

Sommaire

Introduction	1
1 Solution analytique de l'équation du milieu-poreux pour le cas $m = 2$	3
1.1 Définition du problème	3
1.2 Propriétés d'auto-similarité	4
1.2.1 Définition d'une solution auto-similaires	4
1.2.2 Equation admettant une solution auto-similaire	5
1.3 Position du problème	7
1.4 Solution analytique de l'équation du milieu-poreux	8
1.4.1 La solution auto-similaire de type 1	8
1.4.2 La solution auto-similaire de type 2	12
1.4.3 La solution auto-similaire de type 3	15
2 Introduction aux méthode de discretisation des EDOs et résolution de système non linéaire	18
2.1 Résolution du système des équations non linéaires	18
2.2 Méthode de Newton	19
2.3 Méthodes des différences finies non linéaires	26
2.3.1 Principe de la méthode des différence finies	26
2.3.2 Application à l'équation différentielle ordinaire non linéaire du 2 ^{ème} ordre	27

3	Résolution numérique de l'équation du milieu-poreux	31
3.1	Position du problème	31
3.2	Résolution numérique de l'équation différentielle ordinaire	33
3.2.1	Le programme résolution systèmes des équations non linéaires . .	34
3.3	Comparaisons de la solution analytique avec la solution numérique	38
3.4	Etude de quelques probleme aux limites	40
3.4.1	Etude du problème de Dirichlet	40
3.4.2	Etude du problème mixte Dirichlet-Neumann	45
	Conclusion	50
	Bibliographie	52

Introduction

Les solutions auto-similaires jouent un rôle important dans le développement de la théorie d'équations non linéaires d'évolution. En plus de fournir les solutions explicites exactes, ils décrivent souvent l'asymptotique de grandes classes des solutions dans le voisinage d'un certain changement important dans le comportement (tel que l'explosion) ou à de grandes temps.

Beaucoup d'EDP d'intérêt scientifique, leurs solutions ont comportement asymptotique auto-similaire (comportement pour grande valeur de la variable du temps, temps fini d'explosion), quand ceci se produit les solutions se simplifient et leur comportement peut être caractérisé par un nombre fini de paramètres.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'équation parabolique de type milieu-poreux, nous cherchons des solutions numérique de type "Auto-similaire" de plusieurs formes pour cette équation a été étudiée par plusieurs auteurs notamment, Barenblatt [2].

La méthode "Auto-similaire" consiste à chercher des solutions analytiques particulières des EDP non linéaires.

Il y a plusieurs formes des solutions de type "Auto-similaire" :

1-La solution auto-similaire de type 1:

Dans ce type de représentation la solution a la forme:

$$u(x, t) = t^{-\alpha} \varphi(xt^{-\beta})$$

La détermination de la solution revient à déterminer les deux paramètres α et β et le

profil φ . Ce type de solution est souvent présente dans la présentation asymptotique de solutions de quelques équations aux dérivées partielles, ce type de solution a la particularité qu'elle est invariante sous l'action de dilatation.

2-La solution auto-similaire de type 2:

On cherche la solution sous la forme:

$$u(x, t) = (T - t)^\alpha \varphi(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = x(T - t)^{-\beta}$$

Dans ce cas, il est plus commun pour placer le temps finale à un certain $T > 0$ et penser aux solutions définies pour $0 < t < T$. Le format standard de auto-similaire du type 1.

3-La solution auto-similaire de type 3 :

On cherche une solution d'une EDP sous la forme :

$$u(x, t) = c(t)\varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right)$$

où $a(t)$, $c(t)$ sont des paramètres à déterminer. Cette représentation de la solution sous cette forme est une généralisation des deux types précédentes.

Dans le premier chapitre, on a défini la solution de type "Auto-similaire" et on a donnée les conditions pour lesquelles une équation admet de telle solutions. Nous allons trouver la solution analytique de l'équation du milieu-poreux pour le cas $m = 2$ et on démontre une forme générale des solutions auto-similaires de cette équation .

Dans le deuxième chapitre, on donne une introduction aux méthodes de discretisation des EDOs et résolution de systèmes non linéaires.

Dans le troisième chapitre, on va présenter une étude numérique concernant le problème d'une façon générale. Ceci va nous permettre de tester, notre programme pour comparer les résultats analytiques, avec ceux obtenus numériquement.

On détermine numériquement la solution du problème initial, et établi une comparaison avec la solution analytique du problème ce qui nous permis de vérifier tout d'abord notre programme qui sens valable pour un problème plus général.

Chapitre 1

Solution analytique de l'équation du milieu-poreux pour le cas $m = 2$

Introduction:

Ce chapitre présente la méthode de recherche des solutions "auto-similaire" pour l'équation du milieu-poreux . La méthode est l'une des méthodes principales appliquées pour construire les solutions analytiques d'équations aux dérivées partielles. nous allons trouver les solutions analytiques de l'équation du milieu-poreux pour le cas $m = 2$ et on démontre une forme générale des solutions auto-similaires de cette équation .

1.1 Définition du problème

nous discutons le grand comportement de temps des solutions des problèmes de la valeur marginale initiaux pour l'équation du milieu-poreux

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Si u dénote la densité d'un gaz polytropique traversant un milieu-poreux homogène, alors u satisfait une équation comme (1.1) pour $m \geq 2$.

Nous considérons ici seulement des cas unidimensionnels et axisymétriques. Cette

équation écrite comme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (1.2)$$

où $u(x, t)$ est une fonction des variables d'espace ($x \in \mathbb{R}$), et de temps $t > 0$.

Ici, u est le niveau d'eaux souterraines, t est le temps, x est la coordonnée horizontale de l'espace le long du lit imperméable, L'équation (1.2) est résolue sujet à une première distribution

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

où $u_0(x)$ est une fonction non négative continue liée sur \mathbb{R} avec support compact.

1.2 Propriétés d'auto-similarité

1.2.1 Définition d'une solution auto-similaires

Cette méthode est largement utilisée et son principe est de trouver une solution dont la forme :

$$u(x, t) = t^\alpha \varphi(\xi), \quad \text{avec } \xi = xt^{-\beta},$$

où α et β les exposants de t sont des constantes réels appelés paramètres de la solution et prennent des valeurs particulières déterminées, caractérisant la solution d'une EDP donnée, et la fonction φ est une fonction d'une seule variable appelée profil qui est la solution d'une équation différentielle ordinaire résulte de l'EDP après l'insertion de u .

Pour une équation aux dérivées partielles, ils existent plusieurs profils, solutions de la même équation différentielle ordinaire, pour une seule détermination des paramètres qui caractérisent la solution et l'EDP elle même.

La détermination de la solution révient à déterminer les paramètres et le profil, en générale, ils sont trois inconnues à déterminer, on va voir qu'on a deux seulement à déter-

miner. L'EDO qui résulte dépend des paramètres, donc c'est une équation paramétrée, de plus elle est non linéaire, on sait que la résolution d'une EDO de coefficients déterminés est si compliquée, et à priori une EDO qui est paramétrée d'où la complexité de ce genre d'équations.

Il existe aussi une forme générale des solutions auto-similaires dont la forme :

$$u(x, t) = c(t)\varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right)$$

où $a(t)$ et $c(t)$ sont des valeurs réelles en fonctions de t .

les paramètres $a(t)$ et $c(t)$ sont choisis pour des raisons de convenabilité dans le problème spécifique.

1.2.2 Equation admettant une solution auto-similaire

Une condition pour qu'une équation aux dérivées partielles admette une solution auto-similaire est donnée par le théorème suivant : [8]

Théorème:

Soit $P(x, t, u, u_x, \dots) = 0$ une équation aux dérivées partielles, alors P admet une solution auto-similaire si et seulement si elle est invariante sous l'action de dilatation (échelle).

C'est-à-dire si l'on remplace u par $\lambda^a u$ et x par $\lambda^b x$ et t par $\lambda^c t$ dans l'EDP.

Ainsi l'EDP est invariante si

$$P(x, t, u, \dots) = 0 \Rightarrow P(\lambda^b x, \lambda^c t, \lambda^a u, \dots) = 0$$

On a la règle de dérivation

La dérivation par rapport à t :

$$\frac{\partial \lambda^a u}{\partial \lambda^c t} = \lambda^{(a-c)} \frac{\partial u}{\partial t}$$

La dérivation par rapport à x :

$$\frac{\partial \lambda^a u}{\partial \lambda^b x} = \lambda^{(a-b)} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Exemple:

Expliquons la méthode de obtenant les solutions auto-similaires en employant l'équation de Burger's non linéaire suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

là où (x, t) sont les variables indépendantes.

1- Pour démontrer que cette équation est invariante par dilatations, remplaçons u, x, t par $\lambda^a u, \lambda^b x, \lambda^c t$ dans l'EDP.

L'équation (1.3) devient

$$\lambda^{(a-c)} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^{(2a-b)} u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

L'équation est invariante donc :

$$\lambda^{(a-c)} = \lambda^{(2a-b)}$$

donc condition d'échelle est $a + c = b$.

2- Soit la solution auto-similaire :

$$u(x, t) = t^\alpha \varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

avec changement de variable : $\xi = \frac{x}{t^\beta}$

ici nous obtenons:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1} \varphi(\xi) - \beta t^{\alpha-1} \xi \varphi'(\xi)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^{\alpha-\beta} \varphi'(\xi)$$

ainsi le EDP devient:

$$\alpha\varphi(\xi) - \beta\xi\varphi'(\xi) + t^{\alpha-\beta+1}\varphi'(\xi)\varphi(\xi) = 0 \quad (1.4)$$

Dérivons l'équation (1.4) par rapport à t , on obtient :

$$(\alpha - \beta + 1)t^{\alpha-\beta}\varphi'(\xi)\varphi(\xi) = 0$$

Cette équation est identiquement nulle, si $\alpha - \beta + 1 = 0$. Si nous prenons $\alpha = 0$ alors nous obtenons

$$-\xi\varphi'(\xi) + \varphi'(\xi)\varphi(\xi) = \varphi'(\xi)(\varphi(\xi) - \xi) = 0$$

Ainsi

$$\varphi(\xi) = \xi$$

est une solution de l'EDO, ou nous avons une solution auto-similaire de l'équation (1.3) donnée par :

$$u(x, t) = \frac{x}{t}.$$

1.3 Position du problème

Nous considérons le problème suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad x \in R; t \succ 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.5)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (1.6)$$

et

$$\int_R u(x, t) dx = 1, \quad \text{pour } t > 0. \quad (1.7)$$

Cette équation intervient dans les problèmes non-linéaires de la chaleur et transfert et écoulements de masse dans des milieu poreux.

