

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° :...../2019....



DOMAINE : Sciences de la matière

FILIERE : Physique

OPTION : Physique Energétique  
et Energies Renouvelables

Mémoire présenté pour l'obtention  
Du diplôme de Master Académique

Réalisé par :

**ZAABAR Hakima**

**BEKRI Sarra**

**Intitulé**

**Etude numérique sur la convection naturelle  
dans une ellipse uniformément chauffé immergé  
dans une clôture carré à différents positions**

**Soutenu le 30 /06 /2019 devant le jury composé de :**

Bouras Abd elkarim  
Taloub Djedid  
Benderradji Razik  
Nahoui Azdine  
Haddad Zakaria

Université Mohamed Boudiaf- M'sila  
Université Mohamed Boudiaf- M'sila  
Université Mohamed Boudiaf- M'sila  
Université Mohamed Boudiaf- M'sila  
Université Mohamed Boudiaf- M'sila

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

**Année universitaire : 2018/2019**



---

## **Remerciement**

Nous tenons à remercier :

Au terme des années de préparation de mémoire de master .Nous tenons remercier chaleureusement toutes les personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail :

### **Bekri Sarra**

Je remercie également le Docteur TALOUB Djedid pour la qualité du sujet, sont support et les orientations durant tout la réalisation de ce mémoire par ses conseils qui m'ont appris la patience. Je remercier mes parents.

### **Zaabar Hakima**

Je remercie également le Docteur TALOUB Djedid pour la qualité du sujet, sont support et les orientations durant tout la réalisation de ce mémoire par ses conseils qui m'ont appris la patience.



---

## **Dédécace**

### **Bekri Sarra**

Je dédie ce travail à toute ma famille, mon père et ma mère.  
Tous mes amis, et pour tous ce qui m'aiment.

### **Zaabar Hakima**

Je dédie ce travail à toute ma famille, mon père et ma mère.  
Tous mes amis, et pour tous ce qui m'aiment.

## Résumé

Dans ce mémoire, une étude numérique de la convection naturelle laminaire à deux dimensions est effectuée pour une température uniforme appliquée au cylindre elliptique intérieur dans une enceinte carrée remplie d'air ( $Pr = 0,7$ ) dans laquelle toutes les limites sont supposées isothermes (à une température basse constante). Le modèle mathématique développé est gouverné par les équations couplées de continuité, quantité de mouvement et énergie et est résolu par la méthode des volumes finis. Les effets de l'emplacement des cylindres verticaux et des nombres de Rayleigh sur l'écoulement du fluide et les performances de transfert de chaleur sont examinés. Le nombre de Rayleigh varie de  $10^3$  à  $10^6$  et l'emplacement du cylindre intérieur est modifié verticalement le long de l'axe de l'enceinte de  $-0,04$  à  $0,04$  vers le haut et vers le bas, respectivement. On constate que pour des nombres de Rayleigh faibles, l'influence sur le champ d'écoulement n'est pas grande, alors qu'à des nombres de Rayleigh élevés, les nombres de Rayleigh ont un effet considérable sur l'écoulement. De plus, les solutions numériques génèrent un champ d'écoulement à deux cellules entre le cylindre intérieur et l'enceinte. Aussi, le nombre de Nusselt moyen se comporte de manière non linéaire en fonction des emplacements. Les résultats sont présentés en termes de lignes de courant, d'isothermes, de nombres de Nusselt locaux et moyens. Les résultats détaillés du calcul numérique ont été comparés à ceux de la littérature et donnent un accord fiable.

**Mots clés:** Volume fini ; Convection naturelle ; Enceinte carrée ; Cylindre intérieur uniformément chauffé ; Emplacement vertical.

## Abstract

In this memoire, a numerical study of two dimensional steady natural convection is performed for a uniform heated temperature applied on the inner elliptic cylinder in a square air ( $Pr=0.7$ )filled enclosure in which all boundaries are assumed to be isothermal (at a constant low temperature). The developed mathematical model is governed by the coupled equations of continuity, momentum and energy and is solved by finite volume method. The effects of vertical cylinder locations and Rayleigh numbers on fluid flow and heat transfer performance are investigated. Rayleigh number is varied from  $10^3$  to  $10^6$  and the location of the inner cylinder is changed vertically along the centerline of the enclosure from  $-0.04m$  to  $0.04m$  upward and downward, respectively. It is found that at small Rayleigh numbers does not have much influence on the flow field while at high Rayleigh numbers have considerable effect on the flow pattern. In addition, the numerical solutions yield a two cellular flow field between the inner cylinder and the enclosure. Also, the total average Nusselt number behaves nonlinearly as a function of locations. Results are presented in terms of the streamlines, isotherms, local and average Nusselt numbers. Detailed results of the numerical has been compared with literature ones, and it gives a reliable agreement.

**Keywords:** Finished volume; Natural convection; square enclosure; inside cylinder uniformly heated; Vertical location.

## ملخص

في هذه المذكرة، تم إجراء دراسة عددية للحمل الطبيعي الثنائي الأبعاد للحرارة الحرارية الموحد المطبقة على الأسطوانة الإهليجية الداخلية في حاوية مربعة ( $Pr = 0,7$ ) مملوءة حيث يفترض أن كل الحدود متساوية الحرارة (ثابت درجة حرارة منخفضة وثابتة). حل المعادلات الرياضية يتم باستخدام طريقة الحجم المحدود. يتم فحص آثار موقع الاسطوانة العمودية وأرقام رايلي على تدفق السوائل وأداء نقل الحرارة. يتراوح عدد رايلي  $10^3$ - $10^6$  ويتم تغيير موقع الاسطوانة الداخلية عمودياً على طول محور العلية من  $-0.04$  إلى  $0.04$  بالزيادة وبالخفض، على التوالي. يمكن ملاحظة أنه بالنسبة عدد رايلي الصغيرة، فإن التأثير على حقل التدفق ليس كبيراً، في حين أن أعداد رايلي المرتفعة يكون لها تأثير كبير على التدفق. بالإضافة إلى ذلك، تولد الحلول الرقمية حقل تدفق من خليتين بين الأسطوانة الداخلية والغرفة. أيضاً، يتغير متوسط عدد نسلت بشكل غير خطي وفقاً للمواقع. يتم تقديم النتائج على شكل خطوط الحالية، متساوي الحرارة، أرقام نوسيلت المحلية والوسيلة. النتائج التفصيلية العددية قد تمت مقارنتها بنتائج بعض الدراسات العددية، ولقد أعطت اتفاقاً مقبول.

**الكلمات المفتاحية:** الحجم المنتهية، الحمل الحراري الطبيعي، غرفة مربعة مغلقة، تسخين موحد لأسطوانة، موقع عمودي.

## Table des Matières

Remerciement	
Dédicace	
Résumé	
Table des Matières.....	i
Liste des figures.....	iv
Liste des tableaux.....	vi
Nomenclature.....	x
<b>Introduction Générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Généralité et synthèse bibliographiques.....</b>	<b>5</b>
1.1. Introduction.....	5
1.2. Modes de transfert de chaleur.....	5
1.2.1. Transfert de chaleur par conduction dans les solides.....	6
1.2.2. Transfert de chaleur par rayonnement.....	6
1.2.3. Transfert de chaleur par convection.....	6
1.3. Types de convection.....	6
1.3.1. Convection forcée.....	6
1.3.2. Convection mixte.....	6
1.3.3. Convection naturelle.....	7
1.4. Convection laminaire ou turbulente.....	7
1.5. Domaines d'application de la convection naturelle.....	7
1.7. Convection naturelle entre deux cylindres.....	8
1.8. Problématique.....	12
<b>Chapitre 2 Formulation Mathématique.....</b>	<b>15</b>
2.1. Mise en équation du problème.....	15
2.1.1. Modèles physique.....	15
2.1.2. Modèle mathématique.....	16
2.1.2.1. Equations générales.....	16
2.1.2.1.1 Equation de continuité.....	16
2.1.2.1.2 Equation de quantité de mouvement (ou équation de Navier-Stokes).....	17
2.1.2.1.3. Equation de l'énergie.....	17
2.1.3. Formulation indicielle.....	18
2.1.4. Equations de bilan.....	18
2.1.5. Equations adimensionnées.....	19
2.1.6. Condition aux limites.....	19
2.1.7. Calcul du nombre de Nusselt.....	19
<b>Chapitre 3 Méthodes numériques.....</b>	<b>21</b>
3.1. Introduction.....	21
3.2. Maillage.....	21
3.3. Conditions initiales et conditions aux limites.....	23
3.4. Discrétisation et Résolution.....	24
3.4.1. Calcul de la vitesse sur les faces.....	24
3.4.2. Calcul de la pression sur les faces.....	25
3.4.3. Couplage pression –vitesse.....	25

---

3.4.4. Sous-relaxation.....	26
3.4.5. Résolution.....	26
3.4.6. Choix du maillage.....	27
3.4.7. Validation des résultats.....	28
1.5. Conclusion.....	29
<b>Chapitre 4 Résultats et discussions.....</b>	<b>30</b>
4.1. Caractéristique de base des isothermes et des lignes de courant.....	31
4.2. Isothermes et lignes de courant en fonction des localisations verticales ( $\delta$ ).....	32
4.3. Effets du nombre Nusselt local.....	37
4.4. Effets du nombre de Nusselt moyen .....	40
4.5. Conclusion.....	41
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>42</b>
<b>Résumé</b>	

## Liste des figures

Fig. 2.1. Modèle physique.....	17
Fig. 3.1. Etapes de résolution suivies par GAMBIT et FLUENT.....	23
Fig. 3.2. Maillage avec Gambit 2.1.....	24
Fig. 3.3. Système d'itération.....	26
Fig. 3.4 Convergence du nombre moyen de Nusselt le long de la paroi interne du cylindre chaud avec un raffinement de la grille pour $Ra = 10^6$ , $Pr = 0,7$ et $\delta = 0$ .....	28
Fig. 3.5 Comparaison des contours de température et des lignes de courant entre les travaux actuels et ceux de Kim et al. [5], à $\delta = 0.0$ pour deux nombres de Rayleigh différents de (a) $10^5$ et (b) $10^6$ .....	30
Fig. 4.1 Contours de la température et lignes de courant à $\delta = 0,0$ pour quatre nombres de Rayleigh différents de (a) $10^3$ , (b) $10^4$ , (c) $10^5$ et (d) $10^6$ .....	32
Fig. 4.2 Variations des isothermes et de lignes de courant pour différents $\delta$ à $Ra = 10^3$ .....	34
Fig. 4.3 Variations des isothermes et de lignes de courant pour différents $\delta$ à $Ra = 10^4$ .....	35
Fig. 4.4 Variations des isothermes et de lignes de courant pour différents $\delta$ à $Ra = 10^5$ .....	37
Fig. 4.5 Variations des isothermes et de lignes de courant pour différents $\delta$ à $Ra = 10^6$ .....	38
Fig 4.6 Distribution du nombre de Nusselt local le long des surfaces (A-B-C-D) de l'enceinte carrée à des positions différentes du cylindre elliptique intérieure pour différents nombres de Rayleigh.....	40
Fig 4.7 Nombre de Nusselt moyen le long du $\delta$ pour différents nombres de Rayleigh.....	42

---

**Liste des tableaux**

Tableau 3.1	Propriétés de fluide air.....	24
Tableau 3.2	Critères de résolution et coefficients de sous-relaxation utilisés .....	27
Tableau 3.3	Comparaison du nombre de Nusselt moyenne actuel avec ceux des études numériques précédentes.....	29

## Nomenclature

$C_p$	Chaleur spécifique à pression constante [ $J.kg^{-1}.K^{-1}$ ]
$g$	Accélération de la pesanteur [ $m.s^{-2}$ ]
$H$	Hauteur dimensionnelle de l'enceinte [ $m$ ]
$L$	Longueur dimensionnelle de l'enceinte [ $m$ ]
$T$	Température dimensionnelle [ $K$ ]
$T_0$	Température de référence [ $K$ ]
$T_{interne}$	Température de la paroi chaude [ $K$ ]
$T_{externe}$	Température de la paroi froide [ $K$ ]
$K$	Conductivité thermique [ $W.m^{-1}.K^{-1}$ ]
$u, v$	Composantes des vitesses [ $m.s^{-1}$ ]
$U, V$	Composantes adimensionnelles des vitesses
$x, y$	Coordonnées cartésiennes du système [ $m$ ]
$X, Y$	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles du système
$\Delta T$	Différence de température [ $K$ ]
$\beta_T$	Coefficient d'expansion thermique, [ $K^{-1}$ ]
$\Gamma$	Coefficient de diffusion
$\mu$	Viscosité dynamique [ $kg.m^{-1}.s^{-1}$ ]
$\nu$	Viscosité cinématique [ $m^2.s^{-1}$ ]
$\rho$	Masse volumique [ $kg.m^{-3}$ ]
$\theta$	Température adimensionnelle = $T - T_0 / \Delta T$
$\alpha$	Diffusivité thermique = $k / \rho C_p$
$Gr$	Nombre de Grashof
$Ra$	Nombre de Rayleigh
$Nu$	Nombre de Nusselt local
$Pr$	Nombre de Prandtl
$\bar{Nu}$	Nombre de Nusselt moyen
$i, j$	ième et jème composantes
$\phi$	La fonction de dissipation.
$\lambda$	Conductivité thermique, [ $W.m^{-1}.K^{-1}$ ]
$t$	Temps,

---

*	Valeur estimée
'	Valeur corrigée
$\vec{F}$	Représente les forces volumiques.
$\rho_0$	La masse volumique à $T_0$ .
$\beta$	Le coefficient de dilatation à pression constante.
$\frac{dE}{dt}$	La variation de l'énergie interne.
$q_s$	La source de chaleur interne.
$\delta_{ij}$	Fonction delta de Kronecker.
$\tau_{ij}$	Tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.
P	Pression, [N/m <sup>2</sup> ]
$\delta$	Angle d'inclinaison de paroi.
a	rayon petite
b	rayon grande

---

## *Introduction générale*

---

La convection naturelle dans les enceintes se rencontre dans de nombreux systèmes d'ingénierie tels que la convection dans les bâtiments, le mouvement des fluides dans les collecteurs d'énergie solaire, le refroidissement des circuits électroniques et le refroidissement des réacteurs nucléaires, etc. Le principal avantage de la convection naturelle réside dans la fiabilité, car le mouvement de l'air est simplement généré par des gradients de densité locaux en présence du champ gravitationnel, sans qu'il soit nécessaire d'utiliser des moteurs tels que des pompes ou des ventilateurs. L'écoulement et le transfert de chaleur entraînés par la flottabilité entre un cylindre et son milieu environnant constituent un problème d'une importance considérable. Ce problème a un large éventail d'applications. Les dispositifs de stockage d'énergie, les réservoirs de stockage de pétrole brut, les échangeurs de chaleur, le stockage de combustible irradié dans les centrales nucléaires sont peu nombreux. Le phénomène de la convection naturelle désigne le processus de transfert thermique conséquence du mouvement des particules d'un fluide entre des zones ayant des températures différentes. Ce qui entraîne un mélange des particules fluides, qui par la suite échangent de l'énergie et de la quantité de mouvement entre elles. La structure et l'intensité de la convection naturelle dépendent avec les sollicitations thermiques extérieures qui les déclenchent, la nature du fluide et de la géométrie de l'espace où le processus a lieu.

L'étude de la convection naturelle dans des enceintes fermées a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales. Beaucoup de travaux publiés ont été élaborés concernant la convection naturelle dans des enceintes où la géométrie, très variée,

est parallélépipédique [1-3], cylindrique [4,5], sphérique [6], ellipsoïdale[7] ou bien encore se présente sous forme d'anneaux cylindriques [8,9], sphériques [10,11], et elliptiques[12,13]. On trouve aussi des enceintes en forme de calotte [14], de lunule [15] ou de secteurs annulaires cylindriques [16].

La convection naturelle dans les enceintes fermées aux grandes valeurs du nombre de Rayleigh et dans beaucoup de travaux, les auteurs s'intéressent à la structure de l'écoulement : monocellulaire ou multicellulaire, même aux faibles valeurs du nombre de Rayleigh, il est souvent possible d'observer des écoulements multicellulaires. Dans ce cas, une augmentation de ce nombre, c'est-à-dire une intensification de la convection naturelle, doit pouvoir entraîner, selon la géométrie des parois et la viscosité du fluide, la création de tourbillons [17].

Dans la présente étude, nous nous sommes intéressés à la convection naturelle dans un espace annulaire délimité par deux cylindres d'axes horizontaux, cylindre interne elliptique chauffé et cylindre externe carré froide. Cet espace annulaire est parcouru par un fluide newtonien et incompressible, en régime laminaire et permanent.

