



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du *Diplôme de Master*

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par

Said BOUDAUD

SUJET

Etude de quelques propriétés des trellises

Dirigé par : Dr. Lemnaouar ZEDAM

MC (A) – Université de M'sila

Composition du jury:

Président:	Abdelaziz	AMROUNE	Prof.	Univ. de M'sila
Rapporteur:	Lemnaouar	ZEDAM	MC(A)	Univ. de M'sila
Examineur:	Lahcene	LADJELAT	MA(A)	Univ. de M'sila.

Promotion: 2012/2013

Remerciements

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Lemnaouar ZEDAM, pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi de ce mémoire de master. Je voudrais aussi exprimer ici toute ma reconnaissance aux membres de jury: Abdelaziz AMROUNE, pour l'honneur qui'il me fait de présider ce jury, Lahçene LADJLAT, pour avoir accepté d'être examinateur de ce travail. J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donné les bases de la mathématique.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités sur les ensembles ordonnés	3
1.1 Ensembles	3
1.1.1 Eléments des ensembles	3
1.1.2 Ensemble des parties d'un ensemble	4
1.1.3 Fonction caractéristique	4
1.1.4 Opérations algébriques sur les ensembles	5
1.2 Relations binaires	8
1.2.1 Produit cartésien	8
1.2.2 Opérations sur les Relations	8
1.2.3 Propriétés des relations	10
1.3 Ensembles Ordonnés	10
1.3.1 Relation d'ordre	11
1.3.2 Tables et Diagrammes d'un ensembles ordonnés	12
1.3.3 Produit d'ensembles ordonnés	14
1.3.4 Sous ensembles ordonnés et extensions	15
1.3.5 Chaînes et antichaînes	15
1.4 Eléments Particuliers	16
1.5 Lattices (treillis)	18

1.5.1	Concepts et résultats connus	18
1.5.2	Lattice comme structure algébrique	19
1.5.3	Lattices complets	21
2	Ensembles pseudo-ordonnés et trellises	23
2.1	Ensembles pseudo-ordonnés	23
2.1.1	Diagramme d'un ensemble pseudo-ordonné	25
2.1.2	Eléments Particuliers	26
2.1.3	Quelques propriétés des ensembles pseudo-ordonnés.	26
2.1.4	Axiomes de linéarité d'un pseudo-ordres.	27
2.2	Trellises	30
2.2.1	Concepts et résultats connus	30
2.2.2	Trellises comme structures algébriques	32
3	Quelques caractérisations des trellises complets	35
3.1	Caractérisation des lattices complets.	35
3.2	Lattices complets et propriété de point fixe	38
3.3	Quelques caractérisations des trellises complets	39
3.4	Trellises complets et propriétés de point fixe	46
	Conclusion	47
	Références	48

Introduction

Les idées de transitivité et d'ordre sont des concepts fondamentaux dans une grande variété de Mathématiques. Cependant, les structures mathématiques, ont parfois utilisé le concept de relations non-transitive, pour assurer certaines applications, ou pour des raisons purement mathématiques.

Un pseudo-ordre est une relation réflexive et antisymétrique, mais pas nécessairement transitive, il a été introduit par Skala en 1969 [Ska69]. Puis en 1971, elle a remarqué que pour un pseudo-ordre nous pouvons définir les bornes supérieures et les bornes inférieures de même façon qu'un ordre [Ska71] [Ska72]. Avec cette approche, nous pouvons généraliser aux trellises et trellises complets d'une manière analogue presque tous les théorèmes de base et les théorèmes de caractérisations des lattices complets, ce qui démontre la superfluité de la transitivité (ou l'associativité).

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de quelques propriétés des ensembles pseudo-ordonnés et trellises et chaque fois on essaye de donner des exemples surtout dans le cas fini. Aussi, nous essayons d'expliquer et de détailler quelques résultats de base et certains théorèmes de caractérisations des lattices et des lattices complets généralisés aux trellises. Comme cas particulier, nous donnons un contre exemple (Exemple 3.2) qui prouve qu'un trellis fini n'est pas forcément un trellis complet.

Notre mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous donnons quelques rappels sur les ensembles, les ensembles ordonnés, les lattices et lattices complets.

Le second chapitre de ce mémoire porte sur les notions de base des ensembles pseudo-ordonnés et trellises. Ensuite, nous donnons quelques exemples et propriétés, tels que les axiomes de linéarité, Trellises comme structures algébriques, ...etc.

Enfin dans le chapitre 3, après des brefs rappels sur les théorèmes de caractérisations des lattices complets, on se propose d'étudier avec des exemples, des explications et des preuves

détaillés les théorèmes de caractérisations des trellises complets.

Chapitre 1

Généralités sur les ensembles ordonnés

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions de base concernant les ensembles, les ensembles ordonnés, les lattices et lattices complets. Pour plus de détails on peut consulter [BON84], [BIR67], [BLY05], [BRI03], [CLM07], [DP02], [POUZET], [SCH02].

1.1 Ensembles

1.1.1 Éléments des ensembles

Définition 1.1 *Un ensemble est une collection non ambiguë d'objets tous distincts, appelés éléments de l'ensemble.*

Pour dire que a est élément d'un ensemble A , On écrit $a \in A$, dans le cas contraire, on écrit $a \notin A$

Un ensemble peut être écrit:

En extension: On donne la liste de ses éléments. Par exemple, si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont les éléments de l'ensemble A , on écrit:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}.$$

En compréhension: On donne la ou les propriétés qui caractérisent ses éléments. Par exemple, si les éléments de l'ensemble B satisfont les propriétés $P_1, P_2, \dots, P_n$ alors l'ensemble B est défini par:

$$B = \{x \mid x \text{ satisfait } P_1, P_2, \dots, P_n\}.$$

Le symbole " / " signifie le sens de <tels que>.

Définition 1.2 L'ensemble vide noté $\emptyset$ ou $\{\}$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Le Cardinal d'un ensemble A , noté $\text{Card}(A)$ est le nombre d'éléments de A . On le note aussi parfois $|A|$ ou $\#A$

Un ensemble A est dit fini lorsque le nombre d'éléments qui le composent est entier naturel.

Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Exemple 1.1 Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Il peut aussi être défini en compréhension comme suit:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}.$$

A est fini ($\text{Card}(A)=10$).

1.1.2 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 1.3 Soit A un ensemble. Les sous ensembles de A forment un ensemble appelé ensemble des parties de A et noté $\mathcal{P}(A)$. Ainsi $E \in \mathcal{P}(A)$ signifie que $E \subseteq A$. L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble. Un ensemble constitué des ensembles est appelé une famille d'ensembles. Par exemple, une famille d'ensembles contenant des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ est représenté par:

$\{A_i \mid i \in I\}$ ou i est un indice et I l'ensemble des indices.

Si $A = \{a, b, c\}$, alors $|A| = 3$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$.

Théorème 1.1 Si A est fini et $\text{card}(A)=n$ alors $\text{card } \mathcal{P}(A) = 2^n$.

1.1.3 Fonction caractéristique

Définition 1.4 Soit X , un ensemble non vide et A un sous-ensemble de X . On définit la fonction caractéristique de A , notée χ_A l'application définie par:

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}.$$

$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } x \in A \\ 0 & \text{si et seulement si } x \notin A \end{cases}$$

1.1.4 Opérations algébriques sur les ensembles

- **L'inclusion**

On dira qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B , ou encore que A est un sous-ensemble ou une partie de B si:

$$\forall x \in X, (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

On écrit alors $A \subseteq B$

Si les relations suivantes sont satisfaites entre les deux ensembles A et B , $A \subseteq B$ et $A \neq B$, alors B a des éléments qui n'appartiennent pas à A .

Dans ce cas, A est appelé un sous-ensemble propre de B , et cette relation est désignée par:

$$A \subset B$$

- **L'égalité d'ensembles**

Deux ensembles A et B qui contiennent les mêmes éléments sont dits égaux, et on écrit $A = B$

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A$$

Dans le cas contraire on dit qu'ils sont distincts et on note $A \neq B$.

- **La différence**

La différence de B et A , noté $B - A$ ou $B \setminus A$, est constitué des éléments qui sont dans B , mais pas dans A . C'est-à-dire:

$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}.$$

- **Le complément**

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble référentiel X . Alors le complément de A , noté $\overline{A}$ (ou A^c), est l'ensemble des éléments qui appartiennent à X mais n'appartiennent pas à A . De façon plus concise nous écrivons:

$$\overline{A} = X - A = \{x \in X \text{ tel que } x \notin A\}.$$

Le complément d'ensemble est toujours involutif, c'est-à-dire: $\overline{\overline{A}} = A$.

Le complément d'un ensemble vide est l'ensemble référentiel. ($\overline{\emptyset} = X$).

Le complément de l'ensemble référentiel est l'ensemble vide. ($\overline{X} = \emptyset$).

- **L'intersection**

L'intersection $A \cap B$ se compose des éléments communs aux deux ensembles A et B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

L'intersection peut être généralisée entre les ensembles dans une famille d'ensembles

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\} \text{ où } \{A_i \mid i \in I\} \text{ est une famille d'ensembles.}$$

L'intersection entre l'ensemble A et l'ensemble référentiel X égale à A ($A \cap X = A$).

L'intersection de A et de l'ensemble vide $\emptyset$ est l'ensemble vide $A \cap \emptyset = \emptyset$.

L'intersection de A et de son complémentaire est l'ensemble vide.

$$A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Lorsque deux ensembles A et B n'ont rien en commun, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$, alors A et B sont dits disjoints.

• L'union

L'union des ensembles A et B est l'ensemble des des éléments qui appartiennent à A ou à B

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

L'union pourrait être entre plusieurs ensembles. Par exemple, la réunion des ensembles de la famille suivante peuvent être définis comme suit.

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x / x \in A_i \text{ pour certains } i \in I\}$ où la famille d'ensembles est $\{A_i / i \in I\}$. L'union de l'ensemble A et l'ensemble référentiel X est réduite à X

$$A \cup X = X.$$

L'union de l'ensemble A et l'ensemble vide $\emptyset$ est A .

$$A \cup \emptyset = A.$$

L'union de l'ensemble A et son complémentaire est l'ensemble référentiel.

$$A \cup \overline{A} = X.$$

L'union et l'intersection possèdent les propriétés suivantes:

Propriétés 1.1 Soit X un ensemble non vide et $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, alors

- i) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$, (commutativité);
- ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, (associativité);
- iii) $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$, (idempotence);
- iv) $A \cup (A \cap B) = A$ et $A \cap (A \cup B) = A$, (absorption);
- ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, (distributivité).

1.2 Relations binaires

1.2.1 Produit cartisien

Définition 1.5 Soit A et B deux ensembles non vide, le produit des deux ensembles ou le produit Cartisien $A \times B$ est défini par:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Le concept du produit cartisien peut être généralisé à n ensembles. Pour un nombre arbitraire des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, l'ensemble de

tous les n -uplets $(a_1, \dots, a_n)$ tels que: $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ est dit produit Cartisien noté $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ou $\prod_{i=1}^n A_i$

Au lieu de $A \times A$ et $A \times A \times A \times \dots \times A$, on peut écrire A^2 et A^n .

Définition 1.6 Soient X et Y deux ensembles non vides, une relation binaire R entre deux ensembles X et Y est une partie de $X \times Y$. Pour $(x, y) \in R \subseteq X \times Y$ on dit que x est en relation avec y et on note cela xRy .

Définition 1.7 Une relation binaire R sur un ensemble non vide X est une partie de $X \times X$. Dans ce cas on dit que R est une relation sur X .