1.4 Solution analytique de l'équation du milieu-poreux

Nous voulons faire de rechercher des solutions analytiques explicites au problème (1.2) pour certains cas.[6]

1.4.1 La solution auto-similaire de type 1

On cherche une solution sous la forme auto-similaire:

$$u(x, t) = t^\alpha \varphi(xt^{-\beta})$$

avec changement de variable : $\xi = \frac{x}{t^\beta}$ on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1} \varphi(\xi) - \beta t^{\alpha-1} \xi \varphi'(\xi) \quad (1.8)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^{\alpha-\beta} \varphi'(\xi) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^{\alpha-2\beta} \varphi''(\xi) \quad (1.10)$$

En remplaçant (1.8),(1.9) et (1.10) dans l'équation (1.2), nous obtenons:

$$\alpha t^{\alpha-1} \varphi(\xi) - \beta t^{\alpha-1} \xi \varphi'(\xi) = t^{2\alpha-2\beta} \left[\varphi(\xi) \varphi''(\xi) + (\varphi'(\xi))^2 \right] \quad (1.11)$$

Divisons les deux membres de l'équation (1.11) par $t^{\alpha-1}$, on aura

$$\alpha \varphi(\xi) - \beta \xi \varphi'(\xi) = t^{\alpha-2\beta+1} \left[\varphi(\xi) \varphi''(\xi) + (\varphi'(\xi))^2 \right] \quad (1.12)$$

qui dépend des paramètres α et β . C'est une équation différentielle ordinaire de trois inconnues pour la résoudre, on doit avoir une condition supplémentaire.

Le terme gauche de l'équation (1.12) ne dépend pas de t , Dérivons cette équation par rapport à t , on obtient :

$$(\alpha - 2\beta + 1) t^{\alpha-2\beta} \left[\varphi(\xi) \varphi''(\xi) + (\varphi'(\xi))^2 \right] = 0$$

Cette équation est identiquement nulle, si $\alpha - 2\beta + 1 = 0$.

la condition (1.7) devient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha} \varphi(xt^{-\beta}) dx \\ &= t^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(xt^{-\beta}) dx \\ &= t^{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

avec le changement de variable : $y = \frac{x}{t^{\beta}}$

Cette condition peut se tenir pour tous $t > 0$ si $\alpha + \beta = 0$, c-à-d $\alpha = -\beta$.

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta + 1 = 0 \end{cases}$$

le déterminant du système précédent est non nul, $\Delta = -3$ alors les coefficients α et

β sont comme suit

$$\alpha = \frac{-1}{3}, \beta = \frac{1}{3}$$

substituant les paramètres α et β dans cette l'équation différentielle ordinaire (1.12), on obtient

$$3(\varphi(\xi)\varphi''(\xi) + (\varphi'(\xi))^2) + (\varphi(\xi) + \xi\varphi'(\xi)) = 0$$

ou

$$3(\varphi(\xi)\varphi'(\xi))' + (\xi\varphi(\xi))' = 0 \tag{1.13}$$

L'intégration de l'équation (1.13) on trouve

$$3\varphi(\xi)\varphi'(\xi) + \xi\varphi(\xi) = \varphi(\xi) (\xi + 3\varphi'(\xi)) = C_0$$

et puisque nous voulons que la solution soit une fonction égale de ξ .

Nous imposons la condition $\varphi'(0) = 0$ à ce que mène $C_0 = 0$.

Alors

$$3\varphi'(\xi) + \xi = 0$$

On intègre

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 + C_1.$$

Si nous écrivons cette solution sous la forme

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{6}(A^2 - \xi^2) \quad \text{avec } C_1 = \frac{1}{6}A^2.$$

la condition (1.6) devient :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{3}} \varphi(\xi) = 0 \Rightarrow \lim_{\xi^2 \rightarrow \infty} \varphi(\xi) = 0$$

nous devons avoir

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{6}(A^2 - \xi^2) & \text{si } \xi^2 < A^2 \\ 0 & \text{si } \xi^2 > A^2 \end{cases}$$

Alors c'est une solution faible puisque le dérivé est discontinu à $A^2 = \xi^2$.

Et donc la solution de l'équation du milieu-poreux donnée par :

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{6} t^{-\frac{1}{3}} \left(A^2 - \left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}} \right)^2 \right) & \text{si } |x| < A t^{\frac{1}{3}} \\ 0 & \text{si } |x| > A t^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

La condition (1.7) devient:

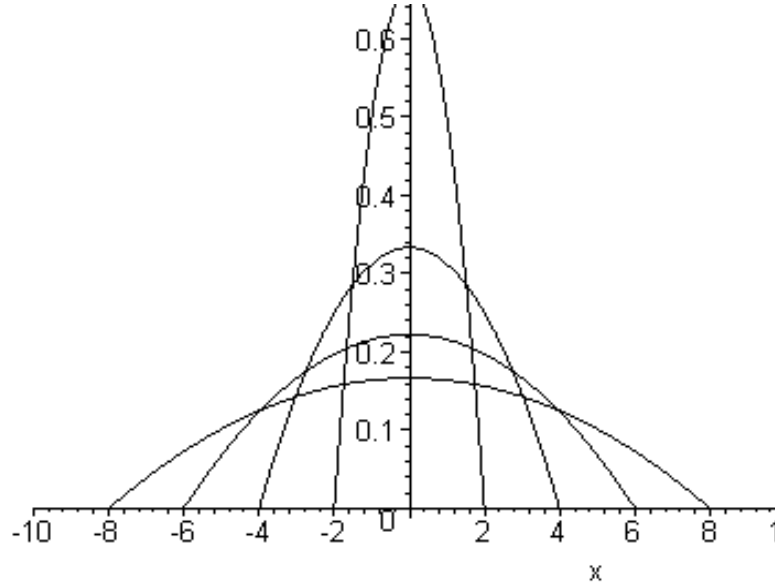
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx &= \int_{-A t^{\frac{1}{3}}}^{A t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{6} t^{-\frac{1}{3}} \left(A^2 - \left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}} \right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{6} t^{-\frac{1}{3}} \int_{-A t^{\frac{1}{3}}}^{A t^{\frac{1}{3}}} \left(A^2 - \left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}} \right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{6} t^{-\frac{1}{3}} \left[A^2 x - \frac{1}{3 t^{\frac{2}{3}}} x^3 \right]_{-A t^{\frac{1}{3}}}^{A t^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{6} t^{-\frac{1}{3}} \left[2 A^3 t^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} A^3 t^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= \frac{2}{9} A^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

alors $A = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$.

En conséquence , la solution finale de l'équation du milieu-poreux est donnée par:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{6}t^{-\frac{1}{3}} \left(\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}}\right)^2 \right) & \text{si } |x| < \sqrt[3]{\frac{9}{2}}t^{\frac{1}{3}} \\ 0 & \text{si } |x| > \sqrt[3]{\frac{9}{2}}t^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

La solution est tracée contre x pendant plusieurs fois.



1.4.2 La solution auto-similaire de type 2

Dans ce cas, il est plus commun pour placer le temps finale à un certain $T > 0$ et penser aux solutions définies pour $0 < t < T$. Le format standard de la solution auto-similaire de type 1 est alors

$$u(x, t) = (T - t)^\alpha \varphi(\xi) \quad \text{avec } \xi = x(T - t)^{-\beta}$$

avec la même relation entre α et β en tant qu'avant.

Donc on cherche une solution auto-similaire de l'équation (1.2) de la forme précédent

:

On a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha (T - t)^{\alpha-1} \varphi(\xi) + \beta \xi (T - t)^{\alpha-1} \varphi'(\xi)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (T - t)^{\alpha - \beta} \varphi'(\xi)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (T - t)^{\alpha - 2\beta} \varphi''(\xi)$$

Si l'équation (1.2) est écrite

$$-\alpha (T - t)^{\alpha - 1} \varphi(\xi) + \beta \xi (T - t)^{\alpha - 1} \varphi'(\xi) = (T - t)^{2\alpha - 2\beta} \left[(\varphi'(\xi))^2 + \varphi(\xi) \varphi''(\xi) \right]$$

Simplifions cette équation par $(T - t)^{\alpha - 1}$, l'équation devient :

$$-\alpha \varphi(\xi) + \beta \xi \varphi'(\xi) = (T - t)^{\alpha - 2\beta + 1} \left[(\varphi'(\xi))^2 + \varphi(\xi) \varphi''(\xi) \right] \quad (1.14)$$

Dérivons l'équation (1.14) par rapport à t , on obtient

$$-(\alpha - 2\beta + 1) (T - t)^{\alpha - 2\beta} \left[(\varphi'(\xi))^2 + \varphi(\xi) \varphi''(\xi) \right] = 0$$

Cette équation est identiquement nulle, si $\alpha - 2\beta + 1 = 0$.

la condition (1.7) devient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (T - t)^\alpha \varphi \left(x (T - t)^{-\beta} \right) dx \\ &= (T - t)^{\alpha + \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dx \\ &= (T - t)^{\alpha + \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

avec le changement de variable : $y = x (T - t)^{-\beta}$.

Cette condition peut se tenir pour tous $0 < t < T$ si $\alpha + \beta = 0$, c-à-d $\alpha = -\beta$.

donc les paramètres α et β donnée par:

$$\alpha = \frac{-1}{3}, \beta = \frac{1}{3}$$

c'est le même que dans le type 1.

