الجمهـوريـــة الجزائـريـــة الديـمـقـراطيـــة الشـعـبـيـــة

**République algérienne démocratique et populaire**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'enseignement supérieur et Recherche scientfiique**

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

**Université Mohamed Boudiaf - M'sila**

كلية الرياضيات والاعلام الألي

**Faculté de mathématiques et d'informatique**

Département de **Mathématiques**

قسم الرياضيات

**Mémoire présenté pour l'obtention**
**Du diplôme de Master Académique**
**Spécialité : Mathématique**
**Option : mathématiques discrète**

**Par: Tail Khawla**

**Intitulé**

# Groupe flou basé sur une opération binaire floue

Soutenu devant le jury composé de:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Saadaoui Kheir | MCA. | Université de M'sila | Président |
| Ziane Brahim | MCB. | ÉNS de Bou Saâda | Rapporteur |
| Amroune Abdelaziz | Proof. | Université de M'sila | Co-encadreur |
| Yettou Mourad | MCB. | ÉNSH Blida | Examinateur |

**L'année universitaire : 2021 - 2022 .**

# Dédicace

*Je dédie ce travail :*

*A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et Teconnaissance*

*A mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*

*A tous ceur qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceur qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*

*A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.*

*Merci !*

Cial & Khaoula

# Remerciement

Avant tout nous remercions Allah, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volanté pour . . . nie ce travail. Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à notre Directeur de memoire Docteur **ZIANE Brahim** , nous le remercie de nous avoir encadré, orienté, aidé et conseillé. Nous le remercie pour ses encouragements continuels qui ne cessaient de nous remonter le moral pendant les moments di¢ ciles et pour l'énorme soutien scienti. . . que et moral qu'il a su nous accorder pendant cette période. Et nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à notre cocadreur de memoire Proof. **AMROUNE Abdelaziz** Nous remercions Docteur. **SAADAOUI Kheir** pour avoir accepté de présider mon jury. Nous remercions egalement Docteur. **YETTOU Mourad** , membre du jury d'avoir accepté l'examination et l' évaluation de ce travail. J'adresse aussi mes vifs remerciements à nos chers parents pour leur encouragement et le soutien aectif et matériel qu'ils nous ont apporté tout au long de notre existence. Nous remercions aussi nos frères, nos soeurs, nos chers, nos collègues , nos enseignants et tout le personnel de la faculté MI, ainsi que toutes les personnes qui nous ont apporté un soutien moral de loin ou de prés.

♡

# Table des matières

# Notations

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Ensemble des nombres entiers naturels. |
| $\mathbb{N}^*$ | Ensemble des nombres entiers naturels non nuls. |
| $\mathbb{Z}$ | Ensemble des nombres entiers . |
| $\mathbb{Q}$ | Ensemble des nombres entiers rationnels. |
| $\mathbb{Q}^*$ | Ensemble des nombres entiers rationnels non nuls. |
| $\mathbb{R}$ | Ensemble des nombres réels. |
| $\mathbb{R}^*$ | Ensemble des nombres réels non nuls. |
| $\mathbb{R}_+^*$ | Ensemble des nombres réels positifs non nuls. |
| $\mathbb{C}$ | Ensemble des nombres complexes. |
| $\mathbb{C}^*$ | Ensemble des nombres complexes non nuls. |
| $e_G$ | L'element neutre de groupe $G$. |
| $G$ | Un groupe classique. |
| $H$ | Un groupe flou de $G$. |
| $[a]$ | La partie entiére de $a$. |
| $X_A$ | Un sous ensemble classique de $X$. |
| $\mu$ | Le sous ensemble flou |
| $f^{-1}(\mu)$ | L'image réciproque de ctte sous ensemble floue par $f$. |
| $R$ | Une opération binaire floue sur $G$. |
| $\overline{R}$ | Une opération binaire floue sur $G/H$. |

| | |
|---|---|
| $\mu_H$ | Un ensemble flou de $G$. |
| $S(E)$ | L'ensemble des permutations de $E$. |
| $S_3$ | Le groupe de permutations d'ordre 3. |
| $f=(E,F,G)$ | Une appliction ou fonction est triplet avec une reltion binaire $G \subset E \times F$. |
| $X_H$ | La fonction caractéristique. |
| $H_\alpha$ | Le $\alpha-$ coupe de sous groupe floue $H$. |
| $f(\mu)$ | L'image d'un sous ensemble flou $\mu$de $G$. |
| $f(H)$ | L'image de $H$ par $f: G \longrightarrow G'$. |
| $\mu_f(H)$ | L'image de $\mu_H$ par $f: G \longrightarrow G'$. |
| $f^{-1}(\mu_{H'})$ | L'image réciproque de $\mu_{H\prime}$par $f: G \longrightarrow G'$. |
| $\bigcap\limits_{i\in I} Hi$ | L'intersection des $H_i$ $\forall i \in I$ |

# Introduction

Une structure algébrique est un ensemble non vide muni de certaines opérations (addition, multiplication, intersection, ...etc. ) . Les structures que nous allons étudier dans ce mémoire sont les groupe, La terminologie « groupe » est d'abord mise en évidence par Evariste Galois [1].

L. Zadah [9] en 1965 en se basant sur sa théorie mathématique des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques.

En 1971, Rosenfeld [6] a appliqué le concept de la théorie des ensembles flous sur la théorie des groupes.

Dans la définition des sous-groupes flous, Rosenfeld supposons que les sous-ensembles du groupe $G$ sont flous et que l'opération binaire sur $G$ est non floue dans le sens classique. Une autre approche consiste à supposer que l'ensemble est non flou ou classique et que l'opération binaire est floue au sens flou. Plus en accord avec cette dernière approche, Demirci [2, 3]. a introduit le concept de groupe lisse en utilisant l'opération binaire floue et le concept de égalité floue.

Dans cet mémoire, en utilisant la définition de Malik et Mordeson ou la fonction floue [4], un nouveau type de définition de l'opération binaire floue dans un sens différent de [2, 3] est donnée. Basé sur le nouveau opération binaire floue, un nouvelle type de groupe flou est introduit.

Dans ce mémoire, On s'intéresse à l'étude un nouveau type de groupe flou basé sur des opérations binaires floues est proposé. . Ce travail est composé des trois chapitres :

— Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions fondamentales sur les groupes et quelques propriétés qu'on va utiliser dans la suite.

— Dans le deuxième chapitre, présente l'étude générale des groupes flous, une structure algébrique étudiée par Rosnenfeld [6], et nous allons développer le concept de groupes flous et quelques propriétés de base.

— Dans le troisième chapitre, un nouveau type de groupe flou basé sur des opérations binaires floues est proposé. Les concepts de sous-groupe flou, de sous-groupe flou normal, de groupe flou factoriel et d'homomorphismes de groupe flou sont introduits.

Enfin, le théorème fondamental de l'homomorphisme du groupe flou est obtenu.

# Chapitre 1

# Définitions et notions fondamentales sur les groupes

Dans ce chapitre, nous commencerons par la structure de groupe qui est une structure algébrique relativement simple parce qu'elle ne contient qu'une seule opération et qu'elle est utilisée dans beaucoup d'autres structures algébriques.

## 1.1 Loi de composition interne

**Définition 1.1.1.** *Soient $E$ et $F$ des ensembles, on note $E \times F$ et on appelle Le produit cartésien de $E$ et $F$ l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à $E$ et le seconde à $F$ :*

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \wedge y \in F\}.$$

**Définition 1.1.2.** *Une loi de composition interne(ou bien une opération interne) sur $E$ est une application*

$$\begin{array}{rccl} * : & E & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & *(x, y) = x * y \end{array}$$

**Définition 1.1.3.** *Soit $E$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $(*)$ , on dit que une partie $P$ de $E$ est stable pour $(*)$ si*

$$\forall (x, y) \in P^2 \text{ tel que } x * y \in P.$$

**Exemple 1.1.4.** *Les loi des compositions internes les plus courantes sont :*

1. *" + " dans* $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ , $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$.
2. *" − " dans* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, *et* $\mathbb{C}$.
3. *" × " dans* $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ , $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$.
4. *"=" dans* $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ *et* $\mathbb{C}^*$.

## 1.2 Groupe classique

Dans cette section, nous commencerons par la structure du groupe, qui est une structure algèbre relativement simple, car elle ne contient qu'une seule opération.

**Définition 1.2.1.** *Un groupe* $(G, *)$ *est un ensemble* $G$ *auquel est associée une opération* $*$ *(Une loi de composition) vérifiant les quatre propriétés suivantes :*

1. *pour tout* $x, y \in G$, $\quad x * y \in G \quad$ *(* $*$ *est une loi de composition interne)*
2. *pour tout* $x, y, z \in G$, $\quad (x * y) * z = x * (y * z) \quad$ *(la loi est associative)*
3. *il existe* $e \in G$ *tel que* $\quad \forall x \in G$, $x * e = x$ *et* $e * x = x \quad$ *(*$e$ *est l'élément neutre)*
4. *pour tout* $x \in G$ *il existe* $x' \in G$ *tel que* $\quad x * x' = x' * x = e \quad$ *(*$x'$ *est l'inverse de* $x$ *noté* $x^{-1}$*)*

Si de plus l'opération vérifie

$$\text{pour tout } x, y \in G, \qquad x * y = y * x,$$

on dit que $G$ est un groupe commutatif (ou abélien).

**Proposition 1.2.2.**

1. *L'élément neutre* $e$ *est unique.*
2. *Un élément* $x \in G$ *ne possède qu'un seul inverse.*

*Démonstration.*

1. Si $e'$ vérifie aussi le point (3), alors on a $e' * e = e$ (car $e$ est élément neutre) et $e' * e = e'$ (car $e'$ aussi). Donc $e = e'$. Remarquez aussi que l'inverse de l'élément neutre est lui-même. (S'il y a plusieurs groupes, on pourra noter $e_G$ pour l'élément neutre du groupe $G$).

2. En effet, si $x'$ et $x''$ vérifient (4) alors on a :

$$x * x'' = e$$

Donc,

$$x' * (x * x'') = x' * e$$

Par l'associativité (2) et la propriété de l'élément neutre (3) alors ;

$$(x' * x) * x'' = x'$$

Mais $x' * x = e$ donc $e * x'' = x'$ et ainsi $x'' = x'$.

□

**Exemple 1.2.3.** *Voici des ensembles bien connus pour lesquels l'opération donnée définit une structure de groupe.*

1. $(\mathbb{R}^*, \times)$ *est un groupe commutatif,* $\times$ *est la multiplication habituelle. Vérifions chacune des propriétés :*
   (a) *Si* $x, y \in \mathbb{R}^*$ *alors* $x \times y \in \mathbb{R}^*$.
   (b) *Pour tout* $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ *alors* $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$, *c'est l'associativité de la multiplication des nombres réels.*
   (c) 1 *est l'élément neutre pour la multiplication, en effet* $1 \times x = x$ *et* $x \times 1 = x$, *ceci quelque soit* $x \in \mathbb{R}^*$.
   (d) *L'inverse d'un élément* $x \in \mathbb{R}^*$ *est* $x' = \frac{1}{x}$ *(car* $x \times \frac{1}{x}$ *est bien égal à l'élément neutre* 1*). L'inverse de* $x$ *est donc* $x^{-1} = \frac{1}{x}$. *Notons au passage que nous avions exclu* 0 *de notre groupe, car il n'a pas d'inverse.*
   *Ces propriétés font de* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *un groupe.*
   (e) *Enfin* $x \times y = y \times x$, *c'est la commutativité de la multiplication des réels.*
2. $(\mathbb{Q}^*, \times)$ *et* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *sont des groupes commutatifs.*
3. $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif. Ici* $+$ *est l'addition habituelle.*
   (a) *Si* $x, y \in \mathbb{Z}$ *alors*

   $$x + y \in \mathbb{Z}.$$

   (b) *Pour tout* $x, y, z \in \mathbb{Z}$ *alors*

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

*(c)* $0$ *est l'élément neutre pour l'addition, en effet* $0+x = x$ *et* $x+0 = x$*, ceci quelque soit* $x \in \mathbb{Z}$*.*

*(d)* *L'inverse d'un élément* $x \in \mathbb{Z}$ *est* $x' = -x$ *car* $x + (-x) = 0$ *est bien l'élément neutre* $0$*. Quand la loi de groupe est* $+$ *l'inverse s'appelle plus couramment l'opposé.*

*(e)* *Enfin* $x + y = y + x$*, et donc* $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif.*

*Montrer qu'un ensemble est un groupe à partir de la définition peut être assez long. Il existe une autre technique, c'est de montrer qu'un sous-ensemble d'un groupe est lui-même un groupe : c'est la notion de sous-groupe.*

## 1.3 Sous-groupes

*Soit* $(G, *)$ *un groupe.*

**Définition 1.3.1.** *Une partie* $H \subset G$ *est un* ***sous-groupe*** *de* $G$ *si :*

1. $e \in H$*.*
2. *pour tout* $x, y \in H$*, on a* $x * y \in H$*.*
3. *pour tout* $x \in H$*, on a* $x^{-1} \in H$*.*

*Notez qu'un sous-groupe* $H$ *est aussi un groupe* $(H, *)$ *avec la loi induite par celle de* $G$*.*

*Par exemple si* $x \in H$*, alors, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*, nous avons* $x^n \in H$*.*

*Une critère pratique et plus rapide pour prouver que* $H$ *est un sous-groupe de* $G$*, on a le théorème suivant :*

**Théorème 1.3.2.** *Soit* $H$ *une partie non vide d'un groupe* $G$*, alors,*

$H$ *est un sous-groupe de* $G$ *si seulement si pour tout* $(x, y) \in H \times H$ *on a* $x * y^{-1} \in H$*.*

*Démonstration.*

(i) Supposons $H$ est sous-groupe de $G$. Soit $(x, y) \in H \times\ H$

Alors, $y \in H \Rightarrow y^{-1} \in H$ , par suite $(x, y^{-1}) \in H \times H \Rightarrow x \times\ y^{-1} \in H$.

