

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

Solution approximative des équations différentielles, intégrales et intégrales différentielles linéaires à l'aide des polynômes de Legendre

Présentée par :

Fattoum BENKAIHOUL

Devant le jury composé de :

<i>M^r</i> ARIOUA Yacine	M.C.A,	Université de M'sila	Président.
<i>M^r</i> MERZOUGUI Abdelkrim	Prof,	Université de M'sila	Encadreur.
<i>M^r</i> MOKHTARI Abdelhak	M.C.A,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Au nom d'Allah le clément et miséricordieux.
Tout travail réussi dans la vie nécessite
la bonté de Dieu, ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes
que nous tenions donc à remercier et adresser
nos remerciements à toute personne qui nous a aidés de loin ou de près
dans ce travail. J'exprime
l'encadreur **Mr. MERZOUGUI Abdelkrim**, qu'il a su orienter ce travail,
et les membres du jury
qui ont été impliqués
ont été impliqués
a permis d'avancer et de terminer ce travail.

Je n'oublierai pas non plus d'exprimer
Yacine et **Mr. MOKHTARI Abdelhah** d'avoir accepté
ce jury.

Mr. ARIOUA

Me
mathématicien **Mohammed Boudiaf**.

Ainsi que ma vive gratitude envers tous ceux qui ont contribué de
près.

A tous MERCI

Dédicaces

Merci *Allah* de m'avoir donné la capacité de surmonter le
dans ma carrière d'étude.

Je dédie ce travail :

À mon père "**Kihoul**", école de mon enfance, pour son appui et son
qui encouragement
l'aide et à me protéger

À celle qui m'a donnée la vie, le symbole de tendre
sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère "**Fatima**".

À mes "**Mohamed**" et **Youcef**, pour leur appui et leur encourage-
ment.

À celle
vie, mes "**soeurs**" chacune en son nom et son statut, au dernier groupe
Nesrin et **Maain**, et tous les

À mes

cours de mes
meilleures

à compléter mes

Notations

$C([a, b])$: Espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$

\simeq : Approximation .

\mathcal{L} : Opérateur linéaire borné .

$L_{i,n}$: Polynôme de Legendre .

$f(t)$: Fonction donnée .

λ, c : Paramètres réels non nul .

u : La fonction inconnue

\tilde{u} : Solution approchée .

EDO : Équation différentielle ordinaire .

EI : Équation intégral .

EID : Équation intégro-différentielle .

Liste des tableaux

2.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.1) pour $n = 10$	13
2.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.2) pour $n = 10$	15
2.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.3) pour $n = 10$	16
2.4	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.4) pour $n = 10$	17
3.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1.1) pour $n = 10$	21
3.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1.2) pour $n = 6$	22
3.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1.3) pour $n = 6$	23
3.4	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1.4) pour $n = 10$	24
3.5	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2.1) pour $n = 15$	26
3.6	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2.2) pour $n = 10$	28
3.7	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2.3) pour $n = 10$	29
3.8	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2.4) pour $n = 10$	30

3.9	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3.1) pour $n = 10$	32
3.10	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3.2) pour $n = 10$	33
3.11	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3.3) pour $n = 10$	34
3.12	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3.4) pour $n = 10$	35
4.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.1) pour $n = 10$	39
4.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.2) pour $n = 10$	41
4.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.3) pour $n = 10$	42
4.4	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.4) pour $n = 10$	43
4.5	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.5) pour $n = 13$	46
4.6	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.6) pour $n = 13$	47
4.7	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.7) pour $n = 13$	48
4.8	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.8) pour $n = 13$	49
4.9	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.9) pour $n = 13$	50
4.10	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.10) pour $n = 10$	52
4.11	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.11) pour $n = 10$	53

4.12	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.12) pour $n = 6$	54
4.13	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.13) pour $n = 10$	55
4.14	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.14) pour $n = 10$	56

Liste des figures

1.1	Les polynômes de Legendre P_n pour $n = 1, 2 \dots 7$	8
2.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.1) pour $n = 10$	14
2.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.2) pour $n = 10$	15
2.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.3) pour $n = 10$	16
2.4	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.4) pour $n = 10$	18
3.1	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1.1) pour $n = 10$	21
3.2	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1.2) pour $n = 6$	22
3.3	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1.3) pour $n = 6$	23
3.4	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1.4) pour $n = 10$	24
3.5	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2.1) pour $n = 15$	27
3.6	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2.2) pour $n = 10$	28
3.7	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2.3) pour $n = 10$	29

3.8	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2.4) pour $n = 10$	30
3.9	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3.1) pour $n = 10$	32
3.10	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3.2) pour $n = 10$	33
3.11	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3.3) pour $n = 10$	34
3.12	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3.4) pour $n = 10$	36
4.1	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.1) pour $n = 10$	40
4.2	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.2) pour $n = 10$	41
4.3	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.3) pour $n = 10$	42
4.4	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.4) pour $n = 10$	44
4.5	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.5) pour $n = 13$	46
4.6	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.6) pour $n = 13$	47
4.7	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.7) pour $n = 13$	48
4.8	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.8) pour $n = 13$	49
4.9	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.9) pour $n = 13$	50
4.10	comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.10) pour $n = 10$	52

4.11	comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.11) pour $n = 10$	53
4.12	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.12) pour $n = 10$	54
4.13	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.13) pour $n = 10$	55
4.14	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.14) pour $n = 10$	56

Table des matières

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Notations	iii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	ix
Introduction	1
1 Notions de base	3
1.1 Les équations Intégrales	3
1.1.1 Classification des équations Intégrales	4
1.1.1.1 Équations intégrales de Volterra	4
1.1.1.2 Équations intégrales de Fredholm	4
1.1.1.3 Équations intégrale de Volterra-Fredholm	5
1.2 Les équations Intégro-Différentielles	5
1.2.1 Claasification des équations Intégro-Différentielles	6
1.2.1.1 Equations Intégro-Différentielles de Volterra	6
1.2.1.2 Equations Intégro-Différentielles de Fredholm	6
1.2.1.3 Equations Intégro-Différentielles de Volterra-Fredholm	7
1.3 Les polynômes de Legendre	7
1.4 Propriétés des polynômes de Legendre	9
2 Solution approximative d'équations différentielles linéaires d'ordre élevé	11
2.1 Résolution des EDO par les polynômes de Legendre	11

2.1.1	Discrétisation d'une EDO	11
2.1.2	Illustration par des exemples numériques	13
3	Résolution numérique des équations intégrales linéaires	19
3.1	Description de la méthode et résolution numériques des équations intégrales de Fredholm	19
3.1.1	Exemples illustratifs	20
3.2	Description de la méthode et résolution numérique des équations intégrales de Volterra	24
3.2.1	Exemples illustratifs	26
3.3	Description de la méthode et résolution numérique des équations intégrales de Fredholm-Volterra	30
4	Résolution Numérique des équations intégro-différentielles linéaires	37
4.1	Description de la méthode	37
4.1.1	Application de la méthode	39
4.1.1.1	Equation intégro-différentielle linéaire de Fredholm	39
4.1.1.2	Equation intégro-différentielle linéaire de Volterra	44
4.1.2	Application de la méthode	45
4.1.2.1	Equation intégro-différentielle linéaire de Fredholm-Volterra	50
	conclusion	57

Introduction

Parmi les branches les plus importantes en mathématiques, dans les temps anciens et récents, les équations différentielles et les équation intégrales qui sont considérés comme l'épine dorsale de la majeure partie de la science actuelle.

Cette branche a été introduit par Volterra dans le début du vingtième siècle, elle s'inscrit comme l'un des problèmes les plus appliqués où les opérateurs différentielles et intégrales apparaissent dans la même équation.

Ces équations intégrales et l'équations intégral-différentielles apparaissent dans de nombreuses application scientifiques comme : la biologie, la chimie quantique, la médecine, et la physiques.

Volterra a développé les concepts de base de la théorie des équations intégrales et des équations intégral-différentielles mais il n'a donné aucune méthode pour résoudre ces équations ; en générale, l'obtention de la solution exacte des équation mathématiques (EI, ED, EID.....etc) est impossible ou dans certains cas est très difficile. Notre but alors est chercher la solution Approchée (numériques) de e ces équations.

Dans ce travail, on présente la résolution numérique des équations intégrales de Volterra, Fredholm et Volterra-Fredholm ainsi que les équations différentielles de degré élevé. En utilisant la méthode de discrétisation (collocation) basée sur les polynômes de Legendre pour résoudre ce genre de problème. La précision de la solution par cette technique proposée dépend du degré de polynôme de Legendre. La précision désirée peut être obtenue en augmentant seulement le degré de polynôme. D'une part l'augmentation de degré augmente le coût de calcul, mais d'autre part la précision re-

quise peut être obtenue.

Ce mémoire est composée de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit les définitions de base sur les équations intégrales, ainsi que leurs classifications. Nous abordons aussi les notions préliminaires et quelques définitions sur les polynômes de Legendre, où nous présentons quelques propriétés de ces polynômes.

Dans le deuxième chapitre, on propose la méthode de collocation utilisant les polynômes de Legendre pour trouver la solution Approximative des problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre élevé.