L'équation pour le profil $\varphi = \varphi(\xi)$ est:

$$\varphi(\xi) + \xi\varphi'(\xi) = 3 \left[(\varphi'(\xi))^2 + \varphi(\xi)\varphi''(\xi) \right] \Rightarrow 3(\varphi(\xi)\varphi'(\xi))' - (\xi\varphi(\xi))' = 0$$

on intègre

$$3(\varphi(\xi)\varphi'(\xi)) - \xi\varphi(\xi) = c$$

on pose $\varphi'(0) = 0$ à ce que mène $c = 0$.

Donc

$$3\varphi'(\xi) - \xi = 0 \Rightarrow \varphi(\xi) = \frac{1}{6}\xi^2 + C_1.$$

Si nous écrivons cette solution sous la forme

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{6}(\xi^2 - A^2) \text{ avec } C_1 = \frac{-1}{6}A^2.$$

On est de même pour la solution auto-similaire de type 1 on obtient:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{6}(\xi^2 - A^2) & \text{si } \xi^2 < A^2 \\ 0 & \text{si } \xi^2 > A^2 \end{cases}$$

Et donc la solution de l'équation du milieu-poreux donné par:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(T-t)^{-\frac{1}{3}} \left(\left(\frac{x}{\sqrt[3]{T-t}} \right)^2 - \left(\frac{9}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right) & \text{si } |x| < \sqrt[3]{\frac{9}{2}}(T-t)^{\frac{1}{3}} \\ 0 & \text{si } |x| > \sqrt[3]{\frac{9}{2}}(T-t)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Cette solution application à la classe de solution qui explose en temps finis.

1.4.3 La solution auto-similaire de type 3

On cherche une solution auto-similaire de la forme générale de l'équation (1.2) :

$$u(x, t) = c(t)\varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right)$$

En effet : le changement de variable $\xi = \frac{x}{a(t)}$.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c'(t)\varphi(\xi) - c(t)\frac{a'(t)}{a(t)}\xi\varphi'(\xi)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c(t)}{a(t)}\varphi'(\xi)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c(t)}{a^2(t)}\varphi''(\xi)$$

l'équation (1.2) devient :

$$c'(t)\varphi(\xi) - c(t)\frac{a'(t)}{a(t)}\xi\varphi'(\xi) = \frac{c^2(t)}{a^2(t)}\left[\varphi''(\xi)\varphi(\xi) + (\varphi'(\xi))^2\right] \quad (1.15)$$

On a un système d'équations à variable séparée

$$\begin{cases} c'(t) = \frac{c^2(t)}{a^2(t)} \\ -c(t)\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{c^2(t)}{a^2(t)} \end{cases} \quad (1.16)$$

alors la base-profile φ doit être vérifiée l'EDO suivante:

$$\varphi(\xi) + \xi\varphi'(\xi) = \left[\varphi''(\xi)\varphi(\xi) + (\varphi'(\xi))^2\right] \quad (1.17)$$

l'équation (1.17) peut être écrite sous forme:

$$(\xi\varphi(\xi))' - (\varphi'(\xi)\varphi(\xi))' = 0$$

On intègre

$$[\varphi(\xi) (\xi - \varphi'(\xi))] = k$$

pour $k = 0$ on a :

$$\varphi'(\xi) = \xi. \tag{1.18}$$

L'intégration de l'équation (1.18) on trouve

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + k'.$$

avec k' est constant.

On peut résoudre le système (1.16) suivant : d'après (1.16) on a :

$$c'(t) = -c(t)\frac{a'(t)}{a(t)} \Rightarrow \frac{c'(t)}{c(t)} = -\frac{a'(t)}{a(t)}$$

On intègre

$$c(t) = \frac{k_0}{a(t)} \tag{1.19}$$

On remplace (1.19) dans (1.16), on déduit finalement:

$$\begin{aligned} a(t) &= [3(-k_0t + k_1)]^{\frac{1}{3}} \\ c(t) &= k_0 [3(-k_0t + k_1)]^{\frac{-1}{3}} \end{aligned}$$

Donc la solution auto-similaire de l'équation du milieu-poreux est :

$$u(x, t) = k_0 [3(-k_0 t + k_1)]^{-\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{[3(-k_0 t + k_1)]^{\frac{1}{3}}} \right)^2 + k' \right]$$

avec k_0, k_1, k' sont des constants.

Chapitre 2

Introduction aux méthode de discretisation des EDOs et résolution de système non linéaire

Introduction:

Dans ce chapitre, on étudie la méthode des différences finies non linéaires. Dans cette méthode, chaque dérivée est approchée par une expression discrétisée. L'équation différentielle ordinaire est ainsi remplacée par une expression discrète appelée schéma numérique, par conséquent, nous devons maintenant résoudre un système non linéaire pour approcher la solution de ce système, nous employons la méthode de Newton pour résoudre le système des équations non linéaires.

2.1 Résolution du système des équations non linéaires

Les phénomènes non linéaires sont extrêmement courants en pratique. Ils sont sans doute plus fréquents que les phénomènes linéaires. Dans cette section, nous examinons les systèmes non linéaires et nous montrons comment les résoudre à l'aide d'une suite de problèmes linéaires aux quels on peut appliquer diverses techniques de résolution comme

la décomposition LU .

Le problème consiste à trouver le vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^t$ vérifiant les n équations non linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

où les f_i sont des fonctions de n variables que nous supposons différentiables.

Contrairement aux systèmes linéaires, il n'ya pas de condition simple associée aux systèmes non linéaires qui permette d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Le plus souvent, il existe plusieurs solutions possibles et seul le contexte indique laquelle est la bonne.

Les méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont nombreuses. Notamment, méthode de la bisection, méthode de Newton et méthode des points fixes sont méthodes résolution d'équations non linéaires presque toutes méthodes peuvent être généralisées aux systèmes non linéaires. Pour éviter de sur charger notre exposé, nous ne présentons que la méthode la plus importante et la plus utilisée en pratique, soit la *méthode de Newton*.

2.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton pour rapprocher la solution p aux équations non linéaires simples

$$f(x) = 0$$

où $f : R \rightarrow R$ une fonction donnée.

exige une première approximation $p^{(0)}$ à p et produit d'un ordre défini par

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - \frac{f(p^{(k)})}{f'(p^{(k)})}, \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

pour modifier la méthode de Newton pour trouver la solution p de vecteur à l'équation de vecteur :

$$F(x) = 0$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

nous devons d'abord déterminer un premier vecteur d'approximation $p^{(0)}$. nous devons alors décider comment modifier la méthode du Newton variable simple selon une méthode de fonction de vecteur qui aura les mêmes propriétés de convergence mais ne pas exiger la division , puisque cette opération est non définie pour des vecteurs .Nous devons également remplacer le dérivé de f dans la version variable simple de la méthode de Newton par quelque

chose qui est appropriée pour la fonction de vecteur F .

La dérivé de la fonction variable simple f décrit comment les valeurs de à changements relatifs de changement de fonction de la variable indépendante.

La fonction de vecteur F a les différentes n variables x_1, x_2, \dots, x_n , et n différentes fonctions composantes , f_1, f_2, \dots, f_n , qui peut changer en tant que n'importe quel du changement de variables. La modification dérivée appropriée de la méthode du Newton variable simple à la forme de vecteur doit impliquer tous ces changements possibles de n^2 , et la manière normale de représenter n^2 est par une matrice de $n * n$.Chaque changement d'une fonction composante f_i en ce qui concerne le changement du f_i variable est décrit par le dérivé partiel

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

et la matrice de $n * n$ qui remplace le dérivé qui se produit dans le cas variable simple est :

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

La matrice $J(x)$ s'appelle la matrice de *Jacobienne* .

La méthode de Newton pour des systèmes remplace le dérivé dans le cas variable simple par la matrice de Jacobienne de $n * n$ dans la situation de vecteur et substitue se multiplier par le réciproque du dérivé avec se multiplier par l'inverse de la matrice de Jacobienne . Par conséquent, la méthode de Newton pour trouver la solution p au système des équations non linéaires représentées par l'équation de vecteur $F(x) = 0$ a la forme :

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - [J(p^{(k)})]^{-1} F(p^{(k)}), \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

donné l'approximation initiale $p^{(0)}$ à la solution p . Une faiblesse en méthode de Newton pour le système résulte de la nécessité d'inverser la matrice $J(p^{(k-1)})$ à chaque itération .

Dans la pratique, calcul explicite de l'inverse de $J(p^{(k-1)})$ est évité en effectuant l'opération d'une façon en deux étapes. D'abord, on trouve un vecteur $y^{(k)}$ qui satisfera

$$J(p^{(k)})y^{(k)} = -F(p^{(k)}). \tag{2.1}$$

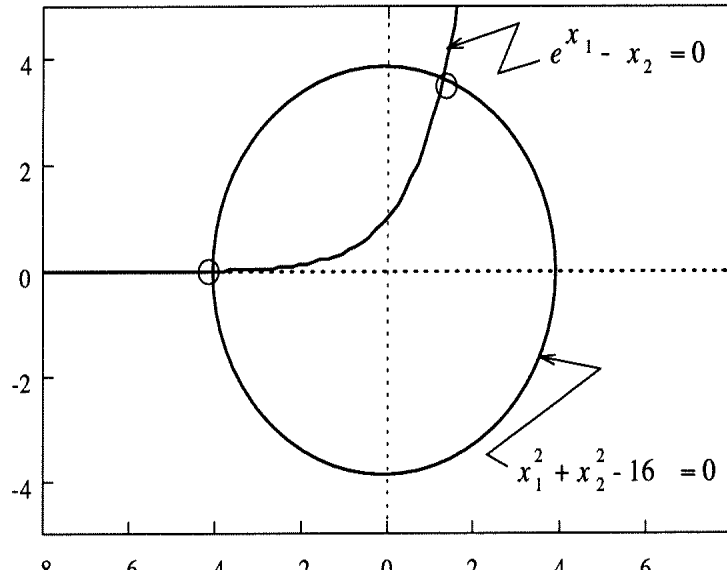
Après que ceci ait été accompli, la nouvelle approximation $p^{(k+1)}$, est obtenue en ajoutant le $y^{(k)}$ au $p^{(k)}$.