Dans ce travail, nous avons étudié l'effet de différents emplacements verticaux du cylindre interne, et l'effet du nombre Rayleigh sur la structure de l'écoulement, les distributions de la température et la fonction de courant ainsi que les taux de transfert de chaleur représentés par les nombres locaux et moyens de Nusselt.

La présente mémoire se répartit en quatre chapitres. Le premier chapitre consiste à une synthèse bibliographique sur les principales thématiques abordées par les chercheurs sur la convection naturelle dans les enceintes fermées et entre deux systèmes annulaires. Le deuxième et le troisième chapitre sont consacrés à la formulation mathématique et la méthode numérique. En premier, lieu on introduit les équations de conservation qui régissent l'écoulement ainsi que les conditions aux limites. Ensuite, une description de la méthode numérique utilisée est évoquée. Une mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes, la discrétisation des équations, l'analyse et le choix du maillage, et la validation des résultats obtenus, ainsi que les conditions de convergence sont présentées également dans le troisième chapitre.

Une simulation numérique détaillée des champs dynamique et thermique des écoulements de convection naturelle dans la configuration proposée à un nombre de Rayleigh variable dans la gamme de  $10^3$  à  $10^6$  pour chaque emplacement  $\delta = (-0.01, -0.025,$

-0.03, -0.04, +0.01, +0.025, +0.03, +0.04m) fait l'objet du quatrième chapitre résultats et discussions.

Nous terminerons cette thèse par une conclusion générale sur les résultats obtenus au cours de cette étude et par l'énoncé des perspectives à venir.

### References

- [1] J. N. Arnold, I. Catton, and D. K. Edwards, Experimental investigation of natural convection in inclined rectangular regions of differing aspect ratios, *ASME J. Heat Transfer*, Vol.98, pp. 67-71. (1976).
- [2] S. J. M. Linthorst, W. M. M. Schinkel, and C. J. Hoogendoorn, Flow structure with natural convection in inclined air-filled enclosures, *ASME J. Heat Transfer*, Vol.103, pp. 535-539. (1981).
- [3] Yewell (R.), Poulikakos (D.) and Bejan (A.), Transient natural convection experiments in shallow enclosures, *J. Heat Transfer*, Vol.104, pp. 533-538. (1982).
- [4] R. J. Kee, C. S. Landram, and J. C. Miles, Natural convection of a heatgenerating fluid within closed vertical cylinders and spheres, *J. Heat Transfer*, Vol.98, pp. 55-61 (1976).
- [5] J. H. Lee, W. H. Park and M. Daguene, Theoretical study of the natural convection flows in a partially filled vertical cylinder subjected to a constant wall temperature, 2nd ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference, Mars 22-27, Honolulu, Hawaii, pp. 1-6. (1984).
- [6] Yoshihiro Mochimaru, Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity, *Heat Transfer. Japanese Research*, Vol. 18, N°4, pp. 9-19. (1989).
- [7] S. Najoua, Etude numérique de la convection dans un ellipsoïde de révolution de grand axe vertical et dans un cylindre horizontal de section elliptique. Thèse de Doctorat, Université de Perpignan. (1996).

- 
- [8] E. H. Bishop, and C. T. Carley, Photographic studies of natural convection between concentric cylinders, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute Proceedings of the 1966. pp. 63-78, Stanford University Press, Stanford. (1966).
- [9] L. R. Mack, and E. H. Bishop, Natural convection between horizontal concentric cylinders for low Rayleigh numbers, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., XXI, Pt. 2, pp. 223-241. (1968).
- [10] E. H. Bishop, R. S. Kolfiat, L. R. Mack, and J. A. Scanlan, Convective heat transfer between concentric spheres, Heat Transfer and Fluid Mechanics institute Proceedings of the 1964, pp. 69-80, Stanford University Press, Stanford. (1964).
- [11] L. R. Mack, and H. Hardee, Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.11, pp. 387-396. (1968).
- [12] G. Guj, and F. Stella, Natural convection in horizontal eccentric annuli: numerical study, Numer. Heat. Trans., A 27, pp. 89-105. (1995).
- [13] G. Guj, and F. Stella, Vorticity-Velocity formulation in the computation of flows in multiconnected domains, Int. J. Numer. Meth. Fluids., 9, pp.1285-1298. (1989).
- [14] J. Sarr, Contribution à l'étude de la convection naturelle dans une enceinte fermée limitée par deux cylindres concentriques horizontaux et deux plans diamétraux, Thèse de Doctorat, Université de Perpignan. (1993).
- [15] A. Doumbia, Contribution à l'étude de la convection naturelle thermique dans un fluide newtonien situé dans l'espace d'intersection de deux cylindres horizontaux, Thèse de Doctorat, Université de Perpignan. (1992).
- [16] T. Kassem, Contribution à l'étude de la convection naturelle entre deux cylindres excentrés horizontaux, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne. (1989).
- [17] M. Djezzar, Contribution à l'étude de la convection naturelle, dans différentes espaces annulaires elliptiques confocaux, soumis à différentes conditions de chauffage, thèse de Doctorat, Université Mentouri Constantine. (2005).

# Chapitre

# 1

## *Généralité et synthèse bibliographiques*

---

### **1.1. Introduction**

Dès qu'un de système présente deux espaces à température différentes, un transfert de chaleur prend naissance. Dans des installations industrielles, le problème est soit de réduire ce transfert (isolation), soit de le canaliser (échangeur), soit de le transformer (machine thermique). [1]

### **1.2. Modes de transfert de chaleur**

Deux corps à températures différentes échangent de l'énergie sous forme de chaleur jusqu'à disparition complète de leur différence de température. Cet échange peut se faire suivant trois modes de transmission fondamentaux :

- La conduction,
- Le rayonnement,
- La convection,

#### **1.2.1. Transfert de chaleur par conduction dans les solides**

Le processus de transfert de chaleur par conduction s'appuie sur un milieu matériel sans mouvement de matière et est dû à des phénomènes physiques microscopiques (agitation des atomes ou des molécules, flux d'électrons libres...). Il peut être vu comme un transfert d'énergie des particules les plus énergétiques (les particules chaudes qui ont une énergie de vibration élevée) vers les particules les moins énergétiques (les particules froides d'énergie de vibration moins élevée), dû aux collisions entre particules. Dans les solides, le transfert d'énergie peut également se produire sous l'effet du déplacement d'électrons libres dans le

réseau cristallin (par exemple pour les métaux). Ainsi les bons conducteurs d'électricité sont en général également de bons conducteurs de la chaleur. [2]

### **1.2.2. Transfert de chaleur par rayonnement**

Tout corps matériel émet et absorbe de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps séparés par du vide ou un milieu semi transparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, donc sans support matériel. Le phénomène d'émission d'un corps correspond à la conversion d'énergie matérielle (agitation des électrons constituant la matière dont l'intensité dépend de la température) en énergie radiative. Le phénomène d'absorption est la conversion inverse. [2]

### **1.2.3. Transfert de chaleur par convection**

La convection est le mode de transmission qui implique le déplacement d'un fluide gazeux ou liquide (écoulement) et échange avec une surface qui est à une température différente. *exemple* : C'est ce qui se passe le long d'un radiateur. L'air froid s'échauffe au contact avec le radiateur, se dilate et monte sous l'effet de la poussée d'Archimède. Il est alors remplacé par de l'air froid et ainsi de suite ; il ya existence de courants de fluide dans l'air ambiant. On distinguera la convection forcée (due à l'action d'une pompe, ventilateur...) de la convection naturelle dans laquelle le mouvement du fluide est créé par des différences de densité, elles mêmes provoquées par des différences de température. [3]

## **1.3. Types de convection**

### **1.3.1. Convection forcée**

Ce 2eme type de convection se produit quand le mouvement du fluide est impose par une intervention extérieure indépendante de la différence de température. Par exemple : une pompe ou un ventilateur ou un agitateur ou même le vent. en convection forcée, la poussée d'Archimède est négligeable devant les forces servant à mettre le fluide en mouvement. C'est le cas par exemple du refroidissement des moteurs à combustion interne : la pompe à eau pousse le liquide de refroidissement a travers le moteur puis dans l'échangeur. [4]

### **1.3.2. Convection mixte**

Même en convection forcée, les différences de densité créent un écoulement parasite, en général insignifiant par rapport à l'écoulement principal. On parle de convection mixte quand les 2 phénomènes coexistent. [5]

### 1.3.3. Convection naturelle

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité due au non uniformité du champ de température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre. L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié. La définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale. Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle. [6]

### 1.4. Convection laminaire ou turbulente

En régime de convection laminaire la vitesse du fluide et la température ne dépendent pas du temps par opposition, en régime de convection turbulente l'écoulement est composé d'un ensemble de tourbillons de différentes tailles et intensités. La conséquence est que la vitesse et la température son fonction du temps. [7]

### 1.5. Domaines d'application de la convection naturelle

Les applications de transfert thermique sont variées, dans lesquelles la convection naturelle est le phénomène le plus dominant. La meilleure compréhension de phénomène augment le nombre d'application et mène à un certain nombre de conception industrielles et environnement sophistiquées. Toutefois, les couts de fonctionnement sont importantes, les petites améliorations d'efficacité sont essentielles et peuvent jouer un grand rôle dans la consommation d'énergie. En outre, les problèmes océanographiques et atmosphériques tels que les effets de serre, les changements extrêmes de climat, ainsi que les problèmes technologiques, à savoirs les équipements électriques et les réactions nucléaires, les appareils ménagers, les réfrigérations et les échangeurs de chaleur sont tous des problèmes, qui ont donné un intérêt particulier à cette science [8].

### 1.6. Convection naturelle entre deux cylindres

La convection naturelle dans les enceintes se rencontre dans de nombreux systèmes d'ingénierie tels que la convection dans les bâtiments, le mouvement des fluides dans les collecteurs d'énergie solaire, le refroidissement des circuits électroniques et le refroidissement des réacteurs nucléaires, etc. Le principal avantage de la convection naturelle réside dans la fiabilité, car le mouvement de l'air est simplement généré par des gradients de densité locaux en présence du champ gravitationnel, sans qu'il soit nécessaire d'utiliser des moteurs tels que des pompes ou des ventilateurs. L'écoulement et le transfert de chaleur entraînés par la flottabilité entre un cylindre et son milieu environnant constituent un problème d'une importance considérable. Ce problème a un large éventail d'applications. Les dispositifs de stockage d'énergie, les réservoirs de stockage de pétrole brut, les échangeurs de chaleur, le stockage de combustible irradié dans les centrales nucléaires sont peu nombreux. Des études considérables ont été consacrées aux problèmes de l'aspect. Karim et al. [9] ont démontré expérimentalement l'influence du confinement horizontal sur le transfert de chaleur autour d'un cylindre pour des nombres de Rayleigh allant de  $10^3$  à  $10^5$ . Ghaddar [10] a étudié la convection naturelle à partir d'un cylindre horizontal à chauffage uniforme placé dans une enceinte rectangulaire remplie d'air. Il a trouvé une relation entre le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Rayleigh. Fu et al. [11] ont utilisé une méthode d'éléments finis pour étudier l'amélioration de la convection naturelle d'une enceinte grâce à un cylindre circulaire en rotation situé près d'un mur chaud. Ils ont conclu que la direction du cylindre en rotation jouait un rôle important dans l'amélioration du transfert de chaleur par convection naturelle dans l'enceinte. Le flux de convection laminaire autour d'un cylindre carré chauffé et horizontal tournant lentement dans une enceinte circulaire concentrique a été examiné numériquement par Yang et Farouk [12]. Moukalled et Acharya [13] ont étudié les champs thermiques et les champs d'écoulement entre l'enceinte carrée externe à basse température et le cylindre circulaire interne à haute température. Les résultats ont montré que lorsque le nombre de Rayleigh était constant, la contribution de la convection au transfert de chaleur total diminuait avec une valeur de rapport d'aspect croissante. Lacroix et Joyeux [14] ont réalisé une étude numérique de transfert de chaleur par convection naturelle à partir de deux cylindres chauffés horizontaux limités à une enceinte rectangulaire ayant une conductance de paroi finie. Ils ont indiqué que la conduction thermique de la paroi réduit la différence de

température moyenne à travers la cavité, partiellement stabilisée l'écoulement et une diminution de transfert de chaleur par convection naturelle autour des cylindres.

Seo et al. [15] ont étudié des simulations numériques tridimensionnelles de la convection naturelle dans une longue enceinte rectangulaire, froide et contenant un cylindre circulaire chaud ou un cylindre elliptique. Quatre rayons des cylindres intérieurs ont été considérés dans l'intervalle de nombres de Rayleigh de  $10^4 \leq Ra \leq 10^6$  comme paramètres clés de la simulation pour étudier l'effet de taille des cylindres circulaires et elliptiques. Les effets détaillés ont été analysés par visualisation des iso-surfaces tridimensionnelles de la température et de structure tourbillonnaires, ainsi que de la tridimensionnalité du système. Les caractéristiques de transfert de chaleur ont été affectées par le rayon des cylindres circulaires et elliptiques. Park et al. [16-17] ont examiné numériquement la convection naturelle bidimensionnelle dans une enceinte carrée avec une rangée verticale d'un cylindre elliptique chaud et d'un cylindre circulaire chaud avec des nombres de Rayleigh de l'ordre de  $10^4 \leq Ra \leq 10^6$ . Les effets de la position et de l'angle d'inclinaison du cylindre elliptique ont été étudiés. Les effets du rapport de forme du cylindre elliptique dans la gamme de  $0,25 \leq AR \leq 4,00$  ont été étudiés. La performance thermique et de la stabilité écoulement ont été influencés par la position et l'angle d'inclinaison du cylindre elliptique. Des simulations numériques bidimensionnelles ont été menées pour étudier la convection naturelle dans une enceinte à quatre cylindres dans une matrice de diamants. Les phénomènes de convection induits par la différence de température entre les surfaces chaudes des cylindres et les parois de l'enceinte ont été étudiés en utilisant différents nombres de Rayleigh ( $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ ) et des distances entre les cylindres voisins ( $0,3 \leq \varepsilon \leq 0,7$ ). Les caractéristiques de transfert de chaleur ont également été étudiées en ce qui concerne la fréquence primaire et la transition du régime d'écoulement de l'état stable à l'état instable avec un nombre de Rayleigh de  $Ra = 10^6$  relativement élevé Mun et al. [18]. Chatterjee et al. [19] ont déployé un calcul numérique en volume fini pour étudier la convection naturelle hydromagnétique bidimensionnelle dans une enceinte carrée refroidie en présence de quatre cylindres circulaires internes chauffés de forme identique. Les cylindres circulaires intérieurs sont placés dans un réseau rectangulaire à égale distance l'un de l'autre à l'intérieur de l'enceinte et se déplaçant le long des diagonales de l'enceinte. Un champ magnétique uniforme est appliqué le long de la direction horizontale perpendiculaire au mur vertical. Des simulations sont effectuées pour une gamme de paramètres de contrôle tels que les nombres de Rayleigh  $10^3$  à  $10^6$ , et la distance horizontale et verticale sans dimension entre le centre d'un cylindre et le centre d'un autre cylindre de 0,3 à 0,7.

L'étude vise en particulier à comprendre les effets de l'emplacement des cylindres dans l'enceinte sur le transport magnéto convectif lorsqu'ils se déplacent le long des diagonales de l'enceinte. Ils ont observé que le comportement instable des flux et des champs thermiques à des nombres de Rayleigh relativement plus grands et pour certaines positions du cylindre. Le transfert de chaleur dépend fortement de la position des cylindres et de la force du champ magnétique. Park et al. [20] ont examiné la convection naturelle induite par une différence de température entre une enceinte carrée externe froide et deux cylindres circulaires internes chauds. La méthode des volumes finis est utilisée, les cylindres intérieurs situés à différentes positions de l'axe central vertical de l'enceinte pour différents nombres de Rayleigh dans la plage  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ . Les résultats dans le cas de deux cylindres sont comparés à ceux dans le cas d'un seul cylindre afin de voir l'effet de l'interaction entre les deux cylindres chauds internes adjacents en plus de l'interaction entre deux cylindres internes chauds et les parois froides de l'enceinte. La distribution des isothermes et des lignes de courant finit par atteindre un état stable ou passe de l'état stable à l'état instable, en fonction des valeurs du nombre de Rayleigh et de la position du cylindre dans l'enceinte. Ils ont obtenu la distribution des nombres de Nusselt locaux et moyennes pour différents nombres de Rayleigh et les positions des cylindres. Hussein [21] a réalisé une simulation numérique en volume fini de la convection naturelle dans une cavité remplie d'air en parallélogramme, comportant un cylindre circulaire concentrique chauffé. Les parois latérales gauche et droite de la cavité sont maintenues à une température uniforme et froide, tandis que les parois supérieures et inférieures de celle-ci sont considérées isolées thermiquement. Il a pris en compte une large gamme de paramètres importants tels que le nombre de Rayleigh, l'angle d'inclinaison et les positions verticales des cylindres. Ces résultats montrent que la force de la circulation d'écoulement et l'épaisseur de la couche limite thermique autour du cylindre circulaire chaud augmentent considérablement lorsque le nombre de Rayleigh augmente. De plus, pour augmenter la circulation dans la cavité parallélogrammique, il est recommandé de faire descendre le cylindre interne jusqu'à atteindre  $[\delta = -0,2]$  et d'incliner les flancs de la cavité parallélogrammique à  $[\Phi = 15^\circ]$ . De plus, il a constaté que pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison, les nombres moyens de Nusselt à la surface interne du cylindre et aux deux flancs de la cavité diminuent lorsque le cylindre se déplace vers le haut, tandis qu'ils augmentent lorsque le cylindre se déplace vers le bas. Un problème de convection mixte stable laminaire dans une enceinte carrée bidimensionnelle de largeur et de hauteur (L), avec un cylindre circulaire tournant de rayon ( $R = 0,2 L$ ) enfermé à l'intérieur.