Le troisième chapitre, est consacré à la résolution numérique des équations intégrales linéaires de type Volterra, Fredholm ainsi que les équations de type mixte (Volterra-Fredholm), la méthode de résolution est basée sur la méthode de collocation en utilisant les polynômes de Legendre. Une variété d'exemples seront introduits pour tester l'efficacité de la méthode.

Le quatrième chapitre, est consacré à la résolution numérique des équations Intégral-différentielles linéaires de type Volterra, Fredholm ainsi que les équations de type mixte (Volterra-Fredholm), plusieurs exemples sont introduits, pour montrer la validité de la méthode.

On termine notre mémoire par une conclusion générale.

NOTIONS DE BASE

Ce chapitre est consacré aux concepts mathématiques de base des équations différentielles, équations intégrales et les équations Intégro-différentielle. Nous donnons également quelques définitions préliminaires et quelques propriétés sur les polynômes de Legendre.

1.1 Les équations Intégrales

Définition 1.1. Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue apparaît sous un ou plusieurs signes intégraux. La forme générale d'une équation intégrale est :

$$\int_E K(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x), \quad x \in E \quad (1.1)$$

où φ est l'inconnue, f est une fonction mesurable connue sur E , $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). E est un ensemble fermé borné et mesurable, d'un espace euclidien et K est une fonction donnée appelée noyau, nous nous restreignons au cas :

$$k(x, t, \varphi(t)) = K(x, t)\varphi(t),$$

l'équation intégrale 1.1 devient :

$$f(x) = \int_E K(x, t)\varphi(t) dt - \lambda \varphi(x)$$

Le type le plus général d'équation intégrale linéaire est de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)\varphi(t) dt \quad (1.2)$$

où $g(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions analytiques. Les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $h(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions données, et $\lambda \neq 0$ est un paramètre réel ou complexe. La fonction

$K(x, t)$ est appelée le noyau. Une équation intégrale peut être classifiée en linéaire ou non linéaire.

1.1.1 Classification des équations Intégrales

Il existe de nombreuses classes d'équations intégrales :

1.1.1.1 Équations intégrales de Volterra

Dans les équations intégrales de Volterra, la limite supérieure du signe intégral est variable $b(x) = x$ et la limite inférieure $a(x)$ est constante. La formule standard est :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.3)$$

1. L'équation 1.3 est du premier type, si $h(x) = 0$ on a :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = 0$$

2. L'équation 1.3 est du second type, si $h(x) = cte$, (constante réelle non nulle), on a :

$$C\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

Remarque 1.1.

— Si $f(x) = 0$, l'équation 1.3 est appelée équation intégrale linéaire de Volterra homogène et on a :

$$h(x)\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

— Si $f(x) \neq 0$, l'équation 1.3 est appelée équation intégrale linéaire de Volterra non homogène.

1.1.1.2 Équations intégrales de Fredholm

Dans les équations intégrales de Fredholm, les limites $a(x)$ et $b(x)$ sont constantes. La formule standard est :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.4)$$

En outre, les équations intégrales de Fredholm se présentent sous deux formes

1. Équation intégrale de Fredholm du premier type, si $h(x) = 0$, alors l'équation 1.3 devient :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0$$

2. Équations intégrales de Fredholm du second type, si $h(x) = C$ (où C est un réel constant non nul), alors l'équation 1.3 devient :

$$C\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt,$$

Remarque 1.2.

- Si $f(x) \neq 0$, l'équation 1.3 est dite équation intégrale linéaire de Fredholm non homogène.
- Si $f(x) = 0$, l'équation 1.3 est appelé équation intégrale linéaire de Fredholm homogène et on a :

$$h(x)\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt,$$

1.1.1.3 Équations intégrale de Volterra-Fredholm

L'équation intégrale de Volterra-Fredholm du second type est une combinaison d'équation intégrale de Fredholm et d'équation intégrale de Volterra. Elle apparaît sous la forme mixte suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K2(x, t)\varphi(t)dt \quad a \leq x, t \leq b$$

Où $K1(x, t)$, $K2(x, t)$ sont les noyaux de l'équation, λ_1 et λ_2 sont deux paramètres réels non nuls.

1.2 Les équations Intégré-Différentielles

Définition 1.2. Dans ce type d'équations, la fonction inconnue apparaît comme une combinaison de dérivée ordinaire et sous le signe de l'intégrale. La forme générale d'une équation intégré-différentielle d'ordre n est donné par :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x)\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.5)$$

avec les condition initiales :

$$\varphi(\alpha) = \theta_0, \quad \varphi'(\alpha) = \theta_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(\alpha) = \theta_{n-1} \quad (1.6)$$

Où :

- Ω un ensemble fermé borné et mesurable d'un espace euclidien de dimension fini.
- φ la fonction (inconnue) cherchée et $\varphi^{(n)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre n de $\varphi(x)$.
- f une foction connue sur Ω .
- K une fonction connue sur Ω appelée le noyau de l'équation intégro-diddérentielle.
- λ un paramètre réel different à zéro.
- α et $\theta_j (j = 1, 2, \dots, n - 1)$ sont des constantes réelles.

1.2.1 Claasification des équations Intégro-Différentielles

Il en existe trois types d'équation intégro-différentielles :

1.2.1.1 Equations Intégro-Différentielles de Volterra

Définition 1.3. On appelle équation intégro-différentielle de volterra d'ordre n une équation de la forme :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x) \varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt$$

où :

$$\varphi^{(i)}(x) = \frac{d^i \varphi(x)}{dx^i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

1.2.1.2 Equations Intégro-Différentielles de Fredholm

Définition 1.4. On appelle équation intégro-différentielle de Fredholm une équation de la forme :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x) \varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt$$

où :

$$\varphi^{(i)}(x) = \frac{d^i \varphi(x)}{dx^i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

1.2.1.3 Equations Intégré-Différentielles de Volterra-Fredholm

La formulaire standard de l'équation Intégrale de Volterra-Fredholm est donné par :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x) \varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K1(x, y) \varphi(y) dy + \lambda_2 \int_a^b K2(x, y) \varphi(y) dy$$

où : $\varphi^{(i)}(x) = \frac{d^i \varphi(x)}{dx^i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

$K1(x, t)$ et $K2(x, t)$ sont les noyaux de l'équation, λ_1 et λ_2 sont paramètres réels non nuls.

1.3 Les polynômes de Legendre

La formule suivante, dite formule de Rodrigues, donne l'expression de P_n pour tout entier $n \geq 0$.

Définition 1.5. Pour tout entier n , P_n est un polynôme de degré n , on a :

$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

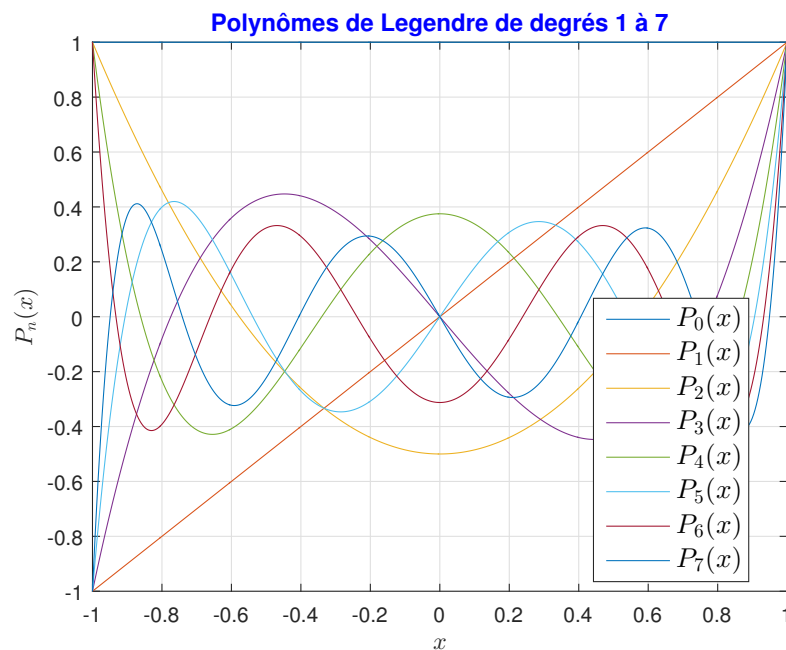
On a par exemple :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= (1/2)(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= (1/2)(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= (1/8)(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= (1/8)(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ P_6(x) &= (1/16)(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \end{aligned}$$

Proposition 1.1. La forme analytique du polynôme de Legendre du premier espèce est donnée par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{k! (n - k)! (n - 2k)!} x^{n-2k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ou $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ la partie entière de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

FIGURE 1.1 – Les polynômes de Legendre P_n pour $n = 1, 2 \dots 7$

Théorème 1.1. Pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = 2/(2n + 1).$$

Théorème 1.2. La suite des polynômes de Legendre (P_n) forme une base orthogonale de l'espace $L^2(-1, 1)$. Toute fonction f de $L^2(-1, 1)$ se développe de façon unique sous la forme :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) P_n \quad \text{avec} \quad c_n(f) = \frac{2n + 1}{2} \langle f, P_n \rangle$$

où la convergence de la série a lieu en moyenne quadratique :

$$\lim \left\| f - \sum_{n=0}^N c_n(f) P_n \right\|_{L^2} = 0$$

On a de plus l'égalité de Parseval :

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n(f)|^2}{2n + 1}$$

On notera que le *polynôme* de Legendre de f , de degré n donné par :

$$L_n f(x) = \sum_{k=0}^n c_k(f) P_k(x)$$

réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de f par des *polynômes* de degré inférieur ou égal à n . On notera aussi que si f est paire (resp. impaire), son développement ne fera intervenir que les *polynôme* de Legendre d'indice pair (resp. impair).