Exemple 1.2 Soient $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} R &= \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), \dots\} \\ &= \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

1.2.2 Opérations sur les Relations

Dans la section précédente on a défini la relation R comme un ensemble. C'est-à-dire R est un ensemble qui contient des couples ordonnés (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$. Si on suppose R et S Soient deux relations définies sur $X \times Y$, ces relations ont les opérations de l'union, l'intersection, l'inverse et la composition.

- **L'union des relations**

$T = R \cup S$ est dit l'union de R et S , si $(x, y) \in T$ ssi $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \in S$.

- **L'intersection des relations**

$I = R \cap S$ est dit l'intersection de R et S , si

$$(x, y) \in I \text{ ssi } (x, y) \in R \text{ et } (x, y) \in S.$$

- **Complement d'une relation**

$X \times Y$ représente toutes les relations possibles qui peuvent se trouver entre deux ensembles.

$$R^c \text{ ou } \overline{R} = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \notin R\}$$

C'est-à-dire: Si $(x, y) \notin R$, ssi $(x, y) \in \overline{R}$

R^c ou $\overline{R}$ est dit le complément de la relation R .

- **Relation inverse**

Soit R une relation de X à Y . Son inverse R^{-1} est définie par:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R, x \in X, y \in Y\}.$$

- **Composition**

Soit R une relation entre X et Y et S une relation entre Y et Z . T est dit la composée de R et S .

$$R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$$

$$T = S \circ R \subseteq X \times Z$$

$$T = \{(x, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z, (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

Soit R une relation sur l'ensemble X . La composition de R et R s'écrit $R \circ R$ ou R^2 . R^n est la composition $n^{\text{ième}}$ de R .

1.2.3 Propriétés des relations

Soit R une relation binaire sur un ensemble X , pour tous $x, y, z \in X$, R est dite:

- **Réflexive** si : xRx . c-à-d. Chaque élément est en relation avec lui-même.
- **Symétrique** si : $xRy \implies yRx$. (C'est-à-dire, si x est en relation avec y alors y est en relation avec x).
- **Transitive** si : $[xRy \text{ et } yRz] \implies xRz$. (C'est-à-dire, si x est en relation avec y et y en relation avec z , alors x est en relation avec z).
- **Antisymétrique** si : $[xRy \text{ et } yRx] \implies x = y$. (C'est-à-dire, si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux).

1) – Soit R une relation binaire sur un ensemble X tel que:

$X = \{a, b, c\}$ et $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c)\}$. Alors R est réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.

2) – Soit R une relation binaire sur un ensemble X tel que:

$X = \{a, b, c, d\}$ et $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b)\}$. Alors R n'est pas réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.

3) – Soient $X = \mathbb{Z}$ et la relation $xRy \iff |x - y| \leq 1$, alors R est réflexive, symétrique, non antisymétrique et non transitive.

1.3 Ensembles Ordonnés

Cette section est consacré à la notion d'ordre et des vocabulaires de base qui leur associé. On présente ensuite les tables, le réseau et le diagramme de Hasse associés à un ensemble ordonné.

1.3.1 Relation d'ordre

Définition 1.8 Une relation binaire O sur un ensemble X est un ordre sur X si elle est

Réflexivité: pour tout $x \in X$, xOx , **Antisymétrie:** pour tout $x, y \in X$, (xOy et $yOx \implies x = y$), **Transitivité :** pour tout $x, y, z \in X$, (xOy et $yOz \implies xOz$).

L'ordre O est dit total s'il est tel que, pour tous $x, y \in X$, $xO^c y$ implique yOx , (Ce qui équivalent à dire: $\forall x, y \in X$, xOy ou yOx). Un ensemble ordonné est un couple (X, O) où X est un ensemble et O un ordre sur X (dans certains cas et pour éviter toute ambiguïté, il pourra être utile de noter O_X l'ordre de l'ensemble ordonné X). Si O est un ordre total, (X, O) est alors appelé un ensemble totalement ordonné (ou ensemble linéairement ordonné ou une chaîne). Dans le cas contraires on parle d'un ordre partiel.

1) – Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, O)$ l'ensemble ordonné où O est l'ordre suivant sur X :

$$O = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

2) – la relation " $\leq$ " définit un ordre total sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \dots$).

3) – la relation de divisibilité " $|$ " définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}$.

Définition 1.9 Soit O une relation sur un ensemble X

O est un ordre strict si elle est irréflexive (pour tout $x \in X$, $xO^c x$) et transitive. Un ensemble strictement ordonné est un couple

$P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre strict sur X

L'ordre strict O est dit strictement total si $x \neq y$ et $xO^c y$ impliquent yOx . pour tous $x, y \in X$

On dit alors que P est un ensemble strictment totalment ordonné.

Si $|X| = n$, P ou l'ordre strict correspondant pourra être noté $\underline{n}_s$.

Exemple 1.3

1) – Soit $X = \{a, b, c, d\}$ et $P = (X, O)$ l'ensemble ordonné où O est l'ordre strict sur X

$$O = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, d), (d, a), (b, a), (b, a), (a, d)\}.$$

2) – Soit $X = \{a, b, c, d\}$ et $P = (X, O)$ l'ensemble ordonné O est strictement total sur X

$$O = \{(b, c), (a, c), (b, d), (d, a), (b, a)\}.$$

1.3.2 Tables et Diagrammes d'un ensembles ordonnés

Les ensembles ordonnés peuvent être représentés par un diagramme de Hasse en appliquant la règle suivante :

- Les éléments sont représentés par des sommets.
- x et y sont joints par une arête si et seulement si:

$$x \leq y \text{ et } \nexists z \in X, x \leq z \text{ et } z \leq y.$$

Exemple 1.4 Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, R)$ l'ensemble ordonné où R est l'ordre suivant sur X :

$$R = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

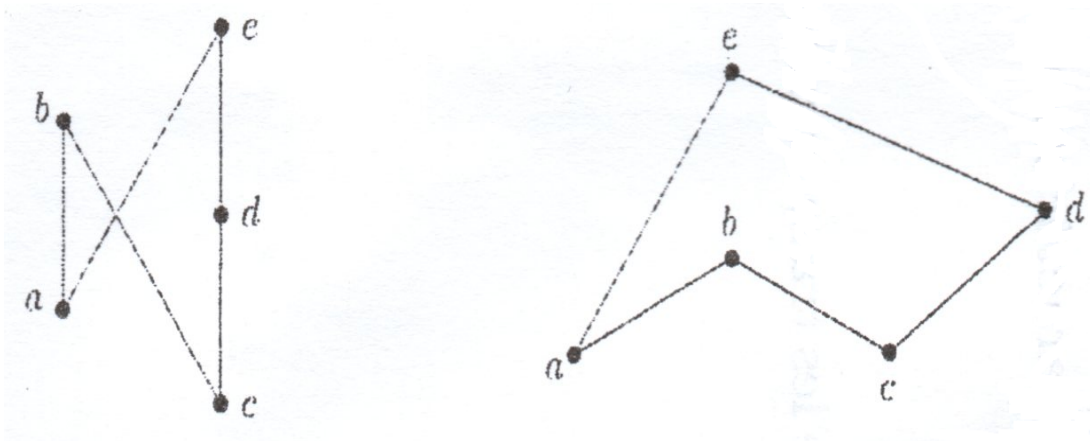


Fig.1. Deux diagrammes de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.4 (1)

On peut représenter l'ensemble ordonné (X, O) par un «réseau» dans le plan dont les points correspondent aux éléments de X et les arcs fléchés aux couples de O , les boucles

représentant les couples de la forme (x, x) (cf. La figure 1.1). On peut aussi représenter au moyen de tables (cf. Le tables 1.1 ci dessous).

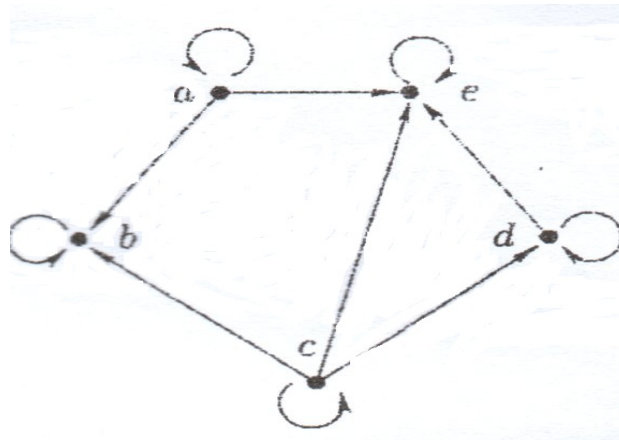


Fig.2. Un ensemble ordonné X représenté par un réseau dans le plan.

	a	b	c	d	e
a	$\times$	$\times$	0	0	$\times$
b	0	$\times$	0	0	0
c	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d	0	0	0	$\times$	$\times$
e	0	0	0	0	$\times$

	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

Tableau 1. Deux sortes de tables pour l'ensemble ordonné X de l'exemple 1.4

Définition 1.10 Soient x, y deux éléments d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$. Si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que x et y sont comparables. Dans le cas contraire, c'est-à-dire: Si $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$, on dit que x et y sont incomparables.

La figure 2 représente les deux diagrammes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné de l'Exemple 1.4.(1)

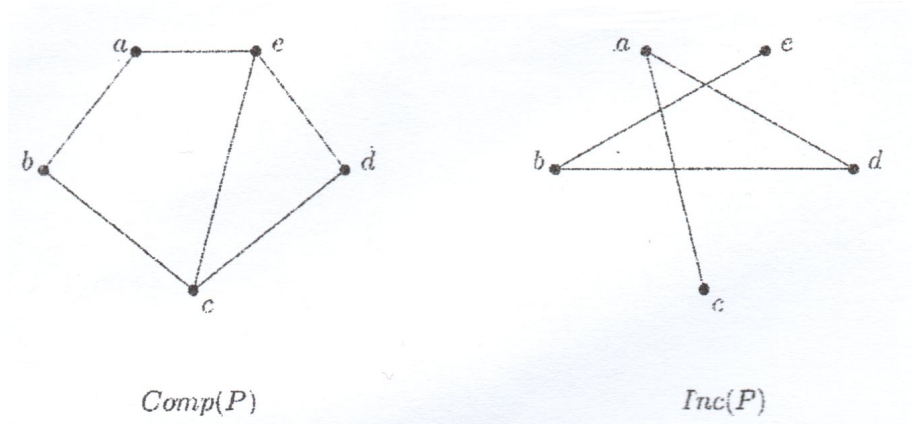


Fig.3. Les diagrammes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné

Notation 1.2 Nous avons utilisé la notation O pour désigner un ordre mais, dans un grand nombre de situations, cette notation est avantageusement remplacée par le symbole « $\leq$ », qui se lit « inférieur ou égal ». On utilise ainsi pour un ordre quelconque le symbole traditionnel de l'ordre entre les nombres. Un ensemble ordonné est alors noté $(X, \leq)$. De la même manière, un ordre strict sera fréquemment noté par « $<$ » qui se lit « inférieur » ou « strictement inférieur », et la notation $(X, <)$ est utilisée pour désigner un ensemble strictement ordonné.

