Table des matières

0.1 Introduction

La théorie d'élasticité est enseignée comme une extension de la statique, en écrivant une relation d'équilibre entre force $f_1 = f_2$. f_1 est une force provoquée par la déformation de la matière et f_2 une force provoquée par l'exertion de force à la surface de l'objet. Les quantités f_1 et f_2 sont des densités de force locale à un point de la matière $f = f(x)$. Autrement ces forces sont des tenseurs. Pour les obtenir, il faut par la pensée isoler une partie de la matière et faire le bilan de toutes les forces qui s'exercent sur toutes les faces de cette portion. L'étudiant arrivant en M2 découvre le calcul variationnel, une méthode plus féconde sur le plan théorique et plus puissante sur le plan des calculs, et à l'aide de cet outil, redécouvre la mécanique. Toutes les méthodes confuses du calcul des forces de réaction et des intégrales premières que l'on trouve par des "astuces" sont abandonnées au profit d'une méthode rigoureuse et presque automatique. Toute la dynamique se résume à un seul principe, la recherche de l'extremum d'une fonctionnelle. La puissance de la méthode variationnelle se déchaîne quand l'étudiant redécouvre les équations de l'électromagnétisme par l'approche variationnelle. Il devient alors étonnant de constater que l'enseignement de l'élasticité reste dans les limbes et que l'on continue à le prodiguer avec les techniques inefficaces pré-lagrangien. La raison peut être culturelle, la mécanique analytique et la théorie des champs étant des sciences "supérieures" que l'on ne pourrait pas pratiquer sans l'aide des outils élaborés, tandis que l'élasticité est jugé comme une "science de

l'ingénieur" qui ne saurait quoi faire du calcul variationnel. Ceci est d'autant plus surprenant que les méthodes numériques telles que les éléments finis sont justement basées sur l'approche variationnelle.

Dans ce travail, nous avons essayé de donner un aperçu sur les probème aux limites linéaire pour l'élasticité.

Le mémoire est composer de trois chapitres, le premier chapitre contient des rappels sur les distributions et les espaces de Soboleve classiques. Le deuxième chapitre concernant quelques notions sur la théorie d'élasticité linéaire. Le troisième chapitre contient les résultats d'existance et d'unnicité pour trois problèmes aux limites avec différentes conditions aux limites.

Remerciement

Ce travaille a été réalise au département de mathématique sons la direction Dr. Dilmi Mourad que nous tenons à remercier. Nous tenons à lui exprimer notre haute reconnaissance pour son aide, ses conseils, et toute le temps qui il a consacré pour nous, sa contribution scientifique a été très fructueuse dans l'avancement de ce travail.

Nos remerciements vont aussi aux professeurs du département de mathématiques et de la faculté des sciences et des sciences de l'ingénier qui ont participé à notre formation.

Enfin, nous tenons aussi à remercier toute personne ayant participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Chapitre 1

Introduction aux espaces de Sobolev

1.1 l'espace $D(\Omega)$ et $D'(\Omega)$

l'espace $D(\Omega)$

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1 *On note $D(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur Ω, à valeurs réelles, qui sont de classe C^∞ sur Ω et à support compact inclus dans Ω. Ces fonctions sont souvent appelées "fonctoins-tests".*

Si φ est une fonction de $D(\Omega)$, chacune de ses dérivées est également une fonction de $D(\Omega)$.

Nous pouvons munir cet espace d'une "pseudo-topologie" en définissant la convergence des suites.

Définition 1.2 *On dit qu'une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ converge vers une fonction φ de $D(\Omega)$ si :*

1). *Il existe un compact fixe K de Ω contenant le support de toutes les fonction φ_p (au moins à paritir d'un certain rang p_0) et le support de φ ;*

2). *Sur ce compact K, chacune des suites de dérivées $(D^\alpha\varphi_p)_{P\geq P0}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^n$ étant un multi-indice quelconque de dérivation) converge uniformément vers $D^\alpha\varphi$; en d'autres* *termes on a, tout α :*

$$\sup_{x\in\Omega}\left|\left(D^{\alpha}\varphi_{P}\right)(x)-\left(D^{\alpha}\varphi\right)(x)\right|\to 0 \text{ quand } p\to+\infty.$$

Remarque 1.3 . *Les fonctions de $D(\Omega)$ sont a fortiori dans tous les espaces de lebesgue $L^{P}(\Omega)$, pour tout p tel que $1\leq P\leq+\infty$ (ainsi que toutes leurs dériviées). Par ailleurs, la convergence dans $D(\Omega)$ entraine la convergence dans tous les espace $L^{P}(\Omega)$(pour la fonction et pour ses dérivées de tout ordre).*

Nous admettons les résultats de densité suivants :

Lemme 1.4 . *Pour tout p tel que $1\leq p\leq+\infty$, l'espace $D(\Omega)$ est dense dans $L^{P}(\Omega)$.*

Lemme 1.5 . *Soit f une fonction de $L^{1}_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute fonction $\varphi\in D(\Omega)$ on ait : $\int_{\Omega}(f\varphi)(x)\,dx=0$. alors, f est nulle presque partout sur Ω. Cet espace $D(\Omega)$ va nous permettre de définir, par "dualité", la notion de distribution.*

L'espace $D'(\Omega)$ des distributions sur Ω

Définition 1.6 . *Soit T une application linéaire définie sur $D(\Omega)$ et à valeurs réelles. On dit que T est une distribution sur Ω si T est "séquenntiellement continue", i.e. si pour toute suite $\left(\varphi_{p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ convergeant vers φ dans $D(\Omega)$ (au sens de la Définition 1.1 ci-dessus),on a*

$$T\left(\varphi_{p}\right)\to T(\varphi) \text{ quand } p\to+\infty.$$

On note $D'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω.

Par la suite, on utilisera indifféremment la notation $T(\varphi)$ ou $\langle T,\varphi\rangle$; dans ce dernier cas, la notation symbolise le crochet de dualité entre la distribution T et la fonction test φ.

Remarque 1.7 . *La forme T étant linéaire, il suffit, pour établir que T est une distribution, de montrer que pour toute suite $\left(\varphi_{p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ convergeant vers l'application nulle. on a : $T\left(\varphi_{P}\right)\to 0$.*

Donnons quelques exemples simples de distribution.

La distribution de Dirac en un point a de Ω, notée δ_a est définie par :

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \text{ pour tout fonction } \varphi \in D(\Omega).$$

Montrons que l'application linéaire δ_a ainsi définie est bien une distribution. Soit $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(\Omega)$ convergeant vers l'application nulle ; on a en particulier : $\sup_{x\in\Omega} |\varphi_p(x)| \to 0$ *quand* $p \to +\infty$.

A fortiori, on en déduit la convergence au point a, soit :

$$\varphi_p(a) = \delta_a(\varphi_p) \to 0 \;\; quand \;\; p \to +\infty.$$

ce qui termine la démonstration.

On notera tout simplement δ la distribution de Dirac en 0

Remarque 1.8 . *Contrairement aux exemples qui suivent, on peut montrer que la distribution de Dirac n'appartient à aucun espace de Lebesgue de type* $L^p(\Omega)$ *.*

En revanche, c'est une mesure de Radon positive.

Remarque 1.9 *Une fonctions de carré intégrable (en fait, plus précisément une classe d'équivalence de fonction de carrés intégrables au sens de l'egalité persque partout).*

Soit f *un élément de l'espace* $L^2(\Omega)$ *et* T_f *l'application définie sur* $D(\Omega)$ *par :*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega (f \; \varphi)(x)\, dx.$$

Remarque 1.10 *On remareque d'abord que l'intégrale ci-dessus a bien un sens, car toute fonction de* $D(\Omega)$ *étant a fortiori de carreé intégrable, le produit* $f\;\varphi$*est bien intégrable. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que* T_f *est une forme linéaire. Soit maintenant* $(\varphi_p)_{p\in N}$ *une siute de* $D(\Omega)$ *convergeant vers l'application nulle dans* $D(\Omega)$ *et donc a fortiori aussi dans* $L^2(\Omega)$*.Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit alors :*$|\langle T_f, \varphi_p\rangle| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_p\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$ *quand* $p \longrightarrow +\infty$*, ce qui montre que* *l'application T_f est séquentiellement continue : c'est donc une distribution.On remarque que l'application qui, à $f \in L^2(\Omega)$ associe la distribution T_f est une application linéaire. Montrons qu'elle est injective. Supposons $T_f = 0$.On sait que f est la limite, dans l'espace $L^2(\Omega)$, de fonction φ_p de $D(\Omega)$.Or, par hypothèse, on a pour tout p : $\langle T_f, \varphi_p \rangle = 0$;passant à la limite $p \to +\infty$, on déduit alors que : $\langle T_f, f \rangle = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$,ce qui entraine : $f = 0$ (en tant classe d'équivalence de fonction) Une conséquence importante de ce résultat est qu'on peut identifier algébriquement $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de $D'(\Omega)$ en identifiant la fonction f avec la distribution T_f .Dorénavant,on posera $T_f = f$.plus lion, nous justifierons cette identification d'un point de vue topologique.*

1.2 Notion sur les espaces de Sobolev

On rappelle que $\nabla\varphi(x)$ est le gradient de u évalue au point $x = (x_1, ..., x_n)$, *i.e.* le vecteur de composantes $(\partial u / \partial x_1)(x), ..., (\partial u/\partial x_n)(x)$ et $\nabla u(x) . \nabla v(x)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ des vecteurs $\nabla u(x)$ et $\nabla v(x)$, *i.e.*+

$$\nabla u(x).\nabla v(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\frac{\partial v}{\partial x_n}(x).$$

C'est en fait à partir de cette formule qu'on va tenter de résoudre le problème. On remarque alors que pour donner un sens aux intégrales ci-dessus, il n'est pas nécessaire de supposer trop de régularité sur u : si u est de carré intégrable sur Ω ainsi que toutes ses dérivées partielles premieres (au sens des distributions, bien entendu) ces intégrales ont un sens. Ceci nous amène naturellement à la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$.

