N° d'ordre:

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

Par

Nour El Houda HEBAL

SUJET

Classes d'opérateurs multilinéaires et théorèmes d'inclusions

Soutenue le 07 /06/ 2012 devant le jury:

Mr. D. ACHOR	M.C.A	Université de M'sila	Président
Mr. Kh. SAADI	M.C.B	Université de M'sila	Directeur de Mémoire
Mr. D. DRIHEM	M.C.A	Université de M'sila	Examinateur

Remerciement

A l'issue de cette fin d'étude adressons nos remerciements premièrement à Allah tout puissant pour la santé et la patience .Qu'il nous a donnés durant toutes ces longues années d'études.

On tient aussi à remercie tous nos profs qui nous ont enseigné tout au long de ces derniers cinq année et spécialement Mr. Kh. SAADI, Mr. D. ACHOR, Mr. D. DAOUDI

En fin : pour tous les personnes ayant contribuées de près ou de loin à la réalisation ce mémoire.

Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs multilinéaires. Précisément, nous avons étudie la relation entre les différents types d'opérateurs multilinéaires. Après avoir discuté les classes d'opérateurs linéaires p-sommants et fortement p-sommants, nous avons rappelé les classes d'opérateurs multilinéaires. En fin, une étude de comparaison entre ces classes a été faite.

Mots clés : les opérateurs m-linéaires, Cohen fortement p-sommants, r-dominés, opérateurs m-linéaires fortement p-sommants, opérateurs m-linéaires de Hilbert-Schmidt,théorème de factorisation (domination) de Pietsch,théorème de Bu.

Abstract

This memory appears in the setting of the multilinear operator theory. Precisely, we have studied the relation between the different multilinear operator types. After having discussed the linear operator classes p-sommnts and greatly p-sommnts, we recalled multilinear operator classes. In end a survey of comparison between these classes has been made.

Key words : m-linear operators, Cohen strongly p-summing operators, r-dominated, m-linear strongly p-summing operators,Hilbert-Schmidt m-linear operators, Pietsch's factorisation (domination) theorem,Bu's theorem

الملخص بالعربية

تظهر هذه المذكرة في اطار نظرية المؤثر المتعددة الخطيّة . بالضبط، درسنا العلاقة بين أنواع المؤثرات المتعددة الخطيّة المختلفة. بعد أن ناقش أصناف المؤثر الخطيّة مجاميع بي و مجاميع بي القوية, ذكّرنا بأصناف المؤثر المتعددة الخطيّة , في الختام اجرينا دراسة مقارنة بين هذه الأصناف.

كلمات مفتاحية

المؤثر المتعددة الخطيّة, كوهن ب المؤثر مجاميع بي القوية , المؤثر المتعددة الخطيّة Hilbert-Schmidt,نظرية Bu , نظرية التفكيك ل Pietsch .

Table des matières

0.1 Introduction

En 1983 le mathématicien Allemand A. Pietsch a introduit la théorie des idéaux multilinéaires. Leur grande motivation était de trouver des rapports entre les opérateurs linéaires et multilinéaires. Dans son travail il a donné l'idée de construre des idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire. Certaines classes d'opérateurs multilinéaires peuvent s'exprimer via ces méthodes de Pietsch à savoir les classes des opérateurs multilinéaires p-dominés et Cohen fortement p-sommants. Beaucoup de chercheurs dans ces dernières années sont intéressés d'étudier ces idéaux multilinéaires. Les travaux de ce mémoire de fin d'étude se situe dans le cadre de la théorie des idéaux multilinéaires. Il prote essentiellement sur une étude comparative entre ces classes d'opérateurs. La plupart des classes généralisent la notion des opérateurs linéaires p-sommants. Seulement la notion des opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants qui généralise celle des opérateurs linéaires fortement p-sommants. Pour cette raison, cette dernière notion intervient dans la plupart des résultats de comparaison.

Le mémoire se divise en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons commencer en rappelant la définition des opérateurs p-sommants introduite par Grothendieck en 1956 pour $p = 1$ et par Pietsch en 1967 pour tout p. L'importance de cette définition motive beaucoup de chercheurs de contribuer et travailler dans ce laxe. Notons par exemple Cohen qui a réussi de caractériser les adjoints des opérateurs p-sommants, il a utilisé pour cette caractérisation les opérateurs fortement p-sommants. Dans ce chapitre, nous allons étudier ces opérateurs de Cohen et on termine le chapitre par une étude de comparaison entre les deux concepts.

Dans le deuxième chapitre, on étudiera les classes des opérateurs multilinéaires. Tout d'abord, on rappelle la définition d'un opérateur multilinéaire borné, l'ensemble de ces opérateurs construit un espace de Banach avec la norme des opérateurs. La deuxième partie de ce chapitre sera consacré à étudier les différentes types de normes tensoriels. En particulier, on verra que l'espace des opérateurs multilinéaires bornés coïncide avec l'espace de produit tensoriel projective. Cette identification nous permettra de transmettre quelques propriétés de cas linéaires au cas multilinéaires. On termine ce chapitre par donner les définitions de cas multilinéaire qui généralise la notion des opérateurs p-sommants ainsi que la notion des opérateurs linéaires fortement p-sommants.

Dans le troisième chapitre, on fera une étude de comparaison entre les classes d'opérateurs multilinéaires. Commençons par les opérateurs m-linéaires définis sur des espaces $\mathcal{L}_p$ dont nous allons établir une bonne relation entre les opérateurs Cohen fortement p-somments, p-dominés, fortement p-sommants de Dimant et multiple p-sommants. Nous allons aussi étudier le cas des espaces de Hilbert et finalement on prendra les opérateurs m-linéaires p-dominés en essayant de les comparer avec les autres concepts.

Notations générales

$\mathbb{k}$	Corps des scalaires ($\mathbb{k}$=$\mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$).
λ	Mesure de probabilité de Radon.
$C(\mathbb{k})$	Espace des fonctions continues sur l'espace compact K àvaleur sréelles.
L_p	Espace de Lebesgue.
$\ell_p(X)$	Espace des suites dans X absolument p-sommables.
$\ell_p^w(X)$	Espace des suites dans X faiblement p-sommables.
B_{X^*}	Boule unité fermé de l'espace dual X.
$B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}$	Boule unité fermé de l'espace dual $X_1\hat{\otimes}_\pi...\hat{\otimes}_\pi X_m$
$\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$	Espace d'opérateurs m-linéaires continus de $X_1,...,X_m$ dans Y.
$\mathcal{M}(X_1,...,X_m;Y)$	Idéal d'opérateurs m-linéaires de $X_1,...,X_m$ dans Y..
$D_p^m(^mX;Y)$	Espace d'opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants de^mX dans Y.
$\mathcal{L}_d^p(^mX;Y)$	Espace d'opérateurs m-linéaires p-dominés de ^mX dans Y.
$\mathcal{L}_s^p(^mX;Y)$	Espace d'opérateurs m-linéaires fortement p-sommants de ^mX dans Y.
$\mathcal{L}_{HS}(^mH;H)$	Espace d'opérateurs m-linéaires de Hilbert-Schmidt de ^mX dans Y.
$\mathcal{L}_f(^mX;Y)$	Espace des opérateur m-linéaire de rang fini de ^mX dans Y.

Chapitre 1

Les opérateurs linéaire p-sommants et leus conjugués

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va rappeler la définition des opérateurs linéaires p-sommants ainsi que le théorème célèbre de factorisation de Pietsch. Puis, on s'intéressera aux opérateurs fortement p-sommants. Ces derniers opérateurs ont été introduit par Cohen pour le but de caractériser les adjoints des opérateurs p-sommnts. On termine ce chapitre en donnant quelques résultats comparatifs entre les deux types.

1.2 Opérateurs p-sommants

Préliminaire.

Définition 1.1. Pour X un espace de Banach et $1 \leq p \leq +\infty$ on définit l'espace des suites absolment p-sommables par

$$\ell_p(X) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^p < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \begin{cases} (\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty & \text{si } 1 \leq p < +\infty. \\ \sup\limits_n \|x_n\| < +\infty & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

On définit l'espace des suites fortement p-sommables par

$$\ell_p^{\omega}(X) := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)|^p < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p.\omega} = \begin{cases} \sup\limits_{x^*\in B_{X^*}} (\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x^*, x_n\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty & \text{si } 1 \leq p < +\infty. \\ \sup\limits_n \|x_n\| < +\infty & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Pour la démonstration de proposition suivante, voir [API76] et [DJT95,pp.32-36].

Proposition 1.2. (a) $\ell_p(X)$ et $\ell_p^{\omega}(X)$ *sont deux espaces de Banach.*

(b) *Si* $p = +\infty$, *on a :*

$$\ell_\infty(X) = \ell_\infty^{\omega}(X).$$

(c) *Pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$, *on a*

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_p^{\omega}(X).$$

Si $\dim X < +\infty$, *on a :* $\ell_p(X) = \ell_p^{\omega}(X)$.

(d) *Pour tout* $1 < p \leq +\infty$, on a $\ell_p^{\omega}(X) = \mathcal{B}(\ell_{p^*}; X)$ *isométriqument et* $\ell_1^{\omega}(X) = \mathcal{B}(c_0, X)$.

Définition 1.3. (*Opérateurs p-sommants*)**.** Soient $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $1 \leq p \leq +\infty$. On dira que T est opérateur p-sommant, s'il existe une constonte $C > 0$, telle que pour toute

$(x_k)_{k=1}^n \subset X$
$$(\sum_{k=1}^{n} \|T(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} \|x^*(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

On note $\pi_p(X;Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y muni de la norme
$$\pi_p(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant l'inégalité } (1.1)\}.$$

Autrement dit, une opérateur T est p-sommant s'il tronsforme toute suite faiblement p-sommable en une suite fortement p-sommable.