1.3.3 Produit d'ensembles ordonnés

Définition 1.11 Soit $(P_i, \leq)_{i \in I}$ une famille d'ensembles ordonnés, l'ordre du produit $\prod_{i \in I} P_i$ peut être définie comme suit:

$$(x_i)_{i \in I} \leq (y_i)_{i \in I} \text{ ssi } x_i \leq y_i, \forall i \in I.$$

$\prod_{i \in I} P_i$ est un ensemble ordonné. En effet: on a

$$x_i \leq x_i, \forall i \in I \iff (x_i)_{i \in I} \leq (x_i)_{i \in I}, \text{ (réflexivité);}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_i)_{i \in I} \leq (y_i)_{i \in I} \\ (y_i)_{i \in I} \leq (x_i)_{i \in I} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x_i \leq y_i \\ y_i \leq x_i \end{array} \right\} \implies x_i = y_i, \forall i \in I \implies (x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I}, \text{ (antisymétrie);}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_i)_{i \in I} \leq (y_i)_{i \in I} \\ (y_i)_{i \in I} \leq (z_i)_{i \in I} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x_i \leq y_i \\ y_i \leq z_i \end{array} \right\} \implies x_i \leq z_i, \forall i \in I \implies (x_i)_{i \in I} \leq (z_i)_{i \in I}, \text{ (transitivité).}$$

1.3.4 Sous ensembles ordonnés et extensions

Définition 1.12 Soient $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie de X . La restriction de l'ordre $\leq$ à la partie Y est un ordre, noté $\leq_Y$ et appelé un sous-ordre de $\leq$. On dit alors que $(Y, \leq_Y)$ est un sous-ensemble ordonné de $(X, \leq)$. Si de plus, $x \prec y$ dans Y implique $x \prec y$ dans X , on dit que Y est un sous-ensemble ordonné couvrant de X .

Nous allons dans cette partie considérer les possibilités d'extensions d'un ordre O en un ordre O' .

Définition 1.13 Soient O et O' deux ordres sur un même ensemble X . On dit que O' est une extension de O si $O \subseteq O'$ (en d'autres termes, pour tous $x, y \in X$, xOy implique $xO'y$). Une extension O' de O est dite linéaire si O' est un ordre total. Lorsque O' est une extension (respectivement, extension linéaire) de O , on dira aussi que l'ensemble ordonné

(X, O') est une extension (respectivement, extension linéaire) de l'ensemble ordonné (X, O) . Les couples de O sont des couples de l'extension O' , ce que l'on repère par la notation $O \subseteq O'$ (qui est à bien distinguer de la notation $Y \subseteq X$ qui, elle, signifie que Y est un sous-ensemble ordonné de X). On note par $\text{Ext}(O)$, l'ensemble des extensions de O , C'est-à-dire $\text{Ext}(O) = \{O' / O \subseteq O'\}$.

1.3.5 Chaînes et antichaînes

Définition 1.14 On appelle chaîne tout ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours comparables. Le symbole C_n désignera une chaîne à n éléments. Et antichaîne est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques sont toujours incomparables. Le symbole A_n désignera un antichaîne à n éléments.

Exemple 1.5 L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$ est une chaîne.

La figure 3 représente les diagrammes de la chaîne C_4 et de l'antichaine A_4 .

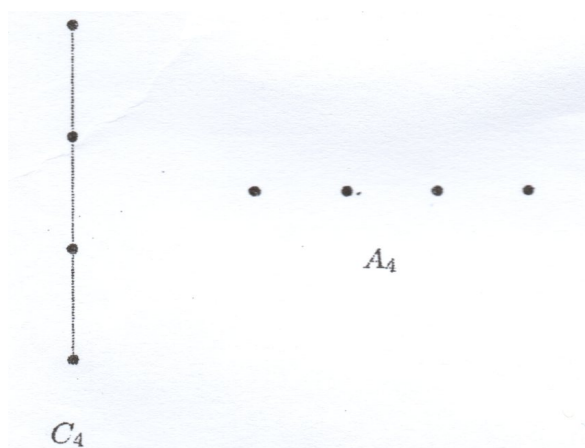


Fig.4. Les diagrammes de la chaîne C_4 , de l'antichaine A_4

Définition 1.15 Soit C une chaîne d'un ensemble ordonné X . C est dite maximale si elle n'est contenue (strictement) dans aucune autre chaîne de X .

Proposition 1.1 Le produit de deux chaînes n'est pas nécessairement une chaîne.

Exemple 1.6 Soit la chaîne de 5 éléments $C_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$C_5 \times C_5 = \{(x, y) \mid x \in C_5, y \in C_5\}$$

$$(a, b) \leq (c, d) \iff \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$$

$(0, 4) \leq (4, 1)$ ne sont pas comparables.

1.4 Éléments Particuliers

Élément Maximal et Élément Minimal

Définition 1.16 Un élément x d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est :

- le minimum de X si $x \leq y$ pour tout $y \in X$,
- le maximum de X si $y \leq x$ pour tout $y \in X$,
- un élément minimal de X s'il n'existe pas $y \in X$ avec $y < x$,
- un élément maximal de X s'il n'existe pas $y \in X$ avec $x < y$.

Au lieu du minimum (respectivement, maximum), on parle aussi du plus petit élément (respectivement, du plus grand élément) de X . Ces éléments, nécessairement uniques lorsqu'ils existent, sont souvent notés respectivement 0_X et 1_X (ou simplement 0 et 1) et on dit alors que X est borné. Mais les éléments maximaux et minimaux ne sont pas toujours uniques.

L'ensemble des éléments minimaux (respectivement, maximum) de X est noté $\text{Min}X$ (respectivement, $\text{Max}X$)

Exemple 1.7 - Soit $X = \{0, 1, 2, 3, 6\}$.

$\text{Sup } X = 6 \in X$.

$\text{Inf } X = 0 \in X$. Donc $\text{Max } X = 6$, $\text{Min } X = 0$.

- Pour la relation usuelle $\leq$ dans $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ et $\mathbb{N}$ n'ont pas de maximum.
- Pour la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$, $\{1, 2, \dots, 10\}$, $\text{inf } N = \text{min} = 1$, N n'admet pas de max et de sup .

Majorants, minorants

Définition 1.17 Soit $x \in X$, On dit que x est un majorant de A (dans X) lorsque $\forall y \in A$ on a $y \leq x$. La définition est analogue pour le minorant. Il n'y a pas toujours existence, ni unicité.

Exemple 1.8 Soit $X = \{0, 1, 2, 3, 6\}$. X est majorée car:

$\forall x \in X : x \leq 6$ et 6 un majorant de X . De plus $\forall x \in X : x < 7$ Donc 7 un majorant de X .

Il vient que tout élément de l'intervalle $[6; +\infty[$ est un majorant de X .

X est minorée car:

$\forall x \in X : x \geq 0$ et 0 est un minorant de X .

De plus -1 est un minorant de X car:

$\forall x \in X : x > -1$.

Il vient que tout élément de l'intervalle $] -\infty ; 0]$ est un minorant de X .

Remarque 1.1 Si x majore A , alors tout élément x' de X tel que $x \leq x'$ majore aussi A . On a l'équivalence :

$$a = \max(A) \iff a \in A \text{ et } a \text{ majore } A.$$

Une partie A est dite majorée (respectivement minorée). Lorsqu'elle admet au moins un majorant (respectivement minorant), A est dite bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.18 Si A est majorée, et si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé la borne supérieure de A , notée $\sup(A)$. La définition est analogue pour l'éventuelle borne inférieure :

Si A est minorée, et si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé la borne inférieure de A , notée $\inf(A)$.

Remarque 1.2 Si $\sup(A) \in A$ (resp. $\inf(A) \in A$), alors $\sup(A) = \max(A)$ (resp. $\inf(A) = \min(A)$)

Notation 1.3

- L'ensemble $\{t \in A : t \leq x\}$ des minorants de x se note $(x]$.
- L'ensemble $\{t \in A : x \leq t\}$ des majorants de x se note $[x)$.
- L'ensemble $\{t \in A : t < x\}$ des minorants stricts de x se note $(x[$.
- L'ensemble $\{t \in A : x < t\}$ des majorants stricts de x se note $]x)$.

1.5 Lattices (treillis)

Cette section consiste à introduire les lattices. Nous donnons également les définitions de base certains résultats sur cette classe des lattices. Pour plus de détails on peut consulter [BIR67], [CLM07], [DP02], [SCH02].

1.5.1 Concepts et résultats connus

Définition 1.19 [BIR67]. Un lattice est un ensemble ordonné $(X, \leq)$ tel que chaque paire d'éléments $\{x, y\}$ ou toute partie finie de X admet une borne supérieure et une borne inférieure. On note $x \vee y$ la borne supérieure, et $x \wedge y$ la borne inférieure de x et y .

$$\forall x, y \in X : \sup \{x, y\} = x \vee y,$$

$$\forall x, y \in X : \inf \{x, y\} = x \wedge y.$$

Exemple 1.9 Soit $X = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ (l'ensemble des parties de X), la relation $A R B \iff A \subseteq B$ est un ordre, et $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup)$ est une lattice

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : \sup \{A, B\} = A \cup B,$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : \inf \{A, B\} = A \cap B.$$

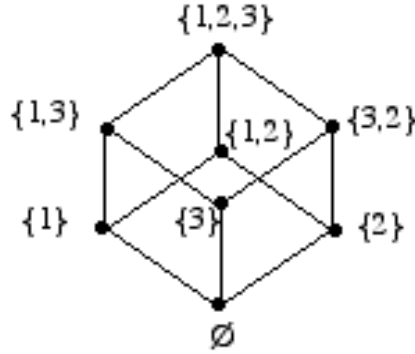


Fig.5. Diagramme de Hasse du lattices $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq, \cap, \cup)$

Remarque 1.3 $\mathcal{P}(X)$ est toujours un lattice.

Exemple 1.10 Tout chaîne C est un lattice.

$$\forall x, y \in C : \sup \{x, y\} = \max(x, y),$$

$$\inf \{x, y\} = \min(x, y).$$

Définition 1.20 (Sous-lattice) Soit $(X, \leq, \wedge, \vee)$ un lattice, une partie A de X est un sous lattice de X si elle est stable pour les opérations infimum (borne inférieure) et supremum (borne supérieure) de X . c-à-d.

$$\text{Si } x, y \in A \implies x \wedge y \in A \text{ et } x \vee y \in A.$$

1.5.2 Lattice comme structure algébrique

Théorème 1.4 [Sch02]. Soit $(X, \leq)$ un lattice. Alors $\wedge$ et $\vee$ vérifient les propriétés suivantes

1. $x \wedge x = x = x \vee x$ (idempotence).
2. $x \wedge y = y \wedge x$ et $x \vee y = y \vee x$ (commutativité).
3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ et $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (associativité).

$$4. x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y) \quad (\text{absorption}).$$

Théorème 1.5 Soit $L = (X, *, o)$ un ensemble non vide muni de deux opérations $*$ et o satisfaisant aux les propriétés du théorème 1.3, alors

$$(1) \forall x, y \in X (x * y = x) \iff (x o y = y);$$

$$(2) \leq \text{ définie par } x \leq y \iff (x * y = x) \text{ (ou } x o y = y) \text{ est une relation d'ordre;}$$

(3) $(X, \leq)$ est un lattice et les opérations $\vee$ et $\wedge$ induites par $\leq$ coïncident avec les opérations o et $*$ originales.

Preuve. (1) Supposons que $x o y = y$. On a d'après la propriété (4)

$$x = x * (x o y). \text{ ce qui implique que } x = x * y.$$

(2) Montrons que $\leq$ définie par $x \leq y$ est une relation d'ordre.

(i) $\leq$ est réflexive par l'idempotence.

(ii) Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x o y = y$ et $y o x = x$ alors $x = y$ par commutativité

Donc $\leq$ est antisymétrique.

(ii) Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x o y = y$ et $y o z = z$,

Donc

$$\begin{aligned} x o z &= x o (y o z) \\ &= (x o y) o z && \text{par associativité} \\ &= y o z \\ &= z. \end{aligned}$$

D'où $x \leq z$ et par conséquent $\leq$ est transitive.

(3) Montrons que tout couple d'éléments de X admet une borne inf.