1.2.1 L'espace $H^1(\Omega)$ et ses généralisations

Définition 1.11 . *On note $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable dont chacune des dérivées partielles premières(au sens des distributions) est de carre* *intégrable, i.e. :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ \upsilon \in L^2(\Omega) / \forall i \in \{1, ..., n\}, \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

On munit cet espace du produit scalaire suivant :

$$(u, \upsilon)_{H^1(\Omega)} = (u, \upsilon)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} = (u, \upsilon)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla \upsilon)_{[L^2(\Omega)]^n}$$

La norme correspondante est :

$$\|\upsilon\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(\upsilon, \upsilon)_{H^1(\Omega)}} = \sqrt{\|\upsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

On a le résultat suivant :

Theorem 1.12 *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. IL suffit de montrer que l'espace $H^1(\Omega)$ est complet. Soit $(\upsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace $H^1(\Omega)$; alors :

1) La suite $(\upsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace $L^2(\Omega)$.

2) Pour chaque indice $i \in \{1, ..., n\}$, la suite $\left(\frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_i}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. L'espace $L^2(\Omega)$ étant complet, on en déduit qui'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ et n fonction $w_i, i \in \{1, ..., n\}$ telles que :

Preuve. i) $(\upsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers w dans l'spase $L^2(\Omega)$,

ii) pour chaque indice $i \in \{1, ..., n\}$, la suite $\left(\frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_i}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers w_i dans $L^2(\Omega)$.

Montrons d'abord que pour chacun des indices i on a :$w_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}$.Soit i l' un quelconque de ces indices. D'aprés la Proposition , on déduit du point 1 ci-dessus que $(\upsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers w dans l'spase $D'(\Omega)$ et aussi que $\left(\frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_i}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers$\frac{\partial w}{\partial x_i}$dans $D'(\Omega)$.De même, on déduit du point 2 ci-dessus que $\left(\frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_i}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers w_i dans $D'(\Omega)$.Par unicité de la limite dans cet espace, on a alors que $\frac{\partial w}{\partial x_i} = w_i$. Ce résultat étant établi, on déduit que chacune des dérivées partielles premières $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ est dans $L^2(\Omega)$,donc w est dans l'espace $H^1(\Omega)$. De plus, υ_m converge vers w au sent de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$, ce qui termine la démonstration. ■ ■

Remarque 1.13 *1) Si Ω est borné, alors $C^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$;*

2) L'espace $H^1(\Omega)$ est strictement inclus dans l'espace $L^2(\Omega)$; pour s'en convaincre, il suffit de prendre la fonction de Heaviside h définie sur l'ouvert $\Omega =]-1,1[$ $(i.e. h(x) = 0$ pour $-1 < x$ on a $h \in L^2(\Omega)$ mais $h' = \delta \notin L^2(\Omega)$.

3) L'espace $D(\Omega)$ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ mais ce n'est pas en général un sous espace dense (comme nous le verrons dans le paragraphe suivant). On peut généraliser la définition précédente en faisant intervenir des dérivées d'ordre supérieur.

De manière générale,on a :

Proposition 1.14 *. Soit m un entier positif. L'espace de Soblev $H^m(\Omega)$ défini par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ \upsilon / \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \; D^\alpha \upsilon \in L^2(\Omega) \right\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant :

$$(u, \upsilon)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha \upsilon)_{L^2(\Omega)}$$

le norme associée est :$\|\upsilon\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \upsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$

On notera parfois cette norme $\|.\|_{m,\Omega}$ ou tout simplement $\|.\|_m$ quand il n'y'apas d'ambiguité sur l'ouvert. On fera aussi parfois intervenir la semi-norme $\|.\|_{m,\Omega}$ défîné par :

$$\|\upsilon\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha \upsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

Enfin , il est possible de généraliser ces définitions dans un cadre autre que celui des espaces de Hilbert .on a alors :

Proposition 1.15 . *Soit m un entier positif et $p \in [1, +\infty]$ l'espace de Sobolev $w^{m,p}(\Omega)$ défini par :*

$$w^{m,p}(\Omega) = \{v / \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \ D^\alpha v \in L^p(\Omega)\}$$

est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{w^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/2}$$

1.2.2 l'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.16 . *On appelle $H_0^1(\Omega)$ le fermeture de $D(\Omega)$dans l'espace $H^1(\Omega)$ (muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$;en d'autres termes : v*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega), \exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\Omega) \text{ tell que } \lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0 \right\},$$

cet espace est un sous-espace fermé de l'espace $H^1(\Omega)$: c'est donc un espace de Hilbert pour le produit scalire $(.,.)_{H^1(\Omega)}$. En fait ,si l'ouvert Ω est borné (ou borné dans au moins une des direction de l'espace),on peut définir un autre produit scalaire plus simple sur cet espace :c'est une conséquence du résultat suivant.

1.2.3 Inégalité de Poincaré

Theorem 1.17 . *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (ou borné dans au moins une des directions de l'espace). Alors il existe une constante positive $C_P(\Omega)$ telle que pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$:*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P(\Omega) |v|_{1,\Omega}$$

Preuve. Il suffit de démontrer l'inégalité pour des fonctions de $D(\Omega)$. soit v une fonction de cet espace et désignons par $\widetilde{\upsilon}$ son prolongement par 0 en dehors de $\Omega, i.e.\widetilde{\upsilon}$ est la fonction définie sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$ par : $\widetilde{\upsilon}(x) = \upsilon(x)$ si $x \in \Omega, \widetilde{\upsilon}(x) = 0$ sinon.Alors on vérifie aisément que $\widetilde{\upsilon} \in D(\mathbb{R}^n)$ Par ailleurs ,le support de $\bar{\upsilon}$ est inclus dans Ω qui lui meme est supposé etre borné dans au moins une direction,pour fixer les idées la direction x_n On a donc :

$$Supp\ \widetilde{\upsilon} \subset \Omega \subset \left\{x = \left(x', x_n\right), x' \in \mathbb{R}^{n-1}, a \leq x_n \prec b\right\}$$

On peut alors écrire ,puisque $\widetilde{\upsilon}(., a) = 0$:

$$\widetilde{\upsilon}\left(x', x_n\right) = \int_a^{x_n} \frac{\partial \widetilde{\upsilon}}{\partial x_n}\left(x', t\right) dt,\ \ a \leq x_n \prec b.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors :

$$\left|\widetilde{\upsilon}\left(x', x_n\right)\right|^2 \leq (x_n, -a) \int_a^{x_n} \left|\frac{\partial \widetilde{\upsilon}}{\partial x_n}\left(x', t\right)\right|^2 dt \leq (b-a) \int_a^b \left|\frac{\partial \widetilde{\upsilon}}{\partial x_n}\left(x', t\right)\right|^2 dt.$$

Intégrons relativement à la variable x' dans $\mathbb{R}^{n-1}$; on obtient :

$$\int_{n-1} \left|\widetilde{\upsilon}\left(x', x_n\right)\right|^2 dx' \leq (b-a) \left\|\frac{\partial \widetilde{\upsilon}}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Intégrons maintenant par rapport à la varible x_n entre a et b ;compte tenu du fait que $\|\widetilde{\upsilon}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\upsilon\|_{L^2(\Omega)}$ et $\left\|\frac{\partial \widetilde{\upsilon}}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$, nous avons :

$$\|\upsilon\|^2_{L^2(\Omega) \leq} \leq (b-a)^2 \left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)^2 |\upsilon|^2_{1,\Omega},$$

ce qui termine la démonstration avec $C_P(\Omega) = (b-a)$. ■

Remarque 1.18 *1) Si Ω est borné, on remarque que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est strictement inclus dans $H^1(\Omega)$ En effet , la fonction v définie par $v(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$ est clairement dans $H^1(\Omega)$; en revanche, elle ne peut-être dans $H_0^1(\Omega)$, car elle ne vérifie pas l'inégalité de Poincaré (puisque$|v|_{1,\Omega} = 0$).*

2) Le meme exemple montre que si Ω est borné, l'inégalité de Poincaré est fausse dans l'espace $H^1(\Omega)$