La solution est réalisée pour analyser la convection mixte dans cette enceinte où la paroi latérale gauche est soumise à une température isothermique supérieure à celle de la paroi latérale droite opposée. Les parois supérieure et inférieure de l'enceinte sont considérées comme adiabatiques. L'écoulement des fluides et les champs thermiques ainsi que le nombre de Nusselt moyen sont présentés pour les nombres de Richardson allant de 0, 1, 5 et 10, tandis que les nombres de Reynolds vont de 50, 100, 200 et 300. Les effets de divers emplacements et de la conductivité thermique solide-fluide les rapports sur le processus de transport de chaleur sont étudiés. Les effets de l'emplacement des cylindres verticaux et des nombres de Rayleigh sur l'écoulement du fluide et les performances de transfert de chaleur sont examinés. Les résultats expliquent que l'augmentation des nombres de Richardson et de Reynolds joue un rôle important dans les champs de flux et de température et que l'emplacement des cylindres en rotation a un effet important sur l'amélioration du transfert de chaleur par convection dans l'enceinte carrée. Les résultats expliquent également que la valeur du nombre de Nusselt moyenne augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds et de Richardson et que le phénomène de convection est fortement affecté par ces paramètres Hussain et al. [22-23]. Lee et al. [24-25] ont effectué des calculs numériques pour la convection naturelle induite par une différence de température entre un cylindre carré extérieur froid et un cylindre circulaire intérieur chaud. La méthode des volumes finis est utilisée pour étudier une convection naturelle à deux dimensions pour différents nombres de Rayleigh variant de  $10^3$  à  $10^6$ . L'emplacement du cylindre circulaire intérieur est modifié horizontalement le long de la ligne centrale de l'enceinte carrée ou en diagonale le long d'une ligne diagonale de l'enceinte carrée. Ils ont étudié les effets de l'emplacement du cylindre intérieur dans une enceinte et de la convection induite par la flottabilité sur le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide. Le nombre, la taille et la formation de la cellule dépendent fortement du nombre de Rayleigh et de la position du cylindre circulaire intérieur. L'existence de pics locaux du nombre de Nusselt le long des surfaces du cylindre et de l'enceinte est déterminée par l'intervalle et le panache thermique régis par la conduction et la convection, respectivement.

### 1.7. Problématique

Ces revues nous ont permis d'identifier l'ensemble de thématiques qui a été approché par les chercheurs dans la convection naturelle dans un espace annulaire.

Dans la présente étude, nous nous sommes intéressés à la convection naturelle dans un espace annulaire délimité par deux cylindres, cylindre interne elliptique chauffé et cylindre externe carré froide. Cet espace annulaire est parcouru par un fluide newtonien, incompressible, en régime laminaire et permanent. Les effets de l'emplacement des cylindres verticaux et des nombres de Rayleigh sur l'écoulement du fluide et les performances de transfert de chaleur sont examinés. Le nombre de Rayleigh varie de  $10^3$  à  $10^6$  et l'emplacement du cylindre intérieur est modifié verticalement le long de l'axe de l'enceinte vers le haut et vers le bas. L'écoulement, les distributions de la température et de la fonction de courant ainsi que sur les taux de transfert de chaleur représentés respectivement par les nombres de Nusselt locaux et moyens.

### .Références

- [1] J. Crabol, livre, transfert de chaleur tome 1 – les principes.
- [2] Sophie Mergui, livre, Transferts thermiques.
- [3] N. Errien, livre, Transfert thermique, Faculté des Sciences. Département de Physique. Université du Maine.
- [4] I. Kélibia . Convection thermique. Département génie des procédés. 2015/2016.
- [5] S. Bories, M. Prat, Transferts de chaleur dans les milieux poreux. Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse.
- [6] S. Hicham. Etude numérique de la convection naturelle dans les enceintes: Nanofluide. Thèse doctorat. (2015).
- [7] A. Giovannini et B. Bedat livre, Transfert de chaleur, Cépadués - Edition.
- [8] S. Bories, A. Mojtabi, M. Prat et M. Quintard, Transferts de chaleur dans les milieux poreux Conduction, convection, rayonnement ». Techniques de l'Ingénieur, 8250 (2008).

- [9] F. Karim, B. Farouk, I. Namer, "Natural convection heat transfer from a horizontal cylinder between vertical confining adiabatic walls", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 291–298, (1986).
- [10] N.K. Ghaddar, "Natural convection heat transfer between a uniformly heated cylindrical element and its rectangular enclosure", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 2327–2334, (1992).
- [11] W. Fu, C. Cheng, W. Shieh, "Enhancement of natural convection heat transfer of an enclosure by a rotating circular cylinder", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 1885–1897, (1994).
- [12] L. Yang, B. Farouk, "Mixed convection around heated rotating horizontal square cylinder in a circular enclosure", *Numerical Heat Transfer A*, Vol. 28, pp. 1–18, (1995).
- [13] F. Moukalled, S. Acharya, "Natural convection in the annulus between concentric horizontal circular and square cylinders", *Journal of Thermo physics Heat Transfer*, Vol. 10, pp. 524–531, (1996).
- [14] M. Lacroix, A. Joyeux, "Coupling of wall conduction with natural convection from heated cylinders in a rectangular enclosure", *International Communication of Heat and Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 143–151, (1996).
- [15] Young Min Seo, Man Yeong Ha, Yong Gap Park, "A numerical study on the three-dimensional natural convection with a cylinder in a long rectangular enclosure. Part I: Size effect of a circular cylinder or an elliptical cylinder", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 134, pp. 420-436, (2019).
- [16] S. H. Park, Y. M. Seo, M. Y. Ha, and Y. G. Park, "Natural convection in a square enclosure with different positions and inclination angles of an elliptical cylinder. Part I: A vertical array of one elliptical cylinder and one circular cylinder," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 126, pp. 173–183, (2018).
- [17] Hyun Woo Cho, Yong Gap Park, Man Yeong Ha. "The natural convection in a square enclosure with two hot inner cylinders, Part I: The effect of one elliptical cylinder with various aspect ratios in a vertical array", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 125, pp. 815-827. (2018).

- [18] Gi Su Mun, Young Min Seo, Yong Gap Park, Man Yeong Ha, "Natural convection in a cold enclosure with four hot inner cylinders in a diamond array (Part-II: Effect of unequal horizontal and vertical distances of inner cylinders)", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 120, pp. 1365-1373(2018).
- [19] Dipankar Chatterjee, Satish Kumar Gupta, "Magneto hydrodynamic Natural Convection in a Square Enclosure with Four Circular Cylinders Positioned at Different Rectangular Locations", *Heat Transfer Engineering*, Vol. 38 (17), pp. 1449-1465, (2017).
- [20] Yong Gap Park, Man Yeong Ha, Changyoung Choi, Jaehyun Park, "Natural convection in a square enclosure with two inner circular cylinders positioned at different vertical locations", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 77, pp. 501-518, (2014).
- [21] Ahmed Kadhim Hussein, "Computational analysis of natural convection in a parallelogrammic cavity with a hot concentric circular cylinder moving at different vertical locations" *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, pp. 126-133, (2013).
- [22] Salam Hadi Hussain, Ahmed Kadhim Hussein, "Mixed convection heat transfer in a differentially heated square enclosure with a conductive rotating circular cylinder at different vertical locations", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 38 (2), pp. 263-274, (2011).
- [23] Salam Hadi Hussain, Ahmed Kadhim Hussein, "Numerical investigation of natural convection phenomena in a uniformly heated circular cylinder immersed in square enclosure filled with air at different vertical locations", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37 (8), pp. 1115-1126, (2010).
- [24] J.M. Lee, M.Y. Ha, H.S. Yoon, "Natural convection in a square enclosure with a circular cylinder at different horizontal and diagonal locations", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53 (25-26), pp. 5905-5919, (2010).
- [25] B.S. Kim, D.S. Lee, M.Y. Ha, H.S. Yoon, "A numerical study of natural convection in a square enclosure with a circular cylinder at different vertical locations" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51 (7-8), pp. 1888-1906, (2008).

# Chapitre

## 2

### *Formulation mathématique*

Ce chapitre présente la formulation mathématique des équations de conservation qui régissent les écoulements. Ensuite nous présentons la description de la méthodologie numérique à la base de la résolution des équations du mouvement et de l'énergie.

#### **2.1. Mise en équation du problème**

##### **2.1.1. Modèles physique**

Figure 2.1 présente le modèle physique du travail actuel. Le problème traité est un cylindre elliptique avec une excentricité  $e (=0.8)$ , situé à l'intérieur d'une clôture cylindre de type carré caractérisé par ( $L=14\text{cm}$ ). Les parois de la clôture extérieur carré a été maintenue à une basse température constante  $T_F$ , et le cylindre intérieur ellipse est maintenu à température élevée constante  $T_C$ . Dans le présent travail le nombre de Prandtl,  $Pr$ , est 0.7. Le nombre de Rayleigh,  $Ra$ , varie de  $10^3$  à  $10^6$  et l'emplacement du cylindre intérieur change verticalement le long de l'axe de l'enceinte de  $\delta$  ( $=-0,04\text{m}$  à  $0,04\text{m}$ ) vers le haut et vers le bas, respectivement. Les propriétés de fluide Newtonien sont également constantes, et l'approximation de Boussinesq est appliquée pour modeler l'effet de flottabilité. L'accélération due à la pesanteur agit dans la direction négative  $y$ . Les effets visqueux de dissipation sont négligeables.

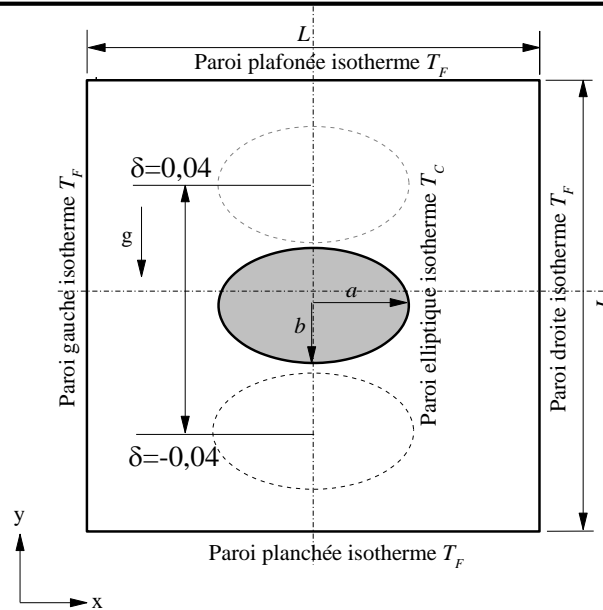


Fig 2.1. Modèle physique

### 2.1.2. Modèle mathématique

Les équations présentées dans cette partie sont basées sur des hypothèses qu'il convient de rappeler :

- l'écoulement est stationnaire
- l'écoulement est bidimensionnel
- le fluide est supposé newtonien
- le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable
- le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable
- la variation de la masse volumique n'est considérée que dans le terme de la poussée thermique d'Archimède et elle est supposée constante (égale à  $\rho_0$ ) pour les autres termes des équations
- le volume reste constant sous l'action d'une pression externe (fluide isovolume), alors que sa masse volumique varie linéairement telle que  $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$  où  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique et  $\rho_0$  la masse volumique à la température de référence  $T_0$  définie par :  $T_0 = \frac{T_C + T_F}{2}$

#### 2.1.2.1. Equations générales

Le traitement du problème physique envisagé nécessite l'utilisation d'équations gouvernantes qui sont des équations aux dérivées partielles déduites des principes classiques de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

### 2.1.2.1.1 Equation de continuité

Elle est déduite du principe de conservation de la masse et s'exprime sous la forme :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

### 2.1.2.1.2 Equation de quantité de mouvement (ou équation de Navier-Stokes)

Pour un écoulement incompressible ( $\rho = Cte$ ) à viscosité constante ( $\mu = Cte$ ). L'expression de la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide Newtonien incompressible dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est donnée par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \overrightarrow{\operatorname{grad} p} + \mu \Delta \vec{v} \quad (2.2)$$

$\vec{F}$  : représente les forces volumiques.

Où  $p$  est la pression et  $\mu$  la viscosité du fluide

L'équation (2.2) se simplifie dans le cadre des hypothèses (d'Overbeck- Boussinesq) suivantes :

La densité s'exprime comme une fonction linéaire en température. On peut écrire :

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 - \beta(T - T_0)) \quad (2.3)$$

$T_0$  : La température de référence.

$\rho$  : La masse volumique

$\rho_0$  : La masse volumique à  $T_0$

Sachant que :  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$

$\beta$  : Le coefficient de dilatation à pression constante.

L'équation (2.2) s'écrit alors :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\operatorname{grad} p} + \mu \Delta \vec{v} \quad (2.4)$$

$$\rho_0 \cdot (1 - \beta(T - T_0)) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_0 \cdot (1 - \beta(T - T_0)) \vec{g} - \overrightarrow{\operatorname{grad} p^*} + \mu \Delta \vec{v} \quad (2.5)$$

Dans la composition  $\rho = \rho_0 - \rho_0 \cdot \beta \cdot (T - T_0)$  ; le premier terme  $\rho_0$  ne contribue pas au mouvement il est simplement pris en compte dans le terme de pression motrice par :

$$p^* = p + \rho_0 \cdot g \cdot z.$$

La deuxième terme est le moteur de mouvement et doit être gardé dans les équations de Navier-Stokes.

Par contre, la décomposition  $\rho$  ne fait que modifier légèrement le terme d'inertie par rapport à  $\rho_0 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$  et on peut faire l'approximation :

Si  $\beta \cdot (T - T_0) \ll 1 \Rightarrow \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cong \rho_0 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$ , le terme  $\beta \cdot (T - T_0) \cdot \rho_0 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$  étant d'un ordre de grandeur inférieur.

Et finalement :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\text{grad}p^*} - \beta \cdot (T - T_0) \cdot \vec{g} + \mu \cdot \Delta \vec{v} \quad (2.6)$$

### 2.1.2.1.3. Equation de l'énergie

L'équation de conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique. Ce principe met en relation les différentes formes d'énergie, soit :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \text{div}(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) + T \cdot \beta \cdot \frac{dp}{dt} + \phi + q_s \quad (2.7)$$

Avec :  $dE = C_p \cdot dT$

Où :

$\frac{dE}{dt}$  : La variation de l'énergie interne.

$C_p$  : La chaleur massique à pression constante.

$k$  : La conductivité thermique.

$\beta$  : Le coefficient de dilatation à pression constante.

$\phi$  : La fonction de dissipation.

$q_s$  : La source de chaleur interne.

Si on suppose pour un écoulement à dissipation et l'effet de la pression sont négligeables à conductivité thermique constante, et pas de source de chaleur interne l'équation (2.7) se simplifie en :

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \cdot \Delta T \quad (2.8)$$

$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C_p}$  : La diffusivité thermique.

### 2.1.3. Formulation indicielle

Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (V_j) = 0 \quad (2.9)$$

Equation du mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_i V_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)] g \quad (2.10)$$

Equation de la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (T V_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.11)$$

$\tau_{ij}$  : Tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse.

$$\tau_{ij} = -\mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.12)$$

Où :

$\mu$  : Viscosité dynamique du fluide.

$\delta_{ij}$  : Fonction delta de Kronecker.