(ii) Supposons

$\forall (x,y) \in H \times H, (x,y) \in H \times H \Rightarrow xy^{-1} \in H$ est vérifie, et soit $(x,y) \in H \times H$

$$x \in H \Rightarrow (x,x) \in H \times H \Rightarrow xx^{-1} \in H \Rightarrow e \in H \Rightarrow H \neq \emptyset.$$

Et

$$\begin{cases} x \in H \\ e \in H \end{cases} \Rightarrow (e,x) \in H \times H \Rightarrow ex^{-1} \in H \Rightarrow x^{-1} \in H.$$

Par suite,

$$(x,y) \in H \times H \Rightarrow \left(x, y^{-1}\right) \in H \times H \Rightarrow x\left(y^{-1}\right)^{-1} = xy \in H.$$

□

**Examples 1.3.3.**

1. $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}^*, \times)$. *En effet :*
   (a) $1 \in \mathbb{R}_+^*$,
   (b) *si* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *alors* $x \times y \in \mathbb{R}_+^*$,
   (c) *si* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *alors* $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $(\mathbb{U}, \times)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{C}^*, \times)$, *où* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
3. $(\mathbb{Z}, +)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$.
4. $\{e\}$ *et* $G$ *sont les sous-groupes triviaux du groupe* $G$.
5. *L'ensemble* $\mathcal{R}$ *des rotations du plan dont le centre est à l'origine est un sous-groupe du groupe des isométries* $\mathcal{I}$.
6. *L'ensemble des matrices diagonales* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ *avec* $a \neq 0$ *et* $d \neq 0$ *est un sous-groupe de* $(\mathrm{GL}_2, \times)$.

**Remarque 1.3.4.** *Tout sous-groupe est un groupe.*

## 1.4 Morphismes de groupes

**Définition 1.4.1.** *Soient $(G,*)$ et $(G',\diamond)$ deux groupes. Une application $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes si :*

*pour tout $x, x' \in G$*

$$f(x * x') = f(x) \diamond f(x')$$

*On prend l'exemple suivant :*

**Exemple 1.4.2.** *Soit $G$ le groupe $(\mathbb{R}, +)$ et $G'$ le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ l'application exponentielle définie par $f(x) = \exp(x)$. Nous avons bien*

$$f(x + x') = \exp(x + x') = \exp(x) \times \exp(x') = f(x) \times f(x')$$

*. Donc $f$ est bien un morphisme de groupe.*

**Proposition 1.4.3.** *Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes alors :*

1. *$f(e_G) = e_{G'}$,*
2. *pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = \big(f(x)\big)^{-1}$.*

*Démonstration.*

1. Pour tout $x \in H$ on a

$$f\left(x\right) e'_G = f\left(x\right) = f\left(xe_G\right) = f\left(x\right) f\left(e_G\right).$$

En multipliant chaque terme par $f(x)^{-1}$, il vient

$$e_{G'} = f\left(e_G\right).$$

2.

$$\begin{cases} e_{G'} = f\left(e_G\right) = f\left(xx^{-1}\right) = f\left(x\right) f\left(x^{-1}\right). \\ e_{G'} = f\left(e_G\right) = f\left(x^{-1}x\right) = f\left(x^{-1}\right) f\left(x\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\left(x\right) f\left(x^{-1}\right) = e_{G'} \\ f\left(x^{-1}\right) f\left(x\right) = e_{G'} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}\left(x\right) = f\left(x^{-1}\right).$$

Ce qui démontré que $f\left(x^{-1}\right)$ est l'inverse de $f\left(x\right)$.

$\square$

**Remarque 1.4.4.** *Il faut faire attention à l'ensemble auquel appartiennent les éléments considérés :*

$e_G$ *est l'élément neutre de* $G$, $e_{G'}$ *celui de* $G'$. *Il n'y a pas de raison qu'ils soient égaux (ils ne sont même pas dans le même ensemble). Aussi* $x^{-1}$ *est l'inverse de* $x$ *dans* $G$, *alors que* $\big(f(x)\big)^{-1}$ *est l'inverse de* $f(x)$ *mais dans* $G'$.

## 1.5 Généralités sur les ensembles flous

*La théorie des ensembles flous est une théorie mathématique dans le domaine de l'algèbre abstraite. Il a été développé par Lotfi Zadeh [9] en 1965 pour représenter mathématiquement les inexactitudes associées à certaines classes d'objets et comme base de la logique floue. Dans ce chapitre, nous présentons le concept de base d'ensemble flou, sa position par rapport à la théorie des ensembles classiques, , les propriétés fondamentales des ensembles flous et les règles de calculs algébriques dans un ensemble flou [8].*

### 1.5.1 Concept de sous ensemble

*Un ensemble peut être définit par :*

**(i)** *L'écriture de ses éléments. Par exemple, si* $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ *sont les élément de l'ensemble* $A$, *on écrit :* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *;*

**(ii)** *Les propriétés qui caractérisent ses éléments. Par exemple, si les éléments de l'ensemble* $B$ *satisfaisant les conditions* $p_1, p_2, ..., p_n$ *alors l'ensemble* $B$ *est définie par :*

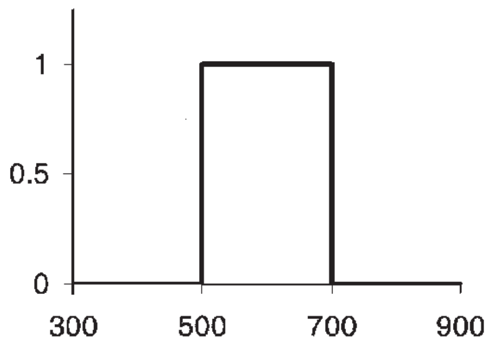
$$B = \{b \mid b \text{ satisfait } p_1, p_2, ..., p_n\}$$

**(iii)** *Par sa fonction caractéristique : Un sous-ensemble* $A$ *d'un ensemble* $E$ *est usuellement associée à sa fonction caractéristique. Celle-ci s'applique sur les éléments* $x$ *de* $E$. *Elle prend la valeur* $0$ *si* $x$ *n'appartient pas à* $A$ *et* $1$ *si* $x$ *appartient à* $A$ *c'est a dire :*

$$\begin{aligned} \chi_A : \quad E &\rightarrow \{0,1\} \\ x &\mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A. \\ 0 & si \quad x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple 1.5.1.** *Soit* $X = [300, 900]$ *et* $A$ *un sous-ensemble classique de* $X$ *définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \chi_A : \ X & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 500 \leq x \leq 700 \\ 0 & si \quad x < 500 \ \ ou\ bien \quad x > 700 \end{cases} \end{array}$$




## 1.5.2 Un sous-ensemble flou

*Les sous-ensembles flou constituent une généralisation de la notion d'ensemble classique et ont été introduits par Lotfi Zadeh en 1965 [9].*

**Définition 1.5.2.** *Soit* $X$ *un ensemble (classique) de référentiel, un sous ensemble flou* $A$ *de* $X$ *est défini par une fonction caractéristique (Fonction d'appartenance), qui associe a chaque elment* $x$ *de* $X$ *le degré* $\mu_A(x)$ *compris entre* $0$ *et* $1$*, c'est à dire :*

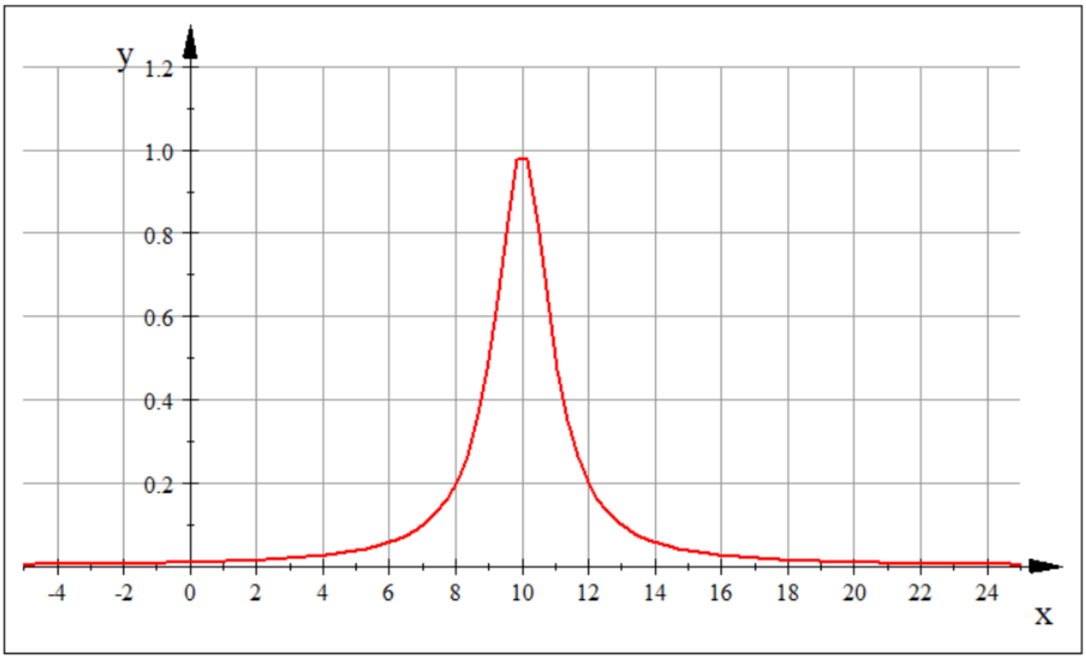
$$\begin{array}{rcl} \mu_A : \ E & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mu_A(x) \end{array}$$

*Ou bien,*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in A\}$$

**Exemple 1.5.3.** *Soit* $X = R$ , $\mu$ *est le sous ensemble flou de* $\mathbb{R}$ *définit par :*

$$\mu(x) = \frac{1}{(1 + (x - 10)^2)}$$




Représentation graphique d'un ensemble flou $\mu$.

**Remarque 1.5.4.** *Plus généralement, si $L$ est un* ***treillis complet, distributif et complimenté,*** *on définit un sous-ensemble $L$ -flou comme étant une application de $E$ dans $L$.*

1. *Si $L = [0, 1]$, on retrouve la définition précédente de sous-ensemble flou,*
2. *Si $L = \{0, 1\}$, on retrouve la notion usuelle de sous-ensemble de $E$.*

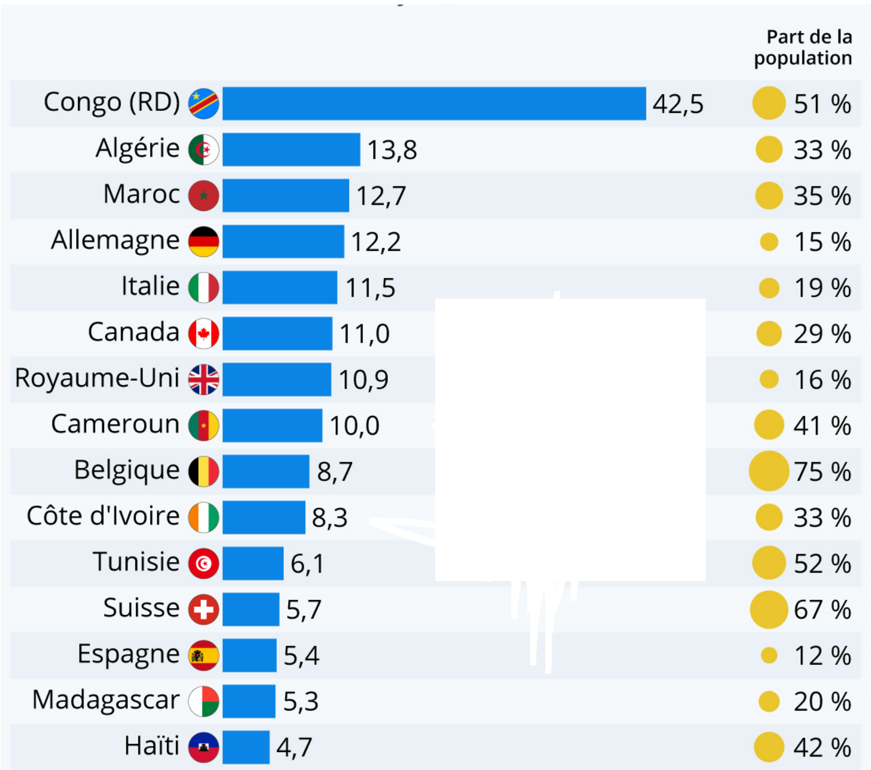
**Remarque 1.5.5.** 1. *L'ensemble $E$ est donné par la fonction d'appartenance identiquement égale à 1.*