Pour tout couple (x, y) de $X \times X$, $x * y$ est borne inférieure de $\{x, y\}$.

En effet,

$$\begin{aligned} x * (x * y) &= (x * x) * y && \text{par associativité} \\ &= x * y && \text{par idempotence.} \end{aligned}$$

$$\text{Alors } x * (x * y) = x * y.$$

Donc $x * y \leq x$.

Même chose pour,

$$\begin{aligned} y * (x * y) &= y * (y * x) && \text{par commutativité;} \\ &= (y * y) * x && \text{par associativité;} \\ &= y * x && \text{par idempotence;} \\ &= x * y && \text{par commutativité,} \end{aligned}$$

Alors $y * (x * y) = x * y$.

Donc $x * y \leq y$.

D'où $x * y$ est minorant de $\{x, y\}$.

(4) Montrons que $x * y$ est le plus grand des minorants.

S'il existe z minorant de $\{x, y\}$, $x * z = z$ et $y * z = z$.

Alors

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= x * (y * z) \\ &= x * z \\ &= z.\end{aligned}$$

Donc $z \leq x * y$.

Par utilisation de l'équivalence

$$x \circ y = y \iff x * y = x$$

on peut aussi montrer que $x \circ y$ est la borne supérieure de $\{x, y\}$. ■

1.5.3 Lattices complets

Dans cette section, on s'intéresse à la définition des lattices complets et on donne quelques exemples. Pour plus de détails on peut consulter BIRKHOFF [BIR67], BLYTH [BLY05], DAVEY et PRIESTLEY [DP02], FRIED [FRI70], SCHRODER [SCH02].

Définition 1.21 *Si Toute partie non vide d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ a une borne supérieure et une borne inférieure, l'ensemble ordonné $(X, \leq)$ est un lattice complet ("treillis complete "). Lorsque on impose seulement que toute partie à deux éléments ait une borne supérieure et une borne inférieure, l'ensemble ordonné est un lattice.*

Si L est un lattice et a, b, c sont trois éléments de L , ces éléments ont une borne supérieure et une borne inférieure données par les formules:

$$\begin{aligned}- \vee\{a, b, c\} &= a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \\ - \wedge\{a, b, c\} &= a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c\end{aligned}$$

On convient de les noter respectivement $a \vee b \vee c$ et $a \wedge b \wedge c$. Plus généralement, toute partie finie non vide $I = \{a_1, \dots, a_k\}$ d'un lattice a à la fois une borne supérieure et une borne inférieure, qu'on pourra noter respectivement $a_1 \vee \dots \vee a_k$ et $a_1 \wedge \dots \wedge a_k$. Un lattice est borné s'il a un plus petit élément et un plus grand élément (qu'on note, autant que possible,

0 et 1). Evidemment, un lattice complets est borné et un lattice fini non-vide est un lattice complet.

Exemple 1.11 *La droite achevée $R \cup \{-\infty, +\infty\}$, et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E , muni de l'ordre d'inclusion, sont des lattices complets.*

Chapitre 2

Ensembles pseudo-ordonnés et trellises

Dans ce chapitre, nous présentons les ensembles pseudo-ordonnés, et les trellises sa position par rapport aux ensembles ordonnés et lattices. Puis on donnera quelques exemples et propriétés. Pour plus de détails, voir (SKALA [SKA69], [SKA71], [SKA72]).

2.1 Ensembles pseudo-ordonnés

Définition 2.1 Une relation $\trianglelefteq$ sur un ensemble P est un pseudo-ordre sur P si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

1. **Reflexivité:** pour tout $x \in P$, $x \trianglelefteq x$,
2. **Antisymétrie:** pour tout $x, y \in P$, $(x \trianglelefteq y \text{ et } y \trianglelefteq x)$ impliquent $x = y$.

le couple $(P, \trianglelefteq)$ est dit ensemble pseudo-ordonné

Exemple 2.1 (1). Tout ordre est un pseudo-ordre.

(2). Soit $P = \mathbb{R}$ et $\trianglelefteq$ définit par $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \trianglelefteq y$ si et seulement si $0 \leq y - x \leq a$ où a est un nombre positif. Alors $\trianglelefteq$ est un pseudo-ordre. En effet,

- $x \trianglelefteq x \implies 0 \leq x - x \leq a$. Donc $\trianglelefteq$ est réflexive
- $x \trianglelefteq y \implies 0 \leq y - x \leq a$

$$\implies x \leq y$$

$$y \trianglelefteq x \implies y \leq x. \text{ Donc } x = y$$

Alors $\trianglelefteq$ est antisymétrie.

- $\trianglelefteq$ n'est pas transitive car: On pose $(a = 1, x = 1, y = 2, z = 3)$. On a

$$x \trianglelefteq y \implies 0 \leq 2 - 1 \leq 1 \quad \text{et}$$

$$y \trianglelefteq z \implies 0 \leq 3 - 2 \leq 1. \quad \text{Tan dis que}$$

$$x \not\trianglelefteq z \quad \text{car } 0 \leq 3 - 1 \leq 1 \quad \text{contradiction. D'où } \trianglelefteq \text{ n'est pas transitive.}$$

$$(3). \text{ Soit } P = \{a, b, c, d, e\} \text{ et } \trianglelefteq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, e), (b, c), (c, e)\}.$$

Alors $(P, \trianglelefteq)$ est un ensemble pseudo-ordonné. On dit que $\trianglelefteq$ n'est pas transitive (car (a, b) et $(b, c) \in \trianglelefteq$, Mais $(a, c) \notin \trianglelefteq$).

Définition 2.2 Soit $\trianglelefteq$ un pseudo-ordre sur P . On dit que $\trianglelefteq$ est linéaire ou total sur P lorsque deux éléments de P sont toujours comparables pour $\trianglelefteq$, c'est-à-dire:

$$\forall x, y \in P, x \trianglelefteq y \text{ ou } y \trianglelefteq x.$$

Dans le cas contraire, on parle d'un pseudo-ordre partiel.

Notation 2.1 Généralement on note le pseudo-ordre par le symbol $(\trianglelefteq)$.

Définition 2.3 La relation de couverture d'un ensemble pseudo-ordonné $(P, \trianglelefteq)$, notée $\prec$, est définie par

$$x \prec y \text{ si } (x \triangleleft y \text{ et } x \trianglelefteq z \triangleleft y) \implies x = z.$$

On dit alors que x est couvert par y ou que y couvre x . On pose

$$xP^+ = \{t \in P : x \prec t\} \text{ et } P^-x = \{t \in P : t \prec x\}.$$

Exemple 2.2 L'ensemble pseudo-ordonné P de l'exemple 1.4 a cinq couples de couverture: $a \prec b, a \prec e, c \prec b, c \prec d$ et $d \prec e$. Donc

$$\prec = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e)\}$$

Définition 2.4 On appelle *pseudo-chaîne* tout ensemble pseudo-ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours comparables. Les pseudo-chaîne finie sura noté par le symbole P_n .

2.1.1 Diagramme d'un ensemble pseudo-ordonné

Les ensembles pseudo-ordonnés peuvent se représenter par un diagramme en appliquant la règle suivante :

- Les éléments sont représentés par des sommets.
- x et y sont joints par une flèche orientée si et seulement si:

$$x \trianglelefteq y \text{ et } \nexists z \in P, x \trianglelefteq z \text{ et } z \trianglelefteq y.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire: Si $x \not\trianglelefteq y$ et $y \not\trianglelefteq x$, on dit que x et y sont incomparables. Et noté par $x \parallel y$.

Exemple 2.3 Soit $P = \{a, b, c, d, e\}$ un ensemble pseudo-ordonné où $\trianglelefteq$ est le pseudo-ordre suivant sur P :

$$\trianglelefteq = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

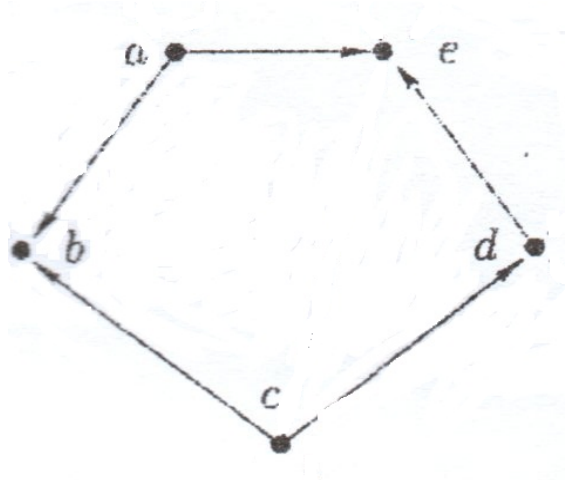


Fig .6. les diagrammes de l'ensemble pseudo-ordonné

2.1.2 Éléments Particuliers

Remarque 2.1 *Même Éléments particuliers donnée pour un ensembles ordonné.*

2.1.3 Quelques propriétés des ensembles pseudo-ordonnés.

Soit $(X, \trianglelefteq)$ un ensemble pseudo-ordonné, soit $\mathcal{A}$ une famille de sous ensembles S de X .

$\mathcal{A}$ est dite consistante si elle vérifie la condition suivante:

Si R et S sont deux ensembles distincts de $\mathcal{A}$, alors il n'existe plus $r_1, r_2 \in R$ et $s_1, s_2 \in S$ tel que:

$$r_1 \trianglelefteq s_1 \text{ et } s_2 \trianglelefteq r_2.$$

La relation $\trianglelefteq$ définit sur $\mathcal{A}$ par:

$R \trianglelefteq S$ ssi $\exists r \in R$ et $s \in S$ tel que $r \trianglelefteq s$ est un pseudo-ordre sur $\mathcal{A}$. L'ensemble pseudo-ordonné $(\mathcal{A}, \trianglelefteq)$ est dit l'ensemble de contraction de l'ensemble pseudo-ordonné $(X, \trianglelefteq)$.

On utilise la même relation $\trianglelefteq$ dans $\mathcal{A}$ et $\trianglelefteq$ dans X puisque il n'y a pas de confusion.

Exemple 2.4 *Soit un ensemble de nombres entiers positifs, l'ensemble $m \trianglelefteq n$ si et seulement si m est un diviseur de n . La famille de tout le paire $\{2K - 1, 2K\}$, $K = 1, 2, \dots$, est consistant.*

Théorème 2.2 [SKA72]. *Chaque ensemble pseudo-ordonné est isomorphe avec une contraction d'un ensemble ordonné.*

Preuve. Soit A un ensemble de pseudo-ordre et l'ensemble $B = A \times \{0, 1\}$ par la définition $(a, 0) \leq (a', 1)$ si et seulement si $a \trianglelefteq a'$ et soit $\leq$ est réflexive

nous partiellement ordre B . la famille des paires $\{(a, 0), (a, 1)\}$ est conformé et est isomorphe avec A .

pour chaque sous-ensemble B d'un ensemble de pseudo-ordre A , la transitive et réflexive, mais pas nécessairement antisymétrique, relation $\trianglelefteq_B$ peut être définie sur B en plaçant $b \trianglelefteq_B b'$ pour deux éléments de B si et seulement si il existe un ordre fini $(b_1, \dots, b_n)$ des éléments de B tel que $b \trianglelefteq b_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq b_n \trianglelefteq b'$. Si pour chaque paire d'éléments b et b' au moins une des relations $b \trianglelefteq_B b'$ ou $b' \trianglelefteq_B b$ Alors B est une pseudo-chaîne Si ces deux relations se tiennent pour chaque paire d'éléments, B serait un cycle. ■

Théorème 2.3 [SKA72]. *Les éléments d'un pseudo-chaîne fini peuvent être classés $(b_1, \dots, b_n)$ tels que $b_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq b_n$.*

2.1.4 Axiomes de linéarité d'un pseudo-ordres.

Axiomes de maximalité:

Théorème 2.4 [SKA72]. *Soit P un pseudo-ordre. Alors P est linéaire ssi P est maximal.*

Preuve. Si un pseudo-ordre P est linéaire, on ne peut lui ajouter aucune comparabilité donc il n'a pas d'extension autre que lui même. La réciproque est conséquence du fait ci-dessous. Donc P est Maximal. ■

Axiomes d'extension (Théoreme de Szpilrajn pour les pseudo-ordre):

Théorème 2.5 [SKA72]. *Tout pseudo-ordre possède au moins une extension linéaire.*

Théorème 2.6 *Pour tout ensemble pseudo-ordonné $(P, \trianglelefteq)$, le nombre $c_M(\underline{I}(P))$ de chaînes maximales de $\underline{I}(P)$ égale le nombre $\text{lin}(P)$ d'extension linéaire de pseudo-ordre de P .*

La correspondance entre chaînes maximales et extensions linéaires est donnée dans l'énoncé suivant ([POU84]).