Propisition 1.4. *Soit T est opérateur linéaire p-sommant. Alors, T est un opérateur continue et $\|T\| \leq \pi_p(T)$.*

Preuve. Si T est p-sommant, alors
$$\forall (x_k)_{k=1}^n \subset X : (\sum_{k=1}^{n} \|T(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} \|x^*(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $m = 1$
$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle| \\ &= \pi_p(T)\|x\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Propisition 1.5. (*Propriété d'idéal*). *Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et X, Y, E, F des espaces de Banach. Soient $v \in \mathcal{B}(E, X)$, $T \in \pi_p(X, Y)$ et $w \in \mathcal{B}(Y, F)$. Alors,*
$$wTv \in \pi_p(E, F),$$

et
$$\pi_p(wTv) \leq \|w\| \pi_p(T) \|v\|.$$

Théorème 1.6. (*Thérème d'inclusion*). *Si* $1 \leq p < q < +\infty$. *Alors,*

$$\pi_p(X,Y) \subseteq \pi_q(X,Y)$$

de plus, pour $T \in \pi_p(X,Y)$ *nous avons*

$$\pi_q(T) \leq \pi_p(T).$$

Preuve. Soit $(x_k)_{k=1}^n \subset X$, on pose $\lambda_k = \|T(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1}$, alors

$$\|T(\lambda_k x_k)\|^p = \lambda_k^p \|T(x_k)\|^p.$$

Comme $T \in \pi_p(X,Y)$, on trouve

$$\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^n \|T(x_k)\|^q)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x^*, \lambda_k x_k\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(T) \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^n \lambda_k^p |\langle x^*, x_k\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Puisque $(p < q)$ et $1 = \frac{1}{(q/p)} + \frac{1}{(q/q-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, et d'apres "l'inégalité de Hôlder", on obtient

$$\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^n \|T(x_k)\|^q)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(T) (\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^{\frac{qp}{(q-p)}})^{\frac{(q-p)}{qp}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x^*, x_k\rangle|^q)^{\frac{1}{q}} \\
&= \pi_p(T) (\sum_{k=1}^n \|T(x_k)\|^q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|(x_k)_{k=1}^n\|_{q.w}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^n \|T(x_k)\|^q)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n \|T(x_k)\|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(T) \|(x_k)_{k=1}^n\|_{q.w} \\
&\leq \pi_p(T) \|(x_k)_{k=1}^n\|_{q.w}
\end{aligned}$$

Finalment T est q-sommant et $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$. ■

Exemples 1.7. (a) (*Opérateur de multiplication*). Soit K un compact, μ une mesure positive régulière sur K. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $\forall \varphi \in L_p(\mu)$ on a

$$\begin{array}{llll} T_\varphi : & C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \longmapsto & T_\varphi(f) = f.\varphi \end{array}$$

$T_\varphi$est p-sommant et $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_p$.

Cas particulier. Soit l'opérateur canonique : $J_p : C(K) \longrightarrow L_p(\mu) : f \longmapsto J_p(f) = f$. Si F est un sous espace fermé de $C(K)$ et $F_p = \overline{J_p(F)}$ dans $L_p(K, \mu)$, donc :

$$\tilde{J}_p : F \longrightarrow F_p$$

est p-sommant ($J_p : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$ est p-sommant et $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$).

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\tilde{J}_p} & F_p \\ \cap & & \cap \\ C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

Remarque 1.8. Soient X, Y, Z trois espaces de Banach .$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $v : X \longrightarrow Z$ est linéaire injective. Alors, il exite $\tilde{T} : \overline{v(x)} \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire continue telle que $\tilde{T} \circ v = T$ et $\left\|\tilde{T}\right\| \leq c$.

1.3 Caracterisation des opérateurs linéaires p-sommants

Théorème de domination (factorisation) de Pietsch. *Soient $T : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach X, Y et $1 \leq p \leq +\infty$. Alors ,les propriétès suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est p-sommant et $\pi_p(T) \leq C$, $(C > 0)$.*

(ii) *Il existe une probabilité de radon λ sur l'espace compact $K = (B_{X^*}, (X^*, X))$ telle* *que :*

$$\|T(x)\| \leq C(\int\limits_K |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\lambda(x^*))^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

(iii) *Il existe* $\tilde{T} : F_p \longrightarrow Y$, *telle que le diagramme suivont est commintatif et* $\left\|\tilde{T}\right\| \leq C$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i_X \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ \overline{i_X(X)} = F & \xrightarrow{\tilde{J}_p = J_p/F} & F_p = \overline{J_p(F)} \\ \cap & & \cap \\ C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

i_X est un isométrie injective telle que :

$$\begin{array}{ccccc} i_X(x) & : & K & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & x^* & \longmapsto & i_X(x)(x^*) = \langle x^*, x\rangle \end{array}$$

et $F = \{\varphi_x(x^*), \forall x \in X : \varphi_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle\}$ est un sous espace fermé de $C(K)$ et J_p est l'opérateur canonique p-sommant et $\pi_p(J_p) = 1$.

Preuve.(i)⇒(ii) Soit $A \subset C(K)$ l'ensemble des fonctions φ de la forme

$$\varphi_{\{x_1,\ldots,x_n\}}(x^*) = \pi_p(T)^p \sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^p - \sum_{k=1}^n \|T(x_k)\|^p$$

L'ensemble A est un cône convexe, en effet,

$$\begin{aligned} \alpha\varphi_{\{x_1,\ldots,x_n\}}(x^*) &= \pi_p(T)^p \sum_{k=1}^n \left|\left\langle \alpha^{\frac{1}{p}} x_k, x^*\right\rangle\right|^p - \sum_{i=1}^n \left\|T\left(\alpha^{\frac{1}{p}} x_k\right)\right\|^p \\ &= \varphi_{\{\alpha^{\frac{1}{p}} x_1,\ldots,\alpha^{\frac{1}{p}} x_n\}}(x^*). \end{aligned}$$

Puisque T est p-sommat,

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \varphi(x^*) \geq 0, \forall \varphi \in A.$$

On pose

$$B = \{\varphi \in C(K) : \sup_{x^* \in B_{X^*}} \varphi(x^*) < 0\},$$

B est un cône convexe ouvert et $A \cap B = \emptyset$. D'après le théorème de "Hahn -Banach" $2^{ième}$ forme géométrique et le théorème de "Riesz" : $\exists \lambda \in C^*(K)$ (mesure de Radon sur K) qui sépare A et B :

$$\begin{cases} \langle \lambda, \varphi \rangle = \int \varphi d\lambda \geq 0, \ \forall \varphi \in A. \\ \langle \lambda, \varphi \rangle = \int \varphi d\lambda \leq 0, \forall \varphi \in B. \end{cases}$$

On suppose que $\lambda(K) = 1$, sinon on divise par $\lambda(K)$. Soit $x \in X$ et $\varphi_{\{x\}} \in A$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \lambda, \varphi_{\{x\}}(x^*) \right\rangle &= \int_{B_{X^*}} (\pi_p(T)^p \left|\langle x, x^* \rangle\right|^p - \|T(x)\|^p) \, d\lambda(x^*) \\ &= \pi_p(T)^p \int_{B_{X^*}} \left|\langle x, x^* \rangle\right|^p d\lambda(x^*) - \|T(x)\|^p . \end{aligned}$$

Comme $\left\langle \lambda, \varphi_{\{x\}}(x^*) \right\rangle \geq 0$, on trouve

$$\|T(x)\| \leq \pi_p(T)(\int_K \left|\langle x, x^* \rangle\right|^p d\lambda(x^*))^{\frac{1}{p}}.$$

(ii)⇒(i) Soient $x_1, ..., x_n \in X$, on a

$$\|T(x_k)\| \leq C(\int_K \left|\langle x^*, x_k \rangle\right|^p d\lambda(x^*))^{\frac{1}{p}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \|T(x_k)\|^p &\leq C^p \sum_{i=1}^{n} \int_K \left|\langle x^*, x_i \rangle\right|^p d\lambda(x^*) \\ &\leq C^p \int_K \sum_{k=1}^{n} \left|\langle x^*, x_i \rangle\right|^p d\lambda(x^*) \\ &\leq C^p \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} \left|\langle x^*, x_i \rangle\right|^p d\lambda(x^*) . \end{aligned}$$

Donc

$$(\sum_{k=1}^{n} \|T(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} \left|\langle x^*, x_k \rangle\right|^p d\lambda(x^*))^{\frac{1}{p}}.$$

C'est à dire, T est un p-sommant.

(i)⇒(iii) On a

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq C(\int\limits_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\lambda(x^*))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\|x^*(x)\|_{L_p(B_{X^*},\lambda)}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

On pose la diagramme suivont

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_x} & S & \xrightarrow{\tilde{J}_p} & S_p \\ & & \cap & & \cap \\ & & C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(K,\lambda) \end{array}$$

Telle que

$$\begin{array}{rcll} i_X: & X & \longrightarrow & S \\ & x & \longmapsto & i_X(x). \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcll} \tilde{J}_p: & S & \longrightarrow & S_p \\ & i_X(x) & \longmapsto & J_p(i_X(x)) = \langle x^*, x\rangle. \end{array}$$

D'après (1.1) on a

$$\|T(x)\| \leq C\left\|\tilde{J}_p \circ i_x(x)\right\|.$$

D'après la Remarque (1.8), il existe un opérateur linéaire continue $\tilde{T}: S_p \longrightarrow Y$ tel que

$$T(x) = \tilde{T}\left(\tilde{J}_p \circ i_X(x)\right), \forall x \in X \text{ et } \left\|\tilde{T}\right\| < C.$$

Donc la factorisation dans **(iii).**

(iii)⇒(ii) Par la factorisation de T on a :

$$T(x) = \tilde{T} \circ \tilde{J}_p \circ i_X(x), \forall x \in X.$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \|T(x)\| & = & \left\|\tilde{T}\circ\tilde{J}_p\circ i_x(x)\right\| \\ & \leq & \left\|\tilde{T}\right\|\left\|\tilde{J}_p\circ i_x(x)\right\| \\ (S_p\subset L_p(K,\lambda)) & \leq & C\left\|x^*(x)\right\|_{L_p} \\ & = & C(\int_K |\langle x,x^*\rangle|^p \ d\lambda(x^*))^{\frac{1}{p}}. \quad \blacksquare \end{array}$$