L'exécution générale de la méthode de Newton pour des systèmes des équations non linéaires peut être effectuée utilisation le programme de newton appliquée aux systèmes.

Exemple :

On cherche à trouver l'intersection de la courbe $x_2 = e^{x_1}$ et du cercle de rayon 4 centré à l'origine d'équation $x_1^2 + x_2^2 = 16$. L'intersection de ces courbes est une solution de :

$$\begin{cases} e^{x_1} - x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 16 = 0 \end{cases}$$



Intersection de deux courbes

La première étape consiste à calculer la matrice *jacobienne* de dimension 2 .

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

Un graphique de ces deux courbes montre qu'il y a deux solutions à ce problème non linéaire (voir la figure 2.1). La première solution se trouve près du point $(-4, 0)$ et la deuxième , près de $(2.8, 2.8)$. Prenons le point $(2.8, 2.8)$ comme approximation initiale de la solution de ce système non linéaire , c'est-à-dire $p^{(0)} = (2.8, 2.8)^t$.

1. Itération 1 :

Le système devient :

$$\begin{bmatrix} e^{2.8} & -1 \\ 2(2.8) & 2(2.8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e^{2.8} - 2.8 \\ (2.8)^2 + (2.8)^2 - 16 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 16.445 & -1 \\ 5.6 & 5.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 13.645 \\ -0.3200 \end{bmatrix}$$

dont la solution est $y^{(0)} = (-0.77890, 0.83604)^t$. La nouvelle approximation de la solution est donc :

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= p_1^{(0)} + y_1^{(0)} \\ &= 2.8 - 0.77890 \\ &= 2.0211 \\ p_2^{(1)} &= p_2^{(0)} + y_2^{(0)} \\ &= 2.8 + 0.83604 \\ &= 3.63604 \end{aligned}$$

2. Itération 2 :

On effectue une deuxième itération à partir de $(p_1^{(1)}, p_2^{(1)})$. Le système devient alors :

$$\begin{bmatrix} e^{2.0211} & -1 \\ 2(2.0211) & 2(3.63604) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e^{2.0211} - 3.63604 \\ (2.0211)^2 + (3.63604)^2 - 16 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 7.5466 & -1 \\ 4.0422 & 7.2721 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3.9106 \\ 1.3056 \end{bmatrix}$$

dont la solution est $y^{(1)} = (-0.5043, 0.10106)^t$. On a maintenant :

$$\begin{aligned} p_1^{(2)} &= p_1^{(1)} + y_1^{(1)} \\ &= 2.0211 - 0.50480 \\ &= 1.5163 \\ p_2^{(1)} &= p_2^{(1)} + y_2^{(1)} \\ &= 3.63604 + 0.10106 \\ &= 3.7371 \end{aligned}$$

3. Itération 3 :

À la troisième itération, on doit résoudre :

$$\begin{bmatrix} 4.5554 & -1 \\ 3.0326 & 7.4742 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.81824 \\ 0.26508 \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne que $y^{(2)} = (-0.17208, 0.034355)^t$. La nouvelle solution est :

$$\begin{aligned} p_1^{(3)} &= p_1^{(2)} + y_1^{(2)} \\ &= 1.563 - 0.17208 \\ &= 1.3442 \\ p_2^{(3)} &= p_2^{(2)} + y_2^{(2)} \\ &= 3.7371 + 0.034355 \\ &= 3.7715 \end{aligned}$$

4. Itération 4 :

Le système linéaire à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 3.8351 & -1 \\ 3.0326 & 7.5430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.81824 \\ 0.26508 \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne que $y^{(3)} = (-0.01616, 0.01638)^t$. La nouvelle approximation de la solution est :

$$\begin{aligned} p_1^{(4)} &= p_1^{(3)} + y_1^{(3)} \\ &= 1.3442 - 0.01616 \\ &= 1.3280 \\ p_2^{(4)} &= p_2^{(3)} + y_2^{(3)} \\ &= 3.7715 + 0.01638 \\ &= 3.7731 \end{aligned}$$

5. Itération 5 :

Enfin ,à partir de $(1.3280, 3.7731)^t$ on doit résoudre :

$$\begin{bmatrix} 3.7735 & -1 \\ 2.6560 & 7.5463 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.34886 * 10^{-3} \\ 0.16946 * 10^{-3} \end{bmatrix}$$

dont la solution est $y^{(3)} = (9.03 * 10^{-5}, 9.25 * 10^{-6})^t$. La solution du système non linéaire devient :

$$\begin{aligned}
p_1^{(5)} &= p_1^{(4)} + y_1^{(4)} \\
&= 1.3281 \\
p_2^{(5)} &= p_2^{(4)} + y_2^{(4)} \\
&= 3.7731
\end{aligned}$$

On déduit la convergence de l'algorithme de Newton du fait que les modules de y et de F diminuent avec les itérations.

Remarque :

1. La convergence de la méthode de Newton dépend de l'approximation initiale $p^{(0)}$ de la solution. Un mauvais choix de $p^{(0)}$ peut résulter en un algorithme divergent .

2.3 Méthodes des différences finies non linéaires

Dans cette section, nous nous intéressons uniquement aux équations différentielles ordinaires avec conditions aux limites. Il s'agit de *la méthode des différences finies*, qui constitue la principale application des techniques de différentiation numérique que nous avons vues.

2.3.1 Principe de la méthode des différence finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer approximativement

chaque dérivée contenue dans l'équation différentielle du problème

aux limites par le rapport des différences. Pour accomplir ceci on divise

l'intervalle $[a, b]$ en $n + 1$ intervalles de longueur $h = \frac{(b-a)}{n+1}$ et dont les extrémités sont données par $x_i = a + ih ; i = 0, 1, \dots, n + 1$:

Cette méthode se divise donc en deux étapes:

1. Étape de discrétisation:

. Diviser l'intervalle en sous intervalles de longueur $h = \frac{(b-a)}{n+1}$.

.Dérivées approchées par des formules de différence.

2. Résolution du système discrétisé :

.Systèmes linéaires pour des équations différentielles linéaires et systèmes non linéaires pour des équations différentielles non linéaires.

. Propriétés mathématiques des matrices obtenues par discrétisation (matrices tridiagonales, ou symétriques, ou définies positives).

2.3.2 Application à l'équation différentielle ordinaire non linéaire du 2^{ème} ordre

On considère l'équation différentielle non linéaire avec conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\varphi'' &= f(x, \varphi, \varphi') \quad \text{pour } a \leq x \leq b \\ \varphi(a) &= \alpha \quad \text{et} \quad \varphi(b) = \beta\end{aligned}\tag{2.2}$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\varphi'' - f(x, \varphi, \varphi') &= 0 \quad \text{pour } a \leq x \leq b \\ \varphi(a) &= \alpha \quad \text{et} \quad \varphi(b) = \beta\end{aligned}$$

pour quelques constantes α et β est semblable à la méthode appliquée au problème linéaire. Ici, cependant, le système des équations ne sera pas linéaire, ainsi un processus itératif est exigé pour le résoudre.

L'objectif est toujours de trouver une approximation φ_i de $\varphi(x_i)$ en certains points x_i de l'intervalle $[a, b]$. On divise d'abord cet intervalle en $n + 1$ sous-intervalles de longueur $h = (b - a)/(n + 1)$ et on note $x_0 = a, x_i = a + ih$ et enfin $x_{n+1} = b$. Les conditions aux

limites imposent immédiatement que $\varphi_0 = \varphi_a = \alpha$ et que $\varphi_{n+1} = \varphi_b = \beta$. Il reste donc à déterminer les n inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Pour ce faire, on construit un système non linéaire de dimension n . La stratégie de résolution consiste à remplacer dans l'équation différentielle toutes les dérivées de la fonction $\varphi(x)$ par des formules aux différences finies, et ce en chaque point x_i pour i allant de 1 à n . Plus précisément, au point x_i , l'équation différentielle (2.2) s'écrit :

$$\varphi''(x_i) - f(x_i, \varphi(x_i), \varphi'(x_i)) = 0 \quad (2.3)$$

Supposons $\varphi \in C^4[a; b]$; alors d'après la formule de *Taylor*

il existe $x < \xi_i < x_i$, telle que

$$\varphi(x) = \varphi(x_i) + (x - x_i)\varphi'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{(x - x_i)^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \frac{(x - x_i)^4}{4!}\varphi^{(4)}(\xi_i)$$

Evaluons $\varphi(x)$ aux points x_{i-1} et x_i , nous obtenons:

$$\varphi(x_{i-1}) = \varphi(x_i) - h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_i) - \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\varphi^{(4)}(\xi_i^-), \quad \xi_i^- \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\varphi^{(4)}(\xi_i^+), \quad \xi_i^+ \in [x_i, x_{i+1}]$$

Ajoutons membre à membre ces deux équations, nous obtenons:

$$\varphi(x_{i-1}) + \varphi(x_{i+1}) = 2\varphi(x_i) + h^2\varphi''(x_i) + \frac{h^4}{4!}(\varphi^{(4)}(\xi_i^-) + \varphi^{(4)}(\xi_i^+)),$$

$$\varphi''(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^4}{4!}(\varphi^{(4)}(\xi_i^-) + \varphi^{(4)}(\xi_i^+)) \quad (2.4)$$

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $\xi_i \in]x_{i-1}; x_{i+1}[$
telle que:

$$\frac{\varphi^{(4)}(\xi_i^-) + \varphi^{(4)}(\xi_i^+)}{2} = \varphi^{(4)}(\xi_i)$$

de la même manière on trouve

$$\varphi'(x_i) = \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} \varphi'''(\eta_i) \quad (2.5)$$

En remplaçant (2.4), et (2.5) dans l'équation (2.3), nous obtenons:

$$\frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{h^2} = f(x_i, \varphi(x_i), \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i-1}))}{2h}) - \frac{h^2}{6} \varphi'''(\eta_i) + \frac{h^2}{12} \varphi^{(4)}(\xi_i)$$

pour ξ_i et η_i dans l'intervalle $]x_{i-1}, x_{i+1}[$.