2. *L'ensemble vide est donné par la fonction d'appartenance identiquement nulle.*

**Exemple 1.5.6.** *Si $X$ est l'ensemble des nations du monde.*

*Un ensemble des pays, $\mu : X \to [0, 1]$ est ensemble des pays francophones définit par la fonction d'appartenance suivante :*

$$\begin{array}{lll}
\mu\,(France) = 1 & \mu\,(Canada) = 0.29 & \mu\,(Royaume\text{-}Uni) = 0.16 \\
\mu\,(Cameroune) = 0.41 & \mu\,(Belgeque) = 0.75 & \mu\,(Cote\ d'Ivoire) = 0.33 \\
\mu\,(Tunise) = 0.52 & \mu\,(Suisse) = 0.67 & \mu\,(Madagascar) = 0.20 \\
\mu\,(Haiti) = 0.42 & \mu\,(Espagne) = 0.12 &
\end{array}$$




## 1.6 Opérations sur les sous-ensembles flous

*En observant comment les opérations usuelles se comportent vis-à-vis des* ***fonctions caractéristiques*** *des sous-ensembles, on étend ces opérations aux fonctions d'appartenance des sous-ensembles flous.*

*Soient* $(\mu_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-ensembles floues d'un ensemble* $E$ *indexée selon un ensemble* $I$*, données par leur fonction d'appartenance* $\mu_i$*.*

### 1.6.1 Réunion

*On définit la réunion* $\mu$ *de ces sous-ensembles au moyen de la fonction d'appartenance suivante*

$$\mu(x) = \sup\{\mu_i(x), i \in I\}.$$

*ce qui sera noté*

$$\mu = \bigvee_{i\in I} \mu_i.$$

### 1.6.2 Intersection

*On définit l'intersection de ces sous-ensembles au moyen de la fonction d'appartenance suivante :*

$$\mu(x) = \inf\{\mu_i(x), i \in I\}.$$

*ce qui sera noté*

$$\mu = \bigwedge_{i\in I} \mu_i.$$

**Remarque 1.6.1.** *La réunion et l'intersection restent distributives l'une par rapport à l'autre.*

### 1.6.3 Complémentation

1. *Le complémentaire d'un sous-ensemble flou donnée par sa fonction d'appartenance $\mu$ est le sous-ensemble flou dont la fonction d'appartenance est $1-\mu$ .*
2. *Le complémentaire d'une intersection reste égal à la réunion des complémentaires.et le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires. Le complémentaire du complémentaire redonne le sous-ensemble initiale.*
3. *Cependant, la réunion d'un sous-ensemble flou et de son complémentaire ne donne pas toujours l'ensemble $E$ , et l'intersection d'un sous-ensemble flou et de son complémentaire ne donne pas l'ensemble vide.*

**Exemple 1.6.2.** *Considérons, le sous-ensemble flou $F$ de $E$ donnée par la fonction d'appartenance :*

$$\forall x \in E, \mu(x) = 1 \mid 2\ .$$

*Cette sous-ensemble flou est égale à son complémentaire car sa fonction d'appartenance vérifie*

$$\mu = 1 - \mu = \rceil \mu.$$

*On déduit alors de $F = \rceil F$ que*

$$F \cup \rceil F = F \cap \rceil F = F.$$

### 1.6.4 Image réciproque d'un sous ensemble floue

*Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f$ une application de $E$ dans $F$. Considérons un sous-ensemble floue de $F$ donnée par sa fonction d'appartenance $\mu$ . On appelle* ***image réciproque*** *de cette sous-ensemble flou par $f$ le sous-ensemble flou de $E$ donnée par la fonction d'appartenance suivante, notée $f^{-1}(\mu)$.*

$$\forall x \in E, \quad f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x)).$$

### 1.6.5 Image directe d'un sous ensemble floue

*Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f$ une application de $E$ dans $F$. Considérons une sous-ensemble floue de $E$ donnée par sa fonction d'appartenance $\mu$ . On appelle* ***image directe*** *de cet sous-ensemble flou par $f$ le sous-ensemble floue de $F$ donnée par la fonction d'appartenance suivante, notée $f(\mu)$.*

$$\forall y \in F, f(\mu)(y) = \sup\{\mu(x), x \in f^{-1}(\{y\})\}$$

# Chapitre 2

# Groupe flou ( Approche de Rosnenfeld )

*Cette section présente l'étude générale des groupes flous, une structure algébrique étudiée par Rosnenfeld [7].*
*Dans cette section, nous allons développer le concept de groupes flous et quelques propriétés de base. Pour plus de recherches sur la définition et les propriétés des groupes flous.*
*Soit G un groupoïde, c'est-à-dire un ensemble fermé sous une loi de composition binaire (nous l'exprimerons par multiplication). Rappelons que l'ensemble flou dans $G$ est une fonction $\mu_H$ de $G$ dans* $[0, 1]$.

## 2.1 Groupe flou

**Définition 2.1.1.** *[7]*

*Soit $G$ un groupe (au sens classique), un sous groupe flou (ou un groupe flou, tout simplement) de $G$ est un ensemble flou $\mu_H$ de $G$ vérifie les axiomes suivants :*

1. *pour tous $x, y \in G$, $\mu_H(xy) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$.*
2. *pour tous $x \in G$, $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$.*

**Remarque 2.1.2.** *Soit $H$ un sous ensemble flou de $G$.*

*Dans le cas classique la fonction caractèristique $\chi_H$ est èquivalente $\mu_H$ .*
*Si $H$ un sous groupe flou de $G$ ($G$ est un groupe au sens classique). Donc, dans ce cas on*

*a :*

*Si* $x, y \in H \Rightarrow \mu_H(x) = 1$ *et* $\mu_H(y) = 1$

1. *Devient*

$$\begin{aligned} \mu_H(xy) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y) &\Rightarrow \mu_H(xy) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y) = 1 \\ &\Rightarrow \mu_H(xy) = 1 \\ &\Leftrightarrow \chi_H(xy) = 1 \\ &\Rightarrow xy \in H \end{aligned}$$

2. *Devient*

$$\begin{aligned} \mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x) &\Rightarrow \mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x) \\ &\Rightarrow \mu_H(x^{-1}) = 1 \\ &\Leftrightarrow \chi_H(x^{-1}) = 1 \\ &\Rightarrow x^{-1} \in H \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.3.** *On rappelle que si $E$ est un ensemble non vide, une permutation de $E$ est une bijection de $E$ sur $E$ et que si l'on note $S(E)$ l'ensemble des permutations de $E$, alors $(S(E), \circ)$ est un groupe.*

*Soit $S_3 = \{e, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, c_1, c_2\}$ le groupe de permutations d'ordre 3 avec e l'elment neutre de $H$. Tel que :*

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\tau_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

*Soit $\mu$ est un sous ensemble. On définit : $\mu : S_3 \Rightarrow [0, 1]$ par :*

$$\begin{array}{lll} \mu_{S_3}(e) = 1.00 & \mu_{S_3}(\tau_{1,2}) = 0.50 & \mu_{S_3}(\tau_{1,3}) = 0.30 \\ \mu_{S_3}(\tau_{2,3}) = 0.25 & \mu_{S_3}(c_1) = 0.15 & \mu_{S_3}(c_2) = 0.15 \end{array}$$

*On montre que*

1. *pour tous $x, y \in S(E)$, $\mu_{S_3}(xy) \geq \mu_{S_3}(x) \wedge \mu_{S_3}(y)$.*
2. *pour tous $x \in S(E)$, $\mu_{S_3}(x^{-1}) \geq \mu_{S_3}(x)$.*

*Soit* $x, y \in S(E)$ *on a :*

| $\circ$ | $e$ | $\tau_{1,2}$ | $\tau_{1,3}$ | $\tau_{2,3}$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $\tau_{1,2}$ | $\tau_{1,3}$ | $\tau_{2,3}$ | $c_1$ | $c_2$ |
| $\tau_{1,2}$ | $\tau_{1,2}$ | $e$ | $c_2$ | $c_1$ | $\tau_{2,3}$ | $\tau_{1,3}$ |
| $\tau_{1,3}$ | $\tau_{1,3}$ | $c_1$ | $e$ | $c_2$ | $\tau_{1,2}$ | $\tau_{2,3}$ |
| $\tau_{2,3}$ | $\tau_{2,3}$ | $c_2$ | $c_1$ | $e$ | $\tau_{1,3}$ | $\tau_{1,2}$ |
| $c_1$ | $c_1$ | $\tau_{1,3}$ | $\tau_{2,3}$ | $\tau_{1,2}$ | $c_2$ | $e$ |
| $c_2$ | $c_2$ | $\tau_{2,3}$ | $\tau_{1,2}$ | $\tau_{1,3}$ | $e$ | $c_1$ |

| $\mu_{S_3}(xy)$ | $e$ | $\tau_{1,2}$ | $\tau_{1,3}$ | $\tau_{2,3}$ | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | 1 | 0.5 | 0.30 | 0.25 | 0.15 | 0.15 |
| $\tau_{1,2}$ | 0.5 | 1 | 0.15 | 0.15 | 0.25 | 0.30 |
| $\tau_{1,3}$ | 0.30 | 0.15 | 1 | 0.15 | 0.5 | 0.25 |
| $\tau_{2,3}$ | 0.25 | 0.15 | 0.15 | 1 | 0.30 | 0.5 |
| $c_1$ | 0.15 | 0.30 | 0.25 | 0.5 | 0.15 | 1 |
| $c_2$ | 0.15 | 0.25 | 0.5 | 0.30 | 1 | 0.15 |

| $\mu_{S_3}(x) \wedge \mu_{S_3}(y)$ | $\mu_{S_3}(e)$ | $\mu_{S_3}(\tau_{1,2})$ | $\mu_{S_3}(\tau_{1,3})$ | $\mu_{S_3}(\tau_{2,3})$ | $\mu_{S_3}(c_1)$ | $\mu_{S_3}(c_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_{S_3}(e) = 1.00$ | 1 | 0.5 | 0.30 | 0.25 | 0.15 | 0.15 |
| $\mu_{S_3}(\tau_{1,2}) = 0.50$ | 0.5 | 1 | 0.15 | 0.15 | 0.25 | 0.30 |
| $\mu_{S_3}(\tau_{1,3}) = 0.30$ | 0.30 | 0.35 | 1 | 0.15 | 0.5 | 0.25 |
| $\mu_{S_3}(\tau_{2,3}) = 0.25$ | 0.25 | 0.15 | 0.15 | 1 | 0.30 | 0.5 |
| $\mu_{S_3}(c_1) = 0.15$ | 0.15 | 0.30 | 0.25 | 0.5 | 0.15 | 1 |
| $\mu_{S_3}(c_2) = 0.15$ | 0.15 | 0.25 | 0.5 | 0.30 | 1 | 0.15 |

*Donc, on tout les on a :* $\mu_{S_3}(xy) \geq \mu_{S_3}(x) \wedge \mu_{S_3}(y)$.

*Un raisonnement analogue pour prouver la condition :* $\mu_{S_3}(x^{-1}) \geq \mu_{S_3}(x)$.

*Pour tous* $x \in S\,(E)$ :

| $\mu_{S_3}(x)$ | $\mu_{S_3}(x^{-1})$ |
|---|---|
| $\mu_{S_3}\,(e) = 1.00$ | $\mu_{S_3}\,(e) = 1.00$ |
| $\mu_{S_3}\,(\tau_{1,2}) = 0.50$ | $\mu_{S_3}\,(\tau_{1,2}) = 0.50$ |
| $\mu_{S_3}\,(\tau_{1,3}) = 0.30$ | $\mu_{S_3}\,(\tau_{1,3}) = 0.30$ |
| $\mu_{S_3}\,(\tau_{2,3}) = 0.25$ | $\mu_{S_3}\,(\tau_{2,3}) = 0.25$ |
| $\mu_{S_3}\,(c_1) = 0.15$ | $\mu_{S_3}\,(c_2) = 0.15$ |
| $\mu_{S_3}\,(c_2) = 0.15$ | $\mu_{S_3}\,(c_1) = 0.15$ |

*Donc,* $\mu_{S_3}$ *est un sous groupe flou de* $S(E)$*.*

## 2.2 Propriétés des groupes flous

**Proposition 2.2.1.** *[7] Soit* $G$ *un groupe et* $H$ *un groupe flou de* $G$*. Alors,*

*(i). Pour tout* $x$ *de* $H$, $\mu_H(x) \leq \mu_H(e)$,

*(ii). Pour tout* $x$ *de* $H$, $\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(x)$,

*(iii). pour tout* $n$ *de* $Z$*, tout* $x$ *de* $H$, $\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x)$.