3) L'espace $H_0^1(\Omega)$ peut aussi etre défini comme étant le complété de $D(\Omega)$ pour la semi-norme $|.|_{1,\Omega}$ une conséquence importante de cette inégalité est donne par :

Corollaire 1.19 *. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$est un ouvert borné (ou borné dans au moins une direction de l'espace), alors la semi-norme $|.|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$ L'espace $H_0^1(\Omega)$ est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire "réduit" défini par :*

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n}$$

et qu'on notera parfois : $(.,.)_{1,\Omega}$ (ou tout simplement $(.,.)_1$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ouvert

Preuve. On a tout d'abord : $\|.\|_{H^1(\Omega)} \geq |.|_{1,\Omega}$ maintenant, si v dans l'espace $H_0^1(\Omega)$,l'inégalité dePoincaré nous donne en plus :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C_p(\Omega)^2}\, |v|_{1,\Omega}$$

d'où on débuit : $|v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C_p(\Omega)^2}\, |v|_{1,\Omega}$Cette double inégalité montre que la semi-norme $|.|_{1,\Omega}$ est en fait une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$(grace à l'inégalité de droite,si $|v|_{1,\Omega} = 0$, alors $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 0$,et donc $v = 0$) ; elle montre aussi qu'elle est équivalente à celle induite par$H^1(\Omega)$ .Ce corollaire est utile pour l'étude des problèmes aux limites du type 01-02 :c'est en effet dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ qu'on recherchera la soulition

u.et on disposera alors sur cet espace d'une norme " *réduite*" plus simple. Ces notions se généralisent de la manière suivante : ■

Proposition 1.20 *. On désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ pour la norme $\|v\|_{H^m(\Omega)}$. Sur cet espace , la semi-norme $|.|_{m,\Omega}$ est une norme équivalente à la norme induite par l'espace ; $H^m(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour cette norme "réduite".*

On admettra les résultats de densité suivants ..

Lemme 1.21 *. L'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$; en d'autres termes,on a :*

$$H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n);$$

Lemme 1.22 *. On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne. L'espace $D\left(\bar{\Omega}\right)$ est desnse dans $H^m(\Omega)$.*

Dans le cas de l'espace tout entier, bien que l'on ait $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ l'inégalité de Poincaré n'est pas valable et la semi-norme $|.|_{1,\mathbb{R}^n}$ n'est pas une norme sur l'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$

Remarque 1.23 ***Remarque 1.24*** *. On peut montrer une inégalité du type de l'inégalité de Poincaré valable cette fois sur tout l'espace $H^1(\Omega)$; le prix à payer est la présence d'un terme supplémentaire dans le membre de droit de l'inégalité .Nous renvoyons le lecteur à l'Exercice ,dont les résultats se généralisent au cas d'un ouvert Ω .borné et connexe de $\mathbb{R}^n$.Nous allons à présent définir la notion de " trace sur le bord "de l'ouvert.d'une fonction de l'espace $H^1(\Omega)$.*

1.3 Notions de traces sur Γ de fonctions de $H^1(\Omega)$

Si $f \in C^0(\bar{\Omega})$,On peut définir la restriction de f au bord Γ de l'ouvert Ω. Le but de ce paragraphe est de généraliser cette notion de *"restriction sur* Γ*"* à des fonction a priori moins régulières, typiquement à des fonctions de l'espace $H^1(\Omega)$ .Nous allons d'aord étudier de le cas de la dimension un, puis le cas du demi-espace ; enfin nous admettrons les résultats dans le cas général.

En dimension un ,il n'y a aucune difficulté pour définir la "trace sur Γ " de fonctions de H^1 :il s'agit en fait de la trace usuelle de fonctions continues jusqu'au bord de l'ouvert, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.25 . *Si $v \in H^1(]a,b[)$ $(a < b)$, alors $v \in C^0([a,b])$ .Par ailleurs, il existe une constante positive $C = C(\alpha, b)$, telle que pour toute fonction $v \in H^1(]a,b[)$, on ait :*

$$sup_{x\in[a,b]} \; |v(x)| \leq C \|v\|_{H^1(]a,b[)} .$$

En d'autres termes, l'application identité de l'espace $H^1(]a,b[)$ dans l'espace $C^0([a,b])$ est continue .

Preuve. . Le résultat ci-dessus est à comprendre dans le sens suivant : soit v une fonction de $H^1(]a,b[)$,à fortiori $v \in L^2(]a,b[)$;v représente donc une classe d'équivalence de fonctions,au sens de la relation d'équivalence qui est l'égalité presque partout. La proposition affirme que,dans la classe d'équivalence de v, il existe un élément ,noté pour le moment $\tilde{v}$, qui est continu sur $[a,b]$; on identifiera ensuite naturellement $\tilde{v}$ et v. ■

Remarque 1.26 . *Ce résultat est faux en dimension plus garde.Par exemple ; en dimension deux , considérons la bole unité $\Omega = B(0, R = 1)$ et soit v.le fonction définie par :$v(x) = |Log(\|x\|)|^k$, où la notation $\|x\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ On vérifie que pour $k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, la fonction v est dans $H^1(\Omega)$ et pourtant elle n'est pas bornée en 0 (puisque $\lim_{x\to 0} v(x) = +\infty$).*

Remarque 1.27 *l'estimation (3) montre qu'en fait on a mieux : la fonction $\bar{\upsilon}$;est dans l'espace de Holder*$C^{0,1/2}([a,b])$.

Cas du demi-espace

On note $\mathbb{R}_+^n$;le demi-espace défini par :

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{x = (x', x_n), x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \succ 0\right\}$$

Le bord $\Gamma.$;de cet ouvert est l'hyperplan formé des points $x.$;de la forme $x = (x', 0)$, avec x quelconque dans $\mathbb{R}^{n-1}$: cet espace est trivialement isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.

Les fonctions υ ; de $D\left(\bar{\mathbb{R}}_+^n\right)$ étant régulières jusqu'au bord Γ on peut naturellmement définir leur restriction$\upsilon_{|\Gamma}$; surΓ ; nous allons montrer que celle-ci est de carré intégrable sur Γ et qu'elle dépend continument de norme dans l'espace H^1 de υ : nous pourrons allors définir une ‹‹trace généralisée›› pour toute fonctions υ de l'espace $H^1\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ par densité.

Proposition 1.28 *Pour toute fonction* $\upsilon.deD\left(\bar{\mathbb{R}}_+^n\right)$, *on a et* $\upsilon(.,0) \in L^2\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ *et*

$$\|\upsilon(.,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|\upsilon\|_{H^1\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

Preuve. Soit υ dans $D\left(\bar{\mathbb{R}}_+^n\right)$; cette fonction étant trés régulières et de limite nulle à l'infini , on a :

$$\upsilon^2(x', 0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon^2\right)(x', y)\, dy = -2\int_0^{+\infty}\left[\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right](x', y)\, dy$$

On en déduit $\left(2ab \leq a^2 + b^2\right)$:

$$\upsilon^2(x', 0) \leq \int_0^{+\infty}\left[\upsilon^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2\right](x', y)\, dy$$

puis en intégrant relativement à la variable $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \upsilon^2 (x', 0)\, dx' \leq \|\upsilon\|^2_{H^1\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$$

ce qui démontre la proposition On en déduit alors le : ■

Theorem 1.29 *Il existe une application linéaire et continue définie sur l'espace* $H^1\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *à valeurs dans* $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, *notée* γ_0, *telle que pour toute fonction régulière* $\upsilon \in D\left(\bar{\mathbb{R}}^n_+\right)$, *on ait :*$\gamma_0 \upsilon = \upsilon_{|\Gamma}$.

Cas général et prolongements

Dans le cas général, nous admettrons que le résultat est encore vrai pour des ouverts suffisamment réguliers.