Définition 2.5 *Soient $\trianglelefteq$ et $\trianglelefteq'$ deux pseudo-ordres sur un même ensemble P . On dit que $\trianglelefteq'$ est une extension de $\trianglelefteq$ si $\trianglelefteq \subseteq \trianglelefteq'$ (en d'autres termes, pour tous $x, y \in P$, $x \trianglelefteq y$ implique $x \trianglelefteq' y$).*

Une extension $\trianglelefteq'$ de $\trianglelefteq$ est dite linéaire si $\trianglelefteq'$ est un pseudo-ordre linéaire.

Preuve. Lorsque $\trianglelefteq'$ est une extension (respectivement, extension linéaire) de $\trianglelefteq$, on dira aussi que l'ensemble pseudo-ordonné $(P, \trianglelefteq')$ est une extension (respectivement, extension linéaire) de l'ensemble pseudo-ordonné $(P, \trianglelefteq)$. Par abus de langage, on dira parfois aussi que $\trianglelefteq'$ est une extension de $(P, \trianglelefteq)$. Les couples de $(P, \trianglelefteq)$ sont des couples de l'extension $\trianglelefteq$, ce que l'on repère par la notation $(P, \trianglelefteq) \subseteq (P, \trianglelefteq')$ (qui est à bien distinguer de la notation $(P, \trianglelefteq) \subseteq (P, \trianglelefteq')$ qui, elle, signifie que $\trianglelefteq$ est un sous-ensemble pseudo-ordonné de $\trianglelefteq'$). ■

Théorème 2.7 *Soit $(P, \trianglelefteq)$ un ensemble pseudo-ordonné.*

(i) *Si $\trianglelefteq'$ est une extension linéaire de $\trianglelefteq$ alors $\underline{I}(P, \trianglelefteq')$ est une chaîne maximale de $\underline{I}(P, \trianglelefteq)$.*

(ii) Si C est une chaîne maximale de $\underline{I}(P, \underline{\leq})$ alors il existe une et une seule extension linéaire $\underline{\leq}'$ de $\underline{\leq}$ telle que $C = \underline{I}(P, \underline{\leq}')$

Corolaire 2.1 Soit E un ensemble, fini ou non.

(1) Les chaînes maximales de $\mathcal{P}(E)$ et les pseudo-ordres totaux sur E sont en correspondance bijective.

(2) L'existence d'un pseudo-ordre total sur E équivaut à l'existence d'une chaîne maximale dans $\mathcal{P}(E)$

Lemme 2.2 [SKA72]. Si P est un pseudo-ordre sur V et $(b, a) \notin P$, alors il existe un pseudo-ordre contenant $P \cup \{(a, b)\}$ et le plus petit est $P \vee \{(a, b)\} = P \cup \Gamma$ où $\Gamma = \{(x, y) \in V \times V : (x, a) \in P \text{ et } (b, y) \in P\}$.

Exemple 2.5 Soit $P = \{a, b, c, d\}$. Un ensemble pseudo-ordonné.

Soit $\underline{\leq}$ est un pseudo-ordre tels que:

$$\underline{\leq} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (c, a)\}.$$

$(b, d) \notin \underline{\leq}$, On définit $\underline{\leq}_1$ par:

$$A_1 = \{x \in P / x \underline{\leq} b\} = \{a, b\}.$$

$$B_1 = \{y \in P / d \underline{\leq} y\} = \{d\}.$$

$$A_1 \times B_1 = \{(a, d), (b, d)\}.$$

$$\underline{\leq}_1 = \underline{\leq} \cup \{(a, d), (b, d)\}.$$

$$\underline{\leq}_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (c, a), (a, d), (b, d)\}.$$

$\underline{\leq}_1$ est une extension linéaire car tout éléments comparable.

En représente $\underline{\leq}_1$ par un tableau:

$$\underline{\leq}_1 =$$

	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	1	1	1
c	1	0	1	1
d	0	0	0	1

$\underline{\leq}_1$ est une extension linéaire de $\underline{\leq}$. Donc $\underline{\leq}_1$ est réflexive, antisymétrique mais ne pas transitive car $\underline{\leq}$ et aussi.

Axiomes d'intersection:

Théorème 2.8 [SKA72]. *Tout pseudo-ordre P est l'intersection de ses extension linéaires.*

Preuve. Soit A un ensemble pseudo-ordre et $\mathcal{L}$ l'ensemble de tous l'extension lineaire. Par théorème 3, $\mathcal{L}$ est non vide . l'intresection de $\mathcal{L}$ clairement une extension du pseudo-ordre $\preceq$ sur A . Dans l'ordre pour la prouver égale $\preceq$ nous montre que si $a \not\preceq b$ si l'exist un extension lineaire $\preceq'$ de $\preceq$ tels que $a \not\preceq' b$. Depuis $a \not\preceq b$, nous pouvons définir le pseudo-ordre $\preceq^*$ par $b \preceq^* a$ et pour $(a, b) \neq (x, y)$, $x \preceq^* y$ si et seulement si $x \preceq y$. Par théorème 3 il'exist un extension lineaire $\preceq'$ de $\preceq^*$. Par conséquent aussi $b \preceq' a$ et donc $a \not\preceq' b$.

Dans la suite représente l'ensemble pseudo-ordre par le diagramme de Hasse avec la convention qui si x est au-dessous de y et est relié à y sans possession $x \preceq y$, puisque x et y seront jointet. ■

Exemple 2.6 *Soit l'ensemble pseudo-ordre $P = \{a, b, c, d, e\}$ là où $a \preceq b \preceq c \preceq d \preceq e$, $a \preceq x \preceq e$, pour chaque x , être représenté par Figure 7.*



Fig.7.

Théorème 2.9 [SKA72]. *L'ensemble pseudo-ordonné P est une union de pseudo-chaîne de K , tels que K est le nombre maximum de éléments dans tout sous-ensemble indépendant de P .*

Preuve. Pour chaque élément a dans P , soit $\bar{a}$ l'ensemble d'éléments contenu dans un cycle a . Nous définissons la relation $\leq$ sur l'ensemble $\overline{A}$ de tous les ensemble $\bar{a}$ par l'arrangement $\bar{a} \leq \bar{b}$ si là exist élément a' et b' dans $\bar{a}$ et $\bar{b}$, respectivement, tels que $a' \sqsubseteq_A b'$. La relation $\leq$ est bien définie puisqu' $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont des cycles. Clairment $\leq$ est reflexive, que c'est antisymetrique suit de l'observation que $\bar{a} = \bar{b}$ ou $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont disjoient, la transitivité est une conséquence de la transitivité de $\sqsubseteq_A$. dans cette cas appelle $\overline{A}$ partiellement ordre.

Soit $a_1, \dots, a_K$ être un ensemble maximal d'éléments indépendants dans A . Puis $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_K$ sont distinct constituent un ensemble maximal indépendant dans $\overline{A}$. Par le théoreme des DILWORTH. $\overline{A}$ est l'union des K chaînes, par exemple, $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_K$.

Si $\overline{C} = \{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m\}$ est un chaîne fini dans $\overline{A}$, nous définissons l'ensemble C de la façon suivante. Puisque $\overline{C}$ est une chaîne là existe un ordre par exemple, $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m$ tels que $\bar{c}_1 \leq \dots \leq \bar{c}_m$. Depuis $\bar{c}_i \leq \bar{c}_{i+1}$ il'existe des éléments $b_1^i, \dots, b_{m_i}^i$ dans A tels que $c_i \sqsubseteq b_1^i \sqsubseteq \dots \sqsubseteq b_{m_i}^i \sqsubseteq c_{i+1}$. Nous définissons C pour être l'union de tous les éléments de chaque $\bar{c}_i$, en même temps que tous les éléments $b_1^i, \dots, b_{m_i}^i$, $i = 1, \dots, m$. Donc facilement que C est une pseudo-chaîne dans A . Par conséquent les ensembles $c_1, \dots, c_K$ remplissent les conditions du théorème.

■

2.2 Trellises

En 1971, Skala a remarqué que pour un pseudo-ordre nous pouvons définir les bornes supérieures et les bornes inférieures de même façon qu'un ordre [Ska71] [Ska72]. Dans cette section, nous donnons les concepts de base de trellises d'une manière presque analogue des lattices. Puis, nous présentons les trellis comme structures algébriques.

2.2.1 Concepts et résultats connus

Définition 2.6 *Un trellis est un ensemble pseudo-ordonné $(P, \sqsubseteq)$ où tout couple (x, y) admet une borne supérieure et une borne inférieure. On note $x \vee y$ la borne supérieure, et $x \wedge y$ la borne inférieure de x et y .*

$$\forall x, y \in T : \sup \{x, y\} = x \vee y,$$

$$\forall x, y \in T : \inf \{x, y\} = x \wedge y.$$

Exemple 2.7 *Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ tel que la borne supérieure et la borne inférieure de chaque pair d'éléments données par la table suivante:*

$\wedge \setminus \vee$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	a	b	c	e	e
c	a	b	c	d	e
d	a	a	c	d	e
e	a	b	c	d	e

(On le comprend que les opérations sont commutatives et idempotence). On montre facilement que pour deux éléments x, y d'un treillis $x \leq y$ si et seulement si $x \wedge y = x$ et ou $x \vee y = y$.

Exemple 2.8 (1) Tout chaîne C est un treillis.

$$\forall x, y \in C : \sup \{x, y\} = \max(x, y),$$

$$\inf \{x, y\} = \min(x, y).$$

(2) Soit $P = \{a, b, c, d\}$ un ensemble pseudo-ordonné et $\leq$ est pseudo-ordre suivant sur P :

$$\leq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (a, d), (b, d)\}.$$

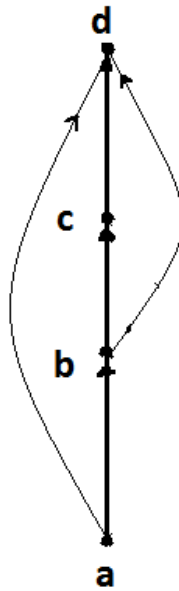


Fig .8. représentation graphique d'un treillis

Définition 2.7 (Sous-treillis) Soit $(X, \leq, \wedge, \vee)$ un treillis, une partie A de X est un sous treillis de X si elle est stable pour les opérations infimum (borne inférieure) et supremum

(borne supérieure) de X . c-à-d.

$$\text{Si } x, y \in A \implies x \wedge y \in A \text{ et } x \vee y \in A.$$

Remarque 2.2 *Un sous-trellis est un trellis.*

2.2.2 Trellises comme structures algébriques

Théorème 2.10 [SKA72]. *Soit $(P, \sqsubseteq)$ un trellis. alors $\wedge$ et $\vee$ vérifie les propriétés suivantes.*

1. $x \wedge y = y \wedge x$ et $x \vee y = y \vee x$ (commutativité).
2. $x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$ (absorption).
3. $x \vee ((x \wedge y) \vee (a \wedge z)) = x = x \wedge ((a \vee y) \wedge (x \vee z))$ (demi-préservation).