*Démonstration.*

(i). Soit $x \in G$, alors,

$$\mu_H(e) = \mu_H(xx^{-1}) \geq (\mu_H(x) \wedge \mu_H(x^{-1}).$$

Et on a :

$$\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x).$$

D'après la définition de groupe flou, alors,

$$\mu_H(e) \geq \mu_H(x).$$

(ii). Soit $x \in G$, alors,

$$\mu_H(x) = \mu_H((x^{-1})^{-1}) \geq \mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$$

Alors,

$$\mu_H(x) = \mu_H(x).$$

(iii). Pour tout $n$ de $N$, on raisonne par récurrence :

(a). Si $n = 0$,

$$\mu_H(x^0) = \mu_H(e) \geq \mu_H(x).$$

D'après la définition de sous-groupe flou.

(b). Si $n \geq 0$ supposons que :

$$\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x) \text{ est vrais}$$

Et montrons que :

$$\mu_H(x^{n+1}) \geq \mu_H(x).$$

On a :

$$\mu_H(x^{n+1}) = \mu_H(x^n x) \geq (\mu_H(x^n) \wedge \mu_H(x)).$$

D'après (3), et comme par hypothèse on a :

$$\mu_H(x^{n+1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(x)$$

Donc,

$$\mu_H(x^{n+1}) \geq \mu_H(x)$$

Alors, la propriété est vraie pour tout $n$ de $N$.

(c). Si $n \leq 0$ ,

$$\mu_H(x^n) = \mu_H((x^{-1})^{-n})$$

D'après la précédente, et comme

$$\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(x)$$

Alors,

$$\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x).$$

□

**Remarque 2.2.2.** *Dans le cas classique l'assertion (i) dans Proposition 3.3.2 devient :*

$$x \in H \Rightarrow \mu_H(x) = 1 \Rightarrow \mu_H(e) = 1 \Rightarrow e \in H$$

*Et l'assertion (ii) devient :*

$$x \in H \Rightarrow \mu_H(x) = 1 \Rightarrow \mu_H(x^{-1}) = 1 \Rightarrow x^{-1} \in H$$

**Proposition 2.2.3.** *[7] Soit $G$ un groupe et $H$ un ensemble flou de $G$. Alors,*

$$H \text{ est un groupe flou de } G \text{ si et seulement si } \mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$$

*Démonstration.*

1. $\left(\overset{?}{\Rightarrow}\right)$ Si $H$ est un sous groupe flou, pour tout $x, y$ de $G$,

$$\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y^{-1}) \text{ et } \mu_H(y^{-1}) \geq \mu_H(y)$$

Donc,

$$\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y).$$

2. $\left(\overset{?}{\Leftarrow}\right)$ Réciproquement, si pour tout $x, y$ de $G$,

$$\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y^{-1})$$

Alors,

(a). Pour tout $x$ de $G$,

$$\mu_H(e) = \mu_H(xx^{-1}) = \mu_H(x) \wedge \mu_H(x^{-1})$$

Alors,

$$\mu_H(e) \geq \mu_H(x) \ .$$

(b). Pour tout $x$ de $G$,

$$\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(ex^{-1}) \geq \mu_H(e) \wedge \mu_H(x^{-1})$$

Et comme $\mu_H(e) \geq \mu_H(x)$ et $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$.

(c). Pour tout $x, y$ de $G$ :

$$\mu_H(xy) = \mu_H(x(y^{-1})^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y^{-1})$$

Et comme $\mu_H(y^{-1}) \geq \mu_H(y)$ et $\mu_H(xy) \geq (\mu_H(x) \wedge \mu_H(y))$

Par conséquent, $H$ est groupe flou de $G$.

□

**Remarque 2.2.4.** *Dans le cas classique l'assertion dans proposition 2.2.3 devient :*

$$\begin{aligned}
x, y \in H \quad &\Rightarrow \quad \mu_H(x) = 1 \ \ et \ \ \mu_H(y^{-1}) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \min(\mu_H(x), \mu_H(y^{-1})) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \mu_H(xy^{-1}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \chi_H(xy^{-1}) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad xy^{-1} \in H
\end{aligned}$$

**Proposition 2.2.5.** *l'interaction de deux groupe flou est un groupe flou de $G$.*

*Démonstration.*

Soit $H$ et $H'$ deux groupes flous de $G$ tel que :

(i). Pour tout $x, y \in G$ on a :

$$\mu_H(xy) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y),$$
$$\mu_{H'}(xy) \geq \mu_{H'}(x) \wedge \mu_{H'}(y),$$

donc :

$$\mu_H(xy) \wedge \mu_{H'}(xy) \geq (\mu_H(x) \wedge \mu_H(y)) \wedge (\mu_{H'}(x) \wedge \mu_{H'}(y)),$$
$$\mu_{\ H\cap H'}(xy) \geq (\mu_H(x) \wedge \mu_{H'}(x)) \wedge (\mu_H(y) \wedge \mu_{H'}(y)),$$

alors :

$$\mu_{H\cap H'}(xy) \geq \mu_{H\cap H'}(x) \wedge \mu_{H\cap H'}(y)$$

(ii). pour tout $x \in G$ on a :

$$\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x),$$
$$\mu_{H'}(x^{-1}) \geq \mu_{H'}(x),$$

donc

$$\mu_{\ H\cap H'}(x^{-1}) \geq \mu_{H\cap H'}(x).$$

□

**Proposition 2.2.6.** *l'union de deux groupe flou n'est pas nécessairement un groupe*

**Exemple 2.2.7.** $(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z})$ *n'est pas un groupe flou dans* $(\mathbb{Z}, +)$. *puisque*

$$x = 2 \in 2\mathbb{Z} \ et\ y = 3 \in 3\mathbb{Z}$$

*Donc,*

$$x + y = 2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}.$$

**Théorème 2.2.8.** *Soit $H$ un groupe flou de $G$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(1).* $\mu_H(xy) = \mu_H(yx)$,

*(2).* $\mu_H(xy(x^{-1})) = \mu_H(y)$.

*Démonstration.*

Soit $x, y \in G$ $(1) \Rightarrow (2)$

$$\mu_H(xyx^{-1}) = \mu_H((xy)x^{-1}) = \mu_H(x^{-1}xy) = \mu_H(y).$$

$(2) \Rightarrow (1)$ On a

$$xy = x(yx)x^{-1} \Rightarrow \mu_H(xy) = \mu_H(x(yx)x^{-1}) = \mu_H(yx).$$

□

**Définition 2.2.9.** ***(Groupe flou normal)*** *Soit $H$ est un groupe flou de $G$, est appelle groupe flou normal si*

$$\mu_H(xyx^{-1}) \geq \mu_H(y).$$

**Proposition 2.2.10.** *Si $G$ un groupe classique et $H$ un groupe flou.*
*Si $a$ et $b$ sont générateurs de $G$, alors*

$$\mu_H(a) = \mu_H(b), \text{ pour tout } x \text{ de } G \text{ et } \mu_H(a) \leq \mu_H(x)$$

*Démonstration.*

Si $a$ et $b$ sont des générateur de $G$, s'il existe $m, n$ de $\mathbb{Z}$ tel que $a = b^m$ et $b = a^n$, d'où, d'après

$$\mu_H(a) = \mu_H(b^m) \geq \mu_H(b)$$

et

$$\mu_H(b) = \mu_H(a^n) \geq \mu_H(a),$$

d'où

$$\mu_H(a) = \mu_H(b)$$
$$\mu_H(a) \leq \mu_H(x)$$

se démontre d'une manière analogue. □

**Définition 2.2.11.** *Soit $H$ un sous-groupe flou du groupe $G$.*

*On appelle le $\alpha$-couper de sous groupe flou $H$ le ensemble défini comme suite :*

$$H_\alpha = \{x \in H : \mu_H \geq \alpha\}, \ \alpha \in [0, 1]$$

**Remarque 2.2.12.** *$H_\alpha$ sont des ensemble classique.*

**Proposition 2.2.13.** *Soit $H$ un sous-ensemble flou du groupe $G$. Alors,*

*$H$ est un groupe flou de si et seulement si tous les $H_\alpha$ ,($\alpha \in [0,1]$) sont des sous-groupes de $G$ au sens classique.*

*Démonstration.*

$\left(\overset{?}{\Rightarrow}\right)$ Supposons que $H$ groupe flou de $G$.

1. On a $\mu_H(e) \geq \mu_H(x)$ pour $x \in H_\alpha$. Alors, $\mu_H(e) \geq \mu_H(x) = \alpha \Rightarrow \mu_H(e) \geq \alpha \Rightarrow e \in H_\alpha \Rightarrow H_\alpha \neq \emptyset$.
2. Pour $x, y \in H_\alpha$, on a $\mu_H(x) \geq \alpha$ et $\mu_H(y) \geq \alpha$ , et on a $H$ est un groupe flou. Donc, $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$ . Alors, $\mu_H(xy^{-1}) \geq \alpha$ . Donc, $xy^{-1} \in H_\alpha$,

par suit $H_\alpha$ est un groupe de $G$.

$\left(\overset{?}{\Leftarrow}\right)$ Soit $x, y$ de $G$ ; si $\mu_H(x) = \alpha$ et $\mu_H(x) = \beta$. On pose $\mu_H(x) \wedge \mu_H(y) = \alpha \wedge \beta$. Donc,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \mu_H(x) \wedge \mu_H(y) \leq \mu_H(x) \\ \mu_H(x) \wedge \mu_H(y) \leq \mu_H(y) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha \wedge \beta \leq \mu_H(x) \\ \alpha \wedge \beta \leq \mu_H(y) \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x \in H_{\alpha\wedge\beta} \\ y \in H_{\alpha\wedge\beta} \end{cases} \\
&\Rightarrow xy^{-1} \in H_{\alpha\wedge\beta} \\
&\Rightarrow \mu(xy^{-1}) \geq \alpha \wedge \beta \\
&\Rightarrow \mu(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)
\end{aligned}$$

□

**Définition 2.2.14.** *L'image $f(\mu)$ d'un sous-ensemble flou $\mu$ de $G$ et la image reseproce $f^{-1}(\nu)$ d'un sous-ensemble flou $\nu$ sous-ensemble de $G\prime$ et une application $f : G \longrightarrow G'$ sont définis comme*

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & \textit{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

*Et*

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)), x \in G$$

*Il n'est pas difficile de voir que $f(\mu)$ et $f^{-1}(\nu)$ sont des sous-ensembles flous.*

**Définition 2.2.15.** *on appelle image homomorphe de $H$ par $f : G \longrightarrow G'$, la partie flou $f(H)$ de $f(G)$ difinie par :*

$$\forall y \in f(G) : \mu_{f(H)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_H(x)$$

**Proposition 2.2.16.** *Si $H$ est groupe flou de $G$, alors $f(H)$ est un groupe flou de $f(G)$.*

*Démonstration.*

Soit $H$ est groupe flou et soit $y_1, y_2 \in f(H)$, donc, $\mu_{f(H)}(y_1) = 1$ et $\mu_{f(H)}(y_2) = 1$, donc, il existe $x_1, x_2 \in H$ tel que $x_1 \in \mu_{f^{-1}}(y_1)$ et $x_2 \in \mu_{f^{-1}}(y_2)$ avec
$\mu_H(x_1) = 1$ et $\mu_H(x_2) = 1$, de pius $H$ est groupe flou alors, $\mu_H(x_1, x_2^{-1}) \geq \mu_H(x_1) \wedge \mu_H(x_2)$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\mu_{f(H)}(y_1, y_2^{-1}) &= \sup_{x_1, x_2^{-1} \in f^{-1}(y_1, y_2^{-1})} \mu_H(x_1, x_2^{-1}) \geq \sup_{x_1, x_2^{-1} \in f^{-1}(y_1, y_2^{-1})} \mu_H(x_1) \wedge \mu_H(x_2) \\
&\geq \sup_{x_1 \in f^{-1}(y_1)} \mu_H(x_1) \wedge \sup_{x_2 \in f^{-1}(y_2)} \mu_H(x_2) \\
&= \mu_{f(H)}(y_1) \wedge \mu_{f(H)}(y_2)
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2.2.17.** *Si $H'$ est groupe flou de $G\prime$ alors $f^{-1}(H')$ est un groupe flou de $G$.*

*Démonstration.*

Soit $H'$ est groupe flou et soit $x_1, x_2 \in f^{-1}(H')$, donc, $\nu_{f^{-1}(H')}(x_1) = 1$ et $\nu_{f^{-1}(H')}(x_2) = 1$, donc, il existe $x_1, x_2 \in H$ tel que $x_1 \in \mu_{f^{-1}}(y_1)$ et $x_2 \in \mu_{f^{-1}}(y_2)$ avec $\mu_H(x_1) = 1$ et $\mu_H(x_2) = 1$, de pius $H$ est groupe flou alors, $\mu_H(x_1, x_2^{-1}) \geq \mu_H(x_1) \wedge \mu_H(x_2)$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\mu_{f(H)}(y_1, y_2^{-1}) &= \sup_{x_1, x_2^{-1} \in f^{-1}(y_1, y_2^{-1})} \mu_H(x_1, x_2^{-1}) \geq \sup_{x_1, x_2^{-1} \in f^{-1}(y_1, y_2^{-1})} \mu_H(x_1) \wedge \mu_H(x_2) \\
&\geq \sup_{x_1 \in f^{-1}(y_1)} \mu_H(x_1) \wedge \sup_{x_2 \in f^{-1}(y_2)} \mu_H(x_2) \\
&= \mu_{f(H)}(y_1) \wedge \mu_{f(H)}(y_2)
\end{aligned}$$