Theorem 1.30 . *On suppose l'ouvert* Ω *à frontière lipschitizienne.Il existe une application linéaire et continue* γ_0 *; définie sur l'espace* $H^{\,1}(\Omega)$ *à valeur dans l'espace* $L^2(\Gamma)$ *telle que, pour toute fonction régulière* $\upsilon \in D\left(\bar{\Omega}\right)$, *on ait :* $\gamma_0 \upsilon = \upsilon_{|\Gamma}$ *.De plus , on a :*

1) *Ker* $\gamma_0 = H_0^1(\Omega)$

2. *l'application* γ_0*n'est pas surjective (en général), mais son omage ,notée* $H^{\,1/2}(\Gamma)$, *est un sous-espace dense dans* $L^2(\Gamma)$ *. Enonçons quelques compléments utiles pour la suite :*

1) *Si* $\upsilon \in H^{\,2}(\Omega)$ *, on peut définir sa trace* $\gamma_0 \upsilon \in L^2(\Omega)$, *mais on peut aussi faire de meme pour chcune des dérivées premières* $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_i}$ *,pour* $i \in \{1, ..., n\}$ *.on peut aussi définir :*

$$\gamma_1 \upsilon = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i . \gamma_0 \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right)$$

où $\upsilon = (\upsilon_i, ... \upsilon_n)$ *désigne le vecteur normal à* Γ *orienté vers l'extérieur de* Ω *Si l'ouvert* Ω*.est de frontière de calasse* $C^{1,1}$, *on peut montre que l'application* (γ_0, γ_1) *ainsi définie sur l'espace* $H^{\,2}(\Omega)$ *et à valeur dans* $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ *est linéaire et continue et que son noyau est précisément l'espace* $H_0^2(\Omega)$ *.*

2) De manière plus générale encore, supposons la frontière de l'ouvert Ω suffisamment régulière et soit m un entier supérieur ou égal à 1.Pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq m-1$, il existe une application linéaire et continue de l'espace $H^{m}(\Omega)$ à valeurs dans l'espace $L^2(\Gamma)$: l'applicxation $(\upsilon \rightarrow \gamma_0(D^{\alpha}\upsilon))$ On a par ailleurs :

$$H_0^{m}(\Omega) = \{\upsilon \in H^{m}(\Omega) / \forall\alpha, |\alpha| \leq m-1, \quad \gamma_0(D^{\alpha}\upsilon) = 0\}$$

3) En dimension deux ou trois (qui sont les cas les plus courants),on a le résultat suivant : toute fonction υ de l'espace $H^{2}(\Omega)$ est continue sur $\bar{\Omega}$ et l'application identité ainsi définie de l'espace $H^{2}(\Omega)$ à valeurs dans l'espace $C^{0}\left(\overline{\Omega}\right)$ est continue . Nous terminons ce chapitre par la généralisation de formules de Green aux fonction de $H^{2}(\Omega)$ Nous avons par densité le résultat suivant (la démonstration est laissée au lecteur en exercice) :

Proposition 1.31 *Soit $u \in H^{2}(\Omega)$ et $\upsilon \in H^{1}(\Omega)$ .On a la formule de Green suivante :*

$$\int_{\Omega} [\Delta u \ \upsilon](x)\, dx = -\int_{\Omega} [\nabla u . \nabla \upsilon](x)\, dx + \int_{\Gamma} \left[\gamma_1 u \ \gamma_0 \upsilon\right](x)\, ds,$$

où la notion ds.désigne la mesure superficielle sur la frontière Γde Ω ; (supposée suffisamment régulière).

Chapitre 2

Introduction et théorier de l'élasticité

Elasticité = Mécanique des corps solides déformables (par opposition à la mécanique du point ou des corps indéformables). La mécanique étudie la réponse d'un corps solide à des forces ou moments appliqués. (Note : pour les milieux visco-élastiques, on parle aussi de **rhéologie** : leur réponse à des forces / moments / pressions appliqués) Forces ou moments (contraintes) qui s'exercent sur un objet fait d'un matériau donné, de forme donnée et de volume donné $\rightarrow$ translation, rotation, déformation (changement de forme et de volume). La mécanique du point ou du solide indéformable étudie la translation et la rotation, l'élasticité s'intéresse exclusivement à la déformation. On distingue élasticité linéaire et non-linéaire. Dans ce mémoire : on s'intéresse à l'élasticité linéaire.

Pourquoi étudier l'élasticité ?

• Stabilité des structures mécaniques

– Pour la construction de ponts, routes, structures en béton (immeubles ...) $\sim$forme d'un profilé, taille maximale d'un immeuble,

– Fibres, tissus synthétiques, ...

– Solutions de polymères, gels, caoutchoucs, pâtes, poudres, sables, cristaux liquides, mousses et émulsions, ...

La géométrie est importante. Exemple du caoutchouc = un élastomère préparé en tubes, en rubans, en fines pellicules (vernis, sols), en cables, en tissus,

Elasticité linéaire : loi de Hooke dans le cas d'une contrainte normale

Loi de Hooke

Referentiel (Ox, Oy, Oz).

Loi de Hooke dans le cas d'une contrainte normale :

$$\sigma = E\epsilon ....(1)$$

• ϵ = allongement relatif ou déformation (strain). Algébrique : possède un signe (cf extension / compression)

• σ = contrainte(stress). Algébrique aussi

• E = module d'Young (Young modulus), caractéristique du matériau

2.1 Théorie de l'élasticité

On a vu des exemples simples de déformations élémentaires sous des contraintes normales et tangentielles . On a pu noter dans ces exemples que la contrainte est liée à la direction de la force par rapport à la normale à la face sur laquelle elle s'àpplique. En fonction de ces directions relatives, la déformation peut être élongationnelle ou angulaire.

Pour traiter un cas général, on pourrait traiter chaque cas comme une combinaison (linéaire) de cas particuliers, mais il faudrait définir des forces et déformation correspondant à chacune des déformations élémentaires, ce qui aboutirait rapidement à des calculs extrêmements compliquée. Il est en fait nécessaire de décrire le problème sous forme tensorielle. On aura donc affaire :

• **au tenseur des contraintes** $\overline{\overline{\sigma}}$ (ordre 2), de composantes $\sigma_{ik}(i, k = 1, 2 \text{ ou } 3)$,où i indique la direction du vecteure force et k indique la direction de la normele à la face sure laquelle la force est appliquée.

– Traction : $\sigma_{11} \neq 0$; toutes les autres composantes sont nulles.

– Compression uniforme : σ_{11}, σ_{22} et $\sigma_{33} \neq 0$; toutes les autres composantes sont nulles ;

– Cisaillement : $\sigma_{12} \neq 0$.

On voit donc qu'à une contrainte normale correspond les composantes diagonales σ_{ii} du tenseur des contraintes, et qu'à une contrainte tangentielle correspond une composante non diagonale σ avec $k \neq i$. Le tenseur des contraintes, avec toutes ses composantes, contient donc la combinaison de contraintes normales et tangentielle. La donnée du tenseur des contraines permet de traiter le cas général sans avoir à rechercher la nature particuli'ere de telle ou telle perturbation.

- **au tenseur des déformations** $\overline{\overline{\epsilon}}$ (ordre 2), de composantes ϵ_{ij}
- **au tenseur d'élasticité)**, $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}$ (ordre 4), de composantes A_{ijkl}

A $3D$, les tenseurs des contraintes et des déformations comportent chacun $3 \times 3 = 9$ composantes. Le tenseur d'élasticité contient $3^4 = 81$ coefficients (heureusement on pourra faire des simplifications)

La loi de Hooke dans le cas général sèxprime alors

$$\sigma_{ik} = \sum_{j,l} A_{ijkl} \epsilon_{jl}.$$

Les coefficients élastiques E, ν, K ou G vont apparaître dans les composantes A_{ijkl} du tenseur d'élasticité.

2.2 Tenseur des déformations

Définition 2.1 *On considère un corps : le point M se déplace en M' au cours de la déformation. Soit $\vec{r}$ le vecteur position du point*

$$M\vec{r}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{r'}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

On définit **le vecteur déplacement :** $\vec{u} = \vec{r'} - \vec{r}$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 = x'_1 - x_1 \\ u_2 = x'_2 - x_2 \\ u_3 = x'_3 - x_3 \end{pmatrix}$$

Notation : $u_i = x'_i - x_i$ avec $i = 1, 2$ *ou* 3

Remarque 2.2 *: La position du point M' dépend de la position du point M (sinon on aurait une translation d'ensemble) $\rightarrow$ $\vec{u} = \vec{u}(\vec{u})$ ou $u_i = u_i = u_i(\{x_j\})$. Si on connâıt $\vec{u}(\vec{r})$, la déformation du corps est donc complêtement déterminée.*

On cherche donc à calculer $\vec{u}(\vec{r})$

Comment décrire les allongements du matériau ? Soient 2 points$A$ et$B$ voisins qui se déplacent en A'et B' respectivement au cours de la transformation. On a :

$$\vec{r}_A \begin{pmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ x_{A3} \end{pmatrix}, \vec{r}_B \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ x_{B_3} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{r'}_A \begin{pmatrix} x'_{A1} \\ x'_{A2} \\ x'_{A3} \end{pmatrix}, \vec{r'_B} \begin{pmatrix} x'_{B1} \\ x'_{B2} \\ x'_{B3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} \rightarrow \vec{A'B'} = \vec{r'}_B - \vec{r'}_A$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_{B1} - x_{A1} = dx_1 \\ x_{B2} - x_{A2} = dx_2 \\ x_{B3} - x_{A3} = dx_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{A'B'} \begin{pmatrix} x'_{B1} - x'_{A1} = dx'_1 \\ x'_{B2} - x'_{A2} = dx'_2 \\ x'_{B3} - x'_{A3} = dx'_3 \end{pmatrix}$$

Avec $dx'_i = x'_{B_i} - x'_{A_i} = (x_{B_i} + u_{B_i}) - (x_{A_i} + u_{A_i}) = dx_i + du_{i.}$

$\left\| \vec{AB} \right\| = dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \rightarrow \left\| \vec{A'B'} \right\| = dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$

$$dl'^2 = \sum_i dx_i'^2 = \sum_i (dx_i + du_i)^2 = \sum_i (dx_i^2 + du_i^2 + 2dx_i du_i)$$

$$dl'^2 = dl^2 + \sum_i du_i^2 + 2\sum_i dx_i du_i$$

or $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \rightarrow du_i = \frac{du_i}{dx_i}dx_i + \frac{du_i}{dx_2}dx_2 + \frac{du_i}{dx_3}dx_3 = \sum_k \frac{du_i}{dx_k}dx_k$.