Corollaire 1.9.(*Cas* $p = 2$**).** Si $T \in \pi_p(X,Y)$. Alors, T se factorise par $C(K)$ et $L_2(K,\lambda)$ (espace de Hilbert)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i_x\downarrow & & \uparrow\tilde{T} \\ C(K) & \xrightarrow{J_2} & L_2(K,\lambda) \end{array}$$

Preuve. Soit la diagramme suivont

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i_x\downarrow & & \uparrow\tilde{T} \\ S & \xrightarrow{\tilde{J}_2} & S_2 \\ \cap & & \cap\uparrow P \\ C(K) & \xrightarrow{J_2} & L_2(K,\lambda) \end{array}$$

p : la projection de $L_2(K,\lambda)$ sur S_2, il suffit de prendre : $\tilde{\tilde{T}} = \tilde{T}\circ P$ $\blacksquare$

Corollaire 1.10. Si Y est injective. Alors, T est p-sommant si et seulement si, il existe une probabilité de Radon λ sur K et $\tilde{T} \in \mathcal{B}(L_p(\lambda), Y)$, telle que le diagramme suivont est commintatif et $\left\|\tilde{T}\right\| = \pi_p(T)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i_x \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(K,\lambda) \end{array}$$

Corollaire 1.11. Soit K un compact de Housdorff (compact et séparé). Alors, T est p-sommant si et seulement si, il existe une probabilité de Radon λ sur K et $\tilde{T} \in \mathcal{B}(L_p(\lambda), Y)$, telle que le diagramme suivont est commintatif et $\left\|\tilde{T}\right\| = \pi_p(T)$

$$\begin{array}{ccccc} C(K) & & \xrightarrow{T} & & Y \\ & J_p \searrow & & \nearrow \tilde{T} & \\ & & L_p(K,\lambda) & & \end{array}$$

1.4 Opérateur linéaire fortement p-sommant

Pietsch a montré en 1967 que l'identité de ℓ_1 dans ℓ_2 est 2-sommant, mais l'opérateur adjoint n'est pas 2-sommant, pour cela le concept fortement p-sommant a été introduit par Cohen comme une caractérisation des conjugués des opérateurs p^*-sommants.

Définition 1.12. [Coh73] Soit T un opérateur borné entre deux espaces de Banach X et Y. L'opérateur T est fortement p-sommant $(1 < p \leq \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}.(x_k)_{1\leq k\leq n} \subset X$ et $(y_k^*)_{1\leq k\leq n} \subset Y^*$,on a

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle T(x_k), y_k^* \rangle| \leq C(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y\in B_Y} \|(y_k^*(y))_{1\leq k\leq n}\|_{\ell_{p^*}^n}. \tag{1.3}$$

On note $\mathcal{D}_p(X,Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires fortement p-sommants de X dans Y muni de la norme

$$d_p(T) \quad = \quad \inf \{C, \text{vérifiant l'inégalité } (1.3)\}.$$

Pour $p = 1$, l'espace $\mathcal{D}_1(X, Y)$ coïncide avec $\mathcal{B}(X, Y)$.

Théorème1.13. *Soit* $1 < p \leq \infty$ *et* X, Y *deux espaces de Banach*

(1) $\mathcal{D}_p(X; Y)$ *est un espace de Banach.*

(2) *Si* $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, *alors* T *est continue et* $\|T\| \leq d_p(T)$.

Proposition 1.14. *Soit* $R \in \mathcal{B}(Y; Z)$ *et* $S \in \mathcal{B}(E; X)$ *.Si* $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, *alors* $R \circ T \circ S$ *est fortement p-sommant et*

$$d_p(R \circ T \circ S) \leq \|R\| \, d_p(T) \, \|S\| \, .$$

Théorème de factorisation de Pietsch

Théorème 1.15. [Coh73] . *Soient* $1 < p \leq \infty$ *et* $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ *est fortement p-sommant si et seulement s'il existe une probabilité de radon* λ *sur* $(B_{Y^{**}}, \sigma(Y^{**}, Y^{*}))$ *telle que* $\forall x \in X$, $\forall y^* \in Y^*$, *on a*

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \quad \leq \quad d_p(T) \, \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} \, d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} . \tag{1.4}$$

Preuve.$\Rightarrow$) Si T est fortement p-sommant, alors T^* est p^*-sommant et $\pi_{p^*}(T) = d_p(T)$. Soit $x \in X$, $y^* \in Y^*$

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| &= |\langle x, T^*(y^*) \rangle| \\ &\leq \|x\| \, \|T^*(y^*)\| \, . \end{aligned}$$

Comme T^* est p^*-sommant, on trouve

$$\|T^*(y^*)\| \leq \pi_{p^*}(T) \left(\int\limits_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} \, d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} .$$

Donc

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \quad \leq \quad d_p(T) \, \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} \, d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} .$$

$\Longleftarrow$) Soit $(x_k)_{1\leq k\leq n} \subset X$ et $(y_k^*)_{1\leq k\leq n} \subset Y^*$, par (1.4)

$$|\langle T(x_k), y_k^*\rangle| \;\leq\; d_p(T)\,\|x_k\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y_k^*(y^{**})|^{p^*}\, d\lambda(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle T(x_k), y_k^*\rangle| \;\leq\; d_p(T) \sum_{k=1}^{n} (\|x_k\| \left[\int_{B_{Y^{**}}} |y_k^*(y^{**})|^{p^*}\, d\lambda(y^{**})\right]^{\frac{1}{p^*}}),$$

Par Hölder, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\langle T(x_k), y_k^*\rangle| \;&\leq\; d_p(T)(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} \int_{B_{Y^{**}}} |y_k^*(y^{**})|^{p^*}\, d\lambda(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq\; d_p(T)(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**}\in B_{Y^{**}}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k^*(y^{**})|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $T \in \mathcal{D}_p(X;Y)$. ■

1.5 Relation entre les deux types

La relation entre les deux définitions citées ci-dessus nous permettra d'établir quelques relations dans le cas multilinéares. Commençant par le résultat suivant qui relie entre l'opérateur et son adjoint.

Théorème 1.16. [Coh73]. *Soient X,Y deux espaces de Banach et $1 \leq p, q < \infty$* tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. *Alors,*

(1) *L'opérateur T est p-sommant de X dans Y si et seulement si l'opérateur adjoiut T^* est fortement p^*-sommant de Y^* dans X^* et* $d_{p^*}(T^*) = \pi_p(T)$, i.e.,

$$T \in \pi_p(X,Y) \iff T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*, X^*). \tag{1.5}$$

(2) *L'opérateur T est fortement p-sommant de X dans Y si et seulement si l'opérateur*

adjoiut T^* est p^*-sommant de Y^* dans X^* et $\pi_{p^*}(T^*) = d_p(T)$, i.e.,

$$T \in \mathcal{D}_p(X,Y) \iff T^* \in \pi_{p^*}(Y^*, X^*). \tag{1.6}$$

Preuve. $\Rightarrow$) Soit $T \in \pi_p(X,Y)$, on va montré que $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ est fortement p^*-sommant. Soit $(x_k^{**})_{1\leq k\leq n} \subset X^{**}$ et $(y_k^*)_{1\leq k\leq n} \subset Y^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\langle T^*(y_k^*), x_k^{**}\rangle| &= \sum_{k=1}^{n} |\langle y_k^*, T^{**}(x_k^{**})\rangle| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \|y_k^*\| \, \|T^{**}(x_k^{**})\| \\
\text{par Hölder} \qquad &\leq (\sum_{k=1}^{n} \|y_k^*\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} (\sum_{k=1}^{n} \|T^{**}(x_k^{**})\|^{p})^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Puisque T est p-sommant, son bidual T^{**} est aussi p-sommant, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\langle T^*(y_k^*), x_k^{**}\rangle| &\leq \|(y_k^*)_{1\leq k\leq n}\|_{p^*} \, \pi_P(T^{**}) \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k^{**}, x^*\rangle|^{p})^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(T) \, \|(y_k^*)_{1\leq k\leq n}\|_{p^*} \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k^{**}, x^*\rangle|^{p})^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*, X^*)$.

$\Longleftarrow$) Soit $T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*, X^*)$. On va montrer que $T : X \longrightarrow Y$ est p-sommant. Soient $(x_k)_{1\leq k\leq n} \subset X$ et $(y_k^*)_{1\leq k\leq n} \subset Y^*$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} \langle T(x_k), y_k^*\rangle \right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |\langle T(x_k), y_k^*\rangle| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, T^*(y_k^*)\rangle| \\
&\leq d_{p^*}(T^*) \, \|(y_k^*)_{1\leq k\leq n}\|_{p^*} \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k^*, x^*\rangle|^{p})^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$(\sum_{k=1}^{n} \|T(x_k)\|^{p})^{\frac{1}{p}} = \sup_{\|(y_k^*)_{1\leq k\leq n}\|_{p^*}\leq 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \langle T(x_k), y_k^*\rangle \right|.$$

Donc

$$(\sum_{k=1}^{n}\|T(x_k)\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad d_{p^*}(T^*)\sup_{x^*\in B_{X^*}}(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

D'où T est p-sommant et $\pi_p(T)\leq d_{p^*}(T^*)$.

(2) De la même façon que (1). ■

Les résultats suivants dû à Cohen.

Propostion 1.17. (1) $\mathcal{D}_{p^*}(X,Y)\neq\pi_p(X,Y)$ en général pour $1\leq p\leq\infty$ et $(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1)$.

(2) Soit $1\leq p\leq\infty$.Dane le cas d'opérateurs des rangs finis :

(a) $\pi_{p^*}(X,Y)\subseteq\mathcal{D}_p(X,Y)$ lorsque X est un espace ℓ_p.

(b) $\mathcal{D}_p(X,Y)\subseteq\pi_{p^*}(X,Y)$ lorsque Y est un espace ℓ_{p^*}.

(c) $\pi_{p^*}(X,Y)=\mathcal{D}_p(X,Y)$ lorsque X est un espace ℓ_p et Y est un espace ℓ_{p^*}.