Théorème 2.11 [SKA72]. *Soit $L = (P, *, o)$ un ensemble non vide muni de deux opérations $*$ et o satisfaisant propriétés du théorème 2.10, alors,*

- (1) $\forall x, y \in P \ (x * y = x \iff x o y = y)$;
- (2) $\sqsubseteq$ définie par $x \leq y \iff x * y = x$ ou $x o y = y$ est une relation pseudo-ordre;
- (3) $(P, \sqsubseteq)$ est un lattice et les opérations $\vee$ et $\wedge$ induites par $\sqsubseteq$ coïncident avec les opérations o et $*$ originales.

Preuve. (1) Supposons que $x o y = y$. On a d'après la propriété (2)

$x = x * (x o y)$. ce qui implique que $x = x * y$.

(2) Montrons que $\sqsubseteq$ définie par $x \leq y$ est une relation pseudo-ordre.

(i) $\sqsubseteq$ est réflexive par l'idempotence.

(ii) Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x o y = y$ et $y o x = x$ alors $x = y$ par commutativité

Donc $\sqsubseteq$ est antisymétrique.

Alors $\sqsubseteq$ est une relation pseudo-ordre. ■

Théorème 2.12 [SKA72]. *Soit $(P, \sqsubseteq)$ un trellis. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- 1) $\sqsubseteq$ est transitive;

- 2) Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont associatives;
- 3) une des opérations $\vee$ ou $\wedge$ est associative;
- 4) $x \trianglelefteq y$ implique $x \trianglelefteq y \vee a, \forall a$;
- 5) $x \trianglelefteq y$ implique $a \wedge x \trianglelefteq y, \forall a$.

Si $\trianglelefteq$ est transitive, le treillis est un lattice et par conséquent l'opération sont associative.

Clairment (2) implique (3).

on suppose que $\vee$ est associative. Alors $x \trianglelefteq y$ implique $x \vee (y \vee a) = (x \vee y) \vee a = y \vee a$, d'où $x \trianglelefteq y \vee a$.

Si $\wedge$ est associative et $x \trianglelefteq y$, alors $x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \wedge (y \vee a) = x \wedge (y \wedge (y \vee a)) = x \wedge y = x$ et encore $x \trianglelefteq y \vee a$. Dans l'ordre pour dériver (5) form (4), soit $x \trianglelefteq y$. Depuis $a \wedge x \trianglelefteq x$, on obtien la form (4) cela $a \wedge x \trianglelefteq x \vee y = y$.

Enfin, si (5) prises, puis d' $x \trianglelefteq y \trianglelefteq z$ il suit cela $x = x \wedge y \trianglelefteq z$; c'est -à-dire, $\trianglelefteq$ est transitive.

Définition 2.8 Soit $(P, \trianglelefteq)$ un ensemble pseudo-ordonné et $a, x, y \in P$, on dit que

- 1) a est transitive au centre si $x \trianglelefteq a \trianglelefteq y \implies x \trianglelefteq y$
- 2) a est transitive à droite si $a \trianglelefteq x \trianglelefteq y \implies a \trianglelefteq y$
- 3) a est transitive à gauche si $x \trianglelefteq y \trianglelefteq a \implies x \trianglelefteq a$
- 4) a est transitive si il est transitive à droite, à gouch et transitive au centre.

Théorème 2.13 [SKA72]. Si x est $\vee$ -associative, alors x est transitive, si $x_1, \dots, x_K$ être $\vee$ -associative, alors la borne sup de $\{x_1, \dots, x_K\}$ existe et égale $x_{I_1} \vee \dots \vee x_{I_K}$ pour toute permutation $I_1, \dots, I_K$ de $1, \dots, K$; d'ailleurs $\vee\{x_1, \dots, x_K\}$ est $\vee$ -associative.

Remarque 2.3 Les éléments transitifs n'ont pas besoin d'être associatifs. En effet, dans la figure suivante (Fig.9.), l'élément d est transitive mais ne pas $\vee$ -associative depuis $(d \vee a) \vee c = c$ mais $d \vee (a \vee c) = u$.

Dans certaines conditions, tout fois la transitivité et l'associativité sont équivalentes.

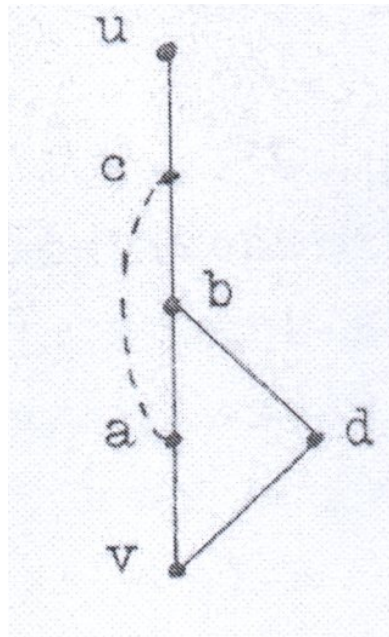


Fig.9. L'élément d est transitive mais ne pas $\vee$ -associative

Chapitre 3

Quelques caractérisations des trellises complets

Dans ce chapitre on va étudier quelques caractérisations des trellises complets [SKA71],[SKA72]. Ces caractérisations généralisent d'une manière naturelle les caractérisations des lattices complets. Nous commençons par quelques théorèmes de caractérisations importants des lattices complets. Pour plus de détails on peut consulter PARAMESHWARA, BHATTA et SHASHIREKHA[PBS00], GLADSTIEN[GLA73], SCHRODER[Sch02], (SKALA[SKA71],[SKA72]).

3.1 Caractérisation des lattices complets.

Dans cette section, on va présenter quelques caractérisations de lattices complets. Pour plus de détails on pourra consulter DAVEY et PRIESTLEY[DP02], SCHRODER[Sch02], DAVIS[DAV55] et TARSKI[TAR55].

Lemme 3.1 *Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et soient $S, T \subseteq X$ tels que $\bigvee S, \bigvee T, \bigwedge S$ et $\bigwedge T$ existent dans X . Alors $\bigwedge(S \cup T) = \bigwedge S \wedge \bigwedge T$ et $\bigvee(S \cup T) = \bigvee S \vee \bigvee T$.*

Preuve. $S \subseteq S \cup T \implies \bigvee S \leq \bigvee(S \cup T)$, $T \subseteq S \cup T \implies \bigvee T \leq \bigvee(S \cup T)$. Donc $\bigvee S \vee \bigvee T \leq \bigvee(S \cup T)$.

Soit $x = \bigvee S \vee \bigvee T$. Alors $x \geq \bigvee S$ et $x \geq \bigvee T$ d'où $\forall s \in S \forall t \in T \ x \geq s, t$ i.e. $\forall z \in S \cup T \ x \geq z$ donc $x \geq \bigvee(S \cup T)$.

L'autre égalité se prouve de la même manière ■

Dans le lemme suivant présente la relation entre l'existence des bornes supérieures et celle des bornes inférieures:

Soit X un ensemble et L une famille de sous-ensembles de X ordonnée par inclusion telle que.

Lemme 3.2 [SCH02]

Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et S une partie de X . Alors

$\bigwedge S = \bigvee S^l$ et $\bigvee S = \bigwedge S^u$ tel que :

(S^u l'ensemble des majorants de S et S^l l'ensemble des minorants de S).

Théorème 3.1 ([BIR67],[DP02]). *Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *X est un lattice complet;*
2. *Pour tout $S \subseteq X$, $\bigwedge S$ existe dans X ;*
3. *Pour tout $S \subseteq X$, $\bigvee S$ existe dans X ;*
4. *X a un plus grand élément et tout $\emptyset \neq S \subseteq X$, $\bigwedge S$ existe dans X .*
5. *X a un plus petit élément et tout $\emptyset \neq S \subseteq X$, $\bigvee S$ existe dans X .*

Preuve. $1 \implies 2$ Evident par définition

$2 \implies 3$ Application directe du lemme 1.3.

$3 \implies 4$ $\bigvee X$ existe dans X . Donc X a un plus grand élément. Le reste, application

du lemme 1.3.

$4 \implies 5$ Application directe du lemme 1.3.

$5 \implies 1$ Application directe du lemme 1.3. ■

Théorème 3.2 [DAV55]. *Pour un lattices X , il y a équivalence entre:*

1. *X complet,*

2. Tout chaîne non vide a un supremum et infimum dans X ,

3. Tout chaîne maximale est une chaîne complet.

Preuve. $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$

$2 \rightarrow 3$. Soit C une chaîne maximale. Soit $A \subseteq C$ et soit $a = \bigvee A$. Soit $c \in C$. Ou bien $c \not\leq a$ et $c \not\leq x$ pour tout $x \in A$ et dans ce cas $c \leq a$. Ou bien $c \leq a$ et puisque C est une chaîne, $x \leq c$ pour tout $x \in A$, par suite $a \leq c$. Donc $C \cup \{a\}$ est une chaîne. Par maximalité de C , $a \in C$.

$2 \rightarrow 1$. Soit $A \subseteq X$. Soit C une chaîne maximale dans A^u ensemble des majorants de A . Etendons C en une chaîne maximale C' de P . Soit c l'infimum de C dans C' . Alors c est l'infimum de C dans X . En effet, si t minore C alors $c \vee t$ également, et donc $c \vee t$ est comparable à tout. ■

Corolaire 3.3 Soit X un ensemble et T une famille de sous-ensembles de X ordonné par inclusion telle que:

(i) Pour toute famille non vide $(A_i)_{i \in I} \subseteq T$, $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$;

(ii) $X \in T$;

Alors T est un lattices complet pour lequel $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$. La borne sup n'est caractérisée que par la définition:

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcap \{B \in T \mid \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B\}.$$

Preuve. D'après (ii), T a un plus grand élément X . Soit $(A_i)_{i \in I}$ un sous-ensemble non vide de T , par (i) on obtient $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$. Donc d'après le théorème 3.1. $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i \in T$. D'où, $(T, \subseteq)$ est un lattices complet. ■

Corolaire 3.4 Soit X un ensemble et T une famille de sous-ensembles de X ordonné par inclusion telle que:

(i) Pour toute famille non vide $(A_i)_{i \in I} \subseteq T$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$;

(ii) $\emptyset \in T$;

Alors T est un lattices complet pour lequel $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$. La borne sup n'est caractérisée que par la définition:

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcup \{B \in T \mid \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq B\}.$$

3.2 Lattices complets et propriété de point fixe

- Soient P et Q deux ensembles ordonnés. Une *application croissante* de P dans Q est une application $f : P \rightarrow Q$ telle que pour tout $x, y \in P$:
 $x \leq y$ dans P implique $f(x) \leq f(y)$ dans Q .
- Soit P un ensemble et $f : P \rightarrow P$. Un *point fixe* de f est un élément $a \in P$ tel que $f(a) = a$.
- Un ensemble ordonné P a la propriété du *point fixe* (en abrégé ppf) si toute application croissante $f : P \rightarrow P$ a un point fixe.

La notion de rétraction est directement liée à la ppf.