En négligeant les termes $\frac{h^4}{4!} \varphi^{(4)}(\xi_i^+)$ et $\frac{h^2}{6} \varphi'''(\eta_i)$ et en posant $\omega_i = \varphi(x_i)$,
nous obtenons pour $i = 1, 2, \dots, n$.

$$-\omega_{i+1} + 2\omega_i - \omega_{i-1} + h^2 f(x_i, \omega_i, \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}) = 0 \quad (2.6)$$

et $\omega_0 = \alpha, \omega_{n+1} = \beta$.

On a donc n équations avec n inconnues $:\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

On est ainsi amené à résoudre le système non linéaire :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} 2\omega_1 - \omega_2 + h^2 f(x_1, \omega_1, \frac{\omega_1 - \alpha}{2h}) - \alpha = 0 \\ -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 + h^2 f(x_2, \omega_2, \frac{\omega_3 - \omega_1}{2h}) = 0 \\ \vdots \\ -\omega_{n-2} + 2\omega_{n-1} - \omega_n + h^2 f(x_{n-1}, \omega_{n-1}, \frac{\omega_n - \omega_{n-2}}{2h}) = 0 \\ -\omega_{n-1} + 2\omega_n + h^2 f(x_n, \omega_n, \frac{\beta - \omega_{n-1}}{2h}) - \beta = 0 \end{array} \right.$$

pour approcher la solution de ce système, nous employons la méthode de New-

ton pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires .On produit d'un ordre de réitère le $\{(\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \dots, \omega_n^{(k)})^t\}$ qui converge à la solution du système, à condition que l'approximation initiale $(\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \dots, \omega_n^{(0)})^t$ est suffisamment près de la solution vraie $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^t$.

La méthode de Newton pour les systèmes non linéaires exige à résoudre, à chaque itération, un système linéaire de $n * n$ impliquant la matrice de Jacobienne . Dans notre cas, la matrice jacobienne est tridiagonal, et la factorisation de crout peut être appliquée. L'approximation initiale $\omega_i^{(0)}$ aux ω_i pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, sont obtenues en passant une ligne droite à travers (a, α) et (b, β) et évaluation à x_i .

Puisqu'une bonne approximation initiale peut être exigée, une limite supérieure pour k devrait être spécifiée et, si dépassé, une nouvelle approximation initiale ou une réduction de taille d'étape être considérée.

Chapitre 3

Résolution numérique de l'équation du milieu-poreux

Introduction:

Dans ce chapitre ,on s'est intéressé à l'étude numérique concernant l'équation différentielle ordinaire résulte de l'équation du milieu-poreux après l'insertion de la solution auto-similaire de type (1) dans le première chapitre.

La discretisation d' équation différentielle ordinaire présentée dans deuxième chapitre traduisant de transformer ces equation differentielle ordinaire non linéaire en un système d'equations algebriques non linéaires.et on va chercher la solution approchée du système par la méthode de Newton.

Le but est de tester le programme alors qu'on voit bien la correspondance total entre les deux solutions

3.1 Position du problème

Soit le problème de Dirichlet (I) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, x \in R ; t \succ 0 \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.2)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (3.3)$$

et

$$\int_R u(x, t) dx = 1, \quad \text{pour } t > 0. \quad (3.4)$$

nous allons chercher la solution auto-similaire sous la forme $u(x, t) = t^\alpha \varphi(\xi)$, $\xi = xt^{-\beta}$ d'après le chapitre 1.

ce qui réduit le problème à la recherche d'une solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$3(\varphi(\xi)\varphi''(\xi) + (\varphi'(\xi))^2) + (\varphi(\xi) + \xi\varphi'(\xi)) = 0$$

Discussion de condition suivant :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{3}} \varphi\left(xt^{-\frac{1}{3}}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \varphi(\xi) = 0$$

qui est une équation différentielle ordinaire non linéaire du deuxième ordre qu'on va résoudre par la méthode de différences finies.

3.2 Résolution numérique de l'équation différentielle ordinaire

On considère l'équation différentielle non linéaire avec conditions aux limites :

$$(I_1) \begin{cases} \varphi''(\xi) = \frac{-3\varphi'^2(\xi) - \varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi)}{3\varphi(\xi)} & \text{pour } -A \leq \xi \leq A \\ \varphi(-A) = \varphi(A) = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\varphi''(\xi_i) = \frac{-3\varphi'^2(\xi_i) - \varphi(\xi_i) - \xi_i\varphi'(\xi_i)}{3\varphi(\xi_i)}$$

La méthode de différences finies est donnée par le schéma numérique avec $\omega_i = \varphi(x_i)$

:

$$-\omega_{i+1} + 2\omega_i - \omega_{i-1} + h^2 f(\xi_i, \omega_i, \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

avec $f(\xi_i, \omega_i, \omega'_i) = \frac{-3\omega_i'^2 - \omega_i - \xi_i\omega'_i}{3\omega_i}$, et $\omega_0 = \omega_{n+1} = 0$.

Ainsi, on obtient le système d'équations non linéaires suivant dont la résolution donne les valeurs $\varphi(\xi_i)$ de la solution numérique du problème (I_1) pour $t=1$.

$$(S) : \begin{cases} 2\omega_1 - \omega_2 + h^2 f(x_1, \omega_1, \frac{\omega_1 - \alpha}{2h}) - \alpha = 0 \\ -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 + h^2 f(x_2, \omega_2, \frac{\omega_3 - \omega_1}{2h}) = 0 \\ \vdots \\ -\omega_{n-2} + 2\omega_{n-1} - \omega_n + h^2 f(x_{n-1}, \omega_{n-1}, \frac{\omega_N - \omega_{n-2}}{2h}) = 0 \\ -\omega_{n-1} + 2\omega_n + h^2 f(x_n, \omega_n, \frac{\beta - \omega_{n-1}}{2h}) - \beta = 0 \end{cases}$$

Il ne reste alors plus qu'à résoudre ce système d'équations non linéaires par des techniques standard de méthode de Newton.

L'exécution générale de la méthode de Newton pour des systèmes des équations non linéaires peut être effectuée utilisation le programme suivant :

3.2.1 Le programme résolution systèmes des équations non linéaires

Le programme suivant peut être employé pour utiliser la méthode des différences finies non linéaire.

```

function[x, ω, q]=sysnlin(u, A)
%Univ de msila
%Département de Mathématiques
%la méthode différence-finie pour résoudre
%résolution un système non linéaires
% défine a, b, α, β, N, h, et ω
A = (9/2)^(1/3)
a = -A ; b = A; alpha = 0 ; beta = 0 ; N = 10 ; h = (b - a)/N + 1;
%Nous définissons xi et l'approximation initiale ωi
for i = 1 : N
ω(i) = alpha + i * (beta - alpha)/(b - a) * h
x(i) = a + i * h
end
%Les fonctions f(x, y, y'), fy(x, y, y'), fy'(x, y, y') sont définis par
for k = 1 : q
y = w(1)
f = (-3 * yp.^2 - y - t * yp)/(3 * y);
fy = (3 * yp.^2 + t * yp)/(3 * y.^2);
fyp = (-6 * yp - t)/(3 * y);
% entrées les coefficients différentes de zéro de la matrice A et u sont l'équations du
système non linéaire sont produits comme suit :
A(1, 1) = 2 + h.^2 * fy;

```

```

A(1, 2) = -1 + h * fyp/2;
u(1) = -(2 * ω(1) - ω(2) - alpha + h.^2 * f);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i = 2 : N - 1
t = x(i);
y = ω(i);
yp = (ω(i + 1) - ω(i - 1))/(2 * h);
fy = (3 * yp.^2 + t * yp)/(3 * y.^2);
fyp = (-6 * yp - t)/(3 * y);
A(i, i - 1) = -1 - h * fyp/2;
A(i, i + 1) = -1 + h * fyp/2;
A(i, i) = 2 + h.^2 * fy;
f = (-3 * yp.^2 - y - t * yp)/(3 * y);
u(i) = -(-ω(i - 1) + 2 * ω(i) - ω(i + 1) + h.^2 * f);
end;
t = x(N);
y = ω(N);
yp = (beta - ω(N - 1))/(2 * h);
fy = (3 * yp.^2 + t * yp)/(3 * y.^2);
fyp = (-6 * yp - t)/(3 * y);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A(N, N - 1) = -1 - h * fyp/2;
A(N, N) = 2 + h.^2 * fy;
f = (-3 * yp.^2 - y - t * yp)/(3 * y);
u(N) = -(-ω(N - 1) + 2 * ω(N) - beta + h.^2 * f);
%résolution un système linéaire
q = inv(A) * u'
w = w + q'

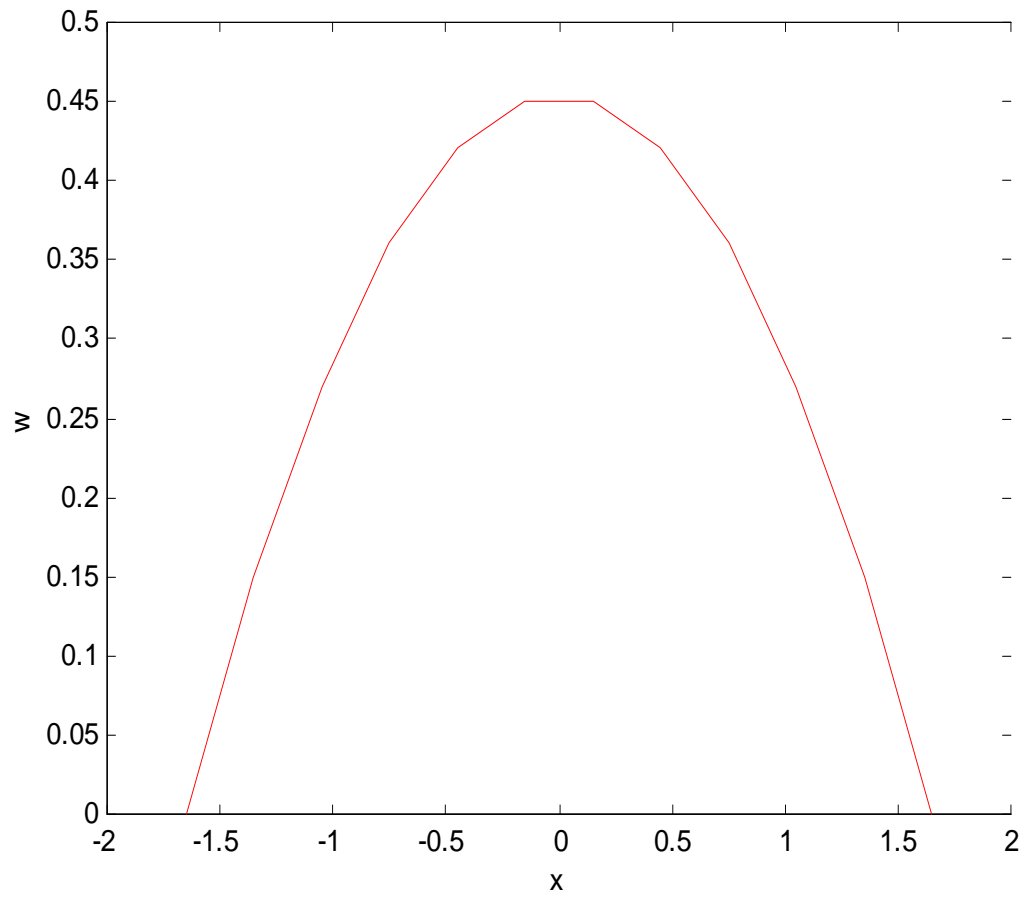
```