Lemme 1.18. Soient $T:X\to Y$ un opérateur linéaire de rang fini entre deux espaces de Banach et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset Y$. Alors,

(i) Pour tout $1\leq p<\infty$, on a $T\in\pi_p(X,Y)$ et

$$\pi_p(T)\leq\inf(\left\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_p(X)},\left\|(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^w_{P^*}(Y)}).$$

(ii) Pour tout $1<p\leq\infty$, on a $T\in\mathcal{D}_p(X,Y)$ et

$$d_p(T)\leq\inf(\left\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^w_{p^*}(X)},\left\|(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_P(Y)}).$$

Preuve. (1) Pour $1\leq p\leq 2$, les résultats dû à Pietsch

$$\begin{cases} i\in\pi_p(\ell_1,\ell_2),\ 1\leq p\leq 2.\\ i^*\notin\pi_p(\ell_2,\ell_\infty),\ 2<p\leq\infty.\end{cases}$$

telle que i est l'opérateur canonique. D'après le Théorème (1.16) $i\in\pi_p(\ell_1,\ell_2)$ si et seulement si, $i^*\in\mathcal{D}_{p^*}(\ell_2,\ell_\infty)$, pour $2\leq p^*\leq\infty$ et $i^*\notin\pi_p(\ell_2,\ell_\infty)$ si et seulement si,

$i \notin \mathcal{D}_{p^*}(\ell_1, \ell_2)$ pour $1 \leq p^* \leq 2$. Alors,

$$\begin{cases} i \in \pi_p(\ell_1, \ell_2) \text{ et } i \in \mathcal{D}_{p^*}(\ell_1, \ell_2), \ 1 \leq p \leq 2 \\ i^* \notin D_{p^*}(\ell_2, \ell_\infty) \text{ et } i^* \notin \pi_p(\ell_2, \ell_\infty), \ 2 \leq p \leq \infty \end{cases}$$

Pour $2 \leq p \leq \infty$ considérons l'opérateur $i_0 = i \circ j$ définie par

$$\begin{array}{ccc} \ell_1 & \longrightarrow & \ell_2 \\ & i_0 \searrow & \downarrow j \\ & & \ell_p \end{array}$$

où i, j sont des opérateur canoniques. Puisque j est continu, nous concluons que i_0 est p-sommant pour tout $p \geq 2$. Mais l'opérateur adjoint

$$i_0^* : \ell_{p^*} \longrightarrow \ell_\infty$$

n'est pas p-sommant. En effet, si $x_k = (0, ..., 1, 0, ...)$, il s'en suit que

$$(\sum_{k=1}^{\infty} \|i_0^* (x_k)\|^p)^{\frac{1}{P}} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{p}} = \infty.$$

Bien que

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} (\sum_{k=1}^{\infty} |x^* (x_k)|^p)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

ce qui implique que, i_0^* n'est pas p-sommant ; donc d'après le Théorème (1.16), $i_0 \notin \mathcal{D}_{p^*}(\ell_1, \ell_p)$. De la même façon, l'opérateur $i_0 \in \mathcal{D}_p(\ell_{p^*}, \ell_\infty)$, mais $i_0^* \notin \pi_p(\ell_{p^*}, \ell_\infty)$.

(a) Puisque T est de rang fini, on peut conclure du lemme précédent que $T \in \pi_{p^*}(\ell_p, Y)$ et $T \in \mathcal{D}_p(\ell_p, Y)$. Soit $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de ℓ_p,parce que T est p^*-sommant, on trouve

$$\begin{aligned} (\sum_{k=1}^{n} \|T (e_k)\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \quad &\leq \quad \pi_{p^*}(T) \sup_{\|x^*\|_{\ell_{p^*}} \leq 1} (\sum_{k=1}^{n} \|x^* (e_k)\|^{P^*})^{\frac{1}{P^*}} \\ &\leq \quad \pi_{p^*}(T). \end{aligned}$$

Si $x_1, ..., x_m \in \ell_p$, alors on peut écrire x_j sous la forme $x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, par conséquent si $(y_j) \in \ell_{p^*}(X^*)$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \left| y_j^* (T x_j) \right| &\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left| a_{kj} y_j^* (T(e_k)) \right|, 1 < p < \infty \\
&\leq (\sum_{k,j} |a_{kj}|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k,j} \left| y_j^* (T(e_k)) \right|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq (\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{\ell_p}^p)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\|T(e_k)\|^{p^*} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \left| \frac{y_j^* (T(e_k))}{\|T(e_k)\|} \right|^{p^*} \right) \right]^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \|x_j\|_{\ell_p(\ell_p)} (\sum_{k=1}^{n} \|T(e_k)\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\|y\|_X \leq 1} \left\| y_j^* (y) \right\|_{\ell_{p^*}^w}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après (1.1), on trouve

$$\sum_{j=1}^{m} \left| y_j^* (T(x_j)) \right| \leq \pi_{p^*}(T) \|x_j\|_{\ell_p(\ell_p)} \sup_{\|y\|_X \leq 1} \left\| y_j^* (y) \right\|_{\ell_{p^*}^w}.$$

Ce qui implique, $T \in \mathcal{D}_p(\ell_p, Y)$ et $d_p(T) \leq \pi_{P^*}(T)$. Pour $p = \infty$, le cas est trivial.

(b) D'après le théorème (1.16) $T \in \mathcal{D}_p(X, \ell_{p^*})$, alors

$$T^* \in \pi_{p^*}(\ell_p, Y^*),$$

et d'après (a) $T^* \in D_p(\ell_p, Y^*)$.

Ce qui implique d'après le théorème (1.16), $T \in \pi_{p^*}(X, \ell_{p^*})$ et

$$\pi_{p^*}(T) \leq d_p(T). \quad \blacksquare$$

Corollaire 1.19. D'après le théorème (1.16), on a si $p_1 < p_2$,alors

$$\mathcal{D}_{p_2}(X, Y) \subset \mathcal{D}_{p_1}(X, Y).$$

Chapitre 2

Classes d'opérateurs multilinéaires

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse aux classes d'opérateurs multilinéaires. Commençons par un survol sur les définitions et propriétés des application multilinéaire. Puis, on verra le concept des idéaux multilinéaires introduit par Pietsch en 1983. Ce dernier a été proposé des méthodes avec lesquelles on peut définir des idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire. En fin, le chapitre se termine par des définitions des classe des opérateurs multilinéaires qui sont qui sont les opérateurs Cohen fortement p-sommants, p-dominés, multiple p-sommants, fortement p-sommants et Hilbert-Schmidt.

2.2 Les opérateurs multilinéaires

Définition 2.1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m ;Y$ des espaces de Banach. Un opérateur T défini de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y est dit multilinéaire (ou m-linéaire) si il est linéaire par rapport à chaque composante. Autrement dit, T est m-linéaire si pour tout

$x^1, ..., x^{j-1}, x^{j+1} ..., x^m$ les opérateurs

$$\begin{array}{llll} T_j : & X_j & \longrightarrow & Y \\ & x^j & \mapsto & T_j\left(x^j\right) = T\left(x^1, ..., x^j, ..., x^m\right). \end{array}$$

sont linéaires. En particulier, si $m = 2$, on dit que T est bilinéaire. Si $Y = \mathbb{K}$, T sera appelé forme m-linéaire.

On note $L\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. Cet ensemble muni des opérations classiques est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Opérateurs multilinéaire borné.

Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. L'opérateur multilinéare $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ est borné (continu) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1, ..., x_m \in X_1 \times ... \times X_m$, on a

$$\left\|T\left(x_1, ..., x_m\right)\right\| \leq C \left\|x_1\right\| ... \left\|x_m\right\|. \tag{2.1}$$

On note $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ l'espace des opérateurs m-linéaires bornée. On muni cet espace de la norme suivante

$$\|T\| = \sup_{\|x_j\| \leq 1; 1 \leq j \leq m} \left\|T(x_1, ..., x_m)\right\|.$$

Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit simplement $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m\right)$.

Proposition 2.2. *Soit Y un espace de Banach, l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|T\|$.*

Preuve. Soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$. Alors, pour tout $\left(x^1, ..., x^m\right) \in X_1 \times ... \times X_m$ on a

$$\left\|T_k\left(x^1, ..., x^m\right) - T_n\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq \left\|T_k - T_n\right\| \left\|x^1\right\| ... \left\|x^m\right\|, \tag{2.1}$$

par conséquent $(T_k(x^1,...,x^m))_k$ est une suite de Cauchy dans Y. Comme Y est complet, la limite

$$T(x^1,...,x^m) = \lim_{k\to\infty} T_k(x^1,...,x^m) \tag{2.2}$$

existe. Parceque (T_k) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ il existe une constante $C>0$, telle que $\|T_k\| \leq C$ pour tout k. Alors il résulte également de (2.2) que $\|T\| \leq C$, et donc continu d'après la proposition (2.3). Finalement ; il résulte facilemen de (2.1) que $\|T_k - T_n\| \to 0$ où $k \to \infty$. ■

Représentation de la classe des opérateurs multilinéaires

Il y a plusieurs normes tensoriels dont on peut munir le produit tensoriel algebrique des espaces de Banach $X_1,...,X_m$. On verra que l'espace des opérateurs multilinéaires bornés coïncide avec l'espace de produit tensoriel muni de la norme projective.

Définition 2.3. (*Produit tensoriel projective*). Soient $X_1,...,X_m$ des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ le produit tensoriet algébrique de $X_1,...,X_m$. On définit la norme projective par

$$\pi(v) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|\right\},$$

où l'inf porte sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

Le complété de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ pour norme $\|\cdot\|_\pi$sera noté $X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m$, qui s'appelle produit tensoriet projectif des espaces $X_1,...,X_m$. Si $X_1 = ... = X_m = X$, on écrit simplemet $\widehat{\otimes}_\pi^m X$.

Définition 2.4. (*Produit tensoriel injective*). Soient $X_1,...,X_m$ des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ le produit tensoriet algébrique de $X_1,...,X_m$. On définit la norme projective par

$$\varepsilon(v) \;=\; \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\left\|x_j^*\left(x_i^j\right)\right\| : x_j^* \in B_{X_j^*}\right\},$$

où le sup porte sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

Le complété de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ pour norme $\|\cdot\|_\varepsilon$sera noté $X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon ... \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m$, qui s'appelle produit tensoriet injectif des espaces $X_1, ..., X_m$. Si $X_1 = ... = X_m = X$, on écrit simplemet $\widehat{\otimes}_\varepsilon^m X$.