#### 2.1.4. Equations de bilan

D'une façon générale, les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement, et de l'énergie dans le cas anisotherme, moyennant les hypothèses énoncées ci-dessus s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.14)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} - g \cdot \cos(\alpha) [\beta_T \Delta T] + \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.15)$$

#### 2.1.5. Equations adimensionnées

Les équations de gouvernement à l'intérieur de la clôture carrée avec un cylindre elliptique chauffé sont décrites par les équations de Navier- Stokes et d'énergie, respectivement. Les équations de gouvernement sont transformées en formes sans dimensions sous les variables non dimensionnelles suivantes:

$$\theta = \frac{T-T_F}{T_C-T_F}, X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, U = \frac{uL}{\alpha}, V = \frac{vL}{\alpha}, P = \frac{pL^2}{\rho\alpha^2}, Pr = \frac{\rho c_p \alpha}{k}, \text{ et } Ra_t = \frac{g\beta(T_C-T_F)L^3}{\alpha\theta}$$

Les formes sans dimensions des équations de gouvernement dans la condition équilibrée sont exprimées sous les formes suivantes:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.16)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.17)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + RaPr\theta \quad (2.18)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.19)$$

#### 2.1.6. Condition aux limites

L'écoulement envisagé a lieu entre deux cylindres coaxiaux horizontaux, un cylindre externe carré est caractérisé par une longueur  $L$  (=14cm), et un cylindre interne elliptique

d'excentricité  $e (=0.8)$  et le déplacement vertical  $\delta$  du cylindre interne  $\delta$  prend les valeurs : -0.01, -0.025, -0.03, -0.04, +0.01, +0.025, +0.03 et +0.04m. La configuration utilisée est schématisée par la figure 2.1.

Les conditions initiales sont :

$$u = v = 0 \quad (2.20)$$

$$T = T_0 (= T_F) \quad (2.21)$$

En outre, les conditions aux limites sur le système sont :

Cylindre interne (ellipse)

$$u = v = 0 \quad (2.22)$$

$$T = T_C \quad (2.23)$$

Cylindre externe (carré)

$$u = v = 0 \quad (2.24)$$

$$T = T_F \quad (2.25)$$

### 2.1.7. Calcul du nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt local est défini sur la longueur caractéristique L comme.

$$Nu_L = L \left. \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} \right|_{wall} \quad (2.26)$$

Où  $\vec{n}$  vecteur normal sur la paroi et  $\theta$  la température sans dimensions.

La longueur du carré (P) et le périmètre de l'ellipse (Pe) ont été choisis en tant que longueur caractéristique L.

Le nombre moyen de Nusselt pour le cylindre externe carré et l'ellipse intérieur peut être évalué par :

$$\overline{Nu}_{ellipse} = \frac{1}{P_e} \int_0^{P_e} Nu_L dP_e \quad (2.27-a)$$

$$\overline{Nu}_{carré} = \frac{1}{P} \int_0^P Nu_L dP \quad (2.27-b)$$

Où P est le périmètre du carré.

Le nombre de Nusselt moyen pour les deux surfaces est :

$$Nu_{moy} = \frac{\overline{Nu}_{ellipse} + \overline{Nu}_{carré}}{2} \quad (2.28)$$

# Chapitre

## 3

### *Méthodes Numériques*

#### **3.1. Introduction**

Le but de cette partie, est d'évaluer le comportement d'un écoulement laminaire, en régime stationnaire. Cette partie est consacrée principalement aux différentes étapes numériques pour la résolution de l'écoulement dans une cavité annulaire fermée: le maillage, la méthode de résolution, le choix des conditions aux limites, et le post-traitement des résultats. Le développement des techniques numériques a servi à mettre au point des codes traitant tous les problèmes de mécanique des fluides, notamment : le transfert de chaleur.

Dans la présente étude, le logiciel de CFD utilisé, pour la réalisation de la simulation numérique en mécanique des fluides (**C**omputational **F**luid **D**ynamics CFD) se nomme FLUENT 6.2 peut simuler le transfert de chaleur. Il utilise la méthode des volumes finis, nécessitant un maillage conçu par le logiciel « GAMBIT 2.1 ».

GAMBIT est le modéleur associé à FLUENT où l'on décrit la géométrie et le maillage du problème à traiter ainsi que le type des conditions aux limites. Il permet aussi de définir le type des différentes frontières du système ainsi que la nature du (des) domaine(s) décrit(s) globalement (solide ou fluide). Dans notre étude les deux frontières sont considérées comme des parois indépendantes, donc on les nomme et on leur donne un type (ici Wall «paroi »).

FLUENT est écrit en langage C et globalement la démarche numérique utilisée s'initie par la lecture de la géométrie et le maillage, on passe après au type de solveur, pour notre cas c'est un solveur « segregate » avec une formulation implicite pour un cas bidimensionnel

en régime stationnaire, puis la discrétisation des équations modélisantes dans le menu « Solve », la résolution des systèmes d'équations discrétisées et enfin le post-traitement.

On initialise l'ensemble des quatre variables à calculer sur tous les points du maillage, c'est à dire la pression, les deux composantes de la vitesse et la température. Ensuite on gère la progression du calcul itératif par le biais du suivi des résidus des équations se rapportant à chacune des variables.

Donc sous FLUENT, le travail va consister à assurer successivement

- Le choix des équations traitées
- La description des conditions aux limites
- La gestion de la résolution
- L'analyse des résultats

Les étapes pour le déroulement des simulations sur les deux logiciels Gambit (2.1) et FLUENT (6.2) sont résumées sur la Figure 3.1.

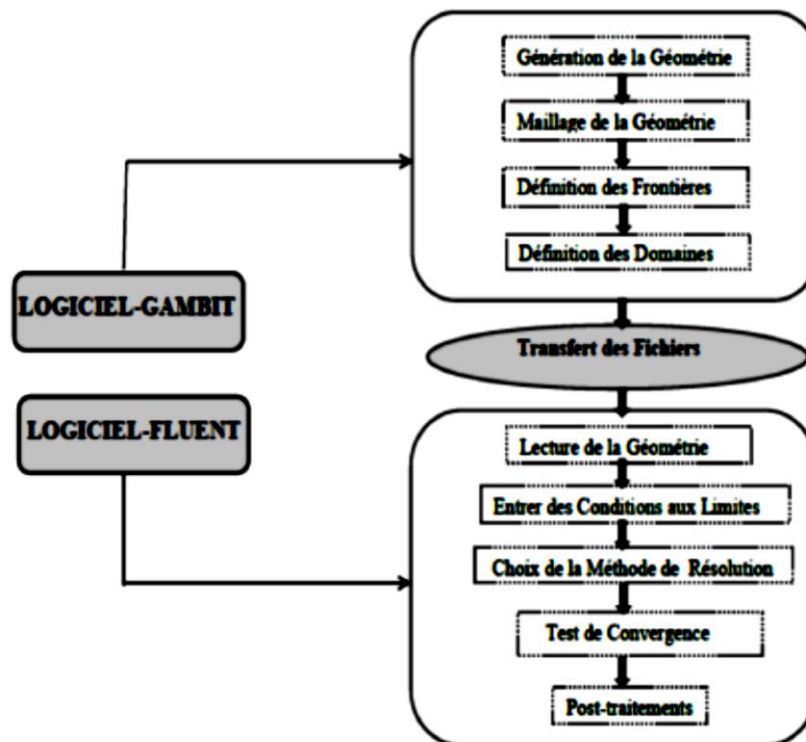


Fig. 3.1. Etapes de résolution suivies par GAMBIT et FLUENT.

### 3.2. Maillage

Dans notre étude, on a choisi un maillage bidimensionnel structuré. Ce maillage a été réalisé avec des cellules dont la taille variait progressivement, fin sur les parois pour assurer une bonne résolution dans les régions à fort gradient de température et vitesse.

La figure 3.2 montre une partie de la cavité en maillage structuré non uniforme serré près des frontières des parois.

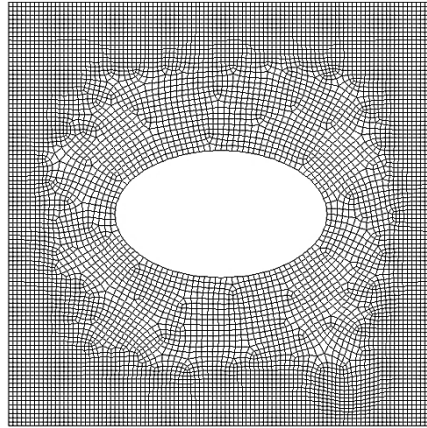


Fig. 3.2. Maillage avec Gambit 2.1.

### 3.3. Conditions initiales et conditions aux limites : CL (CFD FLUENT)

Pour résoudre les équations, on a besoin de définir les conditions aux limites aux parois. Cinq types de conditions aux limites thermiques sont disponibles sur FLUENT:

- 1- Un flux de chaleur imposé
- 2- Une température imposée
- 3- Transfert thermique convectif
- 4- Transfert thermique radiatif externe
- 5- Combinaison du transfert thermique radiatif et convectif (condition mixte)

FLUENT prend par défaut la valeur de la pression atmosphérique. Pour le domaine fluide on utilise l'air, les propriétés du fluide sont tabulées dans le tableau suivant, ils ont été pris à la température initiale  $T = 283\text{K}$ .

**Tableau 3.1** Propriétés de fluide air

$\rho$ ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ )	$C_p$ ( $\text{J}/\text{Kg} \cdot \text{K}$ )	$k$ ( $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ )	$\mu$ ( $\text{Kg}/\text{m} \cdot \text{s}$ )
1.244575	1005.816	0.0249085	$1.7714 \cdot 10^{-5}$

Dans notre étude les conditions aux limites qui peuvent être rencontrées :

1. Les deux parois intérieur et extérieur sont maintenus chaque fois à un gradient de température différentes, et on impose une condition dynamique d'adhérence aux parois ( $u = v = 0$  m/s).

### 3.4. Discrétisation et Résolution

Les équations sont traitées séquentiellement (méthode segregated), la procédure numérique retenue par FLUENT pour la résolution des équations gouvernant la convection naturelle avec les conditions aux limites imposées, est basée sur la méthode des volumes finis. Cette méthode a l'avantage de satisfaire la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans tous les volumes finis ainsi dans tout le domaine de calcul. Elle consiste en :

- Division du domaine en volumes de contrôle discrets.
- Intégration des équations qui régissent sur les volumes de contrôle élémentaires pour construire des équations algébriques pour les variables discrètes dépendantes telles que vitesses, pression, température, et les scalaires conservées.
- Linéarisation des équations discrétisées et la solution du système d'équations linéaires résultant pour obtenir des valeurs actualisées des variables dépendantes.

Par défaut FLUENT stocke les valeurs discrètes de la pression, de la vitesse et de la température au centre des cellules, schéma collocatif décrite par Rhie et Chow [1]. Comme le calcul de la pression, de la vitesse et de la température sur les faces est nécessaire pour exprimer le terme de convection et de pression. Ces valeurs vont être interpolées à partir des valeurs au centre des cellules. Ceci est accompli en utilisant un schéma décentré. FLUENT dispose de plusieurs schémas décentrés : 1<sup>er</sup> ordre, second ordre, loi de puissance, schéma type Quick. Nous développerons dans cette partie les schémas utilisés lors de notre étude.

#### 3.4.1. Calcul de la vitesse sur les faces

Le schéma utilisé est le schéma « upwind », ce schéma prend en considération la direction de l'écoulement pour déterminer les grandeurs convective sur les faces des volumes de contrôles. Le schéma amont d'ordre un permet une certaine stabilité mais il est responsable de diffusion numérique, donc on a choisi le schéma du 2<sup>nd</sup> ordre (schéma décentré amont), ce dernier minimise la diffusion numérique mais peut faire diverger le calcul. Pour ce type de schéma, la grandeur sur la face est calculée en interpolant par rapport aux valeurs des cellules les plus proches par un schéma décentré amont du second ordre.

### 3.4.2. Calcul de la pression sur les faces

En utilisant le schéma force de volume pondéré « Body Force Weighted » ce type de schéma est recommandé pour les écoulements impliquant d'importantes forces de volume.

### 3.4.3. Couplage pression-vitesse

L'algorithme le plus universel et le plus utilisé est l'algorithme SIMPLE de Patankar et Spalding [2]. Il est employé pour le couplage vitesse-pression dans le cas instationnaire l'algorithme le plus recommandé est l'algorithme PISO, il fait partie de la famille des algorithmes de SIMPLE. Le principe de cet algorithme est d'effectuer deux corrections sur la procédure requises par SIMPLE à l'intérieur et au niveau de l'équation de correction de pression [3]. La discrétisation des termes convectifs et l'interpolation de la pression respectivement. En plus des résidus de calcul, l'évolution de la pression statique a été suivie dans des endroits donnés pour assurer la convergence et la stabilité de la solution. Les résidus étaient dans la gamme de  $10^{-4}$  à  $10^{-5}$ . Une moyenne de 105 itérations était nécessaire pour obtenir la convergence.

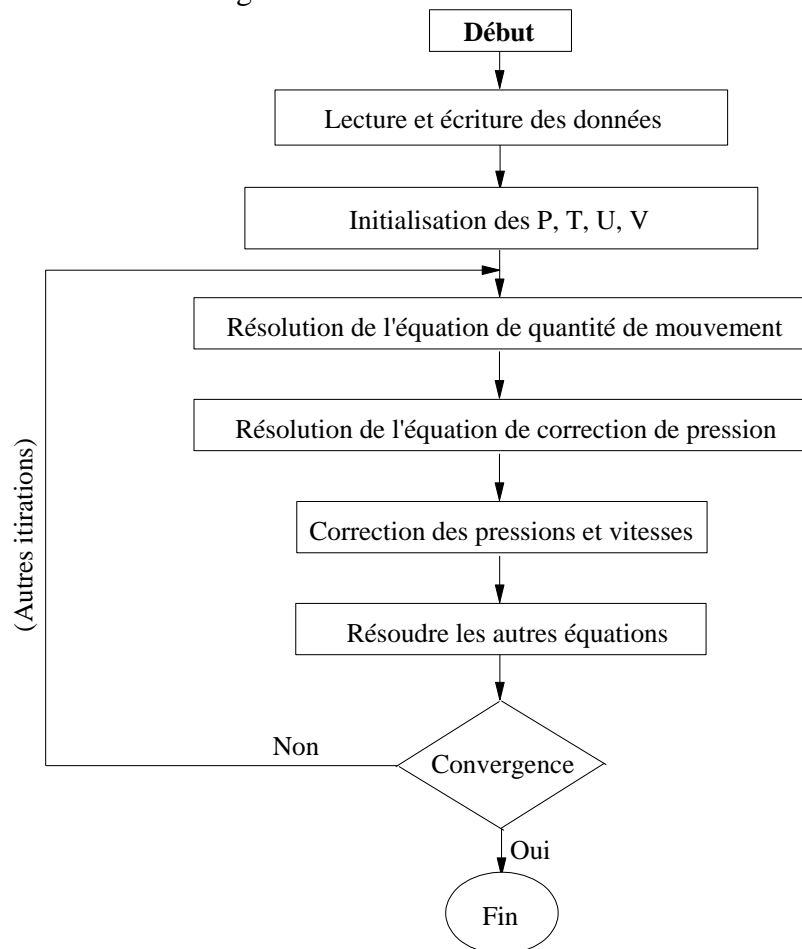


Fig. 3.3. Système d'itération

### 3.4.4. Sous-relaxation

La non-linéarité des équations impose la sous-relaxation des valeurs obtenues à chaque itération. Pour les différents cas simulés, les critères de résolution (préconisés par FLUENT dans le cas de la convection naturelle) et les coefficients de sous-relaxation utilisés sont présentés dans le tableau 3.2.

**Tableau 3.2** Critères de résolution et coefficients de sous-relaxation utilisés

	Facteur de Relaxation	Type de Discrétisation
Pression	0.3	Body force weighted
Masse volumique	1	-
Force de gravité	1	-
Quantité de mouvement	0.7	2 <sup>nd</sup> order upwind
Energie	1	2 <sup>nd</sup> order upwind
Couplage Pression-Vitesse	-	SIMPLE

### 3.4.5. Résolution

La discrétisation des équations différentielles régissant les phénomènes d'écoulement permet de transformer les équations différentielles en un système d'équations linéaires avec une équation par cellule. Le système d'équations linéaires s'écrit sous forme matricielle  $AX = B$  où les inconnues qui constituent la matrice colonne X sont les variables au centre des cellules. Ces équations algébriques peuvent être résolues par n'importe quelle méthode de résolution. Pratiquement les méthodes les plus utilisées pour la résolution des problèmes tridimensionnels sont :

- La méthode de Gauss-Seidel (résolution point par point).
- La méthode de résolution ligne par ligne d'élimination de Gauss (la méthode TDMA).

Pour résoudre ce système d'équation, FLUENT utilise un solveur d'équations linéaires implicites (Gauss-Seidel) en conjonction avec une méthode multi grille algébrique (AMG) pour accélérer la convergence. Cette méthode permet de réduire le nombre d'itérations, et le temps nécessaire à la convergence de CPU.