□

**Définition 2.2.18.** *Soit $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphe de groupe floue iff*

$$\mu(x_1 x_2) \leq \mu(f(x_1 x_2))$$

1. *On appelle image homomorphe de $\mu_H$ par $f : G \longrightarrow G'$, la partie flou $\mu_{f(H)}$ de $f(G)$ définie par :*

$$\forall y \in f(G) : \mu_{f(H)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_H(x)$$

2. *On appelle image réciproque homomorphe de $\mu_{H'}$ par $f : G \longrightarrow G'$, la partie flou $f^{-1}(\mu_{H'})$ de $G$ définie par :*

$$f^{-1}(\mu_{H'})(x) = \mu_{H'}(f(x)), \text{ pour tout } x \in G$$

**Théorème 2.2.19.** *Soit $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphe de groupe.*
*Alors,*

1. *Si $\mu_H$ est groupe flou de $G$, alors $\mu_{f(H)}$ est un groupe flou de $f(G)$.*
2. *Si $\mu_{H'}$ est groupe flou de $G\prime$ alors $f^{-1}(\mu_{H'})$ est un groupe flou de $G$.*

*Démonstration.*

1. Soit $H$ est groupe flou et soit $y_1, y_2 \in f(H)$, donc, $\mu_{f(H)}(y_1) = 1$ et $\mu_{f(H)}(y_2) = 1$, donc, il existe $x_1, x_2 \in H$ tel que $x_1 \in \mu_{f^{-1}}(y_1)$ et $x_2 \in \mu_{f^{-1}}(y_2)$ avec $\mu_H(x_1) = 1$ et $\mu_H(x_2) = 1$, depuis $H$ est groupe flou alors, $\mu_H(x_1, x_2^{-1}) \geq \mu_H(x_1) \wedge \mu_H(x_2)$.Donc,

$$\begin{aligned}
\mu_{f(H)}(y_1, y_2^{-1}) &= \sup_{x_1, x_2^{-1} \in f^{-1}(y_1, y_2^{-1})} \mu_H(x_1, x_2^{-1}) \\
&\geq \sup_{x_1, x_2^{-1} \in f^{-1}(y_1, y_2^{-1})} \mu_H(x_1) \wedge \mu_H(x_2) \\
&\geq \sup_{x_1 \in f^{-1}(y_1)} \mu_H(x_1) \wedge \sup_{x_2 \in f^{-1}(y_2)} \mu_H(x_2) \\
&= \mu_{f(H)}(y_1) \wedge \mu_{f(H)}(y_2)
\end{aligned}$$

2. Soit $\mu_{H'}$ est groupe flou de $G\prime$ et soit $x_1, x_2 \in f^{-1}(\mu_{H'})$, $f^{-1}(\mu_{H'})(x_1) = \mu_{H'}(f(x_1)) \geq \mu_{H'}(y_1)$ et $f^{-1}(\mu_{H'})(x_2) = \mu_{H'}(f(x_2)) \geq \mu_{H'}(y_2)$. $\mu_{H'}$ est groupe flou de $G\prime$ alors, $\mu_{H'}(y_1, y_2^{-1}) \geq \mu_{H'}(y_1) \wedge \mu_{H'}(y_2)$.

   Donc,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\mu_{H'})\left(x_1, x_2^{-1}\right) &= \mu_{H'}\left(f\left(x_1, x_2^{-1}\right)\right) \\
&= \mu_{H'}(f(x_1)f(x_2^{-1})) \\
&\geq \mu_{H'}(y_1, y_2^{-1}) \\
&\geq \mu_{H'}(y_1) \wedge \mu_{H'}(y_2) \\
&= f^{-1}(\mu_{H'})(x_1) \wedge f^{-1}(\mu_{H'})(x_2)
\end{aligned}$$

□

## 2.3 Morphismes de groupes flous

**Définition 2.3.1.** *Soit $G$ et $G'$ des groupes classique, et $H$ ( résp. $H'$) un groupe flous de $G$ ( résp. $G'$). Un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow G'$ est appelé un morphisme flou de $H$ vers $H'$ si :*

$$\textit{Pour tout } x \in G \;.\; (\mu_{H'} \circ f)(x) \geq \mu_H(x).$$

*Avec les hypothèse et les notations de la Définition 2.3.1 on a la définition suivante :*

**Définition 2.3.2.** *on appelle image homomorphe de $H$ par $f$ la partie flou $f(H)$ de $f(G)$ difinie par :*

$$\forall y \in f(G) : \mu_{f(H)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_H(x)$$

**Proposition 2.3.3.** *Si $H$ est groupe flou alors $f(H)$ est un groupe flou de $f(G)$.*

*Démonstration.*

Soit $H$ est groupe flou et soit $y_1, y_2 \in f(H)$, donc, $\mu_{f(H)}(y_1) = 1$ et $\mu_{f(H)}(y_2) = 1$, donc, il existe $x_1, x_2 \in H$ tel que $x_1 \in \mu_{f^{-1}}(y_1)$ et $x_2 \in \mu_{f^{-1}}(y_2)$ avec $\mu_H(x_1) = 1$ et $\mu_H(x_2) = 1$, de pius $H$ est groupe flou alors, $\mu_H(x_1, x_2^{-1}) \geq \mu_H(x_1) \wedge \mu_H(x_2)$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\mu_{f(H)}(y_1, y_2^{-1}) &= \sup_{x_1, x_2^{-1} \in f^{-1}(y_1, y_2^{-1})} \mu_H(x_1, x_2^{-1}) \geq \sup_{x_1, x_2^{-1} \in f^{-1}(y_1, y_2^{-1})} \mu_H(x_1) \wedge \mu_H(x_2) \\
&\geq \sup_{x_1 \in f^{-1}(y_1)} \mu_H(x_1) \wedge \sup_{x_2 \in f^{-1}(y_2)} \mu_H(x_2) \\
&= \mu_{f(H)}(y_1) \wedge \mu_{f(H)}(y_2)
\end{aligned}$$

□

# Chapitre 3

# Groupe flou basé sur une opération binaire floue

## 3.1 Définitions de l'opération binaire floue et du groupe flou

*Un nouveau type de groupe flou basé sur des opérations binaires floues est proposé. Les concepts de sous-groupe flou, de sous-groupe flou normal, de groupe flou factoriel et d'homomorphismes de groupe flou sont introduits. Enfin, le thèorème fondamental de l'homomorphisme du groupe flou est obtenu.*

### 3.1.1 Fonction classique

*La définition usuelle en mathématiques d'une fonction est donc ensembliste et présuppose essentiellement celle de couple et de produit cartésien. Une application ou fonction est un triplet $f = (E, F, G)$ avec une relation binaire $G \subset E \times F$, et qui vérifie que pour tout $x$ de $E$ il existe un unique $y$ de $F$ tel que le couple $(x, y)$ appartienne à $G$. Exactement dans ce cas, une application $f_G$ donnée comme relation binaire $G \subset E \times F$ est dite bien définie.*
*La propriété caractéristique peut se décomposer en deux clauses :*

***Existence***.

$$\forall x \in E, \exists y \in F : (x, y) \in G$$

***Unicité***.

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \forall y\prime \in F : ([(x,y) \in G \wedge (x,y\prime) \in G] \Rightarrow y = y\prime)$$

*Malik et Mordeson [4] ont donné la définition suivante*

### 3.1.2 Fonction floue

**Définition 3.1.1.** *Soient $R$ et $S$ des ensembles non vides et $f$ un sous-ensemble flou de $R \times S$, alors $f$ est appelé une **fonction floue** $R$ dans $S$ si*

1. *(**Existence floue**)*

$$\forall x \in R,\ \exists y \in S \text{ tel que } f(x,y) > 0$$

2. *(**Unicité floue**)*

$$\forall x \in R,\ \forall y_1, y_2 \in S,\ f(x,y_1) > 0 \text{ et } f(x,y_2) > 0 \text{ implique } y_1 = y_2.$$

*En utilisant la définition 3.1.1, nous avons une nouvelle définition.*

**Définition 3.1.2.** *Soit $G$ un ensemble non vide $R$ un sous-ensemble flou de $G \times G \times G$. $R$ est appelée **une opération binaire floue sur** $G$ si*

1. *(**Existence floue**)*

$$\forall a, b \in G, \exists c \in G \text{ tel que } R(a,b,c) > 0$$

2. *(**Unicité floue**)*

$$\forall a, b, c_1, c_2 \in G,\ R(a,b,c_1) > 0 \text{ et } R(a,b,c_2) > 0 \text{ implique } c_1 = c_2$$

### 3.1.3 Loi de composition interne

*Soit $R$ soit une opération binaire floue sur $G$.*

*Alors, nous avons une application*

$$\begin{array}{rccl} R: & F(G) \times F(G) & \longrightarrow & F(G) \\ & (A,B) & \longmapsto & R(A,B) \end{array}$$

*Ou*

$$F(G) = \{A \mid A : G \longrightarrow [0,1] \text{ est une application } \}$$

*Et*

$$R(A,B)(c) = \bigvee_{a,b \in G} ((A(a) \wedge B(b)) \wedge R(a,b,c)) \tag{3.1}$$

*Soit* $A = \{a\}$ *et* $B = \{b\}$, *et soit* $R(A,B)$ *noté* $a \circ b$, *alors,*

$$(a \circ b)(c) = R(a,b,c), \forall c \in G, \tag{3.2}$$

$$((a \circ b) \circ c)(z) = \bigvee_{d \in G} (R(a,b,d) \wedge R(d,c,z)), \tag{3.3}$$

$$(a \circ (b \circ c))(z) = \bigvee_{d \in G} (R(b,c,d) \wedge R(a,d,z)). \tag{3.4}$$

*Soit* $\theta \in [0,1]$ *et en utilisant les notations dans les équations (3.2) et (3.4), nous avons ce qui suit.*

**Définition 3.1.3.** *Soit* $G$ *un ensemble non vide et* $R$ *une opération binaire floue sur* $G$. $(G,R)$, *est appelé* ***groupe flou*** *si les conditions suivantes sont vraies :*

*(G1).* $\forall a,b,c,z_1,z_2 \in G, ((a \circ b) \circ c)(z_1) > \theta$ *et* $(a \circ (b \circ c))(z_2) > \theta$ *implique* $z_1 = z_2$,

*(G2).* $e \in G$ *tel que* $(e \circ a)(a) > \theta$ *et* $(a \circ e)(a) > \theta$ *pour tout* $a \in G$ *(*$e$ *se voit attribuer une identité element de* $G$*),*

*(G3).* $\forall a \in G, b \in G$ *tel que* $(a \circ b)(a) > \theta$ *et* $(b \circ a)(e) > \theta$ *(*$b$ *est appelé un element inverse de* $a$ *et est noté* $a^{-1}$*).*

**Remarque 3.1.4.** *Dans la définition du groupe flou,* $a \circ b$ *est un sous-ensemble flou de* $G$ *car l'opération binaire sur* $G$ *est au sens flou.*

## 3.2 Propriétés de groupe flou

**Proposition 3.2.1.** *Soit* $(G,R)$ *un groupe flou, alors*

1. *l'élément d'identité de* $G$ *est unique,*
2. $(a \circ a)(a) > \theta$ *implique* $a = e$,
3. $(a \circ b)(d) > \theta$ *et* $(a \circ c)(d) > \theta$ *implique* $b = c$,
4. $(b \circ a)(d) > \theta$ *et* $(c \circ a)(d) > \theta$ *implique* $b = c$,

5. *pour chaque* $a \in G$, *l'élément inverse de* $a$ *est unique,*

6. $(a^{-l})^{-1} = a$,

7. $(b^{-1} \circ a^{-1})(c) > \theta$ *et* $(a \circ b)(d) > \theta$ *implique* $c = d^{-1}$.

*Démonstration.*

1. Soient $e_1$, $e_2$ des éléments d'identité de $G$, alors
$$(e_1 \circ e_2)(e_l) > \theta \text{ et } (e_l \circ e_2)(e_2) > \theta,$$
C'est-à-dire,
$$R(e_l, e_2, e_2) > \theta \text{ et } R(e_l, e_2, e_I) > \theta,$$
il s'ensuite que $e_l = e_2$.

2. Soit $b$ un élément inverse de $a$, alors
$$((b \circ a) \circ a)(a) \geq R(b, a, e) \wedge R(e, a, a) > \theta,$$
$$(b \circ (a \circ a))(e) \geq R(a, a, a) \wedge R(b, a, e) > \theta.$$
Il s'ensuite que $a = e$ de $(G1)$.

3. Soit $h \in G$ tel que $R(a^{-1}, d, h) > \theta$, alors
$$(a^{-1} \circ (a \circ b))(h) \geq R(a, b, d) \wedge R(a - 1, d, h) > \theta,$$
$$((a^{-l} \circ a) \circ b)(b) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(e, b, b) > \theta.$$
Il s'ensuit que $h = b$ de $(G1)$ et par conséquent $R(a^{-1}, d, b) > \theta$.

Puisque
$$(a^{-1} \circ (a \circ e))(b) \geq R(a, c, d) \wedge R(a - l, d, b) > \theta,$$
$$((a^{-1} \circ a) \circ c)(e) \geq R(a^{-l}, a, e) \wedge R(e, c, c) > \theta,$$
donc, $b = e$ de $(GI)$.