Définition 2.5. (*Produit tensoriel de Hilbert*). On peut munir le produit tensoriel algébrique $H_1 \otimes ... \otimes H_m$ du produit scalaire défini par

$$\langle u, v\rangle_H = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\prod_{i=1}^{m}\left\langle x_j^i, y_k^i\right\rangle.$$

où

$$u = \sum_{j=1}^{p} x_j^1 \otimes ... \otimes x_j^m \quad \text{et} \quad v = \sum_{k=1}^{q} y_k^1 \otimes ... \otimes y_k^m.$$

On note $\|.\|_2$ la norme correspondante et $H_1 \widehat{\otimes}_2 ... \widehat{\otimes}_2 H_m$ l'espace complété. Nous avons

$$\varepsilon(v) \leq \|v\|_2 \leq \pi(v).$$

Opérateur linéairisé. Soit $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multilinéaire. On lui associer un opérateur linéaire, appelé linéairisation de $T, \widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y$ défini par

$$\widetilde{T}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) \;=\; \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right).$$

Il est bien connu que T est borné si et seulement si $\widetilde{T}$ est borné. De plus, $\widetilde{T}$ est unique et $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.

Propisition 2.6. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) & \to & \mathcal{B}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right) \\ & T & \mapsto & \Psi(T) = \widetilde{T} \end{array}$$

est une isomorphisme isométrique. Donc,nous avons l'identification isométrique suivante

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{B}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right).$$

Cas particulier. Le dual de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ s'identifie à l'espace des formes multilinéaires bornés

$$\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m\right)^* = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m).$$

Exemple 2.7. (*Opérateur de convolution*)

$$\begin{array}{rccc} T : & L_1(\mathbb{R}) \times L_1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L_1(\mathbb{R}) \\ & (f, g) & \longmapsto & T(f, g) = f * g \end{array}$$

T est bilinéaire.

Opérateurs adjoint. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m; Y$ des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, on définit l'adjoint de T par :

$$\begin{array}{rccc} T^* : & Y^* & \to & \mathcal{L}(X_1, ..., X_m) \\ & y^* & \mapsto & T^*(y^*) \end{array}$$

où $T^*(y^*)(x^1, ..., x^m) = y^*(T(x^1, ..., x^m))$.

2.3 Idéaux d'opérateurs multilinéaires

Les idéaux multilinéaires ont été introduits par Pietsch en 1983. Leur motivation est d'établir des liens entre les idéaux linéaires et multilinéaires.

Définition 2.8. (*Opérateurs de rang fini*). Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de rang fini s'il est somme finie d'opérateurs de la forme

$$T_{y \otimes_{j=1}^{m} x_j^*} = x_1^* \otimes .. \otimes x_m^* \otimes y : \left(x^1, ..., x^m\right) \to x_1^* \left(x^1\right) ... x_m^* \left(x^m\right) y.$$

oú $x_j^* \in X_j^* (1 \leq j \leq m)$ et $y \in Y$. L'espace des opérateur multilinéaire de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$.

Définition 2.9. (*Idéal d'opérateurs m-linéaires*). Un idéal d'opérateurs m-linéaires (ou muti -idéal) $\mathcal{M}$ est une classe des opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout $X_1, ..., X_m$ et Y des espaces de Banach on a :

(1) L'ensemble $\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ qui contient les opérateurs m-linéaires de rang finis.

(2) (*Propriété d'idéal*). Si $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$, $u_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j)$ et $v \in \mathcal{B}(Y; F)$, alors $v \circ T \circ (u_1, ..., u_m)$ est dans $\mathcal{M}(E_1, ..., E_m; F)$.

De plus,si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ satisfait

(a) $(\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y), \|.\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (Banach).

(b) Si $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y), u_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j)$ et $v \in \mathcal{B}(Y; F)$,

$$\|v \circ T \circ (u_1, ..., u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| ... \|u_m\|.$$

Alors $(\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y), \|.\|_{\mathcal{M}})$ s'appelle *idéal normé* (*de Banach*) *des opérateurs multilinéaires* .

Exemple 2.10. L'espace $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal multilinéaire mais pas de Banach.

2.4 Méthodes de Pietsch

On exposera les méthodes de Pietsch qui permet d'engendrer de nouveaux idéaux multilinéaires. Les méthodes sont décrites dans [Pie83].

La méthode de factorisation

Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Un multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de type $\mathcal{L}(\mathcal{I})$,et on écrit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$, s'il existe des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$,des opérateurs linéaires $u_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$, $(1 \leq j \leq m)$,et un opérateur multilinéaire borné $A \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \times ... \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_m & A \nearrow & \\ G_1 & \times ... \times & G_m & & \end{array}$$

C'est à dire $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$. Si $\mathcal{I}$ est normé on définit pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = \inf \|A\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|u_m\|_{\mathcal{I}},$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$ avec $u_j \in \mathcal{I}$.

Proposition 2.11. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Alors,*

(1) *L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ est un idéal des opérateurs multilinéaires.*

(2) *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors $(\mathcal{L}(\mathcal{I}); \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})})$ est un idéal quasi Banach des opérateurs multilinéaires.*

La méthode de composition

Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Un multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de type $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, et on écrit $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, s'il existe un espace de Banach G,un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(G; Y)$ et un opérateur multilinéaire borné $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$

tels que le diagramme suivant communte

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \times ... \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ & & & \searrow A & u \uparrow \\ & & & & G \end{array}$$

C'est à dire $T = u \circ A$. Si T est normé,

$$\|T\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}} \|A\|,$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = u \circ A$ avec $u \in \mathcal{I}$.

Proposition 2.12. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateurs linéaires. Alors,*

(1) *L'espace $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ est un idéal des opérateurs multilinéaires.*

(2) *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors il en est de même pour $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}; \|.\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$.*

Proposition 2.13. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Pour $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.*

(2) *L'opérateur $\widetilde{T} \in \mathcal{I}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi; Y\right)$.*

2.5 Opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants

Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants ont été introduite par Achour et Mezrag en 2007 comme généralisation des opérateur linéaires fortement p-sommants.

Définition 2.14. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ (X_j ; Y sont des espaces de Banach et $m \in \mathbb{N}$) est Cohen fortement p-sommant, $1 \leq p \leq \infty$ si seulment si, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$, et tout $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p\right)^{1/p} \sup_{y\in B_Y} \left\|\left(y_i^*(y)\right)\right\|_{\ell_{p^*}^n}. \tag{2.2}$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$dans Y, qui est notée $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ qui est un espace de Banach muni de la norme

$$d_p^m(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.2)\}.$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ et si $\dim Y < \infty$ alors

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Proposition 2.15. L'espace $D_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal de Banach dans $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, i.e.,

(1) *Soient* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, $R \in \mathcal{B}(Y; Z)$ *et* $S_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j)$ $(1 \leq j \leq \infty)$.
Si T *est Cohen fortement p-sommant, alors* $R \circ T \circ (S_1, ..., S_m)$ *est Cohen fortement p-sommant et*

$$d_p^m(R \circ T \circ (S_1, ..., S_m)) \leq \|R\| \, d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\|.$$

(2) L'espace $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ contient les opérateurs m-linéaires de rang finis.

Preuve. (1) On montre que $R\circ T\circ(S_1, ..., S_m) \in \mathcal{D}_p^m(E_1, ..., E_m; Z)$ oú $\left(x_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}} \subset E_j(1 \leq j \leq m)$ et $(z_i^*)_{i\in\mathbb{N}} \subset Z^*$.

$$
\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{i=1}^{n} |\langle R \circ T \circ (S_1, ..., S_m), z_i^* \rangle| \\
= \; & \textstyle\sum_{i=1}^{n} |\langle T \circ (S_1, ..., S_m), R^*(z_i^*) \rangle| \\
\leq \; & d_p^m(T) (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \| S_j(x_i^j) \|_{X_j}^p)^{1/p} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} |\langle R^*(z_i^*), y \rangle|^{p^*})^{1/p^*} \\
\leq \; & d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \| x_i^j \|_{X_j}^p)^{1/p} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} |\langle z_i^*, R(y) \rangle|^{p^*})^{1/p^*} \\
= \; & \|R\| \, d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \| x_i^j \|_{X_j}^p)^{1/p} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle z_i^*, \tfrac{R(y)}{\|R\|} \right\rangle \right|^{p^*})^{1/p^*} \\
= \; & \|R\| \, d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \| x_i^j \|_{X_j}^p)^{1/p} \sup_{z \in B_Z} (\sum_{i=1}^{n} |\langle z_i^*, z \rangle|^{p^*})^{1/p^*}
\end{aligned}
$$

Ce qui entraîne

$$
d_p^m(R \circ T \circ (S_1, ..., S_m)) \leq \|R\| \, d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| .
$$

(2) Soit $T(x^1, ..., x^m) = x_1^*(x^1) ... x_m^*(x^m) y$ oú $x_j^* \in X_j^*$, $x^j \in X_j (1 \leq j \leq m)$ et $y \in Y$.

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle| \; = \; & \sum_{i=1}^{n} |x_1^*(x_i^1) ... x_m^*(x_i^m)| \, |\langle y, y_i^* \rangle| \\
\leq \; & (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} |x_j^*(x_i^j)|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |\langle y, y_i^* \rangle|^{p^*})^{1/p^*} \\
\leq \; & \|y\| \prod_{j=1}^{m} \|x_j^*\| (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle \tfrac{y}{\|y\|}, y_i^* \right\rangle \right|^{p^*})^{1/p^*} \\
\leq \; & \|y\| \prod_{j=1}^{m} \|x_j^*\| (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\|^p)^{1/p} \sup_{\varepsilon \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} |\langle \varepsilon, y_i^* \rangle|^{p^*})^{1/p^*} .
\end{aligned}
$$

Où $\varepsilon = \frac{y}{\|y\|}$.Donc, $T \in D_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ et $d_p^m(T) \leq \|y\| \prod_{j=1}^{m} \|x_j^*\|$. ■

Théorème de domination de Pietsch. *Un opérateur m-linéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est Cohen fortement p-sommant, $(1 < p \leq \infty)$ s'il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$* et $y^* \in Y^*$, *on a*

$$
|\langle T(x^1, ..., x^m), y_i^* \rangle| \quad \leq \quad C \prod_{j=1}^{m} \|x^j\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y(y^*)|^{p^*} d\mu(y^*) \right)^{1/p^*} . \tag{2.3}
$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème voir[AM07] . ■

Corollaire 2.16. Soient $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ tels que $p_1 \leq p_2$. Si $T \in \mathcal{D}_{p_2}^m(X_1, ..., X_m; Y)$ alors T est dans $\mathcal{D}_{p_1}^m(X_1, ..., X_m; Y)$ et $d_{p_1}^m(T) \leq d_{p_2}^m(T)$.