### 3.4.6. Choix du maillage

L'influence de la taille et du nombre des nœuds sur la solution exprimée par le transfert thermique à la partie active « chauffée » de la paroi est illustrée par le nombre de Nusselt moyen dans le tableau 3.3. Un maillage irrégulier resserré près des parois a été utilisé pour résoudre plus précisément les phénomènes physiques présents notamment dans la zone de couche limite caractérisée par l'existence de forts gradients dans les zones pariétales.

Afin d'obtenir une solution indépendante du maillage, une étude de raffinement de la grille est réalisée pour une enceinte carrée avec une ellipse interne isotherme à  $Ra = 10^6$ ,  $Pr = 0,7$  et  $\delta = 0$  (Figure 3.4). Dans le présent travail, huit combinaisons ( $80 \times 80$ ,  $90 \times 90$ ,  $100 \times 90$ ,  $110 \times 90$ ,  $115 \times 90$ ,  $120 \times 90$ , et  $100 \times 100$ ) de volumes de contrôle sont utilisées pour tester l'effet de taille de la grille sur la précision des résultats prévus. La figure 3.4 montre la convergence du nombre moyen de Nusselt  $\overline{Nu}$ , au niveau de la paroi interne du cylindre chaud avec le raffinement de la grille. On observe que l'indépendance du maillage est obtenue par la combinaison de volumes de contrôle ( $100 \times 100$ ) dans lesquels le nombre moyen de Nusselt  $\overline{Nu}$  ne change pas de manière significative avec l'amélioration du maillage plus fin. L'accord se révèle excellent, ce qui valide le présent calcul indirectement.

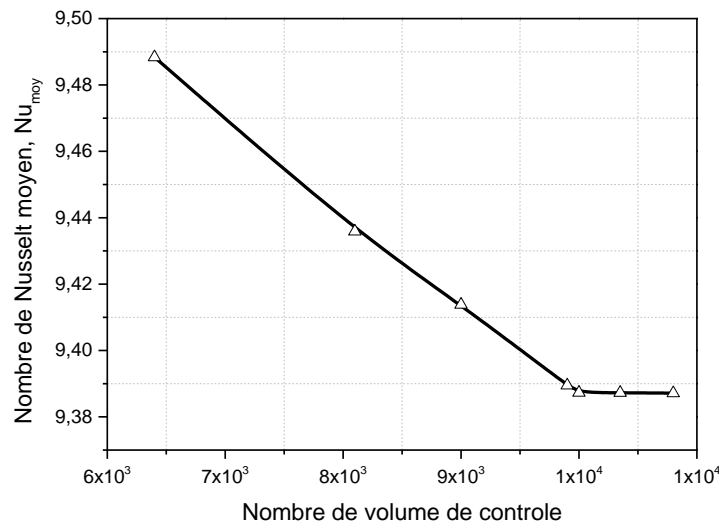


Fig. 3.4 Convergence du nombre moyen de Nusselt le long de la paroi interne du cylindre chaud avec un raffinement de la grille pour  $Ra = 10^6$ ,  $Pr = 0,7$  et  $\delta = 0$ .

### 3.4.7. Validation des résultats

De façon à vérifier l'exactitude des résultats numérique obtenus dans le présent travail, une validation du code numérique a été faite en prenant en compte certaines études numériques disponibles dans la littérature.

Le problème de convection naturelle pour une enceinte carrée externe basse température et un cylindre elliptique interne haute température a été testé. Les nombres de Nusselt moyenne est calculée pour le test sont comparés aux valeurs de référence de Kim et al. [5] comme indiqué dans le tableau 3.3. Une validation supplémentaire a été réalisée en utilisant le présent algorithme numérique pour étudier le même problème que celui envisagé par Kim et al. [5] utilisant les mêmes conditions d'écoulement et les mêmes géométries, qui ont été rapportés pour le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire utilisant les mêmes conditions aux limites, mais le schéma numérique est différent. La comparaison est effectuée à l'aide des paramètres sans dimension suivants:  $Pr = 0,7$ ,  $Ra = 10^5-10^6$  et  $\delta = 0$ . Un excellent accord a été obtenu entre Kim et al. [5] et le schéma numérique actuel pour les lignes de courant et les contours de température à l'intérieur de l'enceinte carrée avec le cylindre intérieur le long de la ligne médiane horizontale à  $\delta = 0$ , comme indiqué sur la figure 3.5. Ces validations donnent une bonne confiance dans le modèle numérique actuel. Pour traiter les autres emplacements de la ligne médiane verticale ( $\delta$ ).

**Tableau 3.3** Comparaison du nombre de Nusselt moyenne actuel avec ceux des études numériques précédentes.

$Ra_t$	Nombre de Nusselt moyen à la paroi chaude		Erreur (%)
	Présent étude	Kim et al. [5]	
$10^4$	3.461	3.414	1,3767
$10^5$	5.0592	5.1385	1,5432

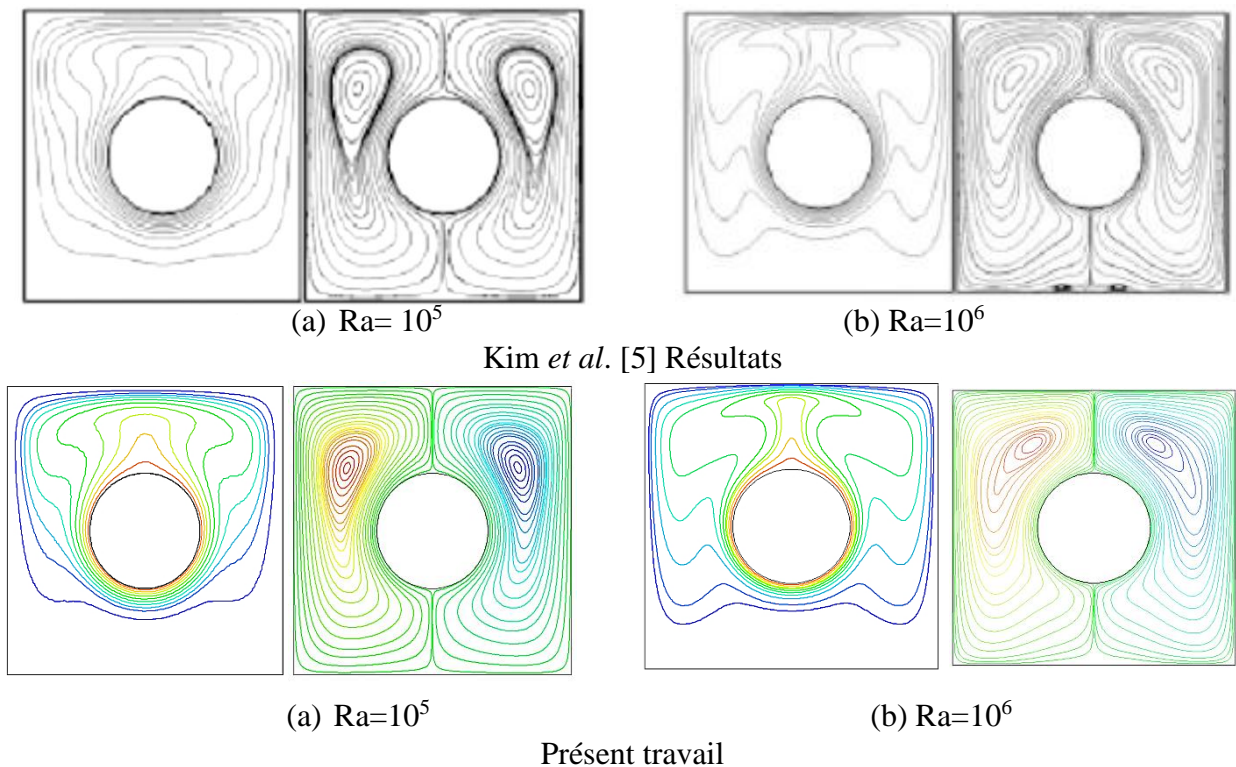


Fig. 3.5 Comparaison des contours de température et des lignes de courant entre les travaux actuels et ceux de Kim *et al.* [5], à  $\delta = 0.0$  pour deux nombres de Rayleigh différents de (a)  $10^5$  et (b)  $10^6$

### 3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à décrire l'approche numérique que nous avons utilisée. Nous avons décrit la résolution numérique adoptée qui permettra d'aboutir aux résultats qui seront présentés par la suite.

### Références

- [1] Chow W.L, Rhie C.M. Numerical study of the turbulent past an airfoil with trailing edge separation. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA journal). Vol. 21, pp. 1525-1532. (1983).
- [2] Patankar S, Spalding D. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. Int. J. heat and Mass transfer. Vol. 15, pp. 1787-1806. (1972).
- [3] Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. McGraw-Hill, New-York. (1980).
- [4] M.M. El Shamy, M.N. Ozisik, J.P. Coulter, Correlation for laminar natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders, Numer. Heat Transfer, Part A 18, pp. 95–112, (1990).
- [5] B.S. Kim, D.S. Lee, M.Y. Ha, H.S. Yoon, A numerical study of natural convection in a square enclosure with a circular cylinder at different vertical locations, International Journal of Heat and Mass Transfer 51 (2008) 1888–1906.

# Chapitre

## 4

### *Résultats et discussion*

Dans ce chapitre nous avons effectué des simulations numériques de convection naturelle dans un système annulaire fermée, ce système comportant deux cylindres confocaux un carré externe et ellipse interne, qui sont maintenues à des températures imposées constantes et l'emplacement du cylindre intérieur change verticalement le long de l'axe de l'enceinte de  $\delta$  ( $=-0,04\text{m}$  à  $0,04\text{m}$ ) vers le haut et vers le bas, respectivement. Le système d'équations gouvernant le problème est résolu numériquement à l'aide d'une méthode aux volumes finis se basant sur l'algorithme SIMPLE. Le modèle élaboré est d'abord validé à partir des résultats numériques. On présente le champ dynamique et thermique de l'écoulement. Les calculs sont menés pour des nombres de Rayleigh, de  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ .

Nous considérons l'espace annulaire elliptique caractérisé par l'excentricité du tube elliptique intérieur ( $e=0.8$ ), et le cylindre extérieur est un cylindre carré caractérisés par ( $L=14\text{cm}$ ). Cet espace annulaire est fermé qui contient un fluide incompressible de viscosité cinématique  $\nu$  et de diffusivité thermique  $\alpha$ . La paroi extérieure et la paroi intérieure engendrent un gradient de température. Dans notre étude, nous présentons six espaces annulaires suivant l'emplacement du cylindre intérieur change verticalement le long de l'axe de l'enceinte de  $\delta$  ( $= -0,04\text{m}$  à  $+0,04\text{m}$ ) vers le haut et vers le bas.

#### 4.1 Caractéristiques de base des isothermes et des lignes de courant

La Figure 4.1 présente les contours de la température et les courants de courant lorsque distance du centre du cylindre carré au centre du cylindre circulaire est égal à zéro ( $\delta=0$ ) pour  $Ra = 10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ , respectivement. La figure montre que l'air chaud adjacent à la surface du cylindre interne isotherme chaude se déplace vers le haut et frappe ensuite la surface froide isotherme de l'enceinte carrée. Après avoir frappé la surface froide de l'enceinte, il change de direction en produisant des tourbillons symétriques en rotation. En ce qui concerne les isothermes, lorsque les nombres de Rayleigh sont faibles entre  $10^3$  et  $10^4$ , les isothermes sont approximativement parallèles et la chaleur est transférée en raison de la conduction. A  $Ra (= 10^5$  et  $10^6)$ , les contours de température et les lignes de courant deviennent plus confus et l'intensité des vortex augmente quand le nombre de Rayleigh augmente. Dans ce cas, l'écoulement frappe fortement le haut de l'enceinte carrée, ce qui conduit à produire une couche thermique mince. La forme des tourbillons en rotation augmente, les isothermes se déplacent vers le haut et la chaleur est transférée par convection.

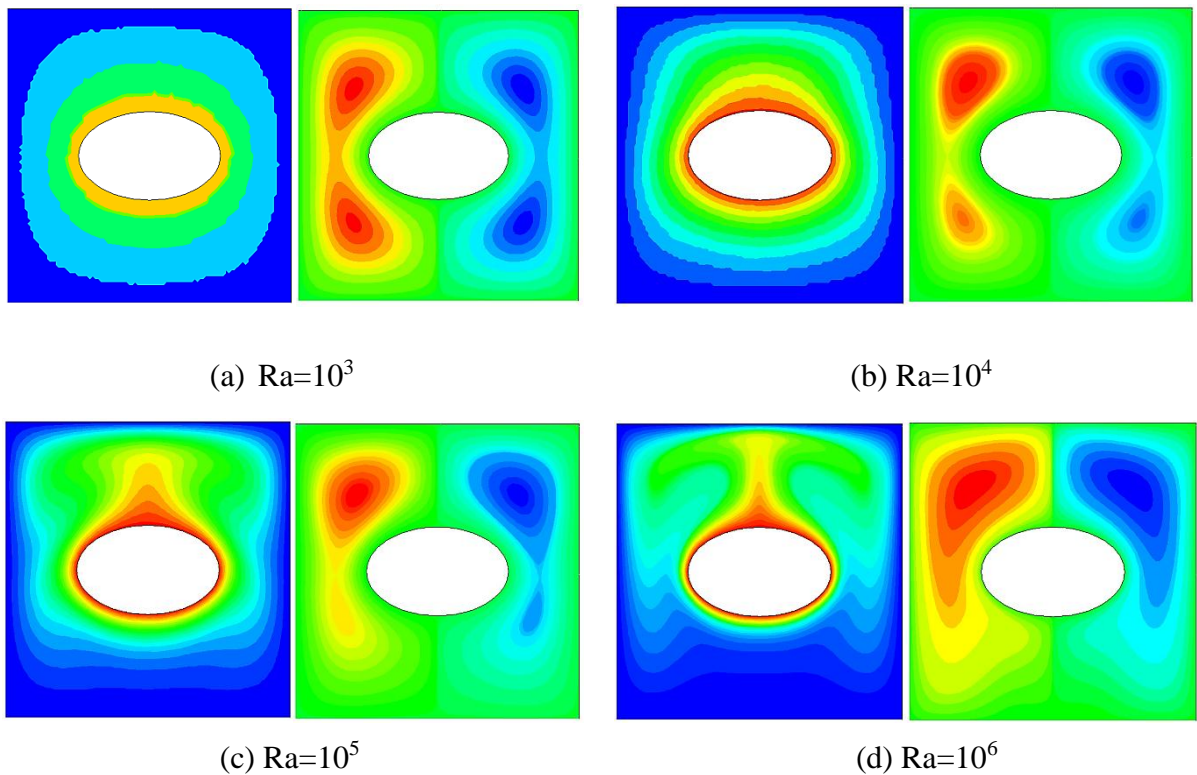
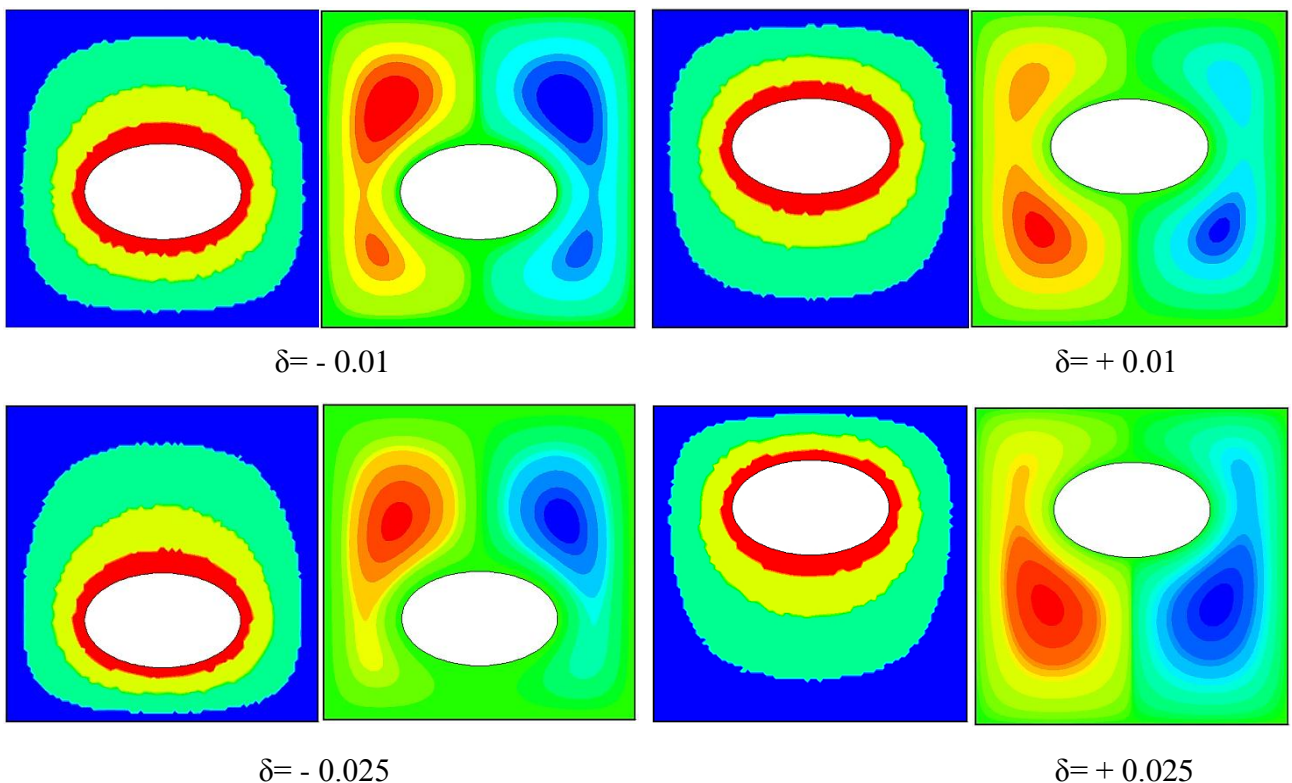


Fig. 4.1 Contours de la température et lignes de courant à  $\delta = 0,0$  pour quatre nombres de Rayleigh différents de (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$  et (d)  $10^6$ .