4. Est similaire à (3).

5. Soient $b$ et $c$ des éléments inverses de $a$,

alors
$$(a \circ b)(e) > \theta, \ (a \circ c)(e) > \theta.$$
il s'ensuit que $b = c$ de (3).

6. Par $(a \circ a^{-1})(e) > \theta$ et $(((a^{-l})^{-1}) \circ a^{-1})(e) > \theta$,

   on a

$$(a^{-l})^{-1} = a.$$

7. Soit $h \in G$ tel que $R(b, c, h) > \theta$, alors,

$$(b \circ (b^{-1} \circ a^{-1}))(h) \geq R(b^{-1}, a^{-1}, c) \wedge R(b, c, h) > \theta,$$
$$((b \circ b^{-1}) \circ a^{-1})(a^{-1}) \geq R(b, b^{-1}, e) \wedge R(e, a^{-1}, a^{-1}) > \theta.$$

   Ainsi, $h = a^{-1}$ et $R(b, c, a^{-1}) > \theta$. Soit $k \in G$ tel que $R(d, c, k) > \theta$,

   alors

$$((a \circ b) \circ c)(k) \geq R(a, b, d) \wedge R(d, c, k) > \theta,$$
$$(a \circ (b \circ c))(e) \geq R(b, c, a^{-1}) \wedge R(a, a^{-1}, e) > \theta$$

   Ainsi, $k = e$ et $R(d, c, e) > 0$. Il s'ensuit que $c = d^{-1}$.

□

**Remarque 3.2.2.** *Le groupe de **Demirci** peut avoir un nombre infini d'éléments d'identité, et un élément du groupe lisse peut avoir un nombre infini d'inverses [2]. Dans notre définition, un flou le groupe n'a qu'un seul élément d'identité et un élément du groupe flou n'a qu'un seul "élément" inverse .*

**Théorème 3.2.3.** *Soit $R$ une opération binaire floue sur $G$ et $(G, R)$ satisfont $(G1)$ , alors $(G, R)$ est un groupe flou si et seulement si*

$(G2)'$ *$\exists e_1 \in G$, $\forall a \in G$ tel que $(e_1 \circ a)(a) > \theta$, ($e_1$ est appelé un élément d'identité gauche de $G$ ),*

$(G3)'$ *$\forall a \in G$, $b \in G$ tels que $(b \circ a)(e_1) > \theta$, ($b$ est appelé un inverse gauche de $a$).*

*Démonstration.*

Soit $(G, R)$ satisfaire $(G1)$, $(G2)'$ et $(G3)'$.

Premiérement, nous prouvons que $(a \circ b)(e_1) > \theta$, ou $b$ est un inverse a gauche de l'élement $a$.

En fait, soit $c, d, h \in G$ tel que $R(a, b, c) > \theta$, $R(a, it, d) > \theta$, et $R(c, a, h) > \theta$ alors,

$$(a \circ (b \circ a))(d) \geq R(b, a, e_1) \wedge R(a, e_1, d) > \theta,$$
$$((a \circ b) \circ a)(h) \geq R(a, b, c) \wedge R(c, a, h) > \theta.$$

Ainsi, $d = h$ et $R(c, a, d) > \theta$.

Soit $k \in G$ tel que $R(d, b, k) > \theta$, alors,

$$(a \circ (e_1 \circ b))(c) \geq R(e_1, b, b) \wedge R(a, b, c) > \theta,$$
$$((a \circ e_1 \circ b)(k) \geq R(a, e_1, d) \wedge R(d, b, k) > \theta.$$

Ainsi, $c = k$ et $R(d, b, c) > \theta$

Soit $u \in G$ tel que $R(c, c, u) > \theta$, alors

$$(c \circ (a \circ b))(u) > R(a, b, c) \wedge R(c, c, u) > \theta,$$
$$((c \circ a) \circ b)(c) > R(c, a, d) \wedge R(d, b, c) > \theta.$$

Ainsi, $u = c$ et $R(c, c, c) > 0$.

Par la preuve de, nous avons $c = e_1$, alors $(a \circ b)(e_1) > \theta$.

Ensuite, nous prouvons que

$$(a \circ e_1)(a) > \theta.$$

En fait, par

$$(a \circ (b \circ a))(d) \geq R(b, a, el) \wedge R(a, e_1, d) > \theta,$$
$$((a \circ b) \circ a)(a) \geq R(a, b, e_1) \wedge R(et, a, a) > \theta.$$

On a $d = a$, et par consequent $(a \circ e_1)(a) > \theta$. Ainsi, $(G, R)$ satisfait $(G1)$ - $(G3)$. $\square$

*De même, nous avons ce qui suit.*

**Théorème 3.2.4.** *Soit $R$ opération binaire floue sur $G$ et $(G, R)$ satisfaisant $(G1)$. Alors, $(G, R)$ est un groupe flou si et seulement si*

$(G2)'$ *$\exists e_r \in G$ tel que $(a \circ e_r)(a) > \theta$, $\forall a \in G$.*

$(G3)'$ *$\forall a \in G$, $b \in G$ tels que $(a \circ b)(e_r) > \theta$.*

**Théorème 3.2.5.** *Soit $R$ une opération binaire floue sur $G$ et $(G, R)$ satisfont $(G1)$. Donc, $(G, R)$ est un groupe flou si et seulement si, $\forall a, b, x, y \in G$ tel que*

$$(a \circ x)(b) > \theta \text{ et } (y \circ a)(b) > \theta$$

*Démonstration.*

Soit $(G,R)$ un groupe flou et soit $x,u \in G$ tel que $R(a^{-1},b,x) > \theta$, $R(a,x,u) > \theta$, ensuite

$$(a \circ (a^{-1} \circ b))(a) \geq R(a^{-l},b,x) \wedge R(a,x,u) > \theta.$$
$$((a \circ a^{-1}) \circ b)(b) \geq R(a,a^{-1},e) \wedge R(e,b,b) > \theta.$$

Ainsi, $u = b$ et $R(a,x,b) > \theta$.

De même, $y \in G$ tel que $R(y,a,b) > \theta$.

Il s'ensuit que $(a \circ x)(b) > \theta$ et $(y \circ a)(b) > \theta$.

Inversement, soit $(G,R)$ vérifie $(G1)$ et la formule (5) et soit $c \in G$, alors il $\exists x,d \in G$ tel que

$$R(e^*,c,c) > \theta, R(c,x,a) > \theta, etR(e^*,a,d) > \theta.$$

Alors,

$$(e^* \circ (c \circ x))(d) \geq R(c,x,a) \wedge R(e*,a,d) > \theta,$$
$$((e^* \circ c) \circ x)(a) \geq R(e^*,c,c) \wedge R(c,x,a) > \theta.$$

Ainsi, $d = a$ et $R(e^*,a,a) > \theta$, ç'est- à -dire $(e^* \circ a)(a) > \theta$.

Par la formule (5), on a qu'il $exy \in G$ tel que $(y \circ a)(e^*) > \theta$, alors $(G,R)$ est un groupe flou du Théorème 3.2.3. □

## 3.3 Sous-groupe flou et sous-groupe flou normal du groupe flou

*Soit $(G,R)$ un groupe flou et $H$ une partie non vide de $G$.*

*Soit $R_H(a,b,c) = R(a,b,c)$, $\forall a,b,c \in H$, alors on a*

$$(a \bullet\ b)(c) = R_H(a,b,c) = R(a,b,c), \forall a,b,c \in H$$
$$((a \bullet b) \bullet c)(z) = \bigvee_{x \in H} (R(a,b,x) \wedge R(x,c,z)), \forall z \in H, \forall a,b,c \in H$$
$$(a \bullet (b \bullet c))(z) = \bigvee_{x \in H} (R(b,c,x) \wedge R(a,x,z)), \forall z \in H, \forall a,b,c \in H.$$

*Ensuite nous avons la définition suivante :*

**Définition 3.3.1.** *Soient $(G,R)$ un groupe flou et $H$ une partie non vide de $G$.*

**(H1)** *Si* $\forall a, b \in H, \forall c \in G, (a \circ b)(c) > 0$ *implique* $c \in H$,

**(H2)** *Si* $\forall a, b, c \in H, \forall z_1, z_2 \in H, ((a \bullet b) \bullet c)(z_1) > 0$ *et* $(a \bullet (b \bullet c))(z_2) > 0$, *implique* $z_1 = z_2$,

**(H3)** $\exists e_H \in H$ *tel que* $(a \bullet e_H)(a) > 0$, $(e_H \bullet a)(a) > 0$, $\forall a \in H$,

**(H4)** $\forall a \in H$, $\exists b \in H$ *tel que* $(a \bullet b)(e_H) > 0$ *et* $(b \bullet a)(e_H) > 0$.

*Alors, $H$ est appelé un sous-groupe flou de $G$.*

**Proposition 3.3.2.** . *Soit $H$ un sous-groupe flou de $G$, alors,*

1. $e_H = e$,
2. *l'élément inverse $b$ de $a$ dans $H$ est l'élément inverse $a^{-1}$ de $a$ dans $G$.*

*Démonstration.* . (1)D'après $(H3)$, on a $(e_H \circ e_H)(e_H) > 0$. Puisque $(e_H \circ e)(e_H) > 0$, donc $e_H = e$ de □

*Par $(b \bullet a)(e_H) > 0$, on a $(b \circ a)(e) > 0$. Puisque $(a^{-1} \circ a)(e) > 0$, donc $b = a^{-1}$ d'après la proposition* 2.1(4).

*Clairement, nous avons ce qui suit.*

**Proposition 3.3.3.** . *$H$ est un sous-groupe flou de $G$ si et seulement si*

1. $\forall a,\ b \in H$, $\forall c \in G$, $(a \circ b)(c) > 0$ *implique* $c \in H$,
2. $a \in H$ *implique* $a^{-1} \in H$.

**Proposition 3.3.4.** . *Soit $H_i$, $i \in I$, un sous-groupe flou de $G$, alors $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe flou de $G$.*

*Démonstration.* □

**Proposition 3.3.5.** . *Soit $(G, R)$ un groupe flou et*

$$c = \{x \mid x \in G \text{ et } (x \circ a)(c) > 0 \Leftrightarrow (a \circ x)(c) > 0 \text{ pour tout } a, c \in G\}$$

*alors, $C$ est un sous-groupe flou de $G$.*

*Démonstration.* . Clairement, $e \in C$. Alors, $C \neq 0$.

**(1)** $x_1,\, x_2 \in C$ et $(x_1 \circ x_2)(x) > 0 \Rightarrow x \in C$.

Soient $a$, $c$, $d_1$, $d_2$, $b_2 \in G$ tels que $R(x,a,c) > 0$, $R(a,x,d_1) > 0$, $R(a,x_2,b_2) > 0$, et $R(b_2,x_1,d_2) > 0$. Par $R(x_1,x_2,x) > 0$ et $R(x_1,x_1,x) > 0$, on a

$$(a \circ (x_2 \circ x_1))(d_1) \geq R(x_2,x_1,x) \wedge R(a,x,d_1) > 0,$$
$$((a \circ x_2) \circ x_1)(d_2) \geq R(a,x_2,b_2) \wedge R(b_2,x_1,d_2) > 0.$$

Ainsi, $d_1 = d_2$ et $R(b_2,x_1,d_1) > 0$.

Puisque $x_1$, $x_2 \in C$, donc $R(x_2,a,b_2) > 0$, $R(x_1,b_2,d_1) > 0$, alors

$$((x_1 \circ x_2) \circ a)(c) \geq R(z_1,x_2,x) \wedge R(x,a,c) > 0,$$
$$(x_1 \circ (x_2 \circ a))(d_1) \geq R(x_2,a,b_2) \wedge R(x_1,b_2,d_1) > 0.$$

Ainsi, $c = d_1$ et $R(a,x,c) > 0$.

De même, $R(a,x,c) > 0$ implique $R(x,a,c) > 0$. Ainsi, $x \in C$.

**(2)** $x \in C \Rightarrow x^{-1} \in C$

Soit $c$, $b$, $d \in G$ tel que $R(a,x^{-1},c) > 0$, $R(c,x,b) > 0$, et $R(x^{-1},a,d) > 0$, alors

$$((a \circ x^{-1}) \circ x)(b) \geq R(a,x^{-1},c) \wedge R(c,x,b) > 0,$$
$$(a \circ (x^{-1} \circ x))(a) \geq R(x^{-1},x,e) \wedge R(a,e,a) > 0.$$

Ainsi, $b = a$ et $R(c,x,a) > 0$, $R(x,c,a) > 0$.

Depuis

$$(x^{-1} \circ (x \circ c))(d) \geq R(x,c,a) \wedge R(x^{-1},a,d) > 0,$$
$$((x^{-1} \circ x) \circ c)(c) \geq R(x^{-1},x,e) \wedge R(e,c,c) > 0.$$

Donc, $c = d$ et $R(x^{-1},a,c) > 0$.