1.4 Propriétés des polynômes de Legendre

1. **Parité** : Pour tout entier naturel n et pour tout x on a :

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad \text{en particulier} \quad P_n(-1) = (-1)^n$$

Ainsi pour n pair, $P_n(x)$ ne contient que des puissances paires de x et pour n impair, $P_n(x)$ ne contient que des puissances impaires de x .

2. **L'orthogonalité** :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) Q_m(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2m+1}, & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases}$$

3. **Relation de récurrence** :

$$\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) = x P_n(x)$$

Pour démontrer cette relation on remarque que $x P_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ et admet donc un développement sous la forme :

$$x P_n(x) = \sum_{j \leq n+1} \alpha_{nj} P_j(x) \quad \text{avec} \quad \alpha_{nj} \|P_j\|^2 = \langle x P_n, P_j \rangle$$

comme $\alpha_{nj} \|P_j\|^2 = \alpha_{jn} \|P_n\|^2$, il en résulte que $\alpha_{jn} = 0$ pour $j < n-1$ (et pour $j > n+1$).

En posant $\alpha_{nn+1} = \alpha_n$, $\alpha_{nn} = \beta_n$ et $\alpha_{nn-1} = \gamma_n$, On en déduit que :

$$x P_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

En examinant la parité des deux membres, on voit que $\beta_n = 0$ et en faisant $x = 1$, il vient $\alpha_n + \gamma_n = 1$, en identifiant les termes de plus haut degré dans chacun des deux membres, on trouve :

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \alpha_n \frac{(2n+2)}{2^{n+1} ((n+1)!)^2}$$

d'où il résulte que :

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2n+1} \quad \text{et par suite} \quad \gamma_n = \frac{n}{2n-1}$$

ce qui termine la preuve.

4. **Équation différentielle :** Pour tout entier naturel n on a :

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

On peut établir cette équation de la manière suivante, on part de l'égalité :

$$\frac{d}{dx} \{(1-x^2)P_n'(x)\} = (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x)$$

le deuxième membre est un polynôme de degré n , on peut donc le décomposer suivant la base $\{P_i; i \leq n\}$:

$$\frac{d}{dx} \{(1-x^2)P_n'(x)\} = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(x) \quad (1.7)$$

la propriété d'orthogonalité implique :

$$\alpha_i \|P_i\|^2 = \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{d}{dx} \{(1-x^2)P_n'(x)\} dx$$

deux intégrations par parties successives donnent :

$$\alpha_i \|P_i\|^2 = \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} \{(1-x^2)P_i'(x)\} dx$$

Or la dérivée de $(1-x^2)P_i'(x)$ est un polynôme de degré i , on en déduit que $\alpha_i = 0, \quad \forall i < n$.

La relation (1.7) peut maintenant s'écrire :

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) = \alpha_n P_n(x)$$

En comparant les coefficients des termes de plus haut degré dans chacun des membres, on trouve immédiatement $\alpha_n = -n(n+1)$, D'où résulte l'équation différentielle cherchée.

SOLUTION APPROXIMATIVE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE ÉLEVÉ

L'objectif principal de ce chapitre est d'appliquer la méthode de collocation basée sur les polynômes de Legendre pour trouver une solution approximative des équations différentielles ordinaires d'ordre élevé. Cette méthode transforme l'équation différentielle en un système d'équations algébriques linéaires, qui est ensuite résolu à l'aide de MATLAB. En outre, nous appliquons la méthode présentée sur quelques problèmes test et comparons les résultats avec leurs solutions exactes, révélant que la méthode présentée est très efficace et pratique.

2.1 Résolution des EDO par les polynômes de Legendre

En mathématiques, une méthode de collocation est une méthode de résolution numérique des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles et des équations intégrales... *etc*. L'idée est de choisir un espace de dimension finie de solutions candidates (généralement des polynômes jusqu'à un certain degré) et un certain nombre de points dans le domaine (appelés points de collocation), et de sélectionner la solution qui satisfait l'équation donnée aux points de collocation. Ainsi, la méthode de collocation est une méthode de *projection* permettant d'approcher la solution des différent problème à l'aide des *polynômes*.

2.1.1 Discrétisation d'une EDO

Soit l'équation différentielle :

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

Où $f(t)$ est une fonction continue dans $[a, b]$ et L est un opérateur de différentiation définit par :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^n \frac{d^{(i)}}{dx^i} = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Maintenant nous employons la technique de la méthode de **Collocation** Pour ceci, nous estimons que la fonction inconnue $u(t)$ s'écrit comme suit :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x) \quad (2.2)$$

Où $L_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Legendre, $c_i, i = 0, 1, \dots, n$ sont des paramètres réels inconnus, alors

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{i=0}^n c_i L'_{i,n}(x), \\ u''(x) &= \sum_{i=0}^n c_i L''_{i,n}(x) \\ &\vdots \\ u^n(x) &= \sum_{i=0}^n c_i L^{(n)}_{i,n}(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En substituant 2.2 et 2.3 dans l'équation 2.1, nous obtenons

$$\left[\sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x) + \sum_{i=0}^n c_i L'_{i,n}(x) + \sum_{i=0}^n c_i L''_{i,n}(x) + \dots + \sum_{i=0}^n c_i L^{(n)}_{i,n}(x) \right] = f(x)$$

Ou

$$\sum_{i=0}^n c_i [(L_{i,n}(x) + L'_{i,n}(x) + L''_{i,n}(x) + \dots + L^{(n)}_{i,n}(x))] = f(x) \quad (2.4)$$

Nous choisissons des point de collocation $x_j, j = 0, 1, \dots, n$ dans l'équation 2.4 obtenues et ainsi pour chaque ($j = 0, 1, \dots, n$) nous obtenons ainsi un système de $(n+1)$ équations linéaires à $(n+1)$ inconnus ($c_i, i = 0, 1, \dots, n$).

$$A_{i,j} X_i = b_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

Où

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= L_{i,n}(x_j) + L'_{i,n}(x_j) + L''_{i,n}(x_j) + \dots + L_{i,n}^{(n)}(x_j) \\ b_j &= f(x_j) \\ X_j &= (c_j), j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

2.1.2 Illustration par des exemples numériques

Exemple 2.1.1. Soit le problème :

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) - 2y = x \cos(x) - 3 \sin(x), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est : $u(x) = \sin(x)$

La solution approché $\tilde{y}(x)$ de la solution exacte $y(x)$ est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires pour $n = 10$:

les résultats dans sont donnée dans le tableau et graphe (2.1)

n	x	Solution exacte	Solution approché	Erreur
1	0.00	0.000000000000	0.000000000000	6.938894e-18
2	0.10	0.09983341665	0.09983341662	2.363204e-11
3	0.20	0.19866933080	0.19866933073	6.075787e-11
4	0.30	0.29552020666	0.29552020656	9.887080e-11
5	0.40	0.38941834231	0.38941834217	1.377873e-10
6	0.50	0.47942553860	0.47942553843	1.778833e-10
7	0.60	0.56464247340	0.56464247318	2.194952e-10
8	0.70	0.64421768724	0.64421768697	2.629463e-10
9	0.80	0.71735609090	0.71735609059	3.085424e-10
10	0.90	0.78332690963	0.78332690927	3.565631e-10
11	1.00	0.84147098481	0.84147098440	4.072938e-10

TABLE 2.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.1) pour $n = 10$

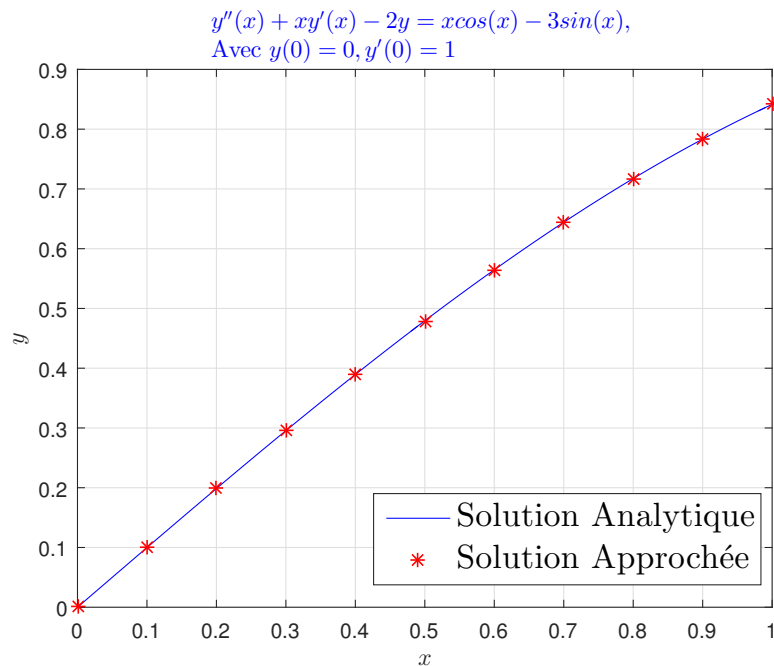


FIGURE 2.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.1) pour $n = 10$

Exemple 2.1.2. Soit le problème non homogène suivant :

$$\begin{cases} y^{(6)}(x) + (5x + 1)y(x) = (185x - 25x^2 + 10x^4)\cos(x) + (270 - 36x^2)\sin(x); & x \in [0, 1] \\ y(-1) = 4\cos(1), y'(-1) = \cos(1) + 4\sin(1), y(1) = -2\cos(1) \\ y'(1) = \cos(1) + 2\sin(1), y''(-1) = -16\cos(1) + 2\sin(1), y''(1) = 14\cos(1) - 2\sin(1) \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est :

$$y(x) = \cos(x)(2x^3 - 5x + 1)$$

La solution approché $\tilde{y}(x)$ de la solution exacte $y(x)$ est obtenu par la solution du système d'équations linéaires pour $n = 2$:

Les résultats sont présentés dans le tableau et le graphe (2.2)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.00	2.16120922347	2.16120922347	4.884981e-15
2	-0.80	2.77010587636	2.76893427040	1.171606e-03
3	-0.60	2.94479747400	2.93908131828	5.716156e-03
4	-0.40	2.64528717478	2.63397034491	1.131683e-02
5	-0.20	1.94445209044	1.92953051129	1.492158e-02
6	0.00	1.00000000000	0.98497122688	1.502877e-02
7	0.20	0.01568106525	0.00373140853	1.194966e-02
8	0.40	-0.80316518677	-0.81041753728	7.252351e-03
9	0.60	-1.29412624418	-1.29705363054	2.927386e-03
10	0.80	-1.37669245767	-1.37717112829	4.786706e-04
11	1.00	-1.08060461174	-1.08060461174	2.220446e-16

TABLE 2.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.2) pour $n = 10$

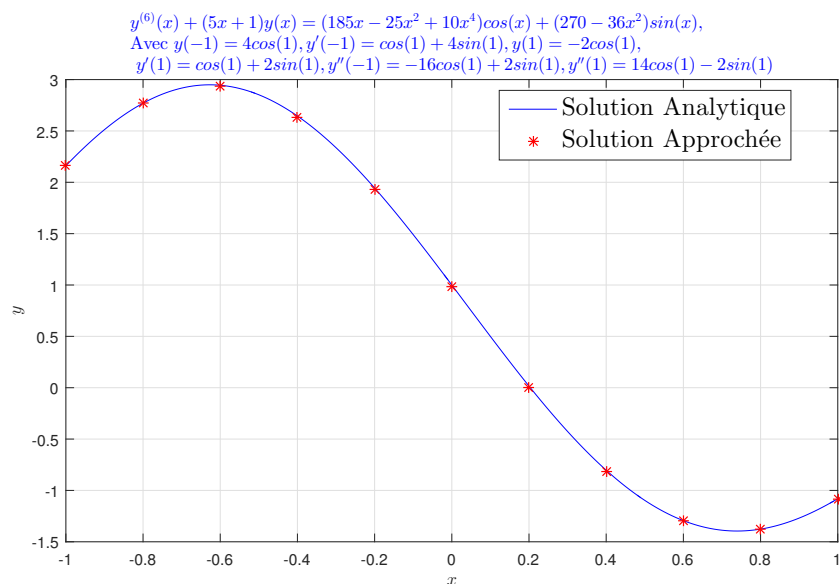


FIGURE 2.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.2) pour $n = 10$

Exemple 2.1.3. Soit le problème :

$$\begin{cases} y^{(6)}(x) + e^{-x}y(x) = (x - x^2)^3e^{-x} - 720; & x \in [0, 1] \\ y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = y''(0) = y''(1) = 0, \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est : $u(x) = x^3(1 - x)^3$

La solution approché $\tilde{y}(x)$ de la solution exacte $y(x)$ est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires pour $n = 10$:

les résultats dans le tableau et graphe (2.3)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	0.000000000000	0.000000000000	1.202749e-18
2	0.10	0.000729000000	0.000729000000	3.252607e-19
3	0.20	0.004096000000	0.004096000000	6.938894e-18
4	0.30	0.009261000000	0.009261000000	2.081668e-17
5	0.40	0.013824000000	0.013824000000	2.602085e-17
6	0.50	0.015625000000	0.015625000000	2.428613e-17
7	0.60	0.013824000000	0.013824000000	1.734723e-17
8	0.70	0.009261000000	0.009261000000	1.040834e-17
9	0.80	0.004096000000	0.004096000000	4.336809e-18
10	0.90	0.000729000000	0.000729000000	9.757820e-19
11	1.00	0.000000000000	0.000000000000	5.319743e-19

TABLE 2.3 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.3) pour $n = 10$

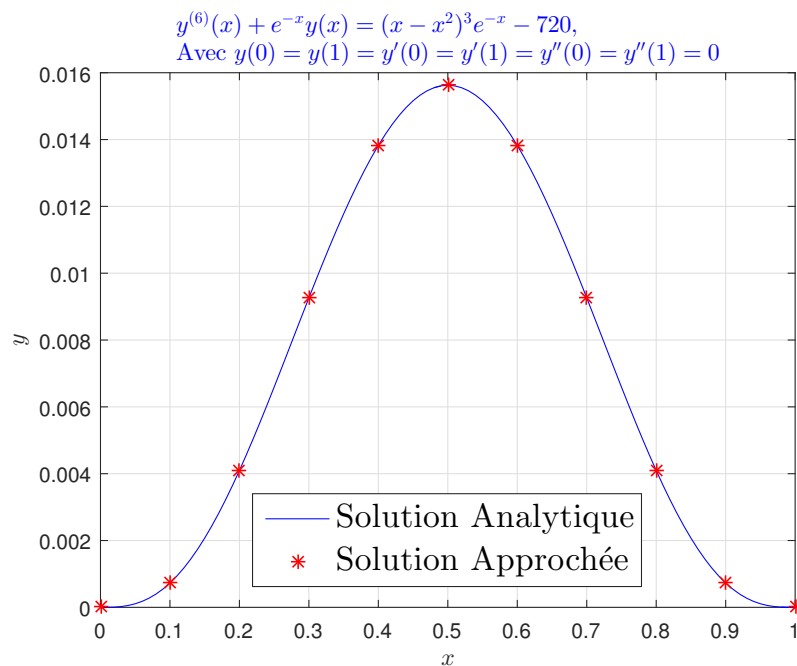


FIGURE 2.3 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.3) pour $n = 10$

Exemple 2.1.4. [13] Soit le problème :

$$\begin{cases} y^{(8)}(x) - y(x) = -8e^x; & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1, y^{(3)}(0) = -2, \\ y^{(4)}(0) = -3, y^{(5)}(0) = -4, y^{(6)}(0) = -5, y^{(7)}(0) = -6 \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est : $y(x) = (1 - x)e^x$

La solution approché $\tilde{y}(x)$ de la solution exacte $y(x)$ est obtenu par la résolution du système d'équations linéaires pour $n = 10$:

Les résultats sont présentés dans le tableau et le graphe (2.4)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	1.00000000000	1.00000000000	2.220446e-16
2	0.10	0.99465382627	0.99465382627	6.133982e-13
3	0.20	0.97712220653	0.97712220638	1.517563e-10
4	0.30	0.94490116530	0.94490116154	3.758232e-09
5	0.40	0.89509481858	0.89509478230	3.628266e-08
6	0.50	0.82436063535	0.82436042628	2.090732e-07
7	0.60	0.72884752016	0.72884665080	8.693529e-07
8	0.70	0.60412581224	0.60412292581	2.886433e-06
9	0.80	0.44510818570	0.44510005653	8.129164e-06
10	0.90	0.24596031112	0.24594011877	2.019234e-05
11	1.00	0.00000000000	-0.00004543100	4.543100e-05

TABLE 2.4 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.4) pour $n = 10$

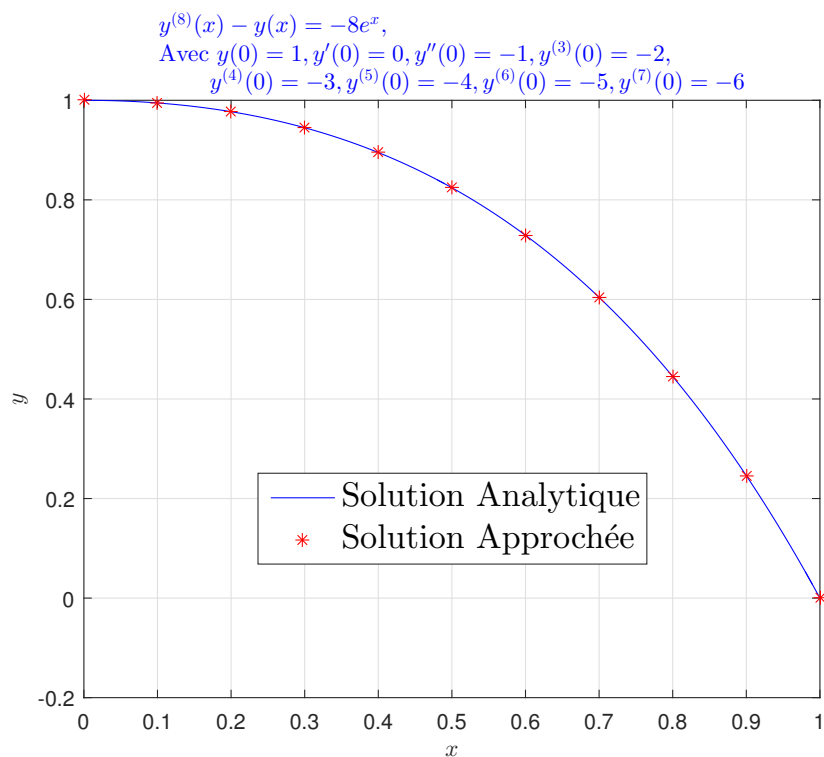


FIGURE 2.4 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1.4) pour $n = 10$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, on cherche la solution approchée de quelques type d'équations intégrales, à savoir (Equations intégrales de Fredholm, Equations intégrales de Volterra et équations intégrales de Fredholm–Volterra). En utilisant la méthode de collocation de Legendre.