#### 4.2 Isothermes et lignes de courant en fonction des localisations verticales ( $\delta$ )

Les figures. 4.2 à 4.5 montrent les lignes de courant et les isothermes pour  $Ra = 10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$  respectivement et dix emplacements du cylindre intérieur qui sont modifiés verticalement vers le haut et vers le bas le long de la ligne centrale de l'enceinte carrée. Lorsque les valeurs du nombre de Rayleigh sont faibles (c'est-à-dire,  $Ra = 10^3$  et  $Ra = 10^4$ ), comme indiqué sur les Figures 4.2 et 4.3 respectivement, lorsque le cylindre elliptique se déplace vers le bas en direction de la paroi inférieure (c'est-à-dire les valeurs de  $\delta$  diminution), les tourbillons rotatifs symétriques supérieurs sont augmentés en taille et en forme, de plus, la distance entre les contours de la température devient progressivement très petite. On observe que les deux tourbillons mineurs observés dans la zone inférieure de l'enceinte convergent lorsque les valeurs de  $\delta$  diminuent et se rencontrent à  $\delta = -0,025$  lorsque  $Ra = 10^3$  et  $Ra = 10^4$ . Un comportement inverse peut être observé dans les lignes de courant et les isothermes lorsque le cylindre se déplace vers le haut dans la direction de la paroi supérieure (c.-à-d. les valeurs de  $\delta$  augmentent) car l'espace entre le cylindre intérieur et la paroi inférieure de l'enceinte carrée augmente. Dans ce cas, lorsque le cylindre chaud se déplace vers le haut, les deux tourbillons (vortex) mineurs remarqués dans la zone supérieure de l'enceinte convergent lorsque les valeurs de  $\delta$  augmentent et se rencontrent à  $\delta = 0,025$  lorsque  $Ra = 10^3$  et  $Ra = 10^4$ . La raison de ce phénomène est due à l'effet important de la convection naturelle lorsque la majeure partie des tourbillons en rotation sont observés dans la zone inférieure de l'enceinte. Le transfert de chaleur est modélisé par conduction.



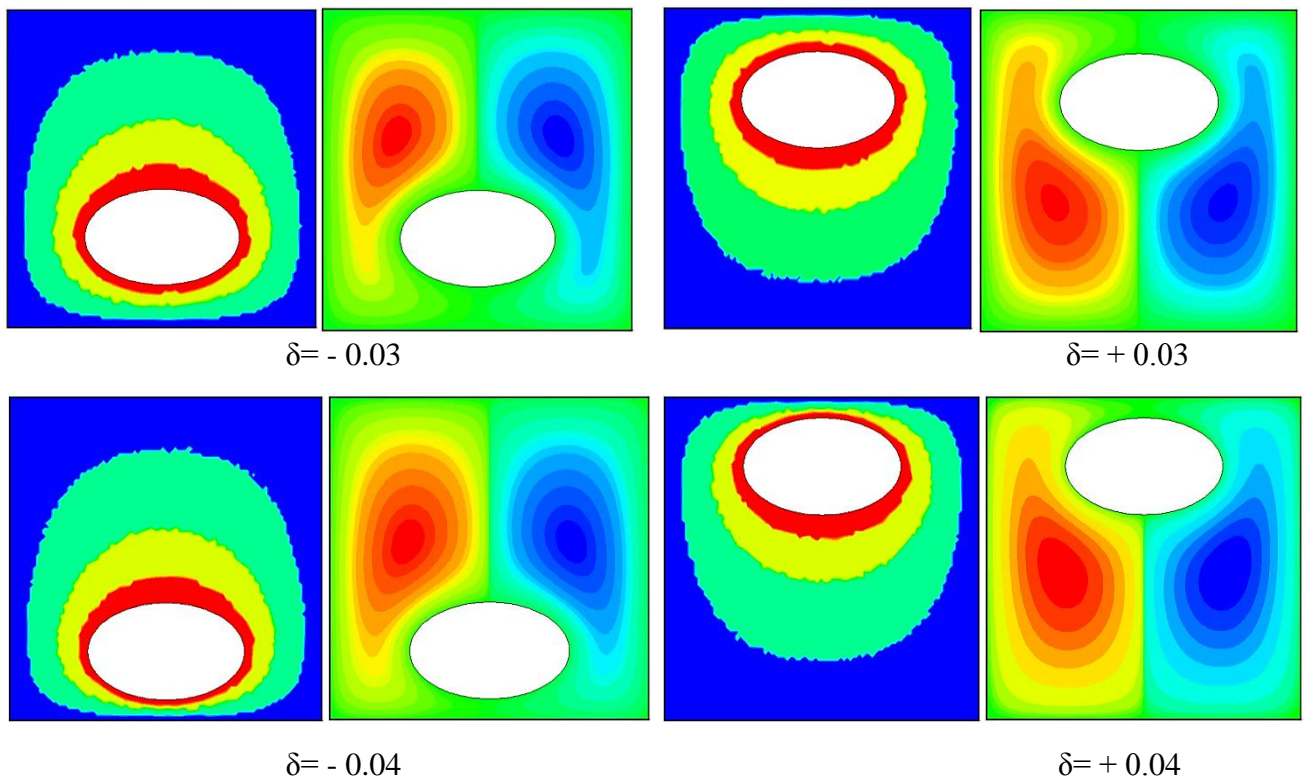
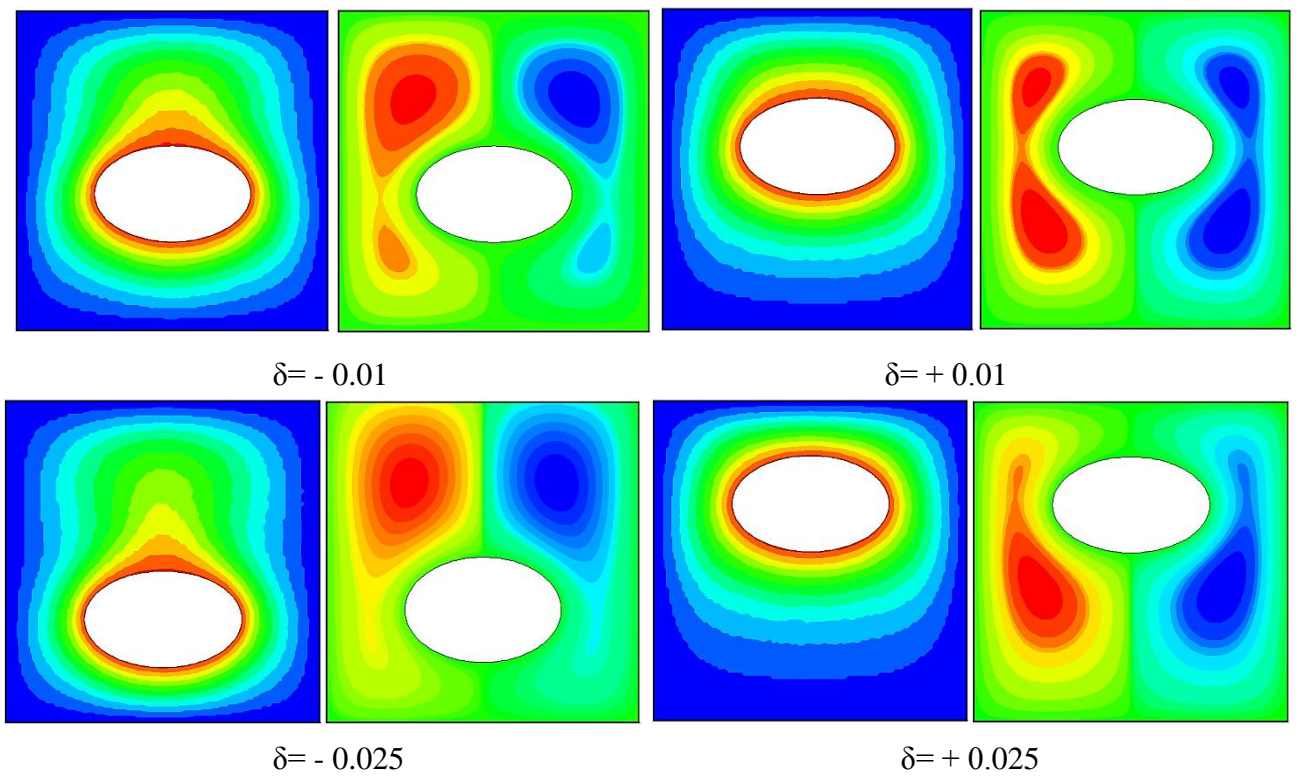


Fig. 4.2 Variations des isothermes et de lignes de courant pour différents  $\delta$  à  $Ra = 10^3$



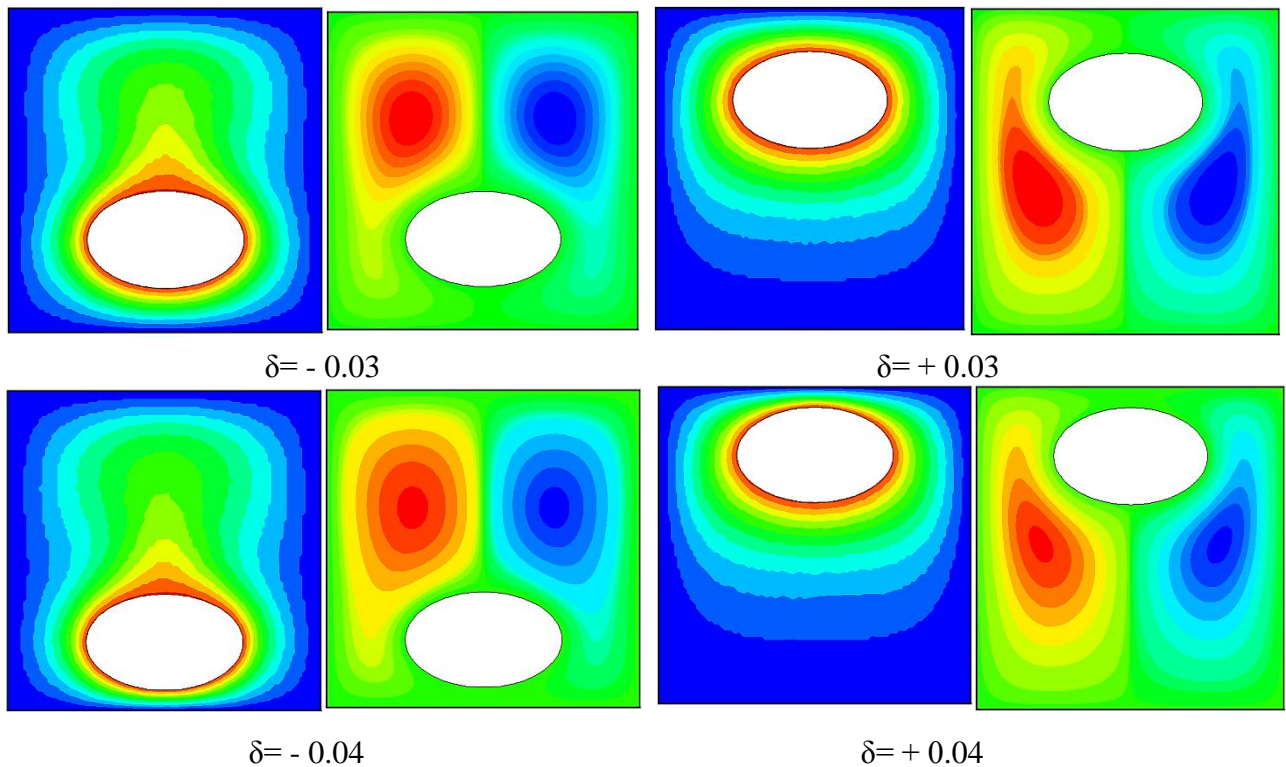
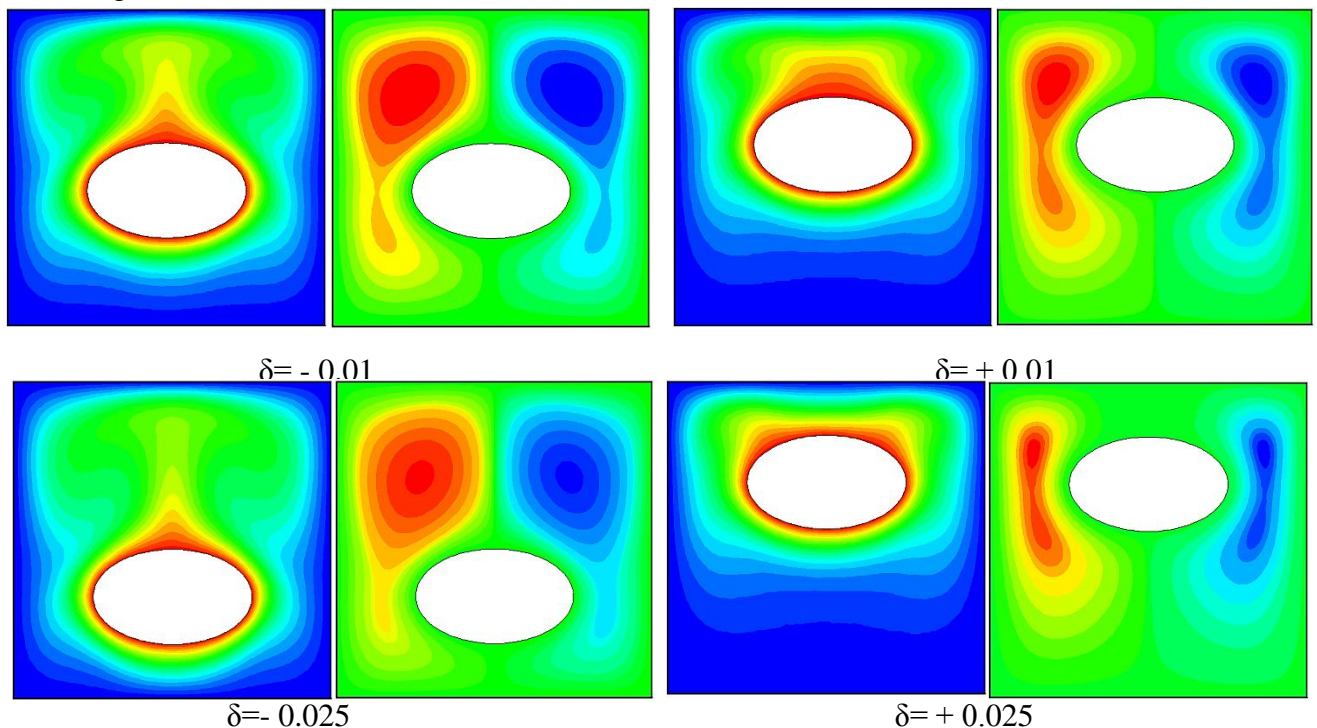


Fig. 4.3 Variations des isothermes et de lignes de courant pour différents  $\delta$  à  $Ra = 10^4$