end
plot(x, ω)
gridon
*xlabel(t*x*t)*
*ylabel(t*w*t)*

Résultats numériques :

Les résultats sont résumés dans le tableau (1) suivant :

i	x_i	ω_i
0	-1.6510	0
1	-1.3508	0.1502
2	-1.0506	0.2703
3	-0.7505	0.3604
4	-0.4503	0.4205
5	-0.1501	0.4505
6	0.1501	0.4505
7	0.4503	0.4205
8	0.7505	0.3604
9	1.0506	0.2703
10	1.3508	0.1502
11	1.6510	0

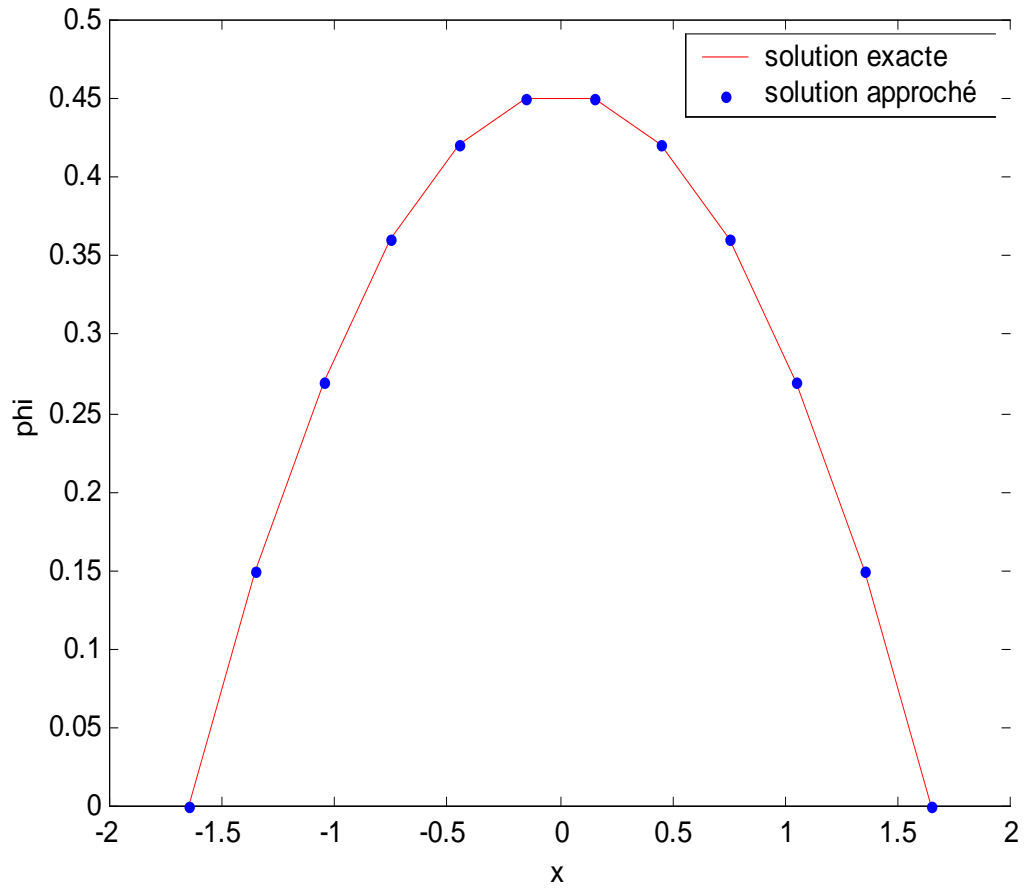


La solution approche dans le cas $t=1$.

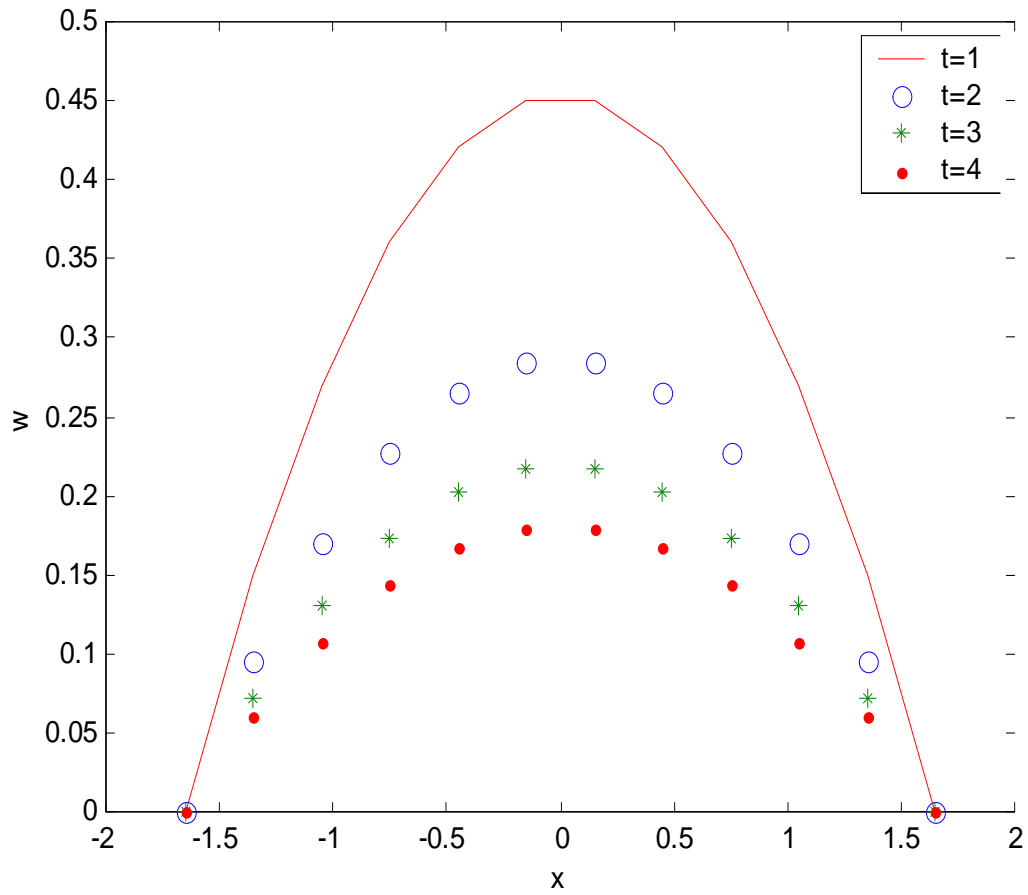
3.3 Comparaisons de la solution analytique avec la solution numérique

Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique sont résumées dans le tableau (2) pour $t=1$ suivant :

i	x_i	solution analytique $\varphi(x_i)$	solution numérique ω_i	L'erreur $ \omega_i - \varphi $
0	-1.6510	0	0	0
1	-1.3508	0.1502	0.1502	0
2	-1.0506	0.2703	0.2703	0
3	-0.7505	0.3604	0.3604	0
4	-0.4503	0.4205	0.4205	0
5	-0.1501	0.4505	0.4505	0
6	0.1501	0.4505	0.4505	0
7	0.4503	0.4205	0.4205	0
8	0.7505	0.3604	0.3604	0
9	1.0506	0.2703	0.2703	0
10	1.3508	0.1502	0.1502	0
11	1.6510	0	0	0



Comparaison de la solution approche avec la solution analytique cas $t=1$



Comparaison par $t=1, t=2, t=3, t=4$.

3.4 Etude de quelques probleme aux limites

3.4.1 Etude du problème de Dirichlet

Soit le problème (P) :

$$(P) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, & -4 \leq x \leq +4, t > 0 \\ u(-4, t) = u(+4, t) = 6 \end{cases}$$

Alors le problème (P) se réduit à la forme suivante d'après la solution auto-similaire de type 1 pour $t = 1$ dans le premier chapitre, on obtient :

$$(P_1) \begin{cases} \varphi'' = \frac{-3\varphi'^2 - \varphi - x\varphi'}{3\varphi} \\ \varphi(-4) = \varphi(4) = 6 \end{cases}$$

qui est une équation différentielle ordinaire non linéaire du deuxième ordre qu'on va résoudre par la méthode des différences finies pour rapprocher la solution et pour comparer les résultats à la solution analytique.