Notation :

$$\frac{du_i}{dx_k} = \partial_k u_i \ \rightarrow \qquad du_i = \sum_k \partial_k u_i dx_k.$$

$$dl'^2 = dl^2 + (\sum_k \partial_k u_i dx_k)^2 + 2\sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k$$

$$= dl^2 + \sum_i (\sum_k \partial_k u_i dx_k)(\sum_l \partial_l u_i d_i) + \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k + \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i d_k$$

$$= dl^2 + \sum_i \sum_k \sum_l \partial_k u_i \partial_l u_i dx_k dx_1 + \sum_i \sum_k \partial_k u_i dx_i dx_k + \sum_k \sum_i \partial_i u_k dx_k dx_i$$

$$= dl^2 + \sum_l \sum_k \sum_i \partial_k u_l \partial_i u_l dx_k dx_i + \sum_k \sum_i (\partial_i u_k + \partial_k u_i) dx_i dx_k$$

On définit :

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_k + \partial_k u_i + \sum_l \partial_i u_l \partial_k u_l\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right] + \sum_l \left(\frac{\partial u_l}{dx_i}\frac{\partial u_l}{dx_k}\right)$$

$$\rightarrow dl'^2 = dl^2 + \sum_{i,k} 2\epsilon_{ik} dx_i dx_k.$$

Les ϵ_{ik} sont les composantes d'un tenseur d'ordre 2 : le tenseur des déformations :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Pour des petites déformations, on néglige le terme d'ordre 2 : $\partial_i u_l \partial_k u_l$

$$\rightarrow \epsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\partial_i u_k + \partial_k u_i)...........(2)$$

Notation d'Einstein

ou "convention de somme sur les indices répétés" : quand l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Cet indice est dit muet.

Par exemple : $\partial_k u_i dx_k = \sum_k \partial_k u_i dx_k$.

$$\rightarrow dl'^2 = dl^2 + 2\epsilon_{ik} dx_i dx_k.$$

2.2.1 Propriétés du tenseur des déformations

•Tenseur d'ordre 2

(matrice 3×3) $\rightarrow$ 9 composantes

• Champ de tenseur :

il dépend du point de l'espace autour duquel se fait la déformation : $\overline{\overline{\epsilon}}(\vec{r}\ )$ autrement dit $\epsilon_{ij}(\{r_k\})$,

• Symétrique :$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \rightarrow$ **il n'y a donc que 6 composantes indépendantes,**

• Diagonalisable :

en chaque point, il existe une base dans laquelle seuls les eléments diagonaux de $\overline{\overline{\epsilon}}$ sont non nuls.

– Les axes de cette base = **axes principaux** ou **axes propres** du tenseur des déformations, notés $\vec{\nu}^{(1)}$, $\vec{\nu}^{(2)}$ et $\vec{\nu}^{(3)}$

– les éléments diagonaux du tenseur diagonalisé = les **valeurs principales,**ou **valeurs propres** du tenseur des déformations, notées $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \epsilon^{(3)}$.

$$\overset{=}{\epsilon}\,\overrightarrow{\nu}^{(i)} = \epsilon^{(i)}\overrightarrow{\nu}^{(i)}$$

Dans le repére $(\overrightarrow{\nu}^{(1)}, \overrightarrow{\nu}^{(2)}, \overrightarrow{\nu}^{(3)})$:

$$\overset{=}{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{(3)} \end{pmatrix}$$

La base propre et les valeurs principales du tenseur des déformation changent d'un point à l'autre..

• **La trace du tenseur des déformations est invariante par changement de base**

Trace du tenseur = somme de ses termes diagonaux :

Trace $\left\{\overset{=}{\epsilon}\right\} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$.

2.2.2 Résultante des forces

Si le corps est déformé

→ la position des molécules varie, ainsi que leur distance relative, ce qui augmente leur énergie élastique, induisant des forces de rappel entre les molécules

→il existe donc des contraintes internes.

(Si le corps n'est pas déformé : pas de contraintes internes.)

Origine physique des contraintes internes :

Les forces interatomiques (ou intermoléculaires) dans le matériau sont à très courte portée (portée ∼ distance intermoléculaire). Les interactions concernent donc seulement les premiers voisins. Dans le volume, elles se compensent les unes les autres. Les seules contributions non compensées sont celles qui se trouvent à la surface extérieure du volume considéré. Les forces exercées sur une partie du corps par les parties voisines agissent donc uniquement à sa surface.

Un exemple (familier) est celui de la pression dans un fluide en équilibre : la pression est uniforme dans le fluide ; si le fluide est dans une boîte, la pression se manifeste comme une force à la paroi de la boîte.

En élasticité : dans les trois exemples de traction, compression uniforme et cisaillement simple, on exerce de l'extérieur une force sur la surface du solide, et on déforme tout le volume. La force extérieure est alors équilibrée par des forces internes qui s'appliquent sur la surface. → Le nouvel équilibre mécanique correspond à la compensation des forces internes et externes lorsque le solide est déformé.

Soit $\vec{f}$ la densité de force (= force par unité de volume) qui induit la déformation.On considère un volume V du matériau élastique, fermé par une surface S. Les considérations ci-dessus peuvent se résumer à :

$$\int_V \vec{f} dv \to \int_S dS.$$

2.2.3 Contraintes élastiques

Dans le théoréme de Gauss, la grandeur intégrée sur le volume est un scalaire. On passe d'une intégrale sur V à une intégrale sur S en écrivant ce scalaire comme la divergence d'un champ de vecteurs.

Pour le cas qui nous intéresse ici, la grandeur intégrée sur le volume est un vecteur $\vec{f}$. Par analogie, on peut passer d'une intégrale sur V à une intégrale sur S en écrivant ce vecteur comme la divergence d'un champ de tenseur d'ordre 2. On aura :

$$\int_V \vec{f} dV = \oint_S \bar{\bar{\sigma}}.\vec{dS} = \oint_S \bar{\bar{\sigma}}.\vec{n} dS, ...(3)$$

où $\bar{\bar{\sigma}}$ est le **tenseur des contraintes**, défini par

$$\vec{f} = \mathrm{div}(\overline{\overline{\sigma}}) = \vec{\nabla}.\overline{\overline{\sigma}}..........(4)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} + \partial_3\sigma_{13} \\ \partial_1\sigma_{21} + \partial_2\sigma_{22} + \partial_3\sigma_{23} \\ \partial_1\sigma_{31} + \partial_2\sigma_{32} + \partial_3\sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$= (\partial_k\sigma_{1k} \quad \partial_k\sigma_{2k} \quad \partial_k\sigma_{3k}$$

$$\longrightarrow \quad f_i = \partial_k\sigma_{ik}........(5)$$

D'aprés l'équation(04), $\overline{\overline{\sigma}} .\vec{n} \ \ dS$ est donc la force qui s'exerce sur la surface dS qui entoure l'´elément de volume dV . Projetée sur l'axe Ox_i , $l\prime Eq.$(04) s'écrit (en utilisant toujours la notation d'Einstein) :

$$\int_V f_i dV = \oint_S \sigma_{ik} n_k \ dS, ...(6)$$

Notons que $\overline{\overline{\sigma}}$ représente le tenseur des contraintes internes : ce sont les contraintes qui s'établissent é l'intérieur du volume considéré pour équilibrer la force externe à l'équilibre. $\oint_S \sigma_{ik} n_k \ dS$ est la force exercée sur le volume V de surface extérieure S par le milieu environnant (force extérieure). A l'équilibre, la force que le matériau à l'intérieur du volume V exerce sur la surface S est donc (principe de l'action et de la réaction) $= - \oint_S \sigma_{ik} n_k \ dS$ (force interne)

Dans le volume :

le tenseur des contraintes est associé à la densité de force (force extérieure / unité de volume) :

$$f_i = \partial_k \sigma_{ik} \quad ou \quad \overrightarrow{f} \;=\; \overrightarrow{\nabla}.\overline{\overline{\sigma}}$$

A la surface :

le tenseur des contraintes est associé à la force extérieure / unité de surface :

$$F_i = \sigma_{ik} n_k \ \text{ ou } \ \overrightarrow{F} \;=\; \overline{\overline{\sigma}}.\overrightarrow{n}$$

2.2.4 Résultante des moments

Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ s'appliquant au point $\overrightarrow{r}$ est

$$\overrightarrow{M} \;= \overrightarrow{F} \Lambda \overrightarrow{r}$$

$$\overrightarrow{M} \;= \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M} \;= \begin{pmatrix} F_2 x_3 - F_3 x_2 \\ F_3 x_1 - F_1 x_3 \\ F_1 x_2 - F_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{23} \\ M_{31} \\ M_{12} \end{pmatrix} .$$