Lorsque les valeurs du nombre de Rayleigh sont grandes (c'est-à-dire que  $Ra = 10^5$  et  $Ra = 10^6$ ) comme indiqué sur les figures 4.4 et 4.5 respectivement. L'effet de la force de flottabilité devient plus dominant avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et les tourbillons majeurs et mineurs deviennent grands et clairs comparant lorsque  $Ra = 10^3$  et  $Ra = 10^4$  en raison d'un effet de convection élevée. À un nombre de Rayleigh plus élevé l'intensité de la convection augmente considérablement, le cœur des tourbillons en rotation monte et les contours isothermes changent, indiquant clairement que la convection naturelle est le mécanisme de transfert de chaleur dominant. Lorsque le cylindre se déplace vers le haut (c'est-à-dire que les valeurs de  $\delta$  augmentent), les contours de la température près de la paroi supérieure de l'enceinte carrée s'accumulent, se compriment et deviennent plus confus. D'autre part, les grands tourbillons symétriques au bas du cylindre interne prennent une taille importante lorsque le cylindre interne se déplace vers le haut. L'augmentation du nombre de Rayleigh qui traduit une intensification de la convection naturelle, a permis l'apparition d'une bifurcation donnant naissance à deux cellules supplémentaires tournant dans le sens contraire des cellules voisines lorsque  $\delta = +0.025$  à  $+0.04$ , pour ces positions du cylindre interne nous avons deux cellules supplémentaires tournant chacune dans le sens contraire de sa cellule voisine. L'augmentation du nombre

de Rayleigh, nous a permis donc de passer à un autre régime d'écoulement, qui est l'écoulement multicellulaire, avec l'apparition de ces bifurcations dans la partie supérieure de notre enceinte, qui est une zone d'instabilités aux grandes valeurs du nombre de Rayleigh. Ces deux figures montrent aussi, que le fluide est pratiquement immobile, dans la partie basse de notre enceinte. Les lignes isothermes se déforment et s'enfoncent là où il y a présence de deux tourbillons contra-rotatifs. Un comportement inverse peut être observé dans les lignes de courant et les isothermes lorsque le cylindre se déplace vers le bas dans la direction de la paroi inférieure (c.-à-d. lorsque le cylindre chaud intérieur descend de  $\delta = -0,01$  à  $\delta = -0,04$ ) car l'espace entre le cylindre intérieur et la paroi inférieure de l'enceinte carrée diminue. En même temps, les deux tourbillons principaux en rotation situés au-dessus du cylindre intérieur chaud sont agrandis et occupent la majeure partie de la région de l'enceinte. Sur la figure 4.5, telle que  $Ra = 10^6$ , l'effet de convection devient important car la température est plus sévère et plus confuse, tandis que la couche limite thermique peut être observée sur l'enceinte carrée et sur les surfaces du cylindre interne. D'autre part, les deux tourbillons symétriques sont construits sur la surface inférieure du cylindre intérieur lorsque le cylindre intérieur monte, tandis que les deux tourbillons symétriques sont construits sur la surface supérieure du cylindre intérieur du cylindre intérieur descendant. L'intensité de ces vortex devient plus grande que l'état précédent. Ceci est dû aux effets de convection élevés lorsque le nombre de Rayleigh augmente.



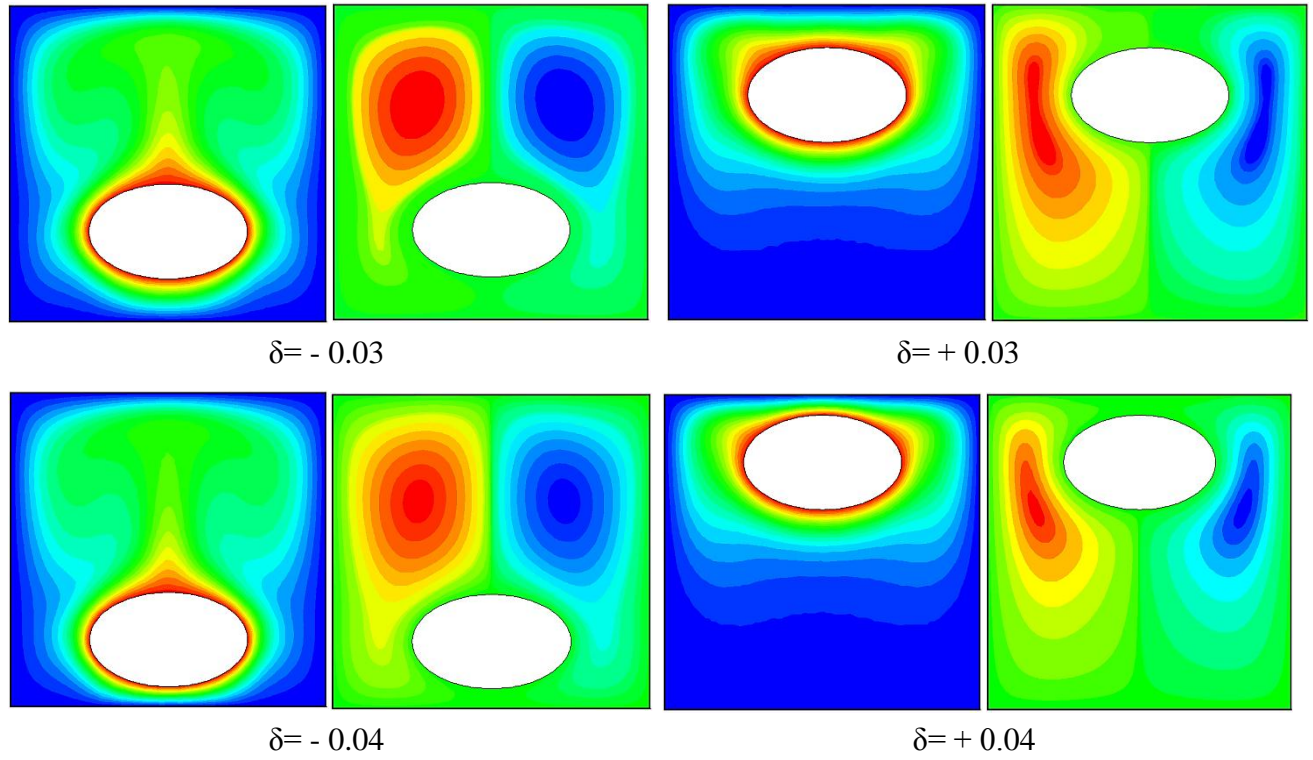
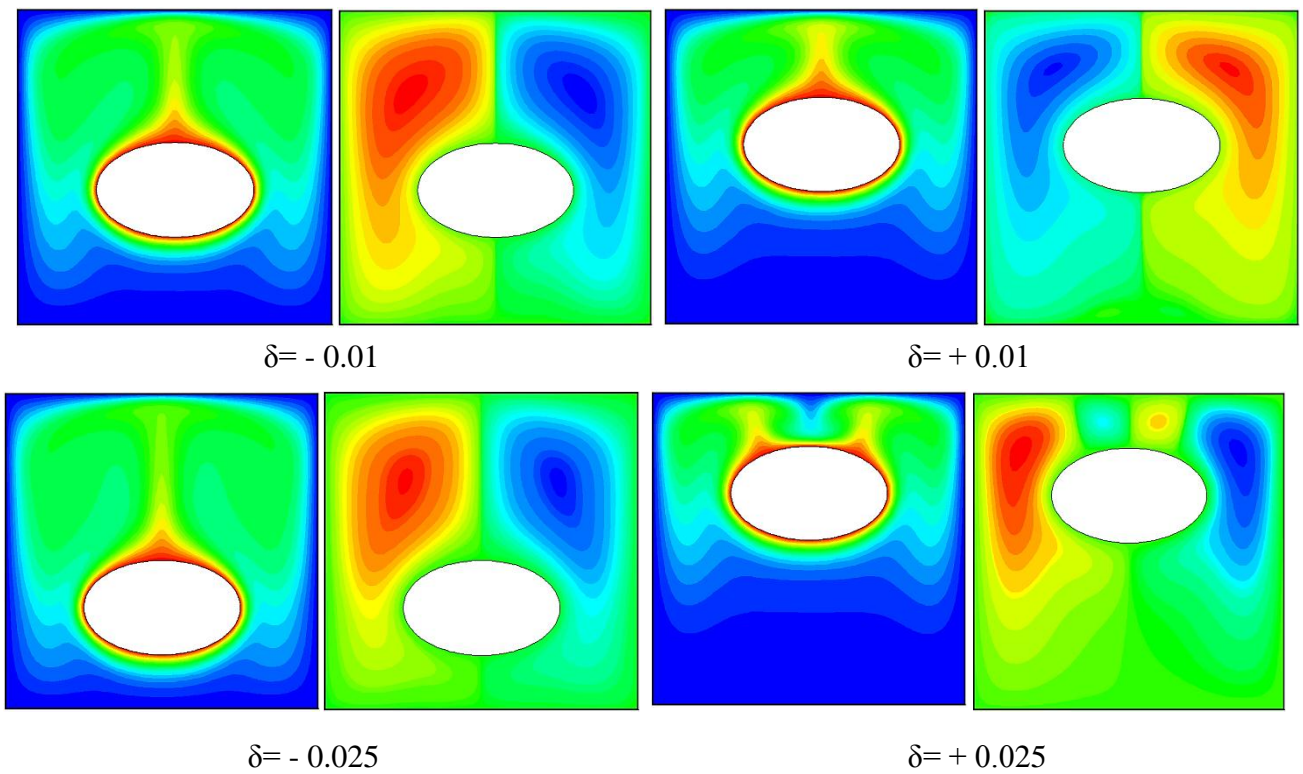


Fig. 4.4 Variations des isothermes et de lignes de courant pour différents  $\delta$  à  $Ra = 10^5$



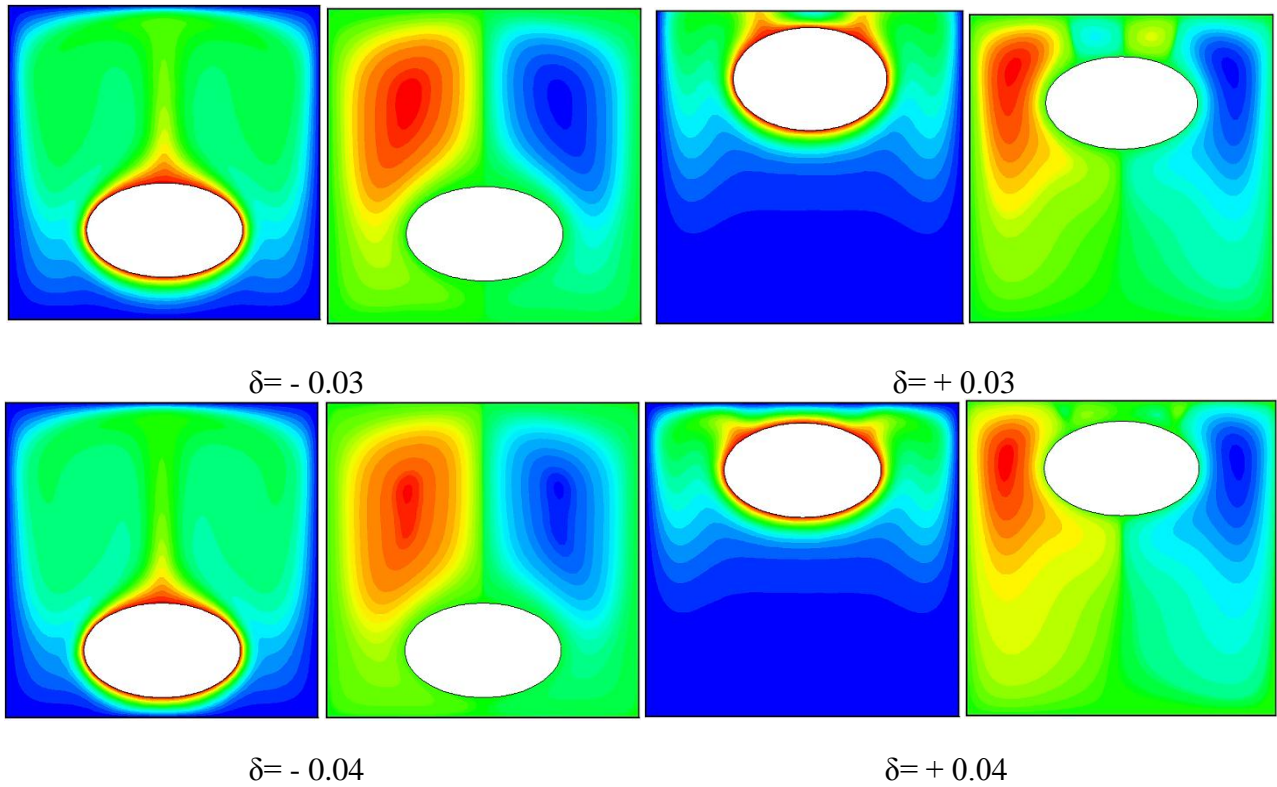
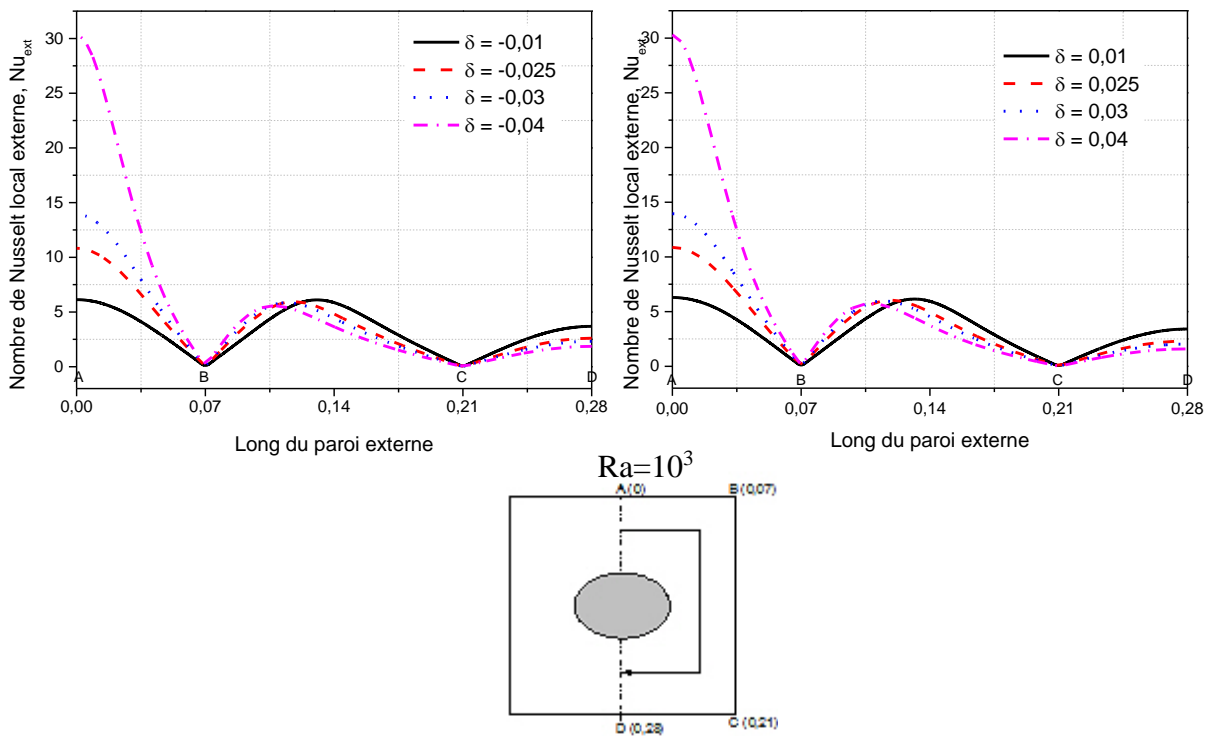


Fig. 4.5 Variations des isothermes et de lignes de courant pour différents  $\delta$  à  $Ra = 10^6$

### 4.3 Effet du nombre Nusselt local

Les variations du nombre Nusselt local avec la distance le long les surfaces de l'enceinte carrée (c'est-à-dire A, B, C et D) et avec différents emplacements du cylindre intérieur vers le haut et vers le bas sont présentées à la figure 4.6. Lorsque les valeurs du nombre de Rayleigh sont faibles (c'est-à-dire,  $Ra = 10^3$  et  $Ra = 10^4$ ), comme indiqué sur les figures 4.6 (a) et (b) respectivement, un comportement similaire peut être observé entre ces figures. La raison de ce comportement est due à un faible effet de convection et les isothermes sont approximativement parallèles car la chaleur est transférée en raison de la conduction dans cette plage de nombres de Rayleigh. Lorsque le cylindre interne se déplace vers le et vers le bas, le nombre de Nusselt local commence par une valeur maximale due à l'effet de source de température et chute le long des surfaces de l'enceinte jusqu'à ce que atteigne une valeur minimale près du point B. Après ce point, le nombre de Nusselt local augmente progressivement jusqu'à atteindre la valeur maximale au milieu de la distance entre les points B et C. Ensuite, le nombre de Nusselt local augmente en second lieu jusqu'à atteindre le point D. Lorsque les valeurs du nombre de Rayleigh sont élevées (c'est-à-dire,  $Ra = 10^5$  et  $Ra = 10^6$ ), comme indiqué sur les figures 4.6 (c) et (d) respectivement, les valeurs du nombre de Nusselt locales sont augmentées en raison de l'effet significatif de la

convection thermique. Il commence à partir d'une valeur maximale due à l'effet de la température chaude et à l'existence de vortex mineurs sur la surface du cylindre interne et descend le long des surfaces de l'enceinte jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur minimale à proximité du point B. Ensuite, le nombre de Nusselt local augmente progressivement, puis diminue il atteint le point C. Ensuite, le nombre de Nusselt local saute immédiatement à la zone du point C au point D lorsque le cylindre intérieur se déplace vers le bas. Ce comportement est dû au fait que la distance entre la paroi inférieure et la surface du cylindre interne diminue lorsque le cylindre interne se déplace vers le bas et que les courbes de température sont très concentrées dans cette petite région, ce qui entraîne une augmentation des valeurs locales en nombres de Nusselt. Lorsque le cylindre interne se déplace vers le haut, un comportement similaire peut être observé, sauf dans la zone allant du point C au point D. Puisque dans ce cas, la distance entre la paroi inférieure et la surface du cylindre interne augmente lorsque le cylindre interne se déplace vers le haut et les contours de température deviennent plus divergents, ce qui rend les valeurs de nombres Nusselt locales invariables. De plus, dans le cas où le cylindre interne se déplace vers le haut, le nombre de Nusselt local augmente lorsque la distance entre le centre du cylindre carré et le centre du cylindre elliptique augmente, car la zone entre la paroi supérieure et la surface du cylindre interne diminue, ce qui entraîne une accumulation des contours température, qui conduisent à augmenter le gradient de température dans cette zone.