Le problème (P₁) à la solution analytique est $\varphi(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 + \frac{26}{3}$.

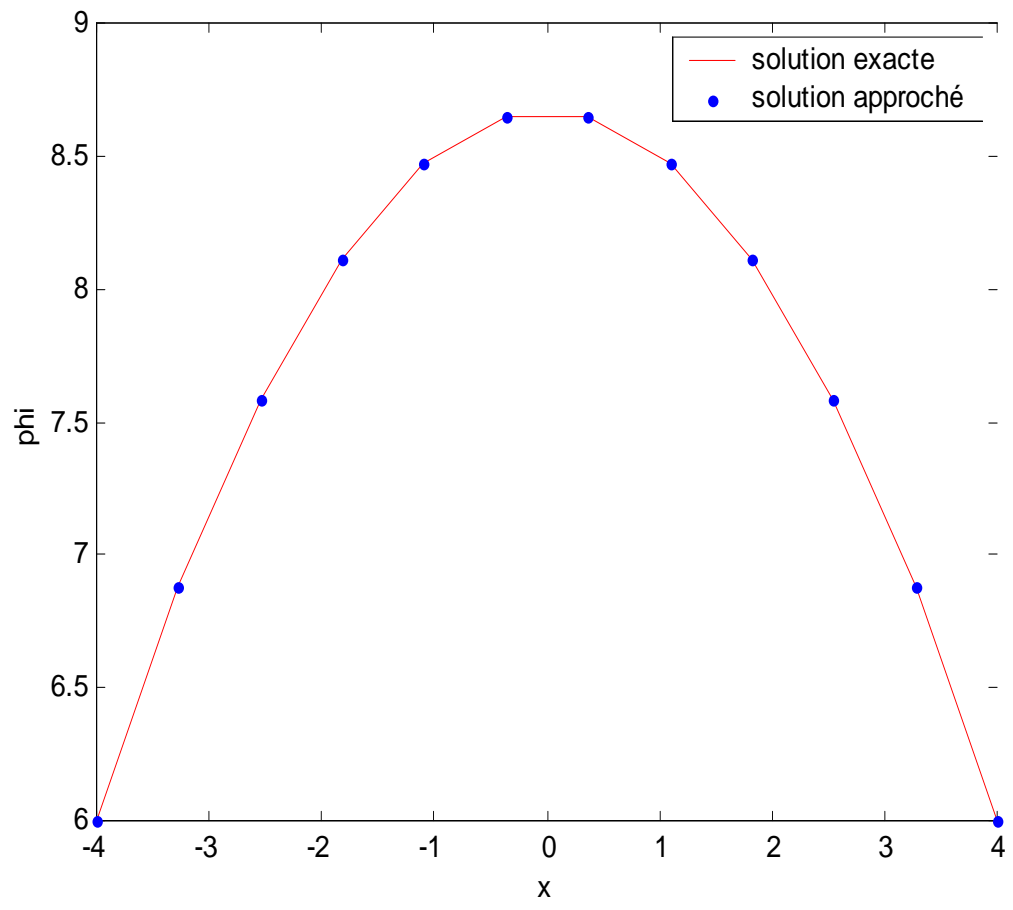
On applique le programme précédent pour résoudre le système des équations non linéaires avec $\alpha = \beta = 6$, $a = -4$ et $b = 4$.

Résultat numérique :

On présente les tableaux suivants qui nous donnent une comparaison entre la solution numérique avec la solution analytique aux temps $t=1$ et $t=2$.

tableau 3 :

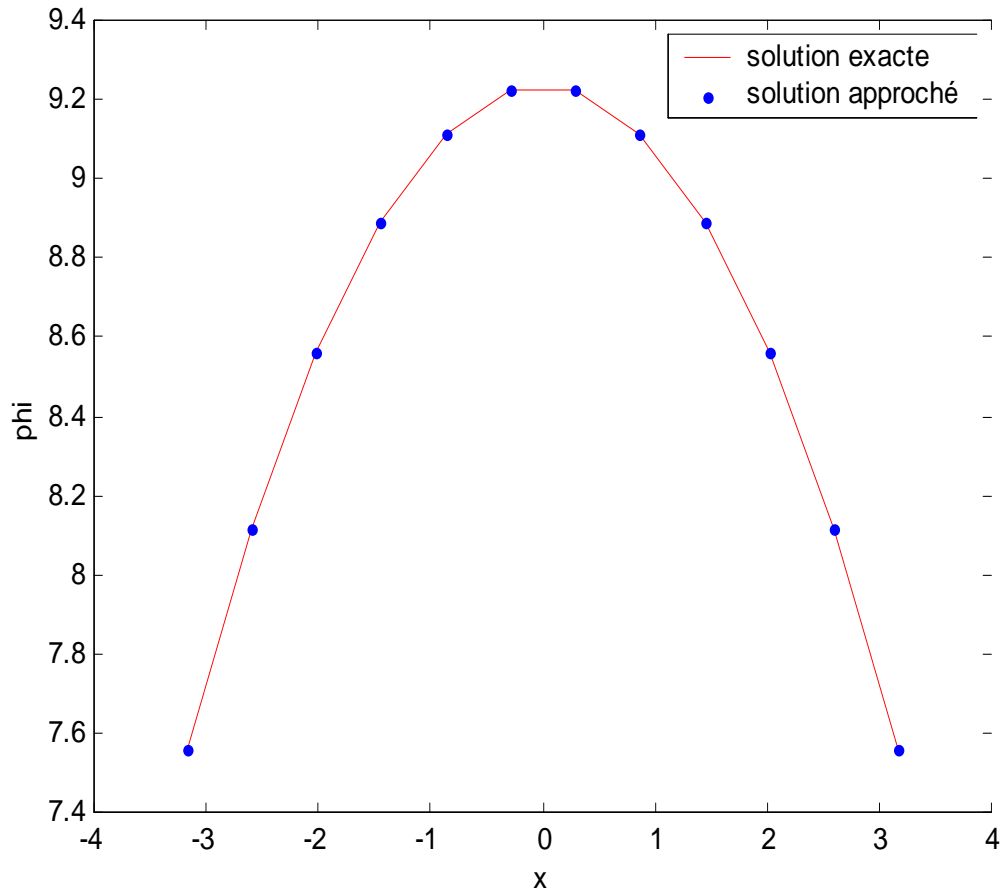
i	x_i	solution exacte (φ)	ω_i	$ \omega_i - \varphi $
0	-4	6	6	0
1	-3.2727	6.8816	6.8815	10^{-4}
2	-2.5455	7.5867	7.5868	10^{-4}
3	-1.8182	8.1157	8.1157	0
4	-1.0909	8.4683	8.4683	0
5	-0.3636	8.6446	8.6446	0
6	0.3636	8.6446	8.6446	0
7	1.0909	8.4683	8.4683	0
8	1.8182	8.1157	8.1157	0
9	2.5455	7.5867	7.5868	10^{-4}
10	3.2727	6.8816	6.8815	10^{-4}
11	4	6	6	0



Comparaison de la solution approche avec la solution analytique cas $t = 1$

tableau 4 :

i	x_i	solution exacte (φ)	ω_i	$ \omega_i - \varphi $
0	-3.1748	7.5595	7.5595	0
1	-2.5976	8.1148	8.1148	0
2	-2.0203	8.5591	8.5591	0
3	-1.4431	8.8923	8.8923	0
4	-0.8659	9.1144	9.1144	0
5	-0.2886	9.2255	9.2255	0
6	0.2886	9.2255	9.2255	0
7	0.8659	9.1144	9.1144	0
8	1.4431	8.8923	8.8923	0
9	2.0203	8.5591	8.5591	0
10	2.5976	8.1148	8.1148	0
11	3.1748	7.5595	7.5595	0



Comparaison de la solution approche avec la solution analytique cas $t = 2$

3.4.2 Etude du problème mixte Dirichlet-Neumann

le problème (I) se réduit à la forme suivante d'après le chapitre 1 (solution auto-similaire de type 1) avec la condition $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi''' = \frac{-3\varphi'^2 - \varphi - x\varphi'}{3\varphi} \text{ pour } 0 \leq x \leq A \\ \varphi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(A) = 0 \end{array} \right.$$

Les modifications du problème discrétisé sont les suivantes:

Tout d'abord, le nombre d'inconnues a changé. Il y a une inconnue au point $x_0 = 0$. En effet, la donnée de $\varphi'(0)$ ne dit rien de la valeur de $\varphi(0)$. C'est donc une nouvelle inconnue du problème.

D'autre part, il faut proposer une formule discrétisée de la condition de Neumann $\varphi'(0) = 0$, on l'a vu, plusieurs choix sont possibles pour approcher une dérivée première. C'est un des écueils des méthodes de différences finies qu'elles ne donnent pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann. Ici, on choisit la forme suivant:

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{2h}$$

– On peut remplacer au point $x = 0$ la dérivée $\varphi'(0)$ par

$$\varphi'(0) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2h} = 0 \Rightarrow \varphi(1) - \varphi(0) = 0.$$

Cette formule est cohérente avec la modélisation d'une condition de symétrie par une condition de Neumann. Pour retrouver la symétrie de la matrice.