Le moment d'une force peut donc s'écrire sous la forme d'un tenseur d'ordre 2, de composantes

$$M_{ik} = F_i x_k - F_k x_i .$$

Note : $M_{ik} = -M_{ki}$. Le moment des forces agissant sur le volume V est donc un tenseur antisymétrique de composantes

$$M_{ik} = \int_V (f_i x_k - f_k x_i)\ dV, ...(7)$$

Comme pour les forces, le moment doit pouvoir s'écrire sous la forme d'une intégrale de surface. D'aprés l'équation (05) et toujours avec la notation d'Einstein :

$$M_{ik} = \int_V (\partial_l \sigma_{il} x_k - \partial_l \sigma_{kl} x_i)\ dV$$

soit en intégrant par parties :

$$M_{ik} = \int_V \partial_l(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) dV - \int_V (\sigma_{il} \partial_l x_k - \sigma_{kl} \partial_l x_i) dV.$$

or :

$$\partial_l x_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$$

où

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq l \\ 1 & \text{si} \quad k = l \end{cases}$$

δ_{ik} est le symbole de Kronecker. On a donc :

$$\begin{aligned} \delta_{kl}\delta_{il} &= \delta_{ik} \\ \delta_{il}\sigma_{kl} &= \delta_{ki}, \end{aligned}$$

soit :

$$M_{ik} = \int_V \partial_l(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) dV - \sum_l \int_V (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) dV.$$

Le premier terme est écrit sous la forme d'une divergence : il se transforme donc aisément en une intégrale de surface. Pour que M_{ik} se réduise à une intégrale de surface, il faut donc que le second terme s'annule, soit :

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

Le tenseur des contraintes doit donc être symétrique.

On a alors :

$$M_{ik} = \int_V \partial_l(\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)\ dV$$

$$= \oint_S (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i) n_l dS..$$

2.3 Loi de Hooke

Pour résoudre un cas concret de déformation, il faut écrire l'énergie libre F du corps en fonction du tenseur des déformations. La déformation d'équilibre est alors celle qui minimise F . Si le corps est isotrope, et que la déformation est petite et sans changement de température, on peut écrire F comme un développement en série des puissances de ϵ_{ik} :

$$F = F_0 + \alpha \sum_{i,k} \epsilon_{ik} + b(\text{terme d'ordre 2 en } \epsilon_{ik}) + ..$$

• On considére que le corps non déformé n'est le siège d'aucune contrainte, i. e. $\sigma_{ik} = 0$ lorsque $\epsilon_{ik} = 0$. D'aprés l'équation $\sigma_{ik} = (\dfrac{\partial F}{\partial \epsilon_{ik}})_T$. cela signifie qu'il n'y a **pas de terme linéaire** dans le développement de F , soit $\alpha = 0$.

• Au second ordre, $(\epsilon_{ll})^2$ et $\sum_{i,k} \epsilon_{ik}^2$ sont deux scalaires indépendants formés à partir des composantes ϵ_{ik} du tenseur des déformations.

$$\rightarrow F = F_0 + \frac{\lambda}{2}(\epsilon_{ll})^2 + \mu \sum_{i,k} \epsilon_{ik}^2, ...(8)$$

en s'arrêtant à l'ordre 2 en ϵ_{ik}.λ et μ sont les **coefficients de Lamé**. Pour que la déformation s'accompagne d'une augmentation de l'énergie libre par rapport à l'état non déformé :

$$\lambda, \mu \succ 0.$$

D'aprés l'équation $F = F_0 + \frac{\lambda}{2}(\epsilon_{ll})^2 + \mu \sum_{i,k} \epsilon_{ik}^2$, on a :

$$dF = \lambda \epsilon_{ll} d\epsilon_{ll} + 2\mu \epsilon_{ik} d\epsilon_{ik}$$

$$= \lambda \epsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \epsilon_{ik}) d\epsilon_{ik}$$

$$= (\lambda \epsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \epsilon_{ik}) d\epsilon_{ik}$$

Donc d'aprés l'équation $\sigma_{ik} = (\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ik}})_T$:

$$\sigma_{ik} = \lambda \epsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \epsilon_{ik}, ...(9)$$

L'équation (09) relie les composantes du tenseur des contraintes à celles du tenseur des déformations : c'est **la loi de Hooke**, annoncée sous la forme

$$\sigma_{ik} = A_{ikjl} \epsilon_{jl}$$

On voit que les 81 composantes A_{ikjl} du tenseur d'élasticité se réduisent en fait, dans le cas de corps homogènes et isotropes, à 2 coefficients qui font intervenir les coefficients de Lamé.

On peut inverser l'équation (09) en utilisant le fait que, d'aprés la même équation :

$$\sigma_{ll} = (3\lambda + 2\mu)\epsilon_{ll}, ...(10)$$

On obtient donc :

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{ik} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{ll}\delta_{ik}), ...(11)$$

Les équations (09) et (11) sont deux expressions équivalentes de la loi de Hooke.

Remarque 2.3 *1) On a retrouvé en route par le biais de l'équation* (10) *que la variation relative de volume de toute déformation d'un corps homogéne et isotrope ne dépend que de la somme σ_{ll} des composantes diagonales du tenseur des contraintes(c'est-à-dire des composantes normales de la contrainte)*

2) Puisque F est une fonction quadratique des ϵ_{ik}, on a (d'aprés le théorème d'Euler[1]

$$2F = \epsilon_{ik}\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ik}}$$

$$F = \frac{1}{2}\epsilon_{ik}\sigma_{ik}$$

Autre forme de la loi de Hooke

Il existe plusieurs expressions de la loi de Hooke, qui utilisent les coefficients d'élasticité correspondant an problème considéré. Les coefficients de Lamé sont pratiques pour établir théoriquement la loi de Hooke comme nous venons de le faire, mais ils ne correspondent pas d'emblée à une situation physique particulière

(un certain type de contrainte ou de déformation).

Théorème d'Euler : Si f est une fonction homogène de degré k ($i.e. f(\alpha x) = \alpha^k f(x)$ et différentiable en tout point x de V , alors la relation suivante, appelée "identit ́e d'Euler" est vérifiée : $kf(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Revenons à l'équation (08) et remarquons que :

• le terme ϵ_{ll} représente la variation relative de volume du corps au cours de la déformation. Si ce terme est nul, seule la forme du corps est modifiée : on parle de déformation de cisaillement pur, ou de glissement.

• si ϵ_{ik} = constante δ_{ik} seul le volume du corps change au cours de la déformation (mais pas sa forme) : on est dans le cas d'une compression uniforme.

On peut écrire :

$$\epsilon_{ik} = (\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}$$

Le premier terme de gauche représente une déformation de glissement (la trace de ce tenseur est nulle), et le second terme représente une déformation due à une compression uniforme. On a alors d'après (08) :

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}\epsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left[(\epsilon_{i,k} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{i,k}\epsilon_{ll} \right]^2$$

$$= F_0 + \frac{\lambda}{2}\epsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k} \left[(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll})^2 + \frac{1}{9}\delta_{ik}\epsilon_{ll}^2 + \frac{2}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll} \right]$$

$$= F_0 + (\frac{\lambda}{2}\epsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k}(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll})^2 + \mu\frac{3}{9}\epsilon_{ll}^2 + 0$$

$$F_0 + (\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3})\epsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k}(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll})^2$$

que l'on peut réécrire :

$$F = F_0 + \frac{K}{2}\epsilon_{ll}^2 + \mu \sum_{i,k}(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll})^2, ...(12)$$

où

$$K = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right), ...(13)$$

est le **module de compression uniforme**. La déformation à laquelle ce terme est associé dans l'équation(12) représente en effet une compression uniforme. Le dernier terme de l'équation (12) est associé à une déformation de glissement. Le coefficient μ s'appelle donc module de glissement ou module de cisaillement :$\mu = G$ où G est le module de cisaillement vu au premier chapitre de ce cours.

En dérivant l'énergie libre F par rapport à ϵ_{ik} , puis en inversant l'équation obtenue, on obtient deux nouvelles expressions de la loi de Hooke qui font intervenir le module de compression et le module de glissement :

$$\sigma_{ik} = K\epsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\epsilon_{ll}, ...(14)$$

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu}(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{\mu}, ...(15)$$

Note : on remarque ici que le lien entre ϵ_{ll} et σ_{ll} est déterminé par le seul module de compression uniforme K.

Application : compression uniforme

On considère un corps en compression uniforme. On suppose que la déformation est homogène, c'est-à-dire que le tenseur des déormation est constant dans tout le matériau. Grâce à la loi de Hooke, cela impose que le tenseur des contraintes est aussi homogène. On peut donc déterminer les σ_{ik} à partir des conditions aux limites (i. e. des forces qui s'appliquent à la surface).