Définition 3.1 [DAV55]. Soit X et Y deux ensembles ordonnés, une application croissante $f : X \rightarrow Y$ est une *corétraction* s'il existe une application croissante $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f = 1_X$. Dualement, une application croissante $g : Y \rightarrow X$ est une *rétraction* s'il existe une application croissante $f : X \rightarrow Y$ telle que $f \circ g = 1_Y$. Lorsqu'il existe une corétraction de X dans Y ou (ce qui revient au même) une rétraction de Y sur X on dit que X est *rétracte* de Y : ce qu'on note $X \triangle Y$.

Une rétraction est surjective, tandis qu'une corétraction est injective. Plus fortement, une corétraction f est nécessairement un plongement. En effet, si $f(x) \leq f(y)$ alors en composant avec une rétraction g on a, puisque g est croissante, $x = g \circ f(x) \leq g \circ f(y) = y$. De ce fait, on peut considérer les rétractes d'un ensemble ordonné Y comme certaines parties de Y .

Lemme 3.5 Si P a la ppf, tout rétracte P' l'a également.

Preuve. Soit $h' : P' \rightarrow P'$. Soit $f : P' \rightarrow P$ et $g : P \rightarrow P'$ telles que $g \circ f = 1_{P'}$. Posons $h = f \circ h' \circ g$. Si x est un point fixe de h alors $g(x)$ est un point fixe de h' . ■

Théorème 3.3 [A. TARSKI, 1955 [TAR55]],

Si P est un lattices complet, alors il a la propriété du point fixe.

La réciproque de ce théorème est donnée par A. DAVIS [DAV55].

Théorème 3.4 [A. DAVIS, [DAV55]],

Si un lattices a la propriété du point fixe, alors il est complets.

Théorème 3.5 [*Théorème de point fixe, Knaster-Tarski*]. *Soit un lattices complet*

$L = (X, \leq)$ et $f : L \rightarrow L$ une application croissante.

Alors $\alpha = \bigvee \{x \in X \mid x \leq f(x)\}$ est un point fixe de f . De plus, α est le plus grand point fixe de f . De même $\bigwedge \{x \in X \mid x \geq f(x)\}$ est le plus petit point fixe de f .

Preuve. Posons $H = \{x \in X \mid x \leq f(x)\}$. On a $\forall x \in H \ x \leq \alpha$ d'où $x \leq f(x) \leq f(\alpha)$. Il

s'ensuit que $f(\alpha) \in H$: $f(\alpha)$ est un majorant de H . On en déduit que $\alpha \leq f(\alpha)$.

Puisque f est croissante, $f(\alpha) \leq f(f(\alpha))$ donc $f(\alpha) \in H$ donc $f(\alpha) \leq \alpha$. On a bien α point fixe, montrons que c'est le plus grand. Soit β un point fixe de f : $f(\beta) = \beta$. Alors $\beta \in H$ donc $\beta \leq \alpha$.

La preuve pour le plus petit point fixe est similaire. ■

3.3 Quelques caractérisations des trellises complets

Dans cette section, on s'intéresse aux caractérisations de trellises complets. Pour plus de détails on peut consulter (SKALA [SKA69][SKA71]).

Définition 3.2 [SKA71,SKA72]. *Si Tout partie non vide d'un ensemble pseudo-ordonné $(P, \preceq)$ a une borne supérieure et une borne inférieure, l'ensemble pseudo-ordonné $(P, \preceq)$ est un trellis complet. Lorsque on impose seulement que toute partie à deux éléments ait une borne supérieure et une borne inférieure, l'ensemble pseudo-ordonné est un trellis.*

Si P est un trellis et a, b, c sont trois éléments de P , ces éléments ont une borne supérieure et une borne inférieure données par les formules:

$$- \vee \{a, b, c\} = a \vee (b \vee c) \neq (a \vee b) \vee c$$

$$- \wedge \{a, b, c\} = a \wedge (b \wedge c) \neq (a \wedge b) \wedge c,$$

Car on a pas la transitivité, donc pas d'associativité.

On convient de les noter respectivement $a \vee b \vee c$ et $a \wedge b \wedge c$. Plus généralement, toute partie finie non vide $I = \{a_1, \dots, a_k\}$ d'un trellis a à la fois une borne supérieure et une borne

inférieure, qu'on pourra noter respectivement $a_1 \vee \dots \vee a_k$ et $a_1 \wedge \dots \wedge a_k$. Un treillis est borné s'il a un plus petit élément et un plus grand élément (qu'on note, autant que possible, 0 et 1). Evidemment.

Exemple 3.1 (1) *Tout lattices complet est un trellises complet.*

(2) Soit $P = \{0, a, b, c, 1\}$ un ensemble non vide et $\trianglelefteq$ un pseudo-ordre sur P tel que:
 $\trianglelefteq = \{(0, 0), (a, a), (b, b), (c, c), (1, 1), (0, a), (0, b), (0, c), (0, 1), (a, b), (a, 1), (b, c), (b, 1)\}$.

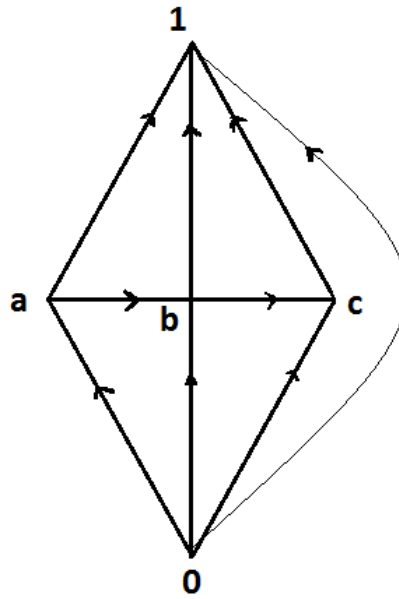


Fig.10. trellises complet.

(i) P est un trellis Le sup et inf de chaque paire d'éléments existent et donné par les tables suivantes:

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	b	1	1
b	b	b	b	c	1
c	c	1	c	c	1
1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	a
b	0	a	b	b	b
c	0	0	b	c	c
1	0	a	b	c	1

(ii) P est complet puisque toute partie non vide $(P, \trianglelefteq)$ a une borne supérieure et une borne inférieure. Et

$$\bigvee \{0, a, b\} = b, \quad \bigwedge \{0, a, b\} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\bigvee \{0, a, c\} &= 1, & \bigwedge \{0, a, c\} &= 0. \\
\bigvee \{0, a, 1\} &= 1, & \bigwedge \{0, a, 1\} &= 0. \\
\bigvee \{0, b, c\} &= c, & \bigwedge \{0, b, c\} &= 0. \\
\bigvee \{0, b, 1\} &= 1, & \bigwedge \{0, b, 1\} &= 0. \\
\bigvee \{b, c, 1\} &= 1, & \bigwedge \{b, c, 1\} &= b. \\
\bigvee \{a, b, 1\} &= 1, & \bigwedge \{a, b, 1\} &= a. \\
\bigvee \{a, b, c\} &= 1, & \bigwedge \{a, b, c\} &= 0. \\
\bigvee \{0, c, 1\} &= 1, & \bigwedge \{0, c, 1\} &= 0.
\end{aligned}$$

Remarque 3.1 (*Importante*): *Tout lattice fini est une lattice complet. Mais tout trellis fini n'est pas forcément complet, (Voire l'exemple suivant).*

Exemple 3.2 *Soit $P = \{a, b, c, d\}$ un ensemble pseudo-ordonné et $\leq$ est pseudo-ordre suivant sur P :*

$$\leq = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (a, d), (d, b), (c, a)\}.$$

(1) P est un trellis, en effet:

$\vee$	a	b	c	d
a	a	b	d	d
b	b	b	c	b
c	a	c	c	d
d	d	b	d	d

$\wedge$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	b	d
c	c	b	c	c
d	a	d	c	d

(2) P n'est pas complet, car on $\nexists \bigvee \{a, b, c\}$ et $\nexists \bigvee \{b, c, d\}$.

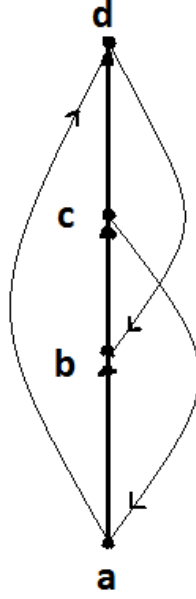


Figure.11. Trellises fini mais ne pas complet.

Lemme 3.6 Soit $(P, \leq)$ un pseudo-ordre et soient $S, T \in P$ tels que $\bigvee S, \bigvee T, \bigwedge S$ et $\bigwedge T$ existent dans P . Alors $\bigwedge(S \cup T) = \bigwedge S \wedge \bigwedge T$ et $\bigvee(S \cup T) = \bigvee S \vee \bigvee T$.

Preuve. $S \subseteq S \cup T \implies \bigvee S \leq \bigvee(S \cup T)$, $T \subseteq S \cup T \implies \bigvee T \leq \bigvee(S \cup T)$. Donc $\bigvee S \vee \bigvee T \leq \bigvee(S \cup T)$.

Soit $x = \bigvee S \vee \bigvee T$. Alors

$x \geq \bigvee S$ et $x \geq \bigvee T$ d'où $\forall s \in S \forall t \in T \ x \geq s, t$ i.e. $\forall z \in S \cup T \ x \geq z$ donc $x \geq \bigvee(S \cup T)$.

L'autre égalité se prouve de la même manière ■

Lemme 3.7 [SKA72]. Soit $(P, \leq)$ un ensemble pseudo-ordonné et S une partie de X . Alors

$\bigwedge S = \bigvee S^l$ et $\bigvee S = \bigwedge S^u$ tel que :

(S^u l'ensemble des majorants de S et S^l l'ensemble des minorants de S).

Théorème 3.6 [SKA72]. Soit $(P, \leq)$ un ensemble pseudo-ordonné. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. P est un trellises complet;

2. Pour tout $S \subseteq P$, $\bigwedge S$ existe dans P ;
3. Pour tout $S \subseteq P$, $\bigvee S$ existe dans P ;
4. P a un plus grand élément et tout $\emptyset \neq S \subseteq P$, $\bigwedge S$ existe dans P .
5. P a un plus petit élément et tout $\emptyset \neq S \subseteq P$, $\bigvee S$ existe dans P .

Preuve. $1 \implies 2$ Evident par définition

$2 \implies 3$ Application directe du lemme 1.3.

$3 \implies 4$ $\bigvee P$ existe dans P . Donc P a un plus grand élément. Le reste, application du lemme 1.3.

$4 \implies 5$ Application directe du lemme 1.3.

$5 \implies 1$ Application directe du lemme 1.3. ■

Corolaire 3.8 Soit X un ensemble et T une famille de sous-ensembles de X pseudo-ordonné par inclusion telle que:

- (i) Pour toute famille non vide $(A_i)_{i \in I} \subseteq T$, $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$;
- (ii) $X \in T$.

Alors T est un treillis complet pour lequel $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$. La borne sup n'est caractérisée que par la définition:

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcap \{B \in T \mid \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B\}.$$

Preuve. D'après (ii), T a un plus grand élément X . Soit $(A_i)_{i \in I}$ un sous-ensemble non vide de T , par (i) on obtient $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$. Donc d'après le théorème 3.6 (2) $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i \in T$. D'où, $(T, \subseteq)$ est un treillis complet. ■

Corolaire 3.9 Soit X un ensemble et T une famille de sous-ensembles de X pseudo-ordonné par inclusion telle que:

- (i) Pour toute famille non vide $(A_i)_{i \in I} \subseteq T$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$;
- (ii) $\emptyset \in T$;

Alors T est un treillis complet pour lequel $\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i$. La borne sup n'est caractérisée que par la définition:

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcup \{B \in T \mid \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq B\}.$$

Théorème 3.7 [PBS00]. *Pour un treillis P , il y a équivalence entre:*

1. P est complet,
2. Tout pseudo-chaîne non vide a un supremum et infimum dans P ,
3. Tout pseudo-chaîne maximale est une pseudo-chaîne complet.