De même, $x \in C$ et $R(x^{-1},a,c) > 0$ impliquent $R(a,x^{-1},c) > 0$. Ainsi, $x^{-1} \in C$. Ainsi, $C$ est un sous-groupe flou de $G$ de la 3.3.3. □

**Définition 3.3.6.** *Soit $H$ un sous-groupe flou du groupe flou $G$, si $\forall a$, $b \in G$, $\forall h \in H$*

$$(a \circ (h \circ a^{-1}))(b) > 0 \Rightarrow b \in H \tag{3.5}$$

*alors, $H$ est appelé un sous-groupe flou normal de $G$.*

**Proposition 3.3.7.** .

$$((a \circ b) \circ c)(d) > 0 \Leftrightarrow (a \circ (b \circ c))(d) > 0.$$

*Démonstration.* .Soit $((a \circ b) \circ c)(d) > 0$ et soit $z, w \in G$ tels que $R(b, c, z) > 0$ et $R(a, z, w) > 0$, alors

$$(a \circ (b \circ c))(w) \geq R(b, c, z) \wedge R(a, z, w) > 0.$$

Ainsi, $d = w$ et $(a \circ (b \circ c))(d) > 0$.

De même, par

$$(a \circ (b \circ c))(d) > 0,$$

on a

$$((a \circ b) \circ c)(d) > 0.$$

□

**Remarque 3.3.8.** *La condition* (6) *est équivalente à la condition* (6)*ı*

$$\forall a, b \in G, \ \ \forall h \in H, \qquad ((a \circ h) \circ a^{-1})(b) > 0 \Rightarrow b \in H. \tag{3.6}$$

**Définition 3.3.9.** *.Soit $H$ un sous-groupe flou de $G$. Soit*

$$(aH)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a, x, z), \ (Ha)(z) = \bigvee_{x \in H} R(x, a, z), \tag{3.7}$$

*$aH(Ha)$ est appelé coset/eft (right) de $H$.*

**Théorème 3.3.10.** *.Soit $H$ un sous-groupe flou de $G$, alors $H$ est un sous-groupe flou normM si et seulement*

*si*

$$\forall a, z \in G, \qquad (aH)(z) > 0 \Leftrightarrow (Ha)(z) > 0. \tag{3.8}$$

*Démonstration.* ." $\Rightarrow$" Soit $(aH)(z) > 0$, alors il existe un élément $h \in H$ tel que $R(a, h, z) > 0$.

Soit $c \in G$ tel que $R(z, a^{-l}, c) > 0$, alors,

$$((a \circ h) \circ a^{-1})(c) \geq R(a, h, z) \wedge R(z, a^{-1}, c) > 0.$$

Ainsi, $c \in H$ et $R(z, a^{-1}, c) > 0$.

Soit $w \in G$ tel que $R(c, a, w) > 0$, alors

$$((z \circ a^{-1}) \circ a)(w) \geq R(z, a^{-1}, c) \wedge R(e, a, w) > 0,$$
$$(z \circ (a^{-1} \circ a))(z) \geq R(a^{-1}, a, e) \wedge R(z, e, z) > 0.$$

Ainsi, $w = z$ et $R(c, a, z) > 0$. Alors,

$$(Ha)(z) = \bigvee_{x \in H} R(x, a, z) > R(c, a, z) > 0.$$

De même, lorsque $(Ha)(z) > 0$, on a $(aH)(z) > 0$.

"$\Leftarrow$" Soient $a, e \in G$, $h \in H$ tels que

$$(a \circ (h \circ a^{-1}))(e) > 0,$$

alors il existe $z \in G$ tel que

$$R(h, a^{-1}, z) > 0, \quad R(a, z, e) > 0,$$

alors

$$(Ha^{-1})(z) = \bigvee_{x \in H} R(x, a^{-1}, z) > R(h, a^{-1}, z) > 0.$$

Il s'ensuit que

$$(a^{-1}H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a^{-1}, x, z) > 0.$$

Alors, il existe $h_i \in H$ tel que $R(a^{-1}, h_i, z) > 0$, alors

$$(a \circ (a^{-1} \circ h_i))(c) \geq R(a^{-1}, h_i, z) \wedge R(a, z, c) > 0,$$
$$((a \circ a^{-1}) \circ h_i)(h_i) \geq R(a, a^{-1}, e) \wedge R(e, h_i, h_i) > 0.$$

□

## 3.4 Facteur d'un groupe flou

**Lemme 3.4.1.** *Soit $G$ un groupe flou, alors*

$$R(a, b, c) > 0 \Rightarrow R(c, b^{-1}, a) > 0 \wedge R(a^{-1}, e, b) > 0. \tag{3.9}$$

*Démonstration.* Soient $R(a, b, e) > 0$ et $d \in G$ tels que $R(c, b^{-1}, d) > 0$, alors

$$((a \circ b) \circ b^{-1})(d) \geq R(a, b, c) \wedge R(e, b^{-1}, d) > 0,$$
$$(a \circ (b \circ b^{-1}))(a) \geq R(b, b^{-1}, e) \wedge R(a, e, a) > 0.$$

Ainsi, $d = a$ et $R(c, b^{-1}, a) > 0$. De même, nous avons $R(a^{-1}, c, b) > 0$.

Soit $H$ un sous-groupe flou normal du groupe flou $G$ et soit $\Sigma = \{aH \ \setminus \ a \in G\}$. Nous définissons une relation sur $\Sigma$

$$a_1H \sim a_2H \Leftrightarrow \exists h \in H, \quad \text{telque} \quad R(a_1^{-1}, a_2, h) > 0 \tag{3.10}$$

Ensuite, nous avons : □

**Théorème 3.4.2.** *$\sim$ est une relation équivalente sur $E$.*

*Démonstration.*

**(1)** Par $R(a^{-1}, a, e) > 0$ et $e \in H$. Nous avons, $\forall a \in G$.

**(2)** Soit $a_1H \sim a_2H$, alors il existe $h \in H$ tel que $R(a_1^{-1}, a_2, h) > 0$.

Soit $c \in G$ et $R(a_2^{-1}, a_1, c) > 0$, alors on a $R(a_2, h^{-1}, a_1) > 0$ d'après le . Puis,

$$((a_2^{-1} \circ a_2) \circ h^{-1})(h^{-1}) \geq R(a_2^{-1}, a_2, e) \wedge R(e, h^{-1}, h^{-1}) > 0,$$
$$(a_2^{-1} \circ (a_2 \circ h^{-1}))(c) \geq R(a_2, h^{-1}, a_1) \wedge R(a_2^{-1}, a1, c) > 0.$$

Ainsi, $c = h^{-1}$ et $R(a_2^{-1}, a_1, h^{-1}) > 0$.

Puisque $h \in H$, donc $h^{-1} \in H$ et par conséquent $a_2H \sim a_1H$.

**(3)** Soit $a_1H \sim a_2H$, $a_2H \sim a_3H$, alors il existe $h_1$, $h_2 \in H$ tel que

$$R(a_1^{-1}, a_2, h1) > 0 \quad \text{et} \quad R(a_2^{-1}, a3, h_2) > 0.$$

Soit $c \in G$ tel que $R(h_1, h_2, c) > 0$, alors $c \in H$. Soit $z_1$, $z_2$ ∈G tel que

$$R(h_1, a_2^{-1}, z_1) > 0, \quad R(z_1, a_3, w_1) > 0,$$

alors

$$(h_1 \circ (a_2^{-1} \circ a_3))(c) \geq R(a_2^{-1}, a3, h2)R(h_1, h_2, c) > 0,$$
$$((h_1 \circ a_2^{-1}) \circ a_3)(w_1) \geq R(h_1, a_2^{-1}, z_1) \wedge R(z_1, a_3, w_1) > 0.$$

Ainsi, $w_1 = c$.

D'après $R(a_1^{-1}, a_2, h_1) > 0$ et le , on a

$$R(h_1, a_2^{-1}, a_1^{-1}) > 0,$$

alors $z_1 = a_1^{-1}$ et $R(a_1^{-1}, a_3, c) > 0$. Il s'ensuit que $a_1H \sim a_3H$. □

**Proposition 3.4.3.** $.a_1H \sim a_2H \Leftrightarrow ((a_1H)(z) > 0 \Leftrightarrow (a_2H)(z) > 0)$.

*Démonstration.*

" $\Leftarrow$" Soit $a_1H \sim a2H$, puis $a_2H \sim a_1H$ et par conséquent il existe $h \in H$ tel que

$$R(a_2^{-1}, a_1, h) > 0$$

.

Soit

$$(a_1H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a, x, z) > 0,$$

alors il existe $h_1 \in H$ tel que $R(a_1, h_1, z) > 0$.

Soit $h_2 \in G$ tel que

$$R(h, h_1, h_2) > 0,$$

alors $h_2 \in H$.

Soit $w \in G$ tel que

$$R(a_2, h_2, w) > 0.$$

Par $R(a_2^{-1}, a_1, h) > 0$ et, on a

$$R(a_2, h, a_1) > 0,$$

alors

$$(a_2 \circ (h \circ h_1))(w) \geq R(h, h_1, h_2) \wedge R(a_2, h_2, w) > 0,$$
$$((a_2 \circ h) \circ h_1)(z) \geq R(a_2, h, a_1) \wedge R(a_1, h_1, z)\tilde{} > 0.$$

Ainsi, $w = z$ et $R(a_2, h_2, z) > 0$. Alors,

$$(a_2H)(z) = \bigvee_{x \in H} R(a_2, x, z) \geq R(a_2, h_2, z) > 0.$$

De même, lorsque $(a_2H)(z) > 0$, on a

$$(a_1H)(z) > 0$$

.

"$\Leftarrow$" Par $e \in H$ et

$$(a_1H)(a_1) = \bigvee_{x \in H} R(a_1, x, a_1) \geq R(a_1, e, a_1) > 0,$$

sur

$$(a_2H)(a_1) = \bigvee_{x \in H} R(a_2, x, a_1) > 0,$$

alors il existe $h \in H$ tel que $R(a_2, h, a_1) > 0$.

D'après le Lemma 3.4.1, on ont

$$R(a_1^{-1}, a_2, h^{-1}) > 0.$$

Puisque $h^{-1} \in H$, donc $a_1H \sim a_2H$.

Soit

$$[aH] = \{a\prime H \mid a\prime H \sim aH\},\ \bar{a} = \{a\prime H \in G, \text{et } a\prime H \sim a\prime H\},\ G/H = \{[aH] \mid a \in G\}$$

et

$$\begin{array}{lll} \bar{R}: \dfrac{G}{H} \times \dfrac{G}{H} \times \dfrac{G}{H} & \longrightarrow & [0,1], \\ ([aH], [bill, [cH]) & \mapsto & \bar{R}([aH], [bH, [cH) = \bigvee_{(a\prime, b\prime, c\prime) \in \bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}.} R(a\prime, b\prime, c\prime), \end{array}$$

Ensuite, nous avons : □

**Théorème 3.4.4.** *$\bar{R}$ est une opération binaire floue sur $G/H$.*

*Démonstration.*

**(1)** $\forall a, b \in G, \exists e \in G$ tels que $R(a, b, c) > 0$, alors

$$\bar{R}([aH], [bH], [cH]) \geq R(a, b, c) > 0.$$

**(2)** Soit $\bar{R}([aH], [bH], [cH]) > 0$ et $\bar{R}([aH], [bH], [dH]) > 0$, il faut montrer $[cH] = [dH]$.

En fait, par$\bar{R}([aH],[bH],[cH]) > 0$ et $\bar{R}([aH],[bH],[dH]) > 0$, on a qu'il ya existe $a1 \in \overline{a}, b1 \in \overline{b}, c1 \in \overline{c}, a\prime_1 \in \overline{a}, b\prime_1 \in \overline{b}, d_1 \in d$ tels que

$$R(a1, b1, c1) > 0, \qquad R(a\prime_1, b\prime_1, d\prime_1) > 0. \tag{3.11}$$

puisque $a\prime_1 H \sim a_1 H, b\prime_1 H \sim b1H$,il existe donc $h_1 \in H, h_2 \in H$ tel que1

$$R(a\prime_1, h_1, a_1) > 0, R(b\prime_1, h_2, b_1) > 0. \tag{3.12}$$

Soit $z \in G$ tel que

$$R(h1, b\prime_1, z) > 0,$$

alors

$$R(z, b\prime_1^{-1}, h_1) > 0,$$

alors $b\prime_1^{-1} H \sim zH$ et il existe $h\prime_1 \in H$ tel que

$$R(b\prime_1^{-1}, z, h\prime) > 0.$$

.

Soit $y \in G$ tel que $R(b\prime_1, h\prime_1, y) > 0$, alors

$$(b\prime_1 \circ (b\prime_1^{-1} \circ z))(y) \geq R(b\prime_1^{-1}, z, h\prime_1) \wedge R(b\prime_1, h\prime_1, y)\prime > 0,$$
$$((b\prime_1 \circ b\prime_1^{-1}) \circ z)(z) \geq R(b\prime_1, b\prime_1^{-1}, e) \wedge R(e, z, z) > 0.$$

Ainsi, $y = z$.

Soit $z_1, y_1 \in G$ tel que $R(h_1, b_1, z_1) > 0$, $R(a\prime_1, z_1, y_1) > 0$, alors

$$(a\prime_1 \circ (h_1 \circ b_1))(y_1) \geq R(h_1, b_1, z_1) \wedge R(a\prime_1, z_1, y_1) > 0,$$
$$((a\prime_1 \circ h_1) \circ b_1)(c_1) \geq R(a\prime_1, h_1, a_1) \wedge R(a_1, b_1, c_1) > 0.$$

Ainsi, $y_1 = c_1$ et $R(a\prime_1, z_1, c_1) > 0$.