Dans le cas d'une compression , les forces extérieures s'exercent normalement à la surface du matérau, et la contrainte correspondante est égale à $-p$. On a donc :

$$\sigma_{ik} = -p\ \delta_{ik}$$

soit :

$$\begin{matrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{matrix}$$

D'après la loi de Hooke (??) :

$$\epsilon_{ik} = -\frac{p}{3k}\delta_{ik}$$

$$\begin{matrix} -\frac{p}{3K} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{3K} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{3K} \end{matrix}$$

L'énergie libre s'exprime :

$$F = \frac{1}{2}\epsilon_{ik}\sigma_{ik} = \frac{p^2}{2K}$$

La variation relative de volume est :

$$\epsilon_{ll} = \frac{1}{3K}\sigma_{ll} = -\frac{p}{K}$$

Comme $\epsilon_{ll} = \delta V/V$:

$$\epsilon_{ll} = \frac{1}{3K}\sigma_{ll} = -\frac{p}{K}$$

Donc :

$$-\frac{\epsilon_{ll}}{p} = \frac{1}{3K}\sigma_{ll} = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial p})_T = \frac{1}{K}$$

$\frac{1}{K}$ est donc la compressibilité isotherme du matériau considéré

Traction ou compression simple d'une barre

La traction ou compression d'un barre est un autre exemple de déformation homogène utilisée très fréquemment.

On considère une barre soumise à une force de traction homogène sur la face perpendiculaire à l'axe Oz. La force par unité de surface est d'intensité σ.

La seule force non nulle est celle qui s'exerce dans la direction Oz sur la surface

de normale parallèle à Oz : $\sigma_{zz} = \sigma$. Toutes les autres composantes du tenseur des contraintes sont nulles :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{matrix}$$

Utilisons la loi de Hooke :

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu}(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll})$$

$$= \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma + \frac{1}{2\mu}(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\sigma}{9K} - \frac{\sigma}{6\mu}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma}{9K} + \frac{\sigma}{3\mu}$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0$$

On définit les **module d'Young** E et **coefficient de Poisson** ν :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma}{E}, ...(16)$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu\epsilon_{zz}$$

D'où :

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, ...(17)$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} = \frac{1}{2}\frac{3K-2\mu}{3K+\mu}, ...(18)$$

K et μ sont $\succ 0 \rightarrow E \succ 0$

Accroissement relatif de volume de la barre :

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{ll} = 2\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz} = (\frac{2}{9K} - \frac{1}{3\mu})\sigma + (\frac{1}{9K} + \frac{1}{3\mu})\sigma = \frac{3\mu\sigma}{9K\mu} = \frac{\sigma}{3K}$$

Energie libre de la barre :

$$F = \frac{1}{2}\epsilon_{ik}\sigma_{ik} = \frac{1}{2}\epsilon_{zz}\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\frac{3K+\mu}{9K\mu}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2E}$$

En général, lorsqu'on a affaire à une traction (ou compression) simple, on exprime tout en fonction de (E, ν) plutôt que (K, μ) ou (λ, μ).

Le calcul donne :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, ...(19)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, ...(20)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, ...(21)$$

Si on reporte ces valeurs dans les expressions établies précédemment, on obtient l'énergie libre élastique :

$$F_{el} = F - F_0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\sum_{i,k}\epsilon_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon_{ll}^2\right]$$

Troisième forme de la loi de Hooke :

Les équations (19) et (20) inject´ees dans (14) et (15) permettent de retrouver une troisiéme forme de la loi de Hooke :

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ik}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\epsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon_{ll}\delta_{ik}\right], ...(22)$$

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ik} - \nu\delta_{ik}\sigma_{ll}\right], ...(23)$$

Application : compression uniaxiale selon Oz :

C'est un exemple d'application de la traction d'une barre homogène. On considère la compression d'une barre maintenue sur les côtés de façon que ses dimensions latérales ne puissent pas varier :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{matrix}$$

On obtient donc pour le tenseur des contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\epsilon = \sigma_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\epsilon$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$$

En désignant la force de compression par unité de surface par $\sigma_{zz} = -p$, on a :

$$\epsilon_{zz} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}p$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p\frac{\nu}{1-\nu}$$

L'énergie libre élastique de la barre s'écrit :

$$F_{el} = F - F_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\sum_{i,k} \epsilon_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll}^2 \right]$$

$$F_{el} = \frac{p^2}{2E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$$

Chapitre 3

Quelques problèmes aux limites

3.1 Position des problèmes

On considère dans ce chapitre trois types des problèmes gouvernés par le système d'élasticité L. Pour $f \in L^2(\Omega)^2$ donné, on cherche u, si possible dans $H^2(\Omega)^2$, solution des Problèmes suivants :

$$(p_1) : \begin{array}{ll} -Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array}$$

$$(p_2) : \begin{cases} -Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u) \cdot \eta = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

$$(p_3) : \begin{cases} -Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u \cdot \eta = 0 & \text{sur } \Gamma \\ (\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Les conditions aux limites considérées dans les troix problèmes peut être interprétées physiquement, comme suit :

Pour le problème (p_1) ,on considère les équations du mouvement sur un domaine borné

Ω de $\mathbb{R}^2$ avec le déplacement u est nul sur le bord Γ. Dans le problème (p_2) on considère les mêmes équations de l'élasticité avec la condition de Dirichlet homogène sur une partie de la frontière Γ_1 (le déplacement est nul) et la condition de Neumann pour l'élasticité (la traction est nulle) sur l'autre partie Γ_2. Pour le problème (p_3) nous considérons les conditions du contact sans frottement, autrement dit, les mouvement tangentiels sont libres et la traction tangentiel est nulle.

3.2 Etude du problème (P_1)

3.2.1 Formulation variationnelle

Pour u solution du problème (p_1) et $v \in H^1(\Omega)^2$, on a :

$$\int_\Omega - Lu \cdot v dx = \int_\Omega f \cdot v \; dx, \; \forall v \in H^1(\Omega)^2,$$

où $Lu = \operatorname{div} \sigma(u) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}$, alors

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega f_i \cdot v_i \; dx, \; \forall v \in H^1(\Omega)^2,$$

en utilisant la formule de Green, on en déduit :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Gamma \left(\sigma_{ij}(u) \eta_j\right) v_i ds = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega f_i \; v_i dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega)^2,$$

alors

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx - \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Gamma (\sigma_{ij}(u) \eta) v_i ds = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega f_i \; v_i dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega)^2.$$

En utilisant le fait que $u = 0$ sur Γ alors $\sigma(u) \cdot \eta = 0$ sur $\Gamma \Rightarrow \int_\Gamma \sigma(u) \cdot \eta = 0$ (i.e. u est une solution du problème (p_1)), on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(\upsilon)\, dx = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega f_i \ \upsilon_i dx, \quad \forall \upsilon \in H^1(\Omega)^2 .$$

Si on impose au plus que $\upsilon \in H_0^1(\Omega)^2$, alors

$$\int_\Omega \sigma(u)\, \varepsilon(\upsilon)\, dx = \int_\Omega f \ \upsilon dx, \forall \upsilon \in H_0^1(\Omega)^2 .$$

En posant

$$a(u,\upsilon) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(\upsilon)\, dx,$$

$$l(\upsilon) = \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega f_i \ \upsilon_i dx,$$

et

$$V_1 = \left\{ \upsilon \in H^1(\Omega)^2 ; \upsilon = 0 \text{ sur } \Gamma \right\} = H_0^1(\Omega)^2 ;$$

On obtient la formulation variationnelle suivant :

$$(P_1') : \begin{cases} \text{trouver } u \in V_1 \text{tel que :} \\ a(u,\upsilon) = l(\upsilon), \forall \upsilon \in V_1 \end{cases}$$

3.2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Lemme 3.1 . *L'espace V_1 est un espace de Hilbert par rapport à la norme définie sur $H^1(\Omega)^2$ (i.e. $\|.\|_{H^1(\Omega)^2}$).*

Preuve

Il est claire que V_1 est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^2$. Et puisque $H^1(\Omega)^2$ est un espace de Hilbert, donc V_1 est aussi espace de Hilbert par rapport à la norme définie sur

$H^1(\Omega)^2$.

Proposition 3.2 . *Le problème* (P_1') *admet une solution unique (faible)* $u \in V_1$.

1. Continuité de a $(.,.)$

On a :

$$a(u,v) = a(v,u), \quad \forall u, v \in V_1$$

(i.e.$a(.,.)$ est symétrique), donc

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u)\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx \right| = \int_{\Omega} \sigma(u)\, \varepsilon(v)\, dx \\
&= \left| 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u)\;\; \varepsilon(v)\, dx + \lambda \int_{\Omega} tr(\varepsilon(u))\;\; tr\varepsilon(v)\, dx \right| \\
&\leq 2\mu \int_{\Omega} |\varepsilon(u)\;\; \varepsilon(v)|\, dx \;\; + \lambda \int_{\Omega} |tr(\varepsilon(u))\;\; tr\varepsilon(v)|\, dx \\
&\leq (2\mu + \lambda) \int_{\Omega} |\varepsilon(u)\;\; \varepsilon(v)|\, dx \\
&\leq (2\mu + \lambda) \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(u)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(v)|\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (2\mu + \lambda)\, \|u\|_{H^1(\Omega)^2}\, \|v\|_{H^1(\Omega)^2}
\end{aligned}$$

ce qui implique que $|a(u,v)| \leq C\, \|u\|_{H^1(\Omega)^2}\, \|v\|_{H^1(\Omega)^2}$ et donc $a(.,.)$ est continue.