Ceci conduit d'ailleurs précisément à la formule que l'on obtiendra par une méthode des différences finies

La méthode des différences finies est donnée par le système des équations non linéaires

:

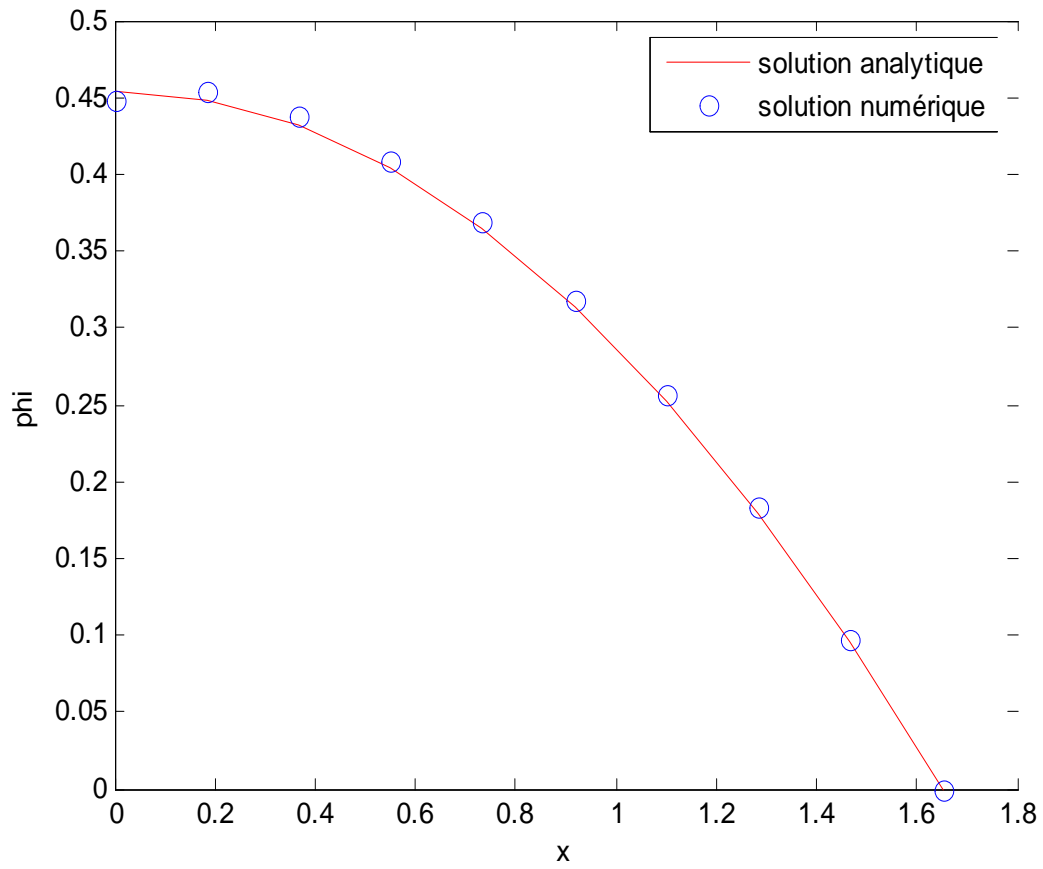
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 - \omega_0 = 0 \\ -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 + h^2 f(x_2, \omega_2, \frac{\omega_3 - \omega_1}{2h}) = 0 \\ \vdots \\ -\omega_{n-2} + 2\omega_{n-1} - \omega_n + h^2 f(x_{n-1}, \omega_{n-1}, \frac{\omega_N - \omega_{n-2}}{2h}) = 0 \\ -\omega_{n-1} + 2\omega_n + h^2 f(x_n, \omega_n, \frac{\omega_{n+1} - \omega_{n-1}}{2h}) = 0 \end{array} \right.$$

On applique le programme précédent pour résoudre le système des équations non

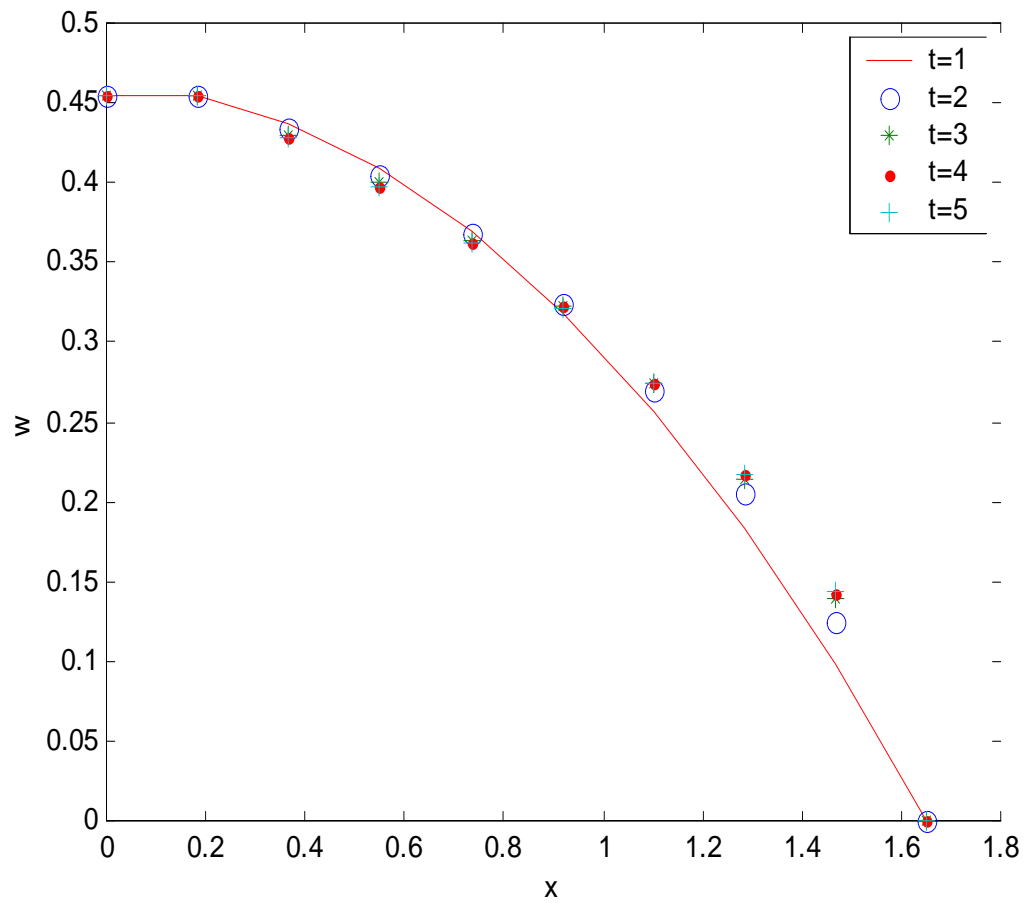
linéaires et on compare ici la solution analytique de le profil φ avec la solution approchée dans le cas $t=1$

Résultat numérique :

i	x_i	$\varphi(x_i)$	ω_i	$ \omega_i - \varphi(x_i) $
0	0	0.4543	0.4543	0
1	0.1834	0.4487	0.4543	$5 * 10^{-3}$
2	0.3669	0.4319	0.4372	$5 * 10^{-3}$
3	0.5503	0.4038	0.4088	$5 * 10^{-3}$
4	0.7338	0.3645	0.3692	$4 * 10^{-3}$
5	0.9172	0.3141	0.3184	$4 * 10^{-3}$
6	1.1007	0.2524	0.2563	$4 * 10^{-3}$
7	1.2841	0.1795	0.1828	$3 * 10^{-3}$
8	1.4676	0.0954	0.0978	$2 * 10^{-3}$
9	1.6510	0	0	0



Comparaison de la solution numérique avec la solution analytique cas $t=1$



Comparaison de la solution numrique avec la solution analytique cas
 $t=1, t=2, t=3, t=4, t=5$

Conclusion

Dans cette étude , nous présentons une méthode plus efficace à l'étude des problèmes non linéaires et plus particulièrement aux l'EDPs.

la recherche de solutions auto-similaire par les types exposées et par d'autres méthodes fait intervenir des équations différentielles ordinaires non linéaires, la résolution de ces équations est en général très difficile puisque elles dépendent des paramètres qu'il faut déterminer avant de pouvoir résoudre ces équations, des conditions supplémentaires sur la solution ou sur la classe de la solution.

La solution auto-similaire est caractérisée par des conditions que l'EDP et la solution doivent vérifier. Le nombre de termes de l'équation joue un rôle dans la détermination des paramètres et par suite la détermination du profil.

Nous avons cherché des solutions de type « auto-similaire » de plusieurs formes pour cette équation.

Les équations différentielles rencontrés sont non linéaires, donc difficile à résoudre. Nous avons résolu ce type d'équation différentielles non linéaires par la méthode des différences finis pour chercher des solutions auto-similaire . une comparaison entre la solution analytique et la solution numérique

Bibliographie

- [1] André Fortin: Analyse numérique pour ingénieurs, deuxième édition, 1996.
- [2] Barenblatt, G. I. (1996) Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics, Cambridge University, Press, Cambridge, UK
- [3] Brezin E, Le Guillou JC, Zinn-Justin J. Complete classification of shape functions of self-similar solutions Phys Rev D, pp. 1540-1544, 1977.
- [4] C.J.Budd¹, G. J. Collins², W.Z.Huang³ and R. D. Russell⁴ : Self-similar numerical solutions of the porous medium equation using moving mesh methods. March 12, 1998.
- [5] Faires and Burden: numerical methods,third edition, June 18, 2002 .
- [6] JUAN LUIS VÁZQUEZ: The Porous Medium Equation Mathematical Theory, Dpto. de Matemáticas, Univ. Auton´oma de Madrid, 28049 Madrid, SPAIN.
- [7] A. Hanache, Etude comparative entre "self-similar" et la méthode des profils mobiles.These Magester Univ de M'sila(2006).
- [8] Meleshko S. V, Methods for construting exact solutions of partial differential equations. Springer, 2000.
- [9] N. Benhamidouche & Y. Arioua, New Method for Constructing Exact Solution to Nonlinear PDEs I. J. N. S. VOL 7(2009) No. 4, pp 395-398.

[10]P.L.Sachdev · Ch. Srinivasa Rao:Large Time Asymptotics for Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Springer Monographs in Mathematics.