3.1 Description de la méthode et résolution numériques des équations intégrales de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm est donné par :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (3.1)$$

Tels que, $u(x)$ une fonction inconnue à déterminer, $k(x; t)$ est le noyau et f est une fonction donnée. Pour déterminer la solution approchée de l'équation (3.1), on utilise la méthode de collocation de Legendre, i.e $u(x)$ est approximée par les polynômes de Legendre sur $[a, b]$ par :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x) \quad (3.2)$$

Tels que :

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

$$L(x) = [L_{0,n}(x), L_{1,n}(x), \dots, L_{n,n}(x)]$$

. Avec $L_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Legendre de degré n pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. et $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sont des coefficients inconnus à déterminer. En substituant (3.2)

dans (3.1) on obtient la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(t) dt = f(x), x \in [a, b]$$

ce qui donne :

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[L_i^n(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) L_{i,n}(t) dt \right] = f(x), x \in [a, b]$$

Pour déterminés les coefficients inconnues ci $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, nous choisissons les points collocation :

$$x = x_j, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Alors :

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[L_{i,n}(x_j) - \lambda \int_a^b k(x_j,t) L_{i,n}(t) dt \right] = f(x_j), x_j \in [a, b] \tag{3.3}$$

On obtient alors un système d'équations algébrique linéaire :

$$AX = b \tag{3.4}$$

Tels que :

$$\begin{aligned} A &= [L_i^n(x_j) - \lambda \int_a^b k(x_j,t) L_{i,n}(t) dt]_{(n+1)(n+1)}, j, i = 0, 1, 2, \dots, n \\ b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\ X &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t \end{aligned}$$

Le système linéaire (3.4) peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution afin de déterminer les coefficients $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Ces c_i une fois trouvées seront remplacés dans (3.2) produisent une approximation $u(x)$ de la solution exacte .

3.1.1 Exemples illustratifs

Exemple 3.1.1. On considère l'équation intégrale de Fredholm :

$$u(x) = x - \int_{-1}^1 (x^4 + t^4)u(t) dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x$. Les résultats sont présentés dans le tableau et le graphe (3.1)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.00	-1.0000000000	-1.0000000000	0.000000e+00
2	-0.80	-0.8000000000	-0.8000000000	0.000000e+00
3	-0.60	-0.6000000000	-0.6000000000	0.000000e+00
4	-0.40	-0.4000000000	-0.4000000000	0.000000e+00
5	-0.20	-0.2000000000	-0.2000000000	0.000000e+00
6	0.00	0.0000000000	0.0000000000	0.000000e+00
7	0.20	0.2000000000	0.2000000000	0.000000e+00
8	0.40	0.4000000000	0.4000000000	0.000000e+00
9	0.60	0.6000000000	0.6000000000	0.000000e+00
10	0.80	0.8000000000	0.8000000000	0.000000e+00
11	1.00	1.0000000000	1.0000000000	0.000000e+00

TABLE 3.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1.1) pour $n = 10$

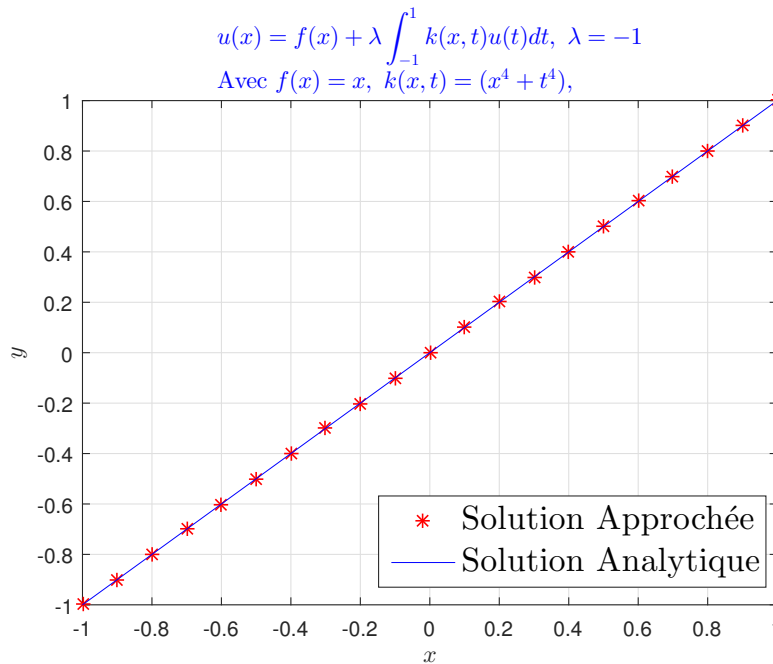


FIGURE 3.1 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1.1) pour $n = 10$

Exemple 3.1.2. On considère l'équation intégrale de Fredholm par :

$$u(x) = -\frac{2}{\pi} \cos(x) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t)u(t)dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau et le graphe (3.2)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00000	0.00000000	-0.00003924	3.923832e-05
2	0.15708	0.15643447	0.15638627	4.819761e-05
3	0.31416	0.30901699	0.30896131	5.568882e-05
4	0.47124	0.45399050	0.45392895	6.155037e-05
5	0.62832	0.58778525	0.58771955	6.570481e-05
6	0.78540	0.70710678	0.70703876	6.802445e-05
7	0.94248	0.80901699	0.80894842	6.857013e-05
8	1.09956	0.89100652	0.89094032	6.620590e-05
9	1.25664	0.95105652	0.95100271	5.380799e-05
10	1.41372	0.98768834	0.98767979	8.546847e-06
11	1.57080	1.00000000	1.00012398	1.239820e-04

TABLE 3.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1.2) pour $n = 6$

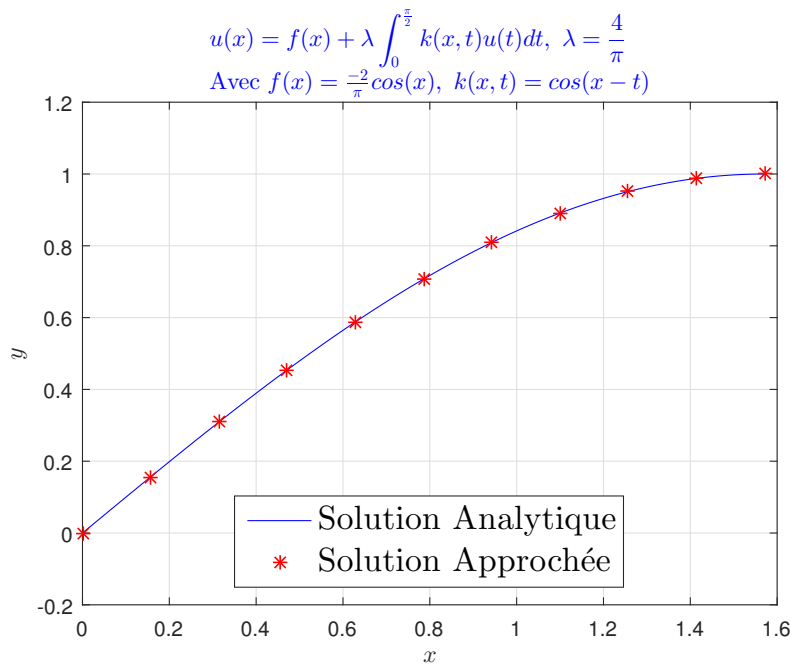


FIGURE 3.2 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1.2) pour $n = 6$

Exemple 3.1.3. On considère l'équation intégrale de Fredholm par :

$$u(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)u(t)dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.3)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.00	2.11111111	2.11111111	0.000000e+00
2	-0.80	1.71111111	1.71111111	0.000000e+00
3	-0.60	1.40000000	1.40000000	0.000000e+00
4	-0.40	1.17777778	1.17777778	0.000000e+00
5	-0.20	1.04444444	1.04444444	0.000000e+00
6	0.00	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
7	0.20	1.04444444	1.04444444	0.000000e+00
8	0.40	1.17777778	1.17777778	0.000000e+00
9	0.60	1.40000000	1.40000000	0.000000e+00
10	0.80	1.71111111	1.71111111	0.000000e+00
11	1.00	2.11111111	2.11111111	0.000000e+00