Preuve. Immédiate par l'inégalité (2.3). ■

Proposition 2.17. *Soient* $X_1, ..., X_m, Y$ *des espaces des Banach et* $1 \leq p, p_1, ..., p_m \leq +\infty$. *Alors,*

(a) *L'idéal multilinéaire* $\mathcal{D}_p^m$ *est engendré par la méthode de composition à partir de l'idéal linéaire* D_p.

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) \quad = \quad \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

(b) *L'idéal multilinéaire* $\mathcal{D}_p^m$ *contient l'idéal multilinéaire* $\mathcal{L}(D_{p_1}, ..., D_{p_m})$ avec $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$.

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_{p_1}, ..., \mathcal{D}_{p_m})(X_1, ..., X_m; Y) \quad \subseteq \quad \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

2.6 Opérateurs multilinéaires p-dominés

Définition 2.18. Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ un opérateur m-linéaire borné. On dira que T est p-dominé $(1 \leq p < \infty)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right)\right\|^{p/m}\right)^{m/p} \quad \leq \quad C \prod_{j=1}^{m} \left\|\left(x_i^j\right)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{\ell_p^{n,w}(X_j)}. \tag{2.3}$$

On note $\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m-linéaires p-dominés de $X_1 \times ... \times X_m$dans Y. C'est un quasi-Banach pour la quasi-norme $\delta_p(T)$, définie par

$$\delta_p(T) \quad = \quad \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.3)\}.$$

Si $p > m$, $\delta_p(T)$ est une norme sur $\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$.

Remarque 2.19. La classe des opérateurs m-linéaires p-dominés est un multi-idéal. Sa construction peut s'interpréter par la méthode de factorisation. i.e.,

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(\pi_p)(X_1, ..., X_m; Y).$$

Théorème de domination de Pietsch.

Théorème 2.20. *Soient* $1 \leq p < \infty$; $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. *Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur* T *est p-dominé.*

(2) *Il existe une constante positive* C *et une probabilités de Radon* μ_j *sur* $K_j = B_{X_j^*}, (j = 1, ..., m)$ *telles que*

$$\|T(x^1, ..., x^m)\| \leq C \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{X_j^*}} |x^j(x^*)|^p \, d\mu_j(x^*) \right)^{1/p}, \tag{2.4}$$

pour tout $x^j \in X_j$. *De plus, on a*

$$\delta_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (2.4)}\}.$$

Comme conséquence, p_1-dominé implique p_2-dominé pour $\mathrm{p}_1 \leq \mathrm{p}_2$.

Théorème 2.21 (*Meléndez-Tonge, 1999*)[MT99] Soient $2 < p < r^* < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. et Y un espace de Banach . Alors,

$$\mathcal{L}_d^1\left(\ell_p^n; Y\right) = \mathcal{L}_d^r\left(\ell_p^n; Y\right).$$

Théorème 2.22[Pel05] Si $1 < r < p < \infty$. et X un espace de Banach tel qui

$$\mathcal{L}_d^P(X^n; \ell_p) = \mathcal{L}_d^r(X^n; \ell_p).$$

Alors

$$\mathcal{L}_d^P(X^n; Y) = \mathcal{L}_d^1(X^n; Y),$$

pour tout Y un espace de Banach.

2.7 Opérateurs multilinéaires fortement p-sommants

Dimant [Dim03] a introduit les opérateurs multilinéaires fortement p-sommants .Ces opérateurs vérifient l'analogue du théorème de Pietsch .

Définition 2.23. Soit $1 \leq p < \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. L'opérateur T est fortement p-sommant s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i^1, ..., x_i^m)|^p\right)^{1/p}. \tag{2.5}$$

La classe des opérateurs m-linéaires fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$dans Y, notée $\mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y)$; est un espace de Banach pour la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}_s^p} = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (2.5)}\}.$$

Théorème 2.24 [Dim03] . *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'opérateur T est fortement p-sommant.*

(ii) *Il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $\left(B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}, w^*)\right)$ et une constante positive $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, ..., x_m) \in X_1 \times ... \times X_m$, on a*

$$\left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq C\left(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} \left|\Phi\left(x^1, ..., x^m\right)\right|^p d\mu(\Phi)\right)^{1/p}.$$

Proposition 2.25. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.*

(1) *l'espace $\mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal de Banach.*

(2) *Si $\widetilde{T}$ est p-sommant, alors T est fortement p-sommant.*

Proposition 2.26. *Soient $X_1, ..., X_m$, $E_1, ..., E_m$,Y ; Z des espaces de Banach. Soient $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y; Z)$ et $S_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$ $(1 \leq j \leq \infty)$.*

(1) *Si T est fortement p-sommant, alors $R \circ T$ est fortement p-sommant et*

$$\|R \circ T\|_{\mathcal{L}_s^p} \leq \|R\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_s^p}.$$

(2) *Si T est fortement p-sommant, alors $T\circ(S_1,...,S_m)$ est fortement p-sommant et*

$$\|T\circ(S_1,...,S_m)\|_{\mathcal{L}_s^p}\leq\prod_{j=1}^m\|S_j\|\,\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}.$$

Preuve. (1) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x^1,...,x^m\in X_j$, tel que $j=1,...,m$

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^n\|R\circ T(x_i^1,...,x_i^m)\|^p)^{1/p} &\leq \|R\|(\sum_{i=1}^n\|T(x_i^1,...,x_i^m)\|^p)^{1/p}\\ &\leq \|R\|\,\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}\sup_{\Phi\in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}}(\sum_{i=1}^n|\Phi(x_i^1,...,x_i^m)|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Alors $R\circ T$ est fortement p-sommant et $\|R\circ T\|_{\mathcal{L}_s^p}\leq\|R\|\,\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}$.

(2) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $(e^1,...,e^m)\in E_1\times...\times E_m$. On a

$$\begin{aligned}&(\sum_{i=1}^n\|T\circ(S_1,...,S_m)(e_i^1,...,e_i^m)\|^p)^{1/p}\\ =&(\sum_{i=1}^n\|T\circ(S_1(e_i^1),...,S_m(x_i^m))\|^p)^{1/p}\\ \leq&\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}\sup_{\Phi\in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}}(\sum_{i=1}^n|\Phi(S_1(e_i^1),...,S_m(x_i^m))|^p)^{1/p}\\ =&\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}\sup_{\Phi\in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}}(\sum_{i=1}^n|\Phi(S_1,...,S_m)(e_i^1,...,e_i^m)|^p)^{1/p}\\ \leq&\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}\prod_{j=1}^m\|S_j\|\sup_{\gamma\in B_{\mathcal{L}(E_1,...,E_m)}}(\sum_{i=1}^n|\gamma(e_i^1,...,e_i^m)|^p)^{1/p},\end{aligned}$$

tel que $\gamma=\frac{\Phi(S_1,...,S_m)}{\Pi_{j=1}^m\|S_j\|}$. Ce qui entraîne,

$$\|T\circ(S_1,...,S_m)\|_{\mathcal{L}_s^p}\leq\prod_{j=1}^m\|S_j\|\,\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}.\quad\blacksquare$$

Théorème 2.27 (*Théorème d'inclusion*). *Si $1\leq p\leq q<\infty$, alors $\mathcal{L}_s^p(X_1,...,X_m;Y)\subset\mathcal{L}_s^q(X_1,...,X_m;Y)$ et*

$$\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}\leq\|T\|_{\mathcal{L}_s^q}.$$

Preuve. On peut déduire facilement le théorème d'inclusion,en utilisant le théorème (2.24) et l'inégalité de Hôlder. ■

2.8 Opérateurs m-linéaires multiple p-sommants

Définition 2.28. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est dit multi p-sommant ($1 \leq p < \infty$), s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_{i_1}^j, ..., x_{i_n}^j \in X_j$ $(j = 1, ..., m)$,

$$(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{n_j} \right\|_{l_p^n \ \omega(X_j)}. \tag{2.6}$$

On note $\Pi_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$, l'espace de Banach des opérateurs m-linéaires multi p-sommants, muni de la norme

$$\pi_p^m(T) = \inf \{C : C \text{ vérifie } (2.6)\}.$$

Proposition 1.26. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. On a

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \Pi_p^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$. D'après la factorisation des opérateurs multilinéaires p-dominés,

$$T = A(u_1, ..., u_m)$$

où les u_j sont linéaires p-sommants. Alors

$$(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\| A\left(u_1\left(x_{i_1}^1\right), ..., u_m\left(x_{i_m}^m\right)\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|A\| (\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\| u_1\left(x_{i_1}^1\right) \right\|^p ... \left\| u_m\left(x_{i_m}^1\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|A\| \prod_{j=1}^{m} \pi(u_j) \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{n_j} \right\|_{l_p^n \ \omega(X_j)}.$$ ■

2.9 Opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt

Définition 2.29.[Dwy71] Soient $H_1, ..., H_m, H$ des espaces de Hilbert. L'opérateur multilinéaire $T : H_1 \times ... \times H_m \to H$ est de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{i_k \in I_k, k=1,...,m} \left\| T\left(e^1_{i_1}, ..., e^m_{i_m}\right) \right\|^2 < +\infty \tag{2.7}$$

où $\left(e^k_i\right)_{i_k \in I_k}$ est une base orthonormale de l'espace H_k $(1 \leq k \leq m)$. La somme (2.7) ne dépend pas de la base orthonormale choisie.
L'espaces des opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H)$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{i_k \in I_k, k=1,...,m} \left\| T\left(e^1_{i_1}, ..., e^m_{i_m}\right) \right\|^2\right)^{1/2}.$$

$\|.\|_{HS}$ est induite du produit scalaire suivant

$$\langle T, S \rangle = \sum_{i_k \in I_k, k=1,...,m} \left\langle T\left(e^1_{i_1}, ..., e^m_{i_m}\right), \overline{S\left(e^1_{i_1}, ..., e^m_{i_m}\right)} \right\rangle.$$

Proposition 2.30 . *Si $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H)$.Alors, $T_1 \in \mathcal{L}_{HS}(H_1; \mathcal{L}_{HS}(H_2, ..., H_m; H))$ où*

$$T_1(x^1)(x^2, ..., x^n) = T(x^1, x^2, ..., x^n),$$

pour $x^k \in H_k (1 \leq k \leq m)$,est isomorphe isométrique.

