



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Licence**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et
fondamentales

Par

1- Dekhane Meriama

2- Barkat Samiha

3-Titraoui Ibtissem

Sujet

Sur les espaces vectoriels normés

Dirigé par :

Mr. HERAIZ.RABEH

Promotion: 2012/2013

Table des matières

Introduction	1
1 Espaces vectoriels normés	2
1.1 Quelques rappels d'Algèbre linéaire	2
1.1.1 Groupes	3
1.2 structure d'espace vectoriel	4
1.2.1 Anneau	4
1.2.2 Corps	5
1.3 Quelques éléments sur les normés	8
1.3.1 Normes	8
1.3.2 Distance associée à une norme	8
1.3.3 Distance à une partie	9
1.3.4 Distance entre deux parties	9
1.3.5 Partie bornée, diamètre	9
1.3.6 Distance induite sur une partie A d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé	10
1.3.7 Normes équivalentes	10
1.3.8 Norme induite	11
1.3.9 Algèbre normée	12
1.3.10 Espace vectoriel normé	12
1.3.11 Normes dans \mathbb{R}^n	12
1.3.12 Notions sur les ouverts et les fermés	13
1.3.13 Notions sur les intérieur, adhérence	14

2	Espaces de Banach	16
2.1	Suites convergentes dans un espace vectoriel normé	16
2.2	Espaces complets	19
2.3	Le théorème du point fixe	20
2.4	Exemples et quelconques applications	22
2.4.1	Exemple	22
2.4.2	Quelconques applications	23
3	Compacité et connaxité dans un espace vectoriel normé	26
3.1	Compacité	26
3.1.1	Définitions, propositions	26
3.1.2	Compacité et continuité	30
3.1.3	Cas des fonctions à valeurs réelles	30
3.2	Connexité	32
3.2.1	Définitions, propositions	32
3.2.2	Connexité par arcs	33
4	Les Applications lineaires	36
4.1	Les Applications lineaires	36
4.1.1	Cas des applications linéaires	36
4.2	Applications linéaires continues	38
4.2.1	Norme d'une application lineaire continue	40
4.3	Applications linéaires en dimension finie	41
Bibliographie		43

Introduction

Les espaces vectoriels normés sont extrêmement utilisés dans de nombreuses branches des mathématiques.

Nous étudions dans ce travail leurs propriétés élémentaires, nous donnons d'abord un rappel sur les espaces vectoriels et quelques généralités sur normes (définissons les ouverts, les fermés, l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble...) puis nous traiterons les espaces de banach (nous étudierons en ce titre les suites de cauchy dans un espace vectoriel normé et le théorème du point fixe et quelques applications de ce théorème).

puis nous traiterons la compacité et connexité dans ces espace, nous montrons que les espaces vectoriels de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

nous étudierons ensuite les espaces d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés, et nous définirons une norme sur ces espace. En particulier, nous introduirons l'importante notion de dual d'un espace vectoriel norme.

Le dernier chapitre indique que toute application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé est continue. Il n'en est plus de même lorsque l'espace sur lequel l'application est définie n'est pas de dimension finie, et l'existence même de formes linéaires continues n'est pas évidente, nous étudions ensuite, ont des propriétés semblables à celles des espaces d'applications linéaires continues.

Bibliographie

- [1] Cédric Millet, Version préliminaire. 2011-2012. Topologie des espaces vectoriels normés. Université Galatasaray
- [2] Yannick Privat, Espaces Vectoriels Normés et Topologie. Polycopié de cours. Bureau 321 - Institut Élie Cartan Nancy (Mathématiques) - Université Henri Poincaré Nancy 1
- [3] Polycopié de cours, M r .Heraiz