TABLE 3.3 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1.3) pour $n = 6$

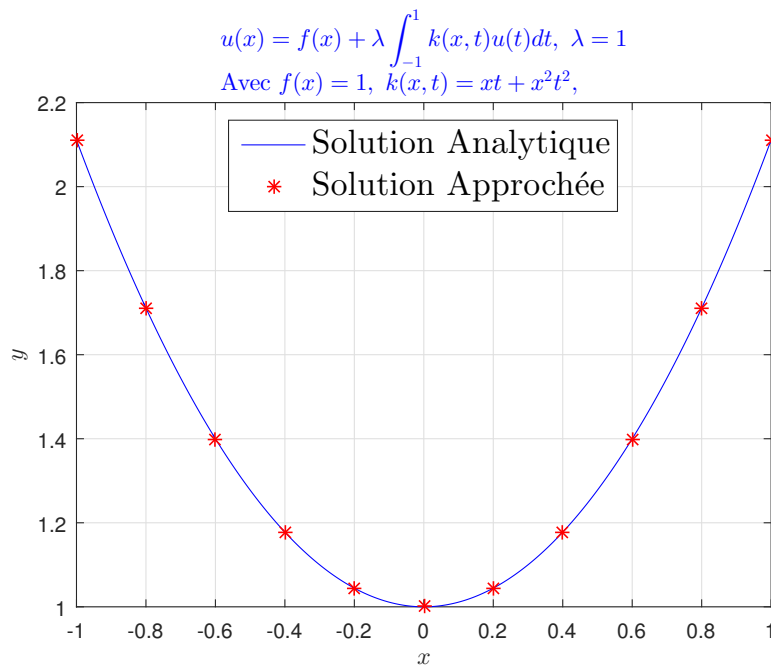


FIGURE 3.3 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1.3) pour $n = 6$

Exemple 3.1.4. On considère l'équation intégrale de Fredholm par :

$$u(x) = x + \int_{-1}^1 (xt)u(t)dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 3x$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.4)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.00	-3.00000000	-3.00000000	0.000000e+00
2	-0.80	-2.40000000	-2.40000000	0.000000e+00
3	-0.60	-1.80000000	-1.80000000	0.000000e+00
4	-0.40	-1.20000000	-1.20000000	0.000000e+00
5	-0.20	-0.60000000	-0.60000000	0.000000e+00
6	0.00	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
7	0.20	0.60000000	0.60000000	0.000000e+00
8	0.40	1.20000000	1.20000000	0.000000e+00
9	0.60	1.80000000	1.80000000	0.000000e+00
10	0.80	2.40000000	2.40000000	0.000000e+00
11	1.00	3.00000000	3.00000000	0.000000e+00

TABLE 3.4 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1.4) pour $n = 10$

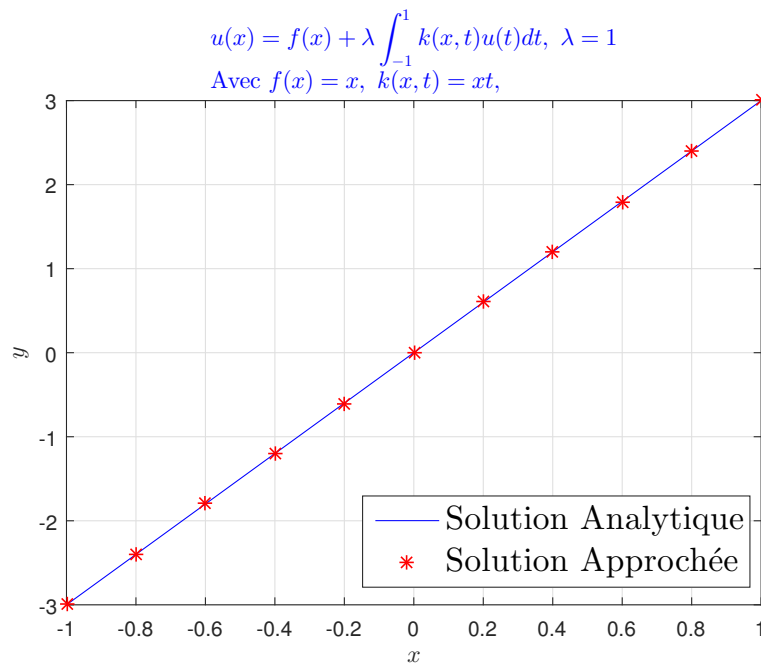


FIGURE 3.4 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1.4) pour $n = 10$

3.2 Description de la méthode et résolution numérique des équations intégrales de Volterra

On considère l'équation intégrale de Volterra donnée par :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt, a < x < b \tag{3.5}$$

Tels que, $u(x)$ une fonction inconnue à déterminer, $k(x; t)$ est le noyau et f est une fonction connue. Pour déterminer la solution approchée de l'équation (3.4), on utilise la méthode décrite dans la section précédente, où on suppose que la solution $u(x)$ est approximée par les polynômes de Legendre sur $[a, b]$ avec $u(x)$ est donnée par :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x) \quad (3.6)$$

Tels que, c_i et $L_{i,n}(x)$ sont données par :

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

$$L(x) = [L_{0,n}, L_{1,n}(x), \dots, L_{n,n}(x)]$$

avec $L_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Legendre de degré n pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

et $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sont des coefficients inconnus à déterminer. La substitution de la relation (3.5) dans (3.4) nous donne :

$$\sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(t) dt = f(x), a < x < b$$

donc :

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[L_{i,n} - \lambda \int_a^x k(x, t) L_{i,n}(t) dt \right] = f(x), a < x < b$$

Pour déterminés les coefficients inconnues $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, nous choisissons les points collocation :

$$x = x_j, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[L_{i,n}(x_j) - \lambda \int_a^{x_j} k(x_j, t) L_{i,n}(t) dt \right] = f(x_j), a < x_j < b$$

Alors, on obtient un système d'équations algébrique linéaire :

$$AX = b \quad (3.7)$$

Tels que :

$$\begin{aligned} A &= [L_{i,n}(x_j) - \lambda \int_a^{x_j} k(x_j, t) L_{i,n}(t) dt]_{(n+1)(n+1)}, j = 0, 1, 2, \dots, n \\ b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\ X &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t \end{aligned}$$

Le système linéaire (3.6) peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution afin de déterminer les coefficients $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. En substituant les valeurs trouvées de $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ (3.5), on obtient la solution approchée de $u(x)$ sous forme d'un polynôme de degré n .

3.2.1 Exemples illustratifs

Exemple 3.2.1. On considère l'équation intégrale de Volterra par :

$$u(x) = x - \int_0^x (x - t)u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 5$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.5)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
2	0.50	0.47942554	0.47942554	0.000000e+00
3	1.00	0.84147098	0.84147098	2.220446e-16
4	1.50	0.99749499	0.99749499	1.076916e-14
5	2.00	0.90929743	0.90929743	1.221023e-11
6	2.50	0.59847214	0.59847214	1.482019e-09
7	3.00	0.14112001	0.14111995	5.858289e-08
8	3.50	-0.35078323	-0.35078439	1.162568e-06
9	4.00	-0.75680250	-0.75681693	1.443366e-05
10	4.50	-0.97753012	-0.97765756	1.274377e-04
11	5.00	-0.95892427	-0.95979236	8.680883e-04

TABLE 3.5 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2.1) pour $n = 15$

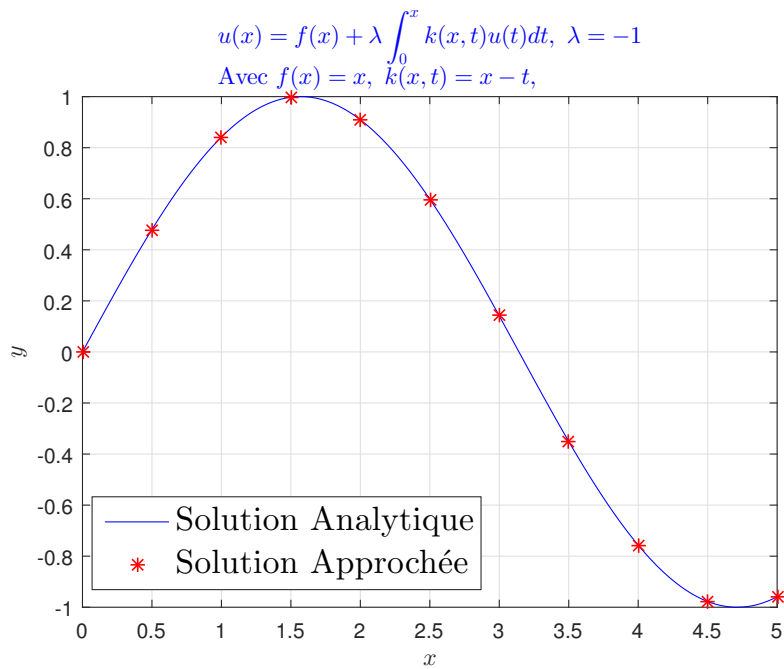


FIGURE 3.5 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2.1) pour $n = 15$