Preuve. (1)→(2)→(3)→(1)

2→3. Soit C une chaîne maximale. Soit $A \subseteq C$ et soit $a = \bigvee A$. Soit $c \in C$. Ou bien $c \not\leq a$ et $c \not\leq x$ pour tout $x \in A$ et dans ce cas $c \leq a$. Ou bien $c \leq a$ et puisque C est une chaîne, $x \leq c$ pour tout $x \in A$, par suite $a \leq c$. Donc $C \cup \{a\}$ est une chaîne. Par maximalité de C , $a \in C$.

2→1. Soit $A \subseteq P$. Soit C une chaîne maximale dans A^+ ensemble des majorants de A . Etendons C en une chaîne maximale C' de P . Soit c l'infimum de C dans C' . Alors c est l'infimum de C dans T . En effet, si t minore C alors $c \vee t$ également, et donc $c \vee t$ est comparable à tout. ■

Théorème 3.8 [SKA69]. *Tout treillis complet est isomorphe avec un treillis de contraction d'un lattice complet.*

Preuve. Soit A un treillis complet et soit $\mathcal{K}$ la famille de tous les sous-ensembles fermés non vide dans A . Nous définissons l'ensemble L comme l'union de $\mathcal{K}, \{0, 1\} \times A$, et une paire $\{v', u'\}$. En L nous définissons un ordre partiel: Pour $X, Y \in \mathcal{K}$ et $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} X &\leq Y && \text{si et seulement si } X \subseteq Y, \\ (0, x) &\leq X && \text{si et seulement si } x \in X, \\ X &\leq (1, x) && \text{si et seulement si } x \leq z, \forall z \in X, \\ (0, x) &\leq (1, y) && \text{si et seulement si } x \leq y, \\ v' &\leq z \leq u' && \forall z \in L. \end{aligned}$$

l'ensemble L est un lattice avec le plus petite élément et plus grand élément:

$$\begin{aligned}
(0, x) \vee (0, y) &= \{x, y\}^*, \\
(0, x) \vee X &= (X \cup \{x\})^*, \\
(0, x) \vee (1, y) &= \begin{cases} (1, y) & \text{si } x \leq y \\ u' & \text{autrement,} \end{cases} \\
X \vee Y &= (X \cup Y)^*, \\
X \vee (1, x) &= \begin{cases} (1, x) & \text{si } z \leq x, \forall z \in X \\ u' & \text{autrement,} \end{cases} \\
(1, x) \vee (1, y) &= \begin{cases} (1, x) & \text{si } x = y \\ u' & \text{autrement,} \end{cases} \\
(0, x) \wedge (0, y) &= \begin{cases} (0, x) & \text{si } x = y \\ v' & \text{autrement,} \end{cases} \\
(0, x) \wedge X &= \begin{cases} (0, x) & \text{si } x \in X \\ v' & \text{autrement,} \end{cases} \\
(0, x) \wedge (1, y) &= \begin{cases} (0, x) & \text{si } x \leq y \\ v' & \text{autrement,} \end{cases} \\
X \wedge Y &= \begin{cases} (X \cap Y)^* & \text{si non vide} \\ v' & \text{autrement,} \end{cases} \\
X \wedge (1, x) &= \begin{cases} \{z : z \in X \text{ et } z \leq x\}^* & \text{si non vide} \\ v' & \text{autrement,} \end{cases} \\
(1, x) \wedge (1, y) &= \{z : z \leq x, z \leq y\}^*.
\end{aligned}$$

Pour tout élément x dans A , soit L_x l'ensemble de tous les éléments z de L tels que $(0, x) \leq z \leq (1, x)$. Alors L_x est consistant de $(0, x)$, $(1, x)$ et tous les éléments X de $\mathcal{K}$ tels que $\bigvee X = x$. La famille $\mathcal{L}$ est consistant de $L_v \cup \{v'\}$, et $L_u \cup \{u'\}$ et tout L_x pour $v \neq x \neq u$ est une famille de disjoint sous-trellis convexe de L dont l'union est L . Par conséquent $\mathcal{L}$ est un trellis de contraction de L , et isomorphe avec A . ■

Exemple 3.3 Soit L est un lattice dans la figure 12, le trellis de contraction $\{(a), (b), (c_1, c_2), (d), (e)\}$ est un trellis de figure.7.

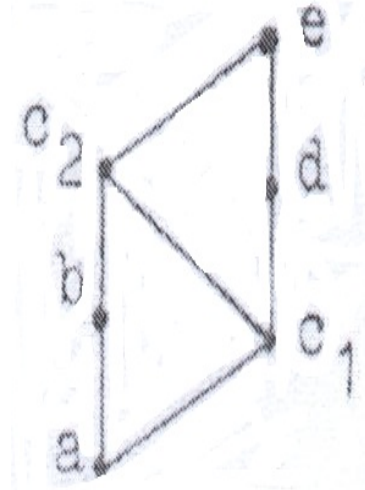


Fig.12.

Théorème 3.9 [SKA69]. Si un trellis A est une pseudo-chaîne, alors un élément dans A est associatif si et seulement s'il est transitive.

3.4 Trellises complets et propriétés de point fixe

Soient P et Q deux ensembles pseudo-ordonnés et $f : P \rightarrow Q$ une application. On dit que f est croissante si: $\forall x, y \in P, x \leq y$ dans P implique $f(x) \leq f(y)$ dans Q .

Un *point fixe* de f est n'importe quel élément $a \in P$ tel que $f(a) = a$. Un ensemble pseudo-ordonné P a la propriété du *point fixe* (en abrégé ppf) si tout application croissante $f : P \rightarrow P$ a un point fixe. Soit A un ensemble et B une partie de A . On dit que f est une rétraction de A sur B s'il s'agit d'une application de A dans B qui est égale à l'identité sur B .

La notion de rétraction est directement liée à la ppf.

Lemme 3.10 *Si P a la ppf, tout rétracte P' l'a également.*

Preuve. Soit $h' : P' \rightarrow P'$. Soit $f : P' \rightarrow P$ et $g : P \rightarrow P'$ telles que $g \circ f = 1_{P'}$. Posons $h = f \circ h' \circ g$. Si x est un point fixe de h alors $g(x)$ est un point fixe de h' . ■

Théorème 3.10 [SKA71]

Si P est un trellis complet, alors il a la propriété du point fixe. (C'est-à-dire: pour toute application croissante $f : P \rightarrow P$. Il existe un élément x dans P tels que $f(x) = x$).

Preuve. Soit $f : P \rightarrow P$ une application croissante et K la famille de tous les sous-ensembles S de P vérifiant les conditions

- (1) $x \in S$;
- (2) $s \in S \implies f(s) \in S$;
- (3) $S' \subseteq S \implies \bigvee S' \in S$.

$K \neq \emptyset$ par ce que $P \in K$.

Maintenant, soit $B = \bigcap_{S \in K} S$. Clairement $B \in K$. On prend $b = \bigvee B$ et démontre que b est un point fixe de f (i.e., $f(b) = b$). En effet:

On a $b \in B$ et par la conditions (2) $f(b) \in B$. Alors $f(b) \leq b = \bigvee B$.

Il reste de voir que $b \leq f(b)$. Supposons que $f(b) \not\leq b$ et soit $C = \{x \in B / x \leq f(b)\}$. Il est facile de voir que C vérifie les conditions (1) et (3) ou desous. Pour la condition (2), soit $x \in C$, alors $x \in B$ (car $C \in B$).

Comme $x \leq \bigvee B = b$ et f croissante on obtient que $f(x) \leq f(b)$. Alors $f(x) \in C$.

Donc $C \in K$. D'où, contradiction puisque $B = \bigcap_{S \in K} S$. Par conséquent $f(b) = b$. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons vu les concepts d'ensembles ordonnés et ensembles pseudo-ordonnés à partir de la présentation de certaines propriétés et des résultats concernant ce genre de relations. Puis, pour un pseudo-ordre (i.e., relation réflexive et antisymétrique, mais pas nécessairement transitive), nous pouvons définir les bornes supérieures et les bornes inférieures de même façon qu'un ordre. Avec cette approche, nous pouvons généraliser aux trellises et trellises complets d'une manière analogue presque tous les théorèmes de base et les théorèmes de caractérisations des lattices complets, ce qui démontre la superfluité de la transitivité (l'associativité).

Références.

- [Bon69] R. BONNET, M. POUZET, *Extensions et stratifications d'ensembles diperses*, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, 268(A)(1969) 1512–1515.
- [Bon84] R. BONNET, M. POUZET, *Linear extention of ordered sets*, in *Ordered Sets*. (I.Rival) ed. Reidel, ASI 83, (1984) 125-170.
- [Bou84] A. BOUCHAT, *Codages et dimentionns de relations binaires in Orders: Description and roles*, M. Pouzet and D.Richard Eds., *Annals of Discrete Math.*, 99, (1984), p.387-396.
- [Bir67] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, *A.M.S. Coll. Pub. Vol. XXV*.Third Ed.,1967
- [Bly05] T. S. BLYTH, *Lattices and ordered algebraic structures*, Springer-Verleg, London, 2005.
- [Bri03] G.BRIGHTWELL, P. TETALI, *The number of linear extensions of the Boolean lattice*, *Order* 20 (2003) 333–345.
- [Clm07] N. CASPARD, B. LECLERC, B. MONJARDET, *Ensembles ordonnés finis concepts, résultats et usages*, Springer-Verleg, Berlin Heidelberg, 2007.
- [Dpr02] B. A. DAVEY, H. A. PRIESTIEY, *Introduction to lattices and order*, Second edition, Cambridge Universit, Press, 2002.
- [Dav55] A.C. DAVIS, *A characterization of complete lattices*, *Pacific j. Math.* 5(1955) 311-319.
- [Dmi41] B.DUSHNIK, E.W.MILLER, *Partially ordered sets*, *Amer. J. of Math.*, 63(1941) 600-610.
- [Dil50] R.P. DILWORTH, *A decomposition theorem for partially ordered sets*. *Annals of Math.* 51 (1950) 161-165.
- [Fri70] E. FRIED, *Tournaments and nonassociativite lattices*, *Ann. univ. Sei. Budapest, Eotvos Sect. Math.* 13 (1970) 257–262.

- [Gla73] K. GLADSTIEN, *Characterisation of completeness for trellises of finite length*, Algebra univers. 3(1973), 341–344.
- [Mat74] A.R.D. MATHIAS, *The order extension principle. Axiomatic set theory*, (Proc.Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part II, Univ.California, Los Angeles, Calif.,) 1967), 179–183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.
- [Pbs00] S. PARAMESHWARA BHATTA AND H. SHASHIREKHA, Acharacterization of completeness for trellises. Algebra univers. 44(2000). 305-308.
- [Pouzet] M. POUZET, *Théorie de l'ordre: Une introduction*, (sous_ impression).
- [Riv82] I. RIVAL *Ordered sets*, Reidel, Dordrecht, 1982.
- [Ska69] H. SKALA, *Nonassociative lattices*, Notice Amer. Math. Soc. 16 (1969).
- [Ska71] H. SKALA, *Trellis Theory*, Algebra Universalis, 1(2) (1971) 218-233.
- [Ska72] H. SKALA, *Trellis Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1972.
- [Sch02] B. SCHRODER, *Ordered sets*, Birkhauser Boston, First edition, 2002.
- [Szp30] E. SZPILRAJN, *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fund. Math.,16 (1930), 386-389
- [Tar55] A. TARSKI, *A lattice-theoretical fixed point theorem and its applications*, Pacificj. Math. 5(1955), 285–309.