2. Coercivité de a $(.,.)$

On a :

$$a(u,u) = \int_{\Omega} \sigma(u)\;\; \varepsilon(u)\, dx = 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u)\;\; \varepsilon(u)\, dx + \lambda \int_{\Omega} \sigma_{kk}(u)\;\; \varepsilon_{kk}(u)\, dx$$

puisque la deuxième somme dans la relation précédent est positive, on a

$$a\left(u,u\right)\geq 2\mu\sum_{i,j}\int_{\Omega}\left|\varepsilon_{ij}\left(u\right)\right|^{2}\ dx=2\mu\sum_{i,j}\ \left\|\varepsilon_{ij}\left(u\right)\right\|_{H^{1}(\Omega)}^{2}$$

et d'aprés l'inégalité de Korn on obtient :

$$a\left(u,u\right)\geq K\|u\|_{H^{1}(\Omega)^{2}}^{2}$$

où K est une constante positive. Ce qui montre la coercivité de $a\left(.,.\right)$.

3. Continuité de l

On a :

$$\left|l\left(\upsilon\right)\right|=\left|\int_{\Omega}f\ \upsilon dx\right|\leq\|f\ \|_{L^{2}(\Omega)}\|\upsilon\|_{L^{2}(\Omega)}\leq C\|\upsilon\|_{H^{1}(\Omega)^{2}}$$

d'où $\|l\|\leq C$.

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on déduit que (P_1') admet une solution unique $u\in V_1$.

Theorem 3.3 (P_1) *est équivalent au* (P_1').

L'implication $(P_1)\Rightarrow(P_1')$ est évidante, il suffit donc de démontrer que

$$(P_1')\Rightarrow(P_1)$$

Soit u solution du problème (P_1'), danc $u\in V_1$ et

$$a(u,\nu)=l(v),\forall v\in V_1,$$

alors

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(\nu)dx=\int_{\Omega}f_i\nu_i dx,\forall\nu\in V_1,$$

en utilisant la formule de Green on obtient

$$-\int_{\Omega}\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x}\nu_i dx+\int_{\Gamma}(\sigma_{ij}(u)\eta)\nu_i ds=\int_{\Omega}f_i\nu_i dx, \forall\nu\in V_1....(*).$$

En prenant $\nu=\varphi$ dant $\mathcal{D}(\Omega)$, on obtient :

$$-\int_{\Omega}\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x}\varphi_i=\int_{\Omega}f_i\varphi_i, \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Donc $-Lu=f$ au sens de distribution dant Ω, d'où l'équation de mouvement. Comme u est un élement dans l'espace variationel V_1, d'où

$$u=0. \text{ sur } \Gamma.$$

alors u solution du problème $(P_1)\square$.

3.3 Etude du problème (P_2)

Pour u solution du probème (P_2) et $\upsilon\in H^1(\Omega)^2$; on a :

$$\int_{\Omega}-Lu\ \upsilon dx=\int_{\Omega}f\ \upsilon dx,\ \forall\upsilon\in H^1(\Omega)^2,$$

ou sous la forme :

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}\upsilon_i dx=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}f_i\ \upsilon_i dx,\ \forall\upsilon\in H^1(\Omega)^2,$$

en utilisant la formule de Green en déduit :

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}(u)\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}dx-\int_{\Gamma}(\sigma_{ij}(u)\eta)\upsilon_i ds=\int_{\Omega}f_i\ \upsilon_i dx,\quad\forall\upsilon\in H^1(\Omega)^2,$$

alors

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\sigma_{ij}\left(u\right)\varepsilon_{ij}\left(\upsilon\right)dx-\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Gamma_1}\left(\sigma_{ij}\left(u\right)\eta_j\right)\upsilon_i ds+\int_{\Gamma_2}(\sigma(u)\eta)\upsilon_i ds=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}f_i\ \upsilon_i dx,\ \ \forall\upsilon\in H^1\left(\Omega\right)^2.$$

En utilisant le fait que $\sigma\left(u\right)\cdot\eta=0$ sur Γ_2 alors $\int_{\Gamma_2}(\sigma(u)\eta)\upsilon ds=0$

Si on impose la condition $v=0$ sur Γ_1 le terme $\int_{\Gamma}(\sigma(u)\eta)\upsilon$ est nul

alors

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\sigma_{ij}\left(u\right)\varepsilon_{ij}\left(\upsilon\right)dx=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}f_i\ \upsilon_i dx,\quad\forall\upsilon\in H^1\left(\Omega\right)^2.$$

En posant :

$$a\left(u,\upsilon\right)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\sigma_{ij}\left(u\right)\varepsilon_{ij}\left(\upsilon\right)dx,$$

$$l\left(\upsilon\right)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}f_i\ \upsilon_i dx,$$

et

$$V_2=\left\{\upsilon\in H^1\left(\Omega\right)^2;\upsilon=0\text{ sur }\Gamma_1\right\}.$$

On obtient la formulation variationnelle suivant :

$$(P_2'):\begin{cases}\text{trouver } u\in V_2 \text{ tel que :}\\ a\left(u,\upsilon\right)=l\left(\upsilon\right),\forall\upsilon\in V_2\end{cases}$$

3.3.1 Résultat d'existence et d'unicité

Lemme 3.4 . *L'espace V_2 est un espace de Hilbert par rapport à la norme définie sur $H^1\left(\Omega\right)^2$.*

Preuve

Il est claire que V_2 est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^2$. Et puisque $H^1(\Omega)^2$ est un espace de Hilbert, donc V_2 est aussi espace de Hilbert par rapport à la norme définie sur $H^1(\Omega)^2$.

Proposition 3.5 . *Le problème* (P_2') *admet une solution unique* $u \in V_2$.

La preuve est semblable pour le premier problème (P_1').

Theorem 3.6 (P_2) *est équivalent au* (P_2').

Il suffit de montrer que $(P_1') \Rightarrow (P_1)$ (interprétation variationnelle).

Soit u solution du problème (P_2'), danc $u \in V_2$ et

$$a(u,\nu) = l(v), \forall v \in V_2,$$

alors

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(\nu)dx = \int_\Omega f_i\nu_i dx, \forall \nu \in V_2,$$

en utilisant la formule de Green on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}\nu_i dx + \int_\Gamma (\sigma(u)\eta)\nu_i ds = \int_\Omega f_i\nu_i dx, \forall \nu \in V_2 .... (**).$$

En prenant $\nu = \varphi$ dant $\mathcal{D}(\Omega)$, on obtient :

$$-\int_\Omega \frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x}\varphi_i = \int_\Omega f_i\varphi_i, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Donc

$$-Lu = f \tag{i}$$

au sens de distribution dant Ω, d'où l'équation de mouvement. Comme u est un élement dans l'espace variationel V_2, d'où

$$u = 0, \text{ sur } \Gamma_1. \tag{ii}$$

Il reste donc à démontrer que

$$\gamma((\sigma(u).\eta)) = 0, \text{ sur } \Gamma_1.$$

On a $-Lu = f$, de la relation $(**)$, on déduit que

$$\int_{\Gamma_2} \sigma(u)\eta.\nu ds = 0, \forall \nu \in V_2.$$

et donc :

$$\langle \gamma(\sigma(u).\eta), \gamma(\nu) \rangle_{\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$$

.mais,puisque $\gamma(\nu)$ est arbitrairement choisie dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il en résulte que

$$\sigma(u).\eta = 0, \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}(\Gamma)}, \tag{iii}$$

de (i), (ii) et (iii) u est une solution du problème (P_2).

Remarque 3.7 *Même téchnique nous pouvons montrer que le problème (P_3) admet une solution unique dans l'espace*

$$V_2 = \left\{ v \in H^1 (\Omega)^2 ; v \cdot \eta = 0 \ sur \ \Gamma \right\}$$

Bibliographie

[1] BRIGITTE LUCQUINE, *Equation au dérivées partielles et leur approximation*, maître de conférences à l'universite Pierre et Marier curie(Paris VI).

[2] P A RAVIART & J M THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équation aux dérivées partielles,* Dunod Paris 1998.

[3] LAURENTDR MENZA, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles,*cassim Paris 2009.

[4] P. GRISVARD, *Singularité en élasticité.* Laboratiore de matématique I.M.S.P.Parc valrose Nice. France,27 juin 1988

[5] B. MEROUANI, *Comportements singuliers des solution du système de l'élasticité dans un polygone plan.* Thèse de doctora d'état,U.S.T.H.B, Alger, Nov. 1990.

[6] JOACHIM WEIDMANIN, *Linear operators in Hilbert space, Springer*-Verlag New York Heidlberg Berlin. Hattersheimam Main,the summer of 1976.

[7] P. G. CIARLET, *Elasticité tridimentionnelle,*Masson 1986 Paris