach space X into a complete Banach lattice Y

In our memory we introduce to this category the concept of strongly p-summing sublinear operators. we give an analogue to Pietsch's domination theorem and study some comparisons between linear operators $u \in \nabla T \ \{linear\ operators\ u : X \to Y\ such\ that\ u \leq T\}$ and the sublinear operators T .

الملخص

لتكن $SB(X,Y)$ مجموعة المؤثرات تحت الخطية في فضاء **Banach** X نحو فضاء **Banach** مرتب كليا Y.

في مذكرتنا سنتناول دراسة ممنهجة عن تطور المؤثر بقوة p -sommant والتي تعطي أيضا التماثلية لنظرية الهيمنة ل: Pietsch مع برهان يراعي التقنية العامة في أول الفصل مع دراسة لبعض المقارنات بين المؤثرات الخطية ومؤثرات تحت خطية T للمسألة المذكورة .