Exemple 3.2.2. On considère l'équation intégrale de Volterra par :

$$u(x) = \sin(x) - 4 \int_0^x (x - t)u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 5$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = -\frac{1}{3} \sin(x) + \frac{2}{3} \sin(2x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.6)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	0.00000000	-0.00000000	1.665335e-15
2	0.50	0.40117214	0.40133787	1.657279e-04
3	1.00	0.32570796	0.32597815	2.701921e-04
4	1.50	-0.23841832	-0.23829753	1.207925e-04
5	2.00	-0.80763414	-0.80777356	1.394253e-04
6	2.50	-0.83877356	-0.83904526	2.716914e-04
7	3.00	-0.23331700	-0.23347012	1.531176e-04
8	3.50	0.55491881	0.55502177	1.029627e-04
9	4.00	0.91183966	0.91211560	2.759413e-04
10	4.50	0.60058903	0.60072726	1.382301e-04
11	5.00	-0.04303932	-0.04267312	3.661968e-04

TABLE 3.6 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2.2) pour $n = 10$

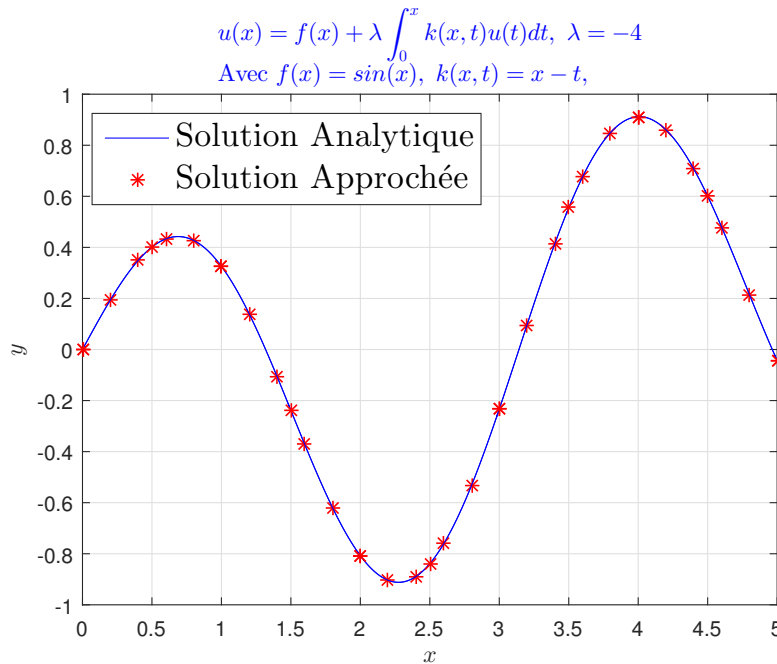


FIGURE 3.6 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2.2) pour $n = 10$

Exemple 3.2.3. On considère l'équation intégrale de Volterra par :

$$u(x) = 1 + 2x + \sin(x) + x^2 - \cos(x) + \int_0^x u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 2x + \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.7) :

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	0.00000000	0.00000004	4.083797e-08
2	0.16	0.47059373	0.47059376	3.352933e-08
3	0.31	0.93733553	0.93733555	2.008090e-08
4	0.47	1.39646830	1.39646830	5.949259e-09
5	0.63	1.84442231	1.84442231	5.220409e-09
6	0.79	2.27790311	2.27790310	1.133691e-08
7	0.94	2.69397259	2.69397257	1.167768e-08
8	1.10	3.09012138	3.09012137	6.792813e-09
9	1.26	3.46433064	3.46433064	1.666237e-09
10	1.41	3.81512173	3.81512174	1.317743e-08
11	1.57	4.14159265	4.14159269	3.894245e-08

TABLE 3.7 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2.3) pour $n = 10$

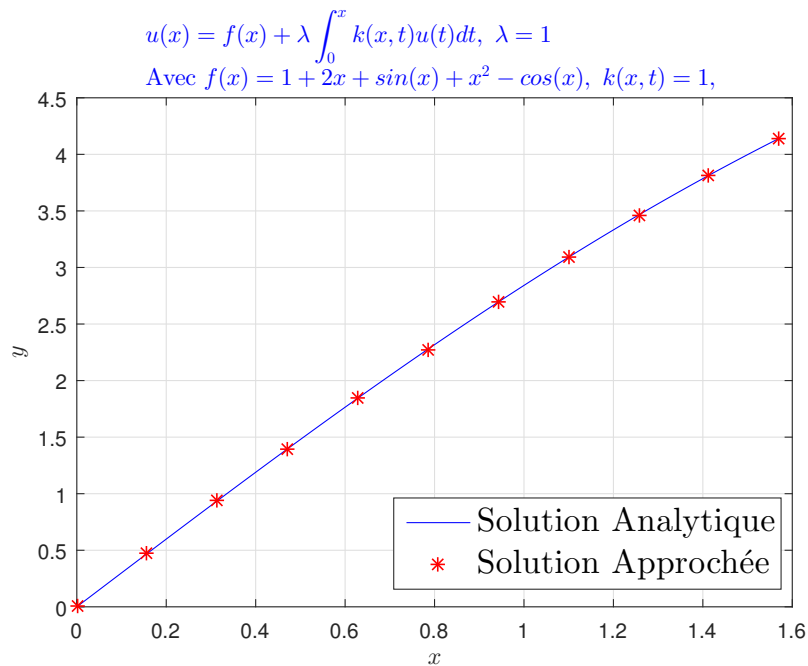


FIGURE 3.7 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2.3) pour $n = 10$

Exemple 3.2.4. On considère l'équation intégrale de Volterra par :

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 2 \cos(x) - 1$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.8) :

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	1.00000000	1.00000000	2.220446e-16
2	0.16	0.97537668	0.97537668	1.032507e-14
3	0.31	0.90211303	0.90211303	1.998401e-15
4	0.47	0.78201305	0.78201305	7.771561e-16
5	0.63	0.61803399	0.61803399	1.110223e-15
6	0.79	0.41421356	0.41421356	5.440093e-15
7	0.94	0.17557050	0.17557050	7.061018e-14
8	1.10	-0.09201900	-0.09201900	1.026557e-11
9	1.26	-0.38196601	-0.38196601	3.870610e-10
10	1.41	-0.68713107	-0.68713107	4.779526e-09
11	1.57	-1.00000000	-1.00000003	3.480671e-08

TABLE 3.8 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2.4) pour $n = 10$

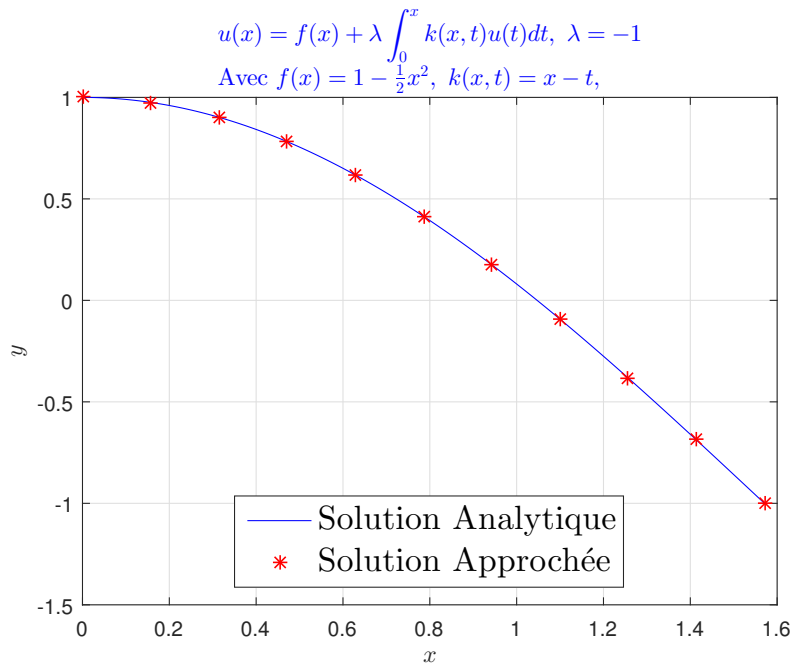


FIGURE 3.8 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2.4) pour $n = 10$

3.3 Description de la méthode et résolution numérique des équations intégrales de Fredholm-Volterra

Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra, définie par :

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)u(t)dt \tag{3.8}$$

Où $k(x, t)$, $f(x)$ sont des fonctions données, λ_1 et λ_2 sont des paramètres réels.

On suppose que la solution est de la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x). \quad (3.9)$$

Pour déterminer la solution approchée on procède comme suit, on remplace 3.8 dans l'équation 3.7, nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(t) dt \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[L_{i,n}(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) L_{i,n}(t) dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) L_{i,n}(t) dt \right] = f(x) \quad (3.11)$$

Pour déterminer les coefficients inconnues c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), nous choisissons les points collocation :

$$x = x_j, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[L_{i,n}(x_j) - \lambda_1 \int_0^{x_j} k_1(x_j, t) L_{i,n}(t) dt - \lambda_2 \int_0^1 k_2(x_j, t) L_{i,n}(t) dt \right] = f(x_j) \quad (3.12)$$

Alors, on obtient un système linéaire :

$$AX = b \quad (3.13)$$

Tel que :

$$a_{i,j} = \left[L_{i,n}(x_j) - \lambda_1 \int_0^{x_j} k_1(x_j, t) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(t) dt - \lambda_2 \int_0^1 k_2(x_j, t) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(t) dt \right].$$

$$b = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

$$X = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

Pour déterminer les coefficients c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), on résout Le système linéaire 3.13 par la méthode directe. En substituant les valeurs de c_i dans l'équation (3.8), on obtient une approximation de la solution $u(x)$.