Remarque 2.31 [Mat03].Si $\left(e^k_i\right)_{i_k \in I_k}$ est une base orthonormale de l'espace H_k $(1 \leq k \leq m)$ alors $\left(e^1_{i_1} \otimes ... \otimes e^m_{i_m}\right)_{i_k \in I_k, k=1,...,m}$ est une base orthonormale de l'espace $H_1 \widehat{\otimes}_2 ... \widehat{\otimes}_2 H_m$.

Comme une conséquence de cette remarque nous pouvons prouver.

Proposition 2.32. *Soient $H_1, ..., H_m, H$ des espaces de Hilbert et $T_2 : H_1 \widehat{\otimes}_2 ... \widehat{\otimes}_2 H_m \to$*

H. Les deux propréités suivantes sont équivalentes.

(1) *L'opérateur T est dans $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H)$.*

(2) *L'opérateur T_2 est dans $\mathcal{L}_{HS}(H_1 \hat{\otimes}_2 ... \hat{\otimes}_2 H_m; H)$,* où *$T_2$ est l'extension de $\widetilde{T}$ sur l'espace $H_1 \hat{\otimes}_2 ... \hat{\otimes}_2 H_m$.*

Remarque 2.33 *Soient $H_1, ..., H_m, H$ des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1, ..., H_m; H)$* .Alors,

$$\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H) = \Pi_2^m(H_1, ..., H_m; H).$$

Chapitre 3

Théorèmes d'inclusions

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à étudier quelques résultats de comparaison des opérateurs multilinéaires. L'opérateur adjoint et la linéarisation d'un opérateur multilinéaire jouent un rôle important et interviennent dans la plupart des résultats obtenus. Bien entendu, on s'inspire toujours du cas linéaire qui reste riche et important. Notons que les résultats de ce chapitre sont trouvés dans les travaux de Mezrag et Saadi " *Inclusion theorems for Cohen strongly summing multilinear operators*" Bull. Belg. Math. (2009).

3.2 Opérateurs m-linéaires définies sur les espaces $\mathcal{L}_p$

Définition 3.1.($\mathcal{L}_p$-*espace*) Soient $1 \leq p \leq \infty$. Un espace de Banach X est dit espace $\mathcal{L}_p$ si pour tout sous espace de dimension finie $E \subset X$ il existe $F \subset X$ contenant E et un isomorphisme $u : F \longrightarrow l_p^{\dim F}$ satisfaisant $\|u\| \left\|u^{-1}\right\| < 1$. Soit $(\Omega; \mu)$ un espace mesuré ; pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Lebesgue $L_p(\mu)$ sont des espaces $\mathcal{L}_p$. L'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un compact K est un espace $\mathcal{L}_\infty$.

Théorème 3.2. (1) *Soit* $1 < p \leq \infty$ *et* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ *et* T^* *son adjoint. Alors*

$T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ *si et seulement si l'opérateur adjoiut* $T^* \in \pi_{p^*}(Y^*; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$ *et* $d_p^m(T) = \pi_{p^*}(T^*)$.

(2) *Soit* $1 < p \leq \infty$ *et* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. *Si* T^* *est un opérateur linéaire(Cohen) fortement* p^**-sommant, alors* T *est fortement* p*-sommants.*

Preuve. (1) Supposons que T est Cohen fortement p-sommant. D'après (1.3)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \langle T^*(y_i^*), z_i^* \rangle\right| \leq d_{p^*}(T^*)(\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*})^{1/p^*} \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |z_i^*(\Phi)|^p)^{1/p}.$$

Soient maitenant $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j \, (1 \leq j \leq m)$. On considère l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{llll} T_{x_i^1,...,x_i^m}: & \mathcal{L}(X_1, ..., X_m) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & \Phi & \mapsto & T_{x_i^1,...,x_i^m}(\Phi) = \Phi(x_i^1, ..., x_i^m). \end{array}$$

On obtient

$$\begin{aligned} & |\sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle| \\ = & |\sum_{i=1}^{n} \left\langle T^*(y_i^*), T_{x_i^1,...,x_i^m} \right\rangle| \\ \leq & d_{p^*}(T^*)(\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*})^{1/p^*} \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i^1, ..., x_i^m)|^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p)^{1/p} \\ = & \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle\right| : (\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*})^{1/p^*} \leq 1\right\} \\ \leq & d_{p^*}(T^*) \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i^1, ..., x_i^m)|^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

donc, T est fortement p-sommant et $\|T\|_{\mathcal{L}_s^p} \leq d_{p^*}(T^*)$. ■

Proposition 3.3. *Soient* $r_1, ..., r_m \in \mathbb{N}^*$ *et* $1 < p \leq \infty$. *Soit* T *un opérateur multilinéaire de* $l_p^{r_1} \times ... \times l_p^{r_m}$ *dans* Y. *Alors*

$$d_p^m(T) \leq \pi_{p^*}^m(T).$$

Le résultat suivant établi une relation entre les opérateurs multiple p-sommants et les opérateurs Cohen fortement p-summants définies sur des espaces $\mathcal{L}_p$.

Théorème 3.4. *Fixons $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $1 < p \leq \infty$ et X_j $(1 \leq j \leq m)$ des espaces $\mathcal{L}_p$. Alors*

$$\Pi_{p^*}^m (X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_p^m (X_1, ..., X_m; Y) \text{ et } d_p^m (T) \leq \pi_{p^*}^m (T).$$

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}^*$; $x_1^j, ..., x_n^j$ dans X_j et $T \in \Pi_{p^*}^m (X_1, ..., X_m; Y)$. Comme X_j est un espace $\mathcal{L}_p$, il existe un sous espace de dimension finie $M_j \subset X_j$ contenant le sous espace engendré par $x_1^j, ..., x_n^j$, et un opérateur inversible $S_j : l_p^{r_j} \to M_j$ $(\dim M_j = r_j)$ tel que $\|S_j\| \left\|S_j^{-1}\right\| \leq 1$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{llllllll}
X_1 & \times ... \times & X_m & & \xrightarrow{T} & Y & & \\
\uparrow i_1 & & \uparrow i_m & & & \overline{T} \uparrow & & \\
M_1 & \times ... \times & M_m & \underset{(S_1, ..., S_m)}{\longleftarrow} & l_p^{r_1} & & \times ... \times & l_p^{r_m} \\
\uparrow k_1 & & \uparrow k_m & & & & & \\
\mathrm{vect}\{x_1^1, ..., x_n^1\} & \times ... \times & \mathrm{vect}\{x_1^m, ..., x_n^m\} & & & & &
\end{array}$$

où i_j et k_j sont les inclusions cananiques et

$$\overline{T} = T (i_1 \circ S_1, ..., i_m \circ S_m).$$

Il s'ensuit que

$$\pi_{p^*}^m (\overline{T}) \leq \pi_{p^*}^m (T) \prod_{j=1}^m \|S_j\| \|i_j\|.$$

La Proposition 3.3 implique

$$d_p^m \left(\overline{T}\right) \leq \pi_{p^*}^m \left(\overline{T}\right) \leq \pi_{p^*}^m (T) \prod_{j=1}^m \|S_j\|.$$

Posons $z_i^j = S_j^{-1} x_i^j \in l_p^{r_j}$; pour $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \\
= & \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle \overline{T}\left(z_i^1, ..., z_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \\
\leq & \; d_p^m\left(\overline{T}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| z_i^j \right\|_{l_p^{r_j}}^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(y_i^*(y)\right) \right\|_{l_{p^*}^n} \\
\leq & \; \pi_{p^*}^m(T) \prod_{j=1}^{m} \left\| S_j \right\| \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| z_i^j \right\|_{l_p^{r_j}}^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(y_i^*(y)\right) \right\|_{l_{p^*}^n}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \\
\leq & \; \pi_{p^*}^m(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(y_i^*(y)\right) \right\|_{l_{p^*}^n}.
\end{aligned}$$

Donc $d_p^m(T) \leq \pi_{p^*}^m(T)$. ■

Si Y^* est un espace $\mathcal{L}_p$ nous pouvons donner la relation entre les opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants et les opérateurs m-linéaires fortement p^*-sommants de Dimant.

Corollaire 3.5.[MSaa09] *Soit $1 < p \leq \infty$. Si Y^* est un espace $\mathcal{L}_p$,*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^{p^*}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$. D'après le Théorème 3.2, T^* est p^*-sommant. Comme Y^* est un espace $\mathcal{L}_p$, par [Coh73 ; Théorème 3.2.3], T^* est Cohen fortement p-sommant. Le Théorème 3.2 implique que $T \in \mathcal{L}_s^{p^*}(X_1, ..., X_m; Y)$. ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des résultats précédents où on trouve une bonne relation entre les opérateurs multiple p-sommants et fortement p-sommants de Dimant.