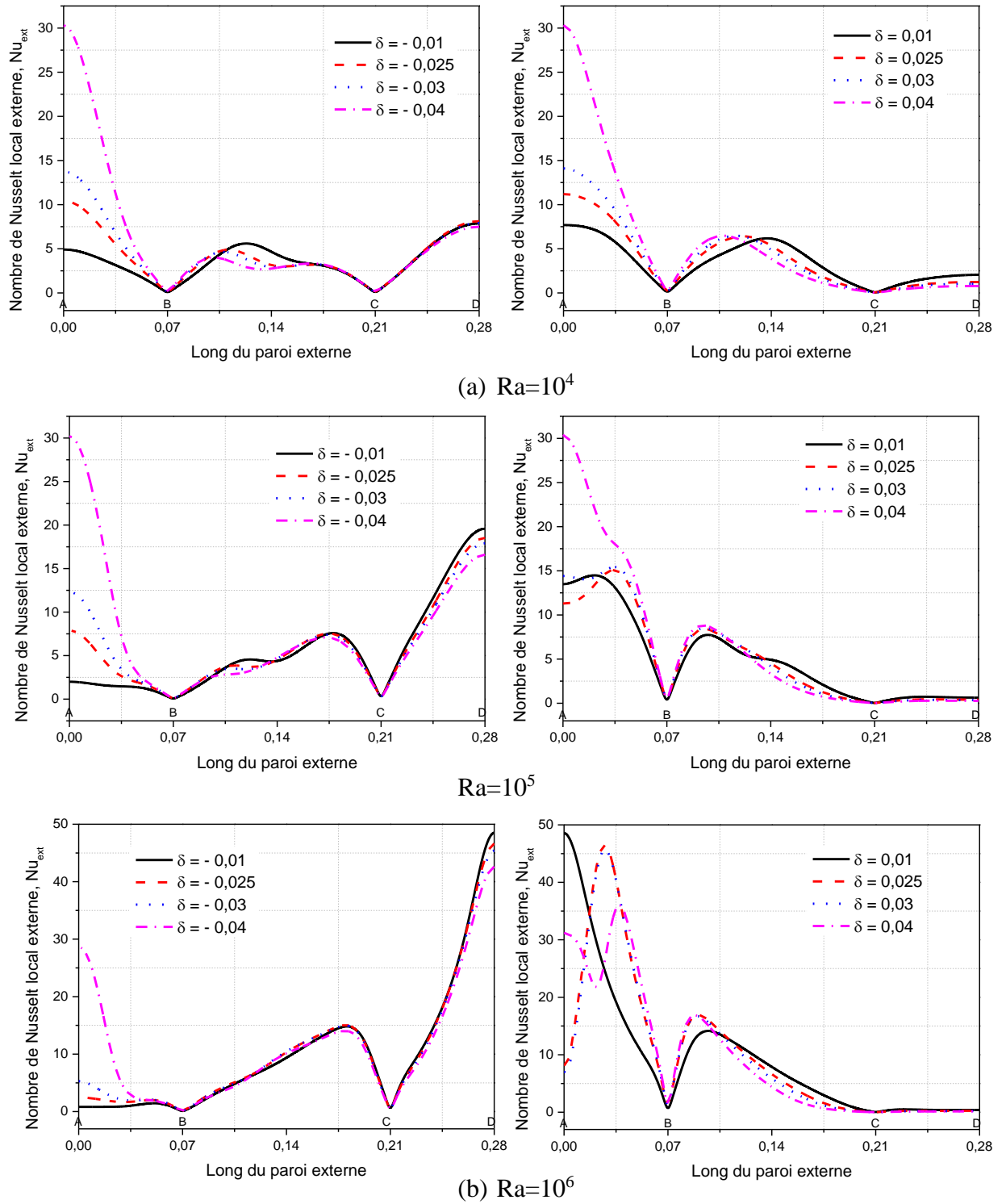


Fig 4.6 Distribution du nombre de Nusselt local le long des surfaces (A-B-C-D) de l'enceinte carrée à des positions différentes du cylindre elliptique intérieure pour différents nombres de Rayleigh.

#### 4.4 Effet du nombre de Nusselt moyen

La figure 4.7 présente la variation du nombre de Nusselt moyen pour  $Ra = 10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$  avec la distance séparant le centre du cylindre carré du centre du cylindre circulaire, respectivement. On remarque que les valeurs du nombre de Nusselt moyennes augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh en raison de l'effet significatif de la convection thermique. De plus, les valeurs du nombre de Nusselt moyennes commencent à partir d'une valeur maximale en raison d'un effet de source de température et diminuent avec l'augmentation de la distance entre le centre du cylindre carré et le centre du cylindre circulaire. Après cela, les valeurs du nombre de Nusselt moyennes commencent à augmenter légèrement, car la distance entre la paroi supérieure et la surface du cylindre interne diminue lorsque le cylindre interne se déplace vers le haut et que les contours de température sont très concentrés dans ce petit espace, conduisant à augmenter les valeurs du nombre de Nusselt moyennes.

À  $Ra = 10^3$  et  $Ra = 10^4$ , les valeurs du nombre de Nusselt moyennes sont augmentées très légèrement avec l'augmentation de la distance centre des cylindres carrés aux cylindres elliptiques, car les isothermes ont un faible effet et sont presque symétriques, ce qui rend les valeurs du nombre de Nusselt moyennes invariantes lorsque la distance entre le centre du cylindre carré et le centre du cylindre elliptique est croissante.

À  $Ra = 10^5$  et  $Ra = 10^6$ , les valeurs du nombre de Nusselt moyennes commencent à une valeur maximale et diminuent progressivement en augmentant la distance entre le centre du cylindre carré et le centre du cylindre elliptique. Après cela, le nombre de Nusselt moyen commence à augmenter en raison de l'influence dominante de l'espace entre la paroi supérieure et la surface du cylindre intérieur dans l'existence des forts vortex mineurs.

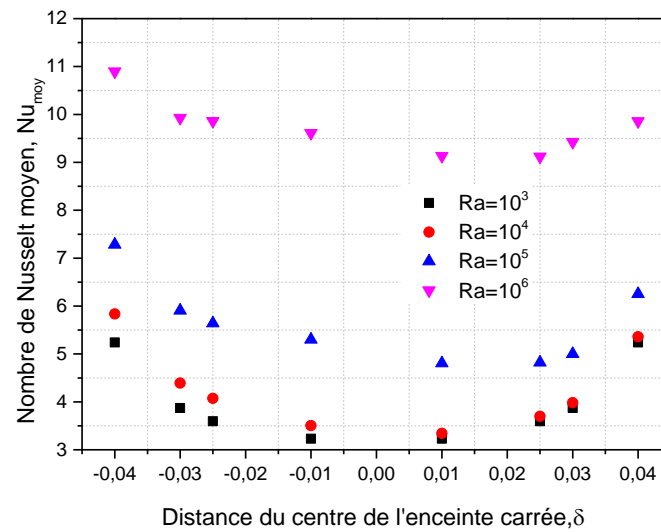


Fig 4.7 Nombre de Nusselt moyen le long du  $\delta$  pour différents nombres de Rayleigh.

#### 4.5 Conclusion

Une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte carrée à parois isothermiques ( $T_F$ ) et chauffée par une frontière elliptique interne isotherme ( $T_C$ ) a été présentée. Les équations de conservation bidimensionnelle de la masse, du moment et de l'énergie avec l'approximation de Boussinesq ont été résolues par la méthode des volumes finis. Les paramètres principaux sont:  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$  et  $-0,04 \leq \delta \leq 0,04$ .

---

## Conclusion générale

---

Une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte carrée à parois isotherme ( $T_F$ ) et chauffée par une frontière elliptique interne isotherme ( $T_C$ ) a été présentée. Les équations de conservation bidimensionnelle de la masse, du moment et de l'énergie avec l'approximation de Boussinesq ont été résolues par la méthode des volumes finis. Les paramètres principaux sont:  $10^3 \leq Ra \leq 10^6$  et  $-0,04 \text{ m} \leq \delta \leq 0,04 \text{ m}$ . Les équations de transport pour un fluide newtonien sont discrétisées par la méthode des volumes finies et sont résolues numériquement en utilisant un code CFD. Pour déterminer les champs de température, la distribution de la fonction de courant au sein du fluide, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locale, en fonction des grandeurs caractérisant l'état du système.

Les résultats montrent que le mode de conduction est prédominant dans le transfert de chaleur tant que le nombre de Rayleigh n'est pas élevé, mais avec l'augmentation du Rayleigh nous remarquons une naissance d'une couche limite qui devient de plus en plus mince, qui montre la présence de la convection donc L'augmentation du nombre de Rayleigh induisant un passage d'un mode de conduction en un mode de convection.

D'après les résultats obtenus, on remarque que :

1. Les isothermes sont approximativement parallèles et symétriques lorsque les nombres de Rayleigh sont faibles et que la conduction thermique est dominante.

2. quand le nombre de Rayleigh augmente, les isothermes deviennent plus confus et la convection thermique est dominante.
3. Une couche limite thermique mince peut être observée à des nombres de Rayleigh élevés lorsque le flux frappe fortement le haut et le bas de l'enceinte carrée.
4. Des tourbillons mineurs sur la surface du cylindre interne peuvent être également observés, à  $Ra = 10^6$  et pour  $\delta = 0.025$  à  $0.04m$  illustre l'existence de deux bifurcations.
5. Les valeurs moyennes et locales du nombre de Nusselt augmentent avec différents emplacements du cylindre intérieur vers le haut et vers le bas avec le nombre de Rayleigh croissant, en raison de l'influence importante de la convection thermique.
6. Les valeurs du nombre de Nusselt moyen de l'enceinte carrée froide sont inférieures aux valeurs correspondantes du cylindre intérieur chaud pour toutes les distances du centre du cylindre carré au centre du cylindre elliptique car les isothermes ont un effet faible et presque symétrique.

Pour ce qui est des perspectives qu'on peut envisager comme suite logique à ce travail, on peut citer:

- L'étude d'un écoulement en 3D.
- L'étude d'un écoulement en régime turbulent.
- Applications d'autres conditions pariétales thermiques et massiques.

## Résumé

Dans ce mémoire, une étude numérique de la convection naturelle laminaire à deux dimensions est effectuée pour une température uniforme appliquée au cylindre elliptique intérieur dans une enceinte carrée remplie d'air ( $Pr = 0,7$ ) dans laquelle toutes les limites sont supposées isothermes (à une température basse constante). Le modèle mathématique développé est gouverné par les équations couplées de continuité, quantité de mouvement et énergie et est résolu par la méthode des volumes finis. Les effets de l'emplacement des cylindres verticaux et des nombres de Rayleigh sur l'écoulement du fluide et les performances de transfert de chaleur sont examinés. Le nombre de Rayleigh varie de  $10^3$  à  $10^6$  et l'emplacement du cylindre intérieur est modifié verticalement le long de l'axe de l'enceinte de  $-0,04$  à  $0,04$  vers le haut et vers le bas, respectivement. On constate que pour des nombres de Rayleigh faibles, l'influence sur le champ d'écoulement n'est pas grande, alors qu'à des nombres de Rayleigh élevés, les nombres de Rayleigh ont un effet considérable sur l'écoulement. De plus, les solutions numériques génèrent un champ d'écoulement à deux cellules entre le cylindre intérieur et l'enceinte. Aussi, le nombre de Nusselt moyen se comporte de manière non linéaire en fonction des emplacements. Les résultats sont présentés en termes de lignes de courant, d'isothermes, de nombres de Nusselt locaux et moyens. Les résultats détaillés du calcul numérique ont été comparés à ceux de la littérature et donnent un accord fiable.

**Mots clés** : Volume fini ; Convection naturelle ; Enceinte carrée ; Cylindre intérieur uniformément chauffé ; Emplacement vertical.

## Abstract

In this memoire, a numerical study of two dimensional steady natural convection is performed for a uniform heated temperature applied on the inner elliptic cylinder in a square air ( $Pr=0.7$ )filled enclosure in which all boundaries are assumed to be isothermal (at a constant low temperature). The developed mathematical model is governed by the coupled equations of continuity, momentum and energy and is solved by finite volume method. The effects of vertical cylinder locations and Rayleigh numbers on fluid flow and heat transfer performance are investigated. Rayleigh number is varied from  $10^3$  to  $10^6$  and the location of the inner cylinder is changed vertically along the centerline of the enclosure from  $-0.04m$  to  $0.04m$  upward and downward, respectively. It is found that at small Rayleigh numbers does not have much influence on the flow field while at high Rayleigh numbers have considerable effect on the flow pattern. In addition, the numerical solutions yield a two cellular flow field between the inner cylinder and the enclosure. Also, the total average Nusselt number behaves nonlinearly as a function of locations. Results are presented in terms of the streamlines, isotherms, local and average Nusselt numbers. Detailed results of the numerical has been compared with literature ones, and it gives a reliable agreement.

**Keywords**: Finished volume; Natural convection; square enclosure; inside cylinder uniformly heated; Vertical location.

## ملخص

في هذه المذكرة، تم إجراء دراسة عددية للحمل الطبيعي الثنائي الأبعاد للحرارة الحرارية الموحد المطبقة على الأسطوانة الإهليجية الداخلية في حاوية مربعة ( $Pr = 0.7$ ) مملوءة حيث يفترض أن كل الحدود متساوية الحرارة (ثابت درجة حرارة منخفضة وثابتة). حل المعادلات الرياضية يتم باستخدام طريقة الحجم المحدود. يتم فحص آثار موقع الاسطوانة العمودية وأرقام رايلي على تدفق السوائل وأداء نقل الحرارة. يتراوح عدد رايلي  $10^3$ - $10^6$  ويتم تغيير موقع الاسطوانة الداخلية عمودياً على طول محور العلية من  $-0.04$  إلى  $0.04$  بالزيادة وبالخفض، على التوالي. يمكن ملاحظة أنه بالنسبة عدد رايلي الصغيرة، فإن التأثير على حقل التدفق ليس كبيراً، في حين أن أعداد رايلي المرتفعة يكون لها تأثير كبير على التدفق. بالإضافة إلى ذلك، تولد الحلول الرقمية حقل تدفق من خليتين بين الأسطوانة الداخلية والغرفة. أيضاً، يتغير متوسط عدد نسلت بشكل غير خطي وفقاً للمواقع. يتم تقديم النتائج على شكل خطوط الحالية، متساوي الحرارة، أرقام نوسيلت المحلية والوسيط. النتائج التفصيلية العددية قد تمت مقارنتها بنتائج بغض الدراسات العددية، ولقد أعطت اتفاقاً مقبول.

**الكلمات المفتاحية**: الحجم المنتهية، الحمل الحراري الطبيعي، غرفة مربعة مغلقة، تسخين موحد لأسطوانة، موقع عمودي.