Soit $P_1 \in G$ tel que $R(z, h_2, p_1) > 0$, alors

$$((h_1 \circ b\prime_1) \circ h_2)(p_1) \geq R(h_1, b\prime_1, z) \wedge R(z, h_2, p_1) > 0,$$
$$(h_1 \circ (b\prime_1 \circ h_2))(z_1) \geq R(b\prime_1, h_2, b_1) \wedge R(h_1, b_1, z_1) > 0$$

Ainsi, $p_1 = z_1$et $R(z, h_2, z_1) > 0$, R$(y, h_2, z_1) > 0$.

Soient $h \in G, w_1 \in G$ tels que $R(h\prime_1, h_2, h_1) > 0$, $R(b\prime_1, h, w_1) > 0$, alors $h \in H$ et

$$(b\prime_1 \circ (h\prime_1 \circ h_2))(w_1) \geq R(h\prime_1, h_2, h) \wedge R(b\prime_1, h, w_1) > 0,$$
$$((b\prime_1 \circ h\prime_1) \circ h_2)(z_1) \geq R(b\prime_1, h\prime_1, y) \wedge R(y, h_2, z_1) > 0.$$

Ainsi, $w_1 = z_1$ et $R(b\prime_1, h, z_1) > 0$.

Soit $w \in G$ tel que $R(d_1, h, w) > 0$, alors

$$((a\prime_1 \circ b\prime_1) \circ h)(w) \geq R(a\prime_1, b\prime_1, d_1) \wedge R(d_1, h, w) > 0,$$
$$(a\prime_1 \circ (b\prime_1 \circ h))(c_1) \geq R(b\prime_1, h, z_1) \wedge R(a\prime_1, z_1, c_1) > 0.$$

Ainsi, $w = c_1$ et $R(d_1, h, c_1) > 0$. Il s'ensuit que $cH \sim dH$ et par conséquent $[cH] = [dH]$.

Ainsi, $\overline{R}$ est une opération binaire floue sur $G/H$.

Comme $\overline{R}$ est une opération binaire floue sur $G/H$, on a donc

$$([tous] \circ [bH])([cH]) = \overline{R}([aH], [bH], [cH]), \tag{3.13}$$

$$(([aH] \circ [bH]) \circ [cH])([dH]) = \bigvee_{x \in G} \overline{R}([aH], [bH], [xg]) \wedge \overline{R}([xH], [cH], [dH]), \tag{3.14}$$

$$([tous] \circ ([bH] \circ [cH]))([wH]) = \bigvee_{x \in G} \overline{R}([bH], [cH], [xH]) \wedge \overline{R}([aH], [xH], [wH]). \tag{3.15}$$

Ensuite, nous avons le théorème suivant. □

**Théorème 3.4.5.** $(G/H, \overline{R})$ *est un groupe flou.*

*Démonstration.*

**(1)** Soit

$$(([aH] \circ [bH]) \circ [cH])([dH]) > 0, ([aH] \circ ([bH] \circ [cH]))([wH]) > 0. \tag{3.16}$$

Alors, on a $a_1$, $a\prime_1$, $b_1$, $b\prime_1, c_1, c\prime_1$, $d_1$, $w_1 \in G$ tels que appeler $c_1H \sim c\prime_1H \sim cH, a\prime_1H \sim a_1H \sim aH$, $b\prime_1H\tilde{\ }b_1H\tilde{\ }bH$, $d_1H \sim dH, w_1H\tilde{\ }wH$ et il existe des éléments $h_1, h_2, h_3 \in H$, $x\prime_1, x\prime_2 \in G$ tel que

$$R(a_1, b_1, x\prime_1) \wedge R(x\prime_1, c_1, d_1) > 0,$$
$$R(b\prime_1, c\prime_1, x\prime_2) \wedge R(a\prime_1, x\prime_1, w_1) > 0,$$
$$R(a\prime_1, h_1, a_1) > 0, R(b\prime_1, h_2, b_1) > 0, R(c\prime_1, h_3, c_1) > 0.$$

Soit $z_1 \in G$ tel que $R(a\prime_1, b\prime_1, z_1) > 0$, alors par $R(a_1, b_1, x\prime_1) > 0$, $R(a\prime_1, h_1, a_1) > 0$,

$R(a\prime_1, b\prime_1, z_1) > 0$, $R(b\prime_1, h_2, b_1) > 0$ et preuve du **théorème 4.2**, sur : $\exists h \in H$ tel que $R(z1, h, x\prime_1) > 0$.

Soit $z_2 \in G$ tel que $R(z_1, c\prime_1, z_2) > 0$.

Par

$$R(x\prime_1, c_1, d_1) > 0, R(z_1, h, x\prime_1) > 0,$$

$$R(c\prime_1, h_3, c_1) > 0, R(z_1, c\prime_1, z_2) > 0,$$

et la preuve du **théorème 4.2**, sur $\exists h_4 \in H$tel que

$$R(z_2, h_4, d_1) > 0.$$

Depuis

$$(a\prime_1 \circ (b\prime_1 \circ c\prime_1))(w_1) \geq R(b\prime_1, c\prime_1, x\prime_2) \wedge R(a\prime_1, x\prime_2, w_1) > 0,$$
$$((a\prime_1 \circ b\prime_1) \circ c\prime_1)(z_2) \geq R(a\prime_1, b\prime_1, z_1) \wedge R(z_1, c\prime_1, Z_2) > 0,$$

donc, $z_2 = w_1$ et $R(w_1, h_4, d_1) > 0$. Alors, $w_1H \sim dH$ et par conséquent$[wH] = [dH]$.

**(2)** $\forall a \in G, ([aH] \circ [eH])([aH]) \geq R(a, e, a) > 0$, $([eH] \circ [aH])([aH]) \geq R(e, a, a) > 0$.

**(3)** $([aH] \circ [a^{-1}H])([eH]) \geq R(a, a^{-1}, e) > 0$, $([a^{-l}H] \circ [aH])([eH]) \geq R(a^{-1}, a, e) > 0$.

Ainsi, $(G/H, \overline{R})$ est un flux groupé selon la **Définition 2.3.** □

**Définition 3.4.6.** $(G/H, \overline{R})$ *est appelé groupe flux de facteur de* $G$ *modulo* $H$*.*

## 3.5 Homomorphismes de groupes flous

**Définition 3.5.1.** *Soient* $(G_1, R_1)$ *et* $(G_2, R_2)$ *deux groupes flous,* $f : G1 \longrightarrow G2$ *est une application. Si*

$$R_1(a, b, c) > 0 \Rightarrow R_2(f(a), f(b), f(c)) > 0, \tag{3.17}$$

*alors* $f$ *est appelé un flot d'homomorphisme. Si* $1-1$*, on parle de monomorphisme flou . Si* $f$ *isonto, on parle d'épimorphisme flou . Si* $f$ *est à*

*la fois* $1-1$ *et sur, cela s'appelle un isomorphisme flou. Clairement, nous avons ce qui suit.*

**Théorème 3.5.2.** *. Soient $(G, R)$ un groupe flou et $H$ un sous-groupe flou normal de $G$. Soit*

*$(G/H, \overline{R})$ un groupe de flux de facteurs, alors*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \longrightarrow & \dfrac{G}{H} \\ & a & \mapsto & \varphi(a) = [aH] \end{array}$$

*est un épimorphisme flou.*

**Proposition 3.5.3.** *. Soit $f : (C_1, R_1) \longrightarrow (G_2, R_2)$ un homomorphisme de groupe flou , alors*

**(1)** $f(e_1) = e_1$,

**(2)** $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

**Théorème 3.5.4.** *.Soit $f : (G_1, R_1) \sim (G_2, R_2)$ un homomorphisme de groupes flous, alors*

**(1)** *si $H_1$ est un flux sous-groupe de $G_1$, alors $f(H_1)$ est un flux sous-groupe de $G_2$,*

**(2)** *si $H_2$ est un flux sous-groupe de $G_2$, alors $f^{-1}(H_2)$ est un flux sous-groupe de $G_1$,*

**(3)** *si $N_2$ est un flux sous-groupe normal, alors $f^{-1}(N_2)$ est un flux sous-groupe normal,*

**(4)** *$Kerf = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}$ est un sous-groupe flux normal de $G_1$,*

**(5)** *$f$ est un monomorphisme flou si et seulement si clé $f = \{e_1\}$. Groupe flou basé sur l'opération binaire floue*

**Théorème 3.5.5.** *Le théorème fondamental d'homomorphisme.*

*Soit $f : (G_1, R_1) \sim (G_2, R_2)$ un épimorphisme de groupe flou , alors $G_1/H$ est isomorphe à $G_2$,*

*ou $H = Kerf$.*

*Démonstration.* Soit

$$g : \frac{G_1}{H} \longrightarrow G_2[aH] \mapsto f(a).$$

**(1)** Soient $aH \sim bH$et $h \in H$ tels que $R_1(a, h, b) > 0$, alors

$$R_2(f(a), f(h), f(b)) > 0.$$

Puis que $h \in Kerf$, donc$f(h) = e_2$. Ainsi, $f(a) = f(b)$. Donc $g$ est une application.

**(2)** $\forall y \in \ G_2, \exists x \in G_1, f(x) = y$, alors $g([xH]) = y$. Ainsi, $g$ est sur.

**(3)** Soit $g([aH]) = g([bH])$, alors$f(a) = f(b)$. Soit $c \in G_1$ tel que $R_1(a^{-1}, b, c) > 0$, alors

$$R_2(f(a^{-1}), f(b), f(c)) > 0.$$

Par $f(a) = f(b)$, sur $f(c) = e_2$. Il s'ensuit que $c \in H$ et $aH\tilde{\ }bH$.Ainsi, $[aH] = [bH]$.

**(4)** Soit $R_1([aH], [bH], [cH])) > 0$, alors il existe $a_1$, $b_1$, $c_1 \in G$ et $h_1, h_2, h_3 \in g$ tels que

$$R1(a, h_1, a_1) > 0, R_1(b, h_2, b_1) > 0, R_1(c_1, h_3, c) > 0, R_1(a_1, b_1, c_1) > 0.$$

Soit $w \in G$ tel que $R1(a, b, w) > 0$. D'une manière similaire à la preuve du **théorème 4.2,** sur un

$\exists h\prime \in H$ tel que

$$R_1(w, h\prime, c) > 0$$

Alors, $wH \sim cH$ et, par conséquent, $f(c) = f(w)$.

Par $Rl(a, b, w) > 0$, on a

$$R2(f(a), f(b), f(w)) > 0,$$

Alors,

$$R_2(f(a), f(b), f(e)))) > 0.$$

Donc $g$ est un flot d'isomorphisme $R$.

□

# References


[1] *J. Calais.* Eléments de théorie des groupes*. Presses Universitaires de France-PUF, 1984.*

[2] *M. Demirci. Smooth groups.* Fuzzy sets and systems*, 117(3) :431–437, 2001.*

[3] *M. Demirci. Smooth subgroups and smooth homomorphisms.* Fuzzy Sets and Systems*, 117(3) :439–446, 2001.*

[4] *D. S. Malik and J. N. Mordeson. Fuzzy homomorphisms of rings.* Fuzzy sets and systems*, 46(1) :139–146, 1992.*

[5] *J. N. Mordeson and D. S. Malik.* Fuzzy commutative algebra*. World scientific, 1998.*

[6] *A. Rosenfeld. Fuzzy groups.* Journal of mathematical analysis and applications*, 35(3) :512–517, 1971.*

[7] *A. Rosenfeld. Fuzzy groups.* Journal of mathematical analysis and applications*, 35(3) :512–517, 1971.*

[8] *X. Yuan and E. Lee. Fuzzy group based on fuzzy binary operation.* Computers & Mathematics with Applications*, 47(4-5) :631–641, 2004.*

[9] *L. A. Zadeh. Information and control.* Fuzzy sets*, 8(3) :338–353, 1965.*

**ملخص** :

تم اقتراح نوع جديد من الزمر الغامضة على أساس العمليات الثنائية الضبابية. تم تقديم مفاهيم الزمرة الجزئية الغامضة ، الزمرة الجزئية الغامضة الناضمية ، الزمرة الغامضة العاملية ، وتماثلات الزمر الضبابية. أخيراً ، تم الحصول على النظرية الأساسية لتماثل الزمر الغامضة.

**Abstract** :

A new type of fuzzy group based on fuzzy binary operations is proposed. The concepts of fuzzy subgroup, normal fuzzy subgroup, factorial fuzzy group and fuzzy group homomorphisms are introduced. Finally, the fundamental theorem of the homomorphism of the fuzzy group is obtained.

**Résumé** :

Un nouveau type de groupe flou basésur des opérations binaires floues est proposé. Les concepts de sous-groupe flou, de sous-groupe flou normal, de groupe flou factoriel et d'homomorphismes de groupe flou sont introduits. Enfin, le théorème fondamental de l'homomorphisme du groupe flou est obtenu.