Corollaire 3.6. *Soit* $1 < p < \infty$. *Si* X_j $(1 \leq j \leq m)$ *et* Y^* *deux espace* $\mathcal{L}_p$,

$$\Pi_{p^*}^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^{p^*}(X_1, ..., X_m; Y).$$

3.3 Relations entre les opérateurs m-linéaires p-dominé et les autres classes

Proposition 3.7. *Soient* $1 < p \leq \infty$ *et* $X_1, ..., X_m$ *;*Y *des espaces de Banach. Alors,*

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_1^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$. Soient $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right)\right\| \left\|y_i^*\right\| \\
&\leq \delta_p(T) \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B_{X_j^*}} \left|x_i^j(x^*)\right|^p d\mu_j(x^*)\right)^{1/p} \left\|y_i^*\right\|\right) \\
&\leq \delta_p(T) \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\| \left\|y_i^*\right\|\right) \\
\text{(par l'inégalité de Hölder)} \quad &\leq \delta_p(T)\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|\right)\sup_i \left\|y_i^*\right\|.
\end{aligned}$$

Puisque $\ell_\infty^n = \ell_\infty^{n.w}$.On trouve

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \leq \delta_p(T)\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|\right) \sup_{y \in B_{\ell_1}} \left\|y_i^*(y)\right\|_{\ell_\infty}.$$

Donc $T \in \mathcal{D}_1^m(X_1, ..., X_m; Y)$ et $d_1^m(T) \leq \delta_p(T)$. ■

Proposition 3.8. *Soient* $1 \leq p < \infty$.*Soit* T *un opérateur de rang fini. Si* $T \in \mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$, *alors* $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ *et* $d_p^m(T) \leq \delta_p(T)$.

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$. Soient $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$ on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|\left\|y_i^*\right\| \\
&\leq \delta_p(T)\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}(\int_{B_{X_j^*}}\left|x_i^j(x^*)\right|^p d\mu_j(x^*))^{1/p}\left\|y_i^*\right\|) \\
&\leq \delta_p(T)\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|\left\|y_i^*\right\|) \\
&= \delta_p(T)(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n}\left\|y_i^*\right\|^{p^*})^{1/p^*}.
\end{aligned}
$$

Si le rang de T est fini ($\dim T\left(X_1\times...\times X_m\right)<\infty$). Alors, $(\sum_{i=1}^{n}\left\|y_i^*\right\|^{p^*})^{1/p^*}=\left\|(y_i^*)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_{p^*}^{n,w}(Y^*)}$.

$$
\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| \leq \delta_p(T)(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p)^{1/p}\left\|(y_i^*)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_{p^*}^{n,w}(Y^*)}.
$$

Donc $T\in\mathcal{D}_p^m\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ et $d_p^m(T)\leq\delta_p(T)$. ■

Corollaire 3.9. Soient $1<p<\infty$ et $X_1,...,X_m$des espaces de Banach .Soit T un opérateur de rang fini et Y^* est un espace $\mathcal{L}_p$. Alors,

$$
\mathcal{L}_d^p\left(X_1,...,X_m;Y\right)\subseteq\mathcal{L}_s^{p^*}\left(X_1,...,X_m;Y\right).
$$

Corollaire 3.10. Soient $1<p\leq\infty$ et $X_1,...,X_m$des espaces de Banach .Si $X_j(1\leq j\leq m)$ et Y^* deux espace $\mathcal{L}_p$. Alors,

$$
\mathcal{L}_d^{p^*}\left(X_1,...,X_m;Y\right)\subseteq\mathcal{D}_p^m\left(X_1,...,X_m;Y\right)\subseteq\mathcal{L}_s^{p^*}\left(X_1,...,X_m;Y\right).
$$

3.4 Etude du cas des espaces de Hilbert

Théorème 3.11. *Soient $1<p,q<\infty$; $H_1,...,H_m$ des espaces de Hilbert et Y un espace de Banach. Alors,*

$$
\mathcal{L}_d^p\left(H_1,...,H_m;Y\right) \subseteq \mathcal{D}_q^m\left(H_1,...,H_m;Y\right).
$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; Y)$. D'après la Remarque 2.19 $T = A(u_1, ..., u_m)$ tels que $u_j \in \pi_p(H_j; G_j)$ et $A \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$,par le Théorème de Bu cas linéaire cité dans[Coh73] on a $u_j \in D_q(H_j; G_j)$ pour tout $1 < q < \infty$.On choisit $q_1, ..., q_m > 1$, tels que $\frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_m} = \frac{1}{q}$. Comme $u_j \in D_{q_j}(H_j; G_j)$ et d'après la Remarque 2.19, la proposition 2.17 donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; Y) &= \mathcal{L}(\pi_p)(H_1, ..., H_m; Y) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}_{q_1}, ..., \mathcal{D}_{q_m})(H_1, ..., H_m; Y) \\ &\subseteq \mathcal{D}_q^m(H_1, ..., H_m; Y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 3.11. *Fixons $m \geq 2$. Soit Y un espace de Banach.Si Y est isomorphe à un espace de Hilbert. Alors, pour tout espaces de Banach $X_1, ..., X_m$ et tout $1 < p, q < \infty$;*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^q(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; H)$ (H un espace de Hilbert) par le Théorème 3.2

$$T^* \in \pi_{p^*}(H; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)) \quad \underset{1<q^*<\infty}{\overset{\text{par leThéorème de Bu cas linéaire}}{\Longleftrightarrow}} \quad T^* \in \mathcal{D}_{q^*}(H; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)).$$

D'après le Théorème 3.2 $T \in \mathcal{L}_s^q(X_1, ..., X_m; H)$, Ce résultat reste vrai si Y est isomorphe à un Hilbert. $\blacksquare$

Proposition 3.12. *Soient $H_1, ..., H_m; H$ des espaces de Hilbert. Alors,*

$$\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H) \subseteq \mathcal{D}_p^m(H_1, ..., H_m; H).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H)$ et d'après la Proposition 2.32

$$T_2 \in \mathcal{L}_{HS}\left(H_1 \hat{\otimes}_2 ... \hat{\otimes}_2 H_m; H\right)$$

($T_2 \in \mathcal{D}_p\left(H_1 \hat{\otimes}_2 ... \hat{\otimes}_2 H_m; H\right)$ voir[Coh73]) mais $T = T_2 \circ i_m^2$. Alors,

$$T_2 \in \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(H_1 \otimes_2 ... \otimes_2 H_m; H)$$

($T_2 \in \mathcal{D}_p(H_1 \otimes_2 ... \otimes_2 H_m; H)$ par la Proposition 2.13 tels que $m = 1$). On a $T = T_2 \circ i_m$ et d'après la Proposition 2.17 donc $T \in \mathcal{D}_p^m(H_1, ..., H_m; H)$. ■

Corollaire 3.13. Soient $H_1, ..., H_m; H$ des espaces de Hilbert. Alors,

$$\mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; H) \subseteq \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H).$$

Preuve. Soient $H_1, ..., H_m; H$ des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; H)$. D'après la Remarque 2.19

$$T = A(u_1, ..., u_m)$$

où $A \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; H)$ et $u_j \in \pi_p(H_j; G_j)$ .pour $\left(e_i^k\right)_{i_k \in I_k}$ est une base orthonormale de l'espace H_k $(1 \leq k \leq m)$, on a

$$\begin{aligned}
& (\sum_{i_k \in I_k, k=1,...,m} \left\|T\left(e_{i_1}^1, ..., e_{i_m}^m\right)\right\|^2)^{1/2} \\
= \ & (\sum_{i_k \in I_k, k=1,...,m} \left\|A\left(u_1\left(e_{i_1}^1\right), ..., u_m\left(e_{i_m}^m\right)\right)\right\|^2)^{1/2} \\
\leq \ & \|A\| (\sum_{i_k \in I_k, k=1,...,m} \left\|u_1\left(e_{i_1}^1\right)\right\|^2 ... \left\|u_m\left(e_{i_m}^m\right)\right\|^2)^{1/2} \\
\leq \ & \|A\| \sum_{i_1 \in I_1} \left\|u_1\left(e_{i_1}^1\right)\right\|^2)^{1/2} ... \sum_{i_m \in I_m} \left\|u_m\left(e_{i_m}^m\right)\right\|^2)^{1/2} \\
\leq \ & \|A\| \prod_{j=1}^m \pi(u_j) \prod_{j=1}^m \sup_{\|x^*\|=1} (\sum_{i_k \in I_k, k=1,...,m} \left|x^*(e_{i_j}^j)\right|^2)^{1/2} \\
\leq \ & \|A\| \prod_{j=1}^m \pi(u_j).
\end{aligned}$$

Donc $T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H)$. ■

Corollaire 3.14. Soient $H_1, ..., H_m; H$ des espaces de Hilbert et $1 < p, q, r < \infty$. alors,

$$\mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; H) \subseteq \mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H) \subseteq \mathcal{D}_q^m(H_1, ..., H_m; H) \subseteq \mathcal{L}_s^r(H_1, ..., H_m; H).$$

Bibliographie

[AM07] D. ACHOUR AND L. MEZRAG. *On the Cohen strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **327** (1) (2007), 550-563.

[API76] H. APIOLA. *Duality between spaces of p-summable sequences, (p,q)-summing operators and characterization of nuclearity, Math. Ann. 219 (1976) 53–64.*

[Coh73] J. S. COHEN. *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates,* Math. Ann. **201** (1973), 177-200.

[Dim03] V. DIMANT. *Strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **278** (2003) 182–193.

[Dwy71] T. A. W. DWYER III. *Partial differential equations in Fischer-Fock spaces-for the Hilbert-Schmidt holomorphy type*. Bull. Amer. Math. Soc. 77, 725–730(1971).

[MSaa09] L.MEZRAG ET K.SAADI. *Inclusion theorem for Cohen strongly multilinear operators.*Bull. Belg. Math. Soc. 1 (2009), 1-11.

[Mat03] M. C. MATOS. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*. Collect. Math. **54**,111–136 (2003).

[MT99] Y. MELÉNDEZ AND A. TONGE. *Polynomials and the Pietsch Domination Theorem*, Proc. Roy. Irish Acad Sect. A 99 (1999), 195-212.

[Pel05] D. PELLEGRINO. *Cotype and nonlinear absolutely summing mappings*, Proceedings of the Royal Irish Academy Section A-Mathematical and Physical Sciences 105(A) (2005), 75-91.

[Pie83] A. Pietsch. *Ideals of multilinear functionals* (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, 1983.