Exemples illustratifs

Exemple 3.3.1. [21] Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra :

$$u(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^4 + \int_0^x xtu(t)dt + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad x \in [0, 1]$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x$. Les résultats sont présentés dans le tableau et la figure (3.9) :

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
2	0.10	0.10000000	0.10000000	0.000000e+00
3	0.20	0.20000000	0.20000000	0.000000e+00
4	0.30	0.30000000	0.30000000	0.000000e+00
5	0.40	0.40000000	0.40000000	0.000000e+00
6	0.50	0.50000000	0.50000000	0.000000e+00
7	0.60	0.60000000	0.60000000	0.000000e+00
8	0.70	0.70000000	0.70000000	0.000000e+00
9	0.80	0.80000000	0.80000000	0.000000e+00
10	0.90	0.90000000	0.90000000	0.000000e+00
11	1.00	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00

TABLE 3.9 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3.1) pour $n = 10$

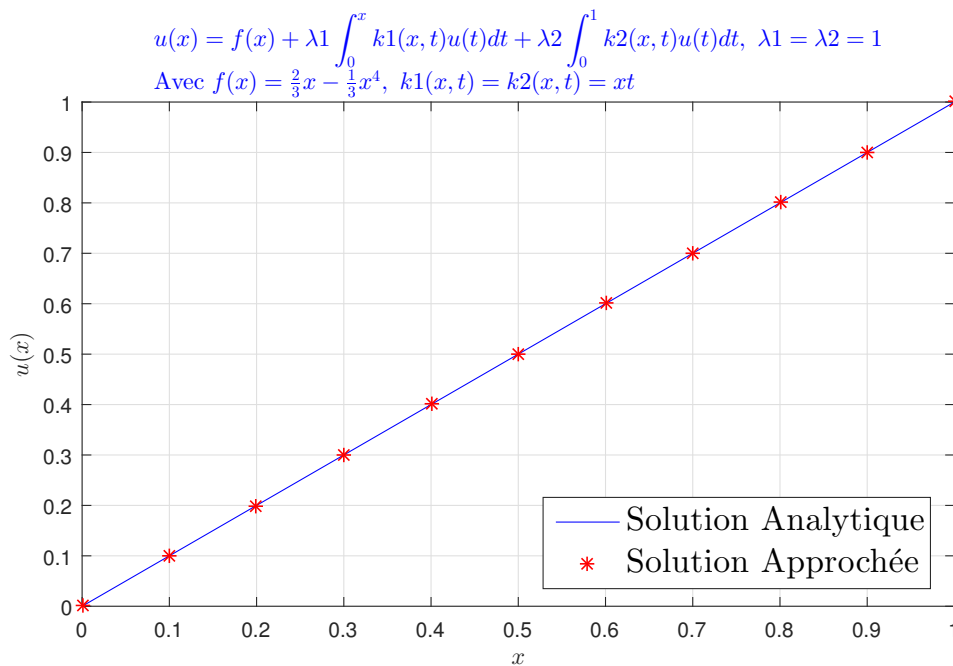


FIGURE 3.9 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3.1) pour $n = 10$

Exemple 3.3.2. [21] Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra :

$$u(x) = 2 \cos(x) - x \cos(2) - 2x \sin(2) + x - 1 + \int_0^x (x-t)u(t)dt + \int_0^2 xt u(t)dt \quad , x \in [0, 2]$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \cos(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau et la figure (3.10)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	1.00000000	1.00000000	1.535227e-09
2	0.20	0.98006658	0.98006659	1.603341e-08
3	0.40	0.92106099	0.92106103	3.116921e-08
4	0.60	0.82533561	0.82533566	4.749304e-08
5	0.80	0.69670671	0.69670678	6.626509e-08
6	1.00	0.54030231	0.54030239	8.824263e-08
7	1.20	0.36235775	0.36235787	1.142672e-07
8	1.40	0.16996714	0.16996729	1.431211e-07
9	1.60	-0.02919952	-0.02919937	1.558835e-07
10	1.80	-0.22720209	-0.22720206	3.812794e-08
11	2.00	-0.41614684	-0.41614755	7.093679e-07

TABLE 3.10 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3.2) pour $n = 10$

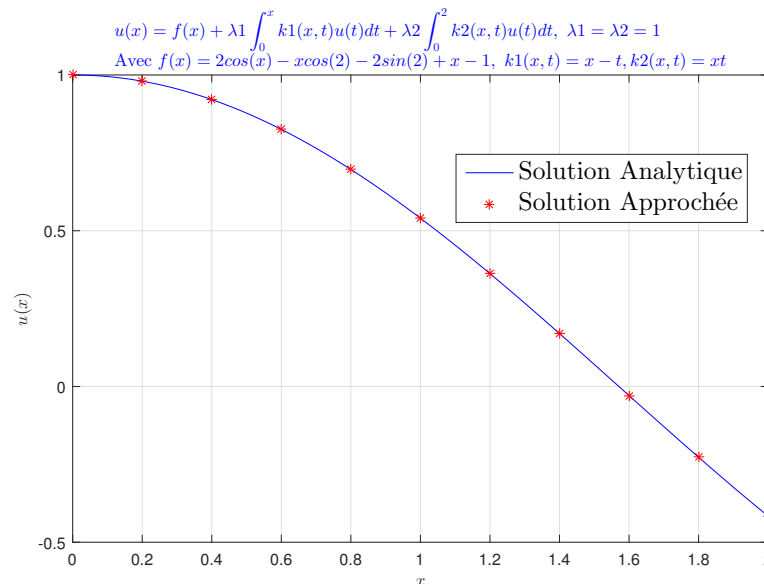


FIGURE 3.10 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3.2) pour $n = 10$

Exemple 3.3.3. [21] Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra :

$$u(x) = 3x + 4x^2 - x^3 - x^4 - 2 + \int_0^x tu(t)dt + \int_{-1}^1 tu(t)dt \quad , x \in [0, 1]$$

La solution exacte de cette équation est : $u(x) = 3x + 4x^2$. Les résultats sont présentés dans le tableau et la figure (3.11)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.00	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	-0.80	0.16000000	0.16000000	0.000000e+00
3	-0.60	-0.36000000	-0.36000000	0.000000e+00
4	-0.40	-0.56000000	-0.56000000	0.000000e+00
5	-0.20	-0.44000000	-0.44000000	0.000000e+00
6	0.00	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
7	0.20	0.76000000	0.76000000	0.000000e+00
8	0.40	1.84000000	1.84000000	0.000000e+00
9	0.60	3.24000000	3.24000000	0.000000e+00
10	0.80	4.96000000	4.96000000	0.000000e+00
11	1.00	7.00000000	7.00000000	0.000000e+00

TABLE 3.11 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3.3) pour $n = 10$

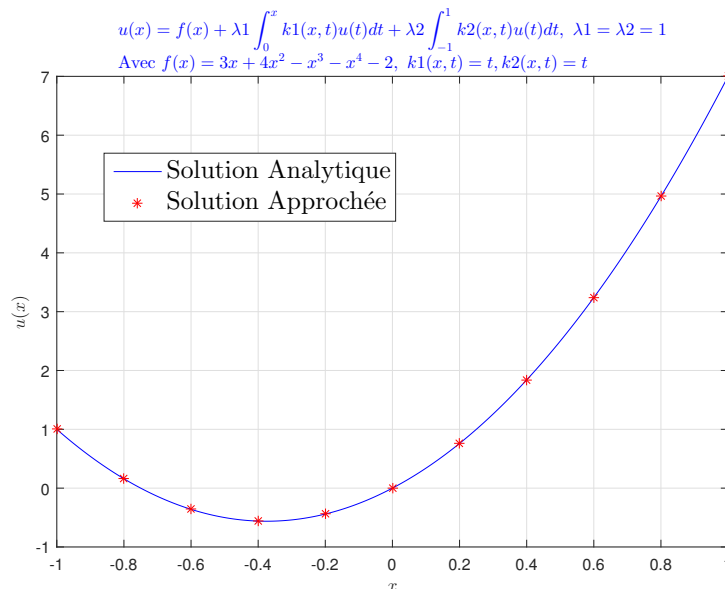


FIGURE 3.11 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3.3) pour $n = 10$

Exemple 3.3.4. [21] Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra :

$$u(x) = e^x - 1 - x + \int_0^x u(t)dt + \int_0^1 xu(t)dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = xe^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau et la figure (3.12)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	0.00000000	0.00000000	3.552714e-15
2	0.10	0.11051709	0.11051709	1.819933e-13
3	0.20	0.24428055	0.24428055	2.396972e-13
4	0.30	0.40495764	0.40495764	3.315681e-13
5	0.40	0.59672988	0.59672988	4.235501e-13
6	0.50	0.82436064	0.82436064	5.253575e-13
7	0.60	1.09327128	1.09327128	6.399326e-13
8	0.70	1.40962690	1.40962690	7.691625e-13
9	0.80	1.78043274	1.78043274	9.052759e-13
10	0.90	2.21364280	2.21364280	1.076916e-12
11	1.00	2.71828183	2.71828183	1.127098e-12

TABLE 3.12 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3.4) pour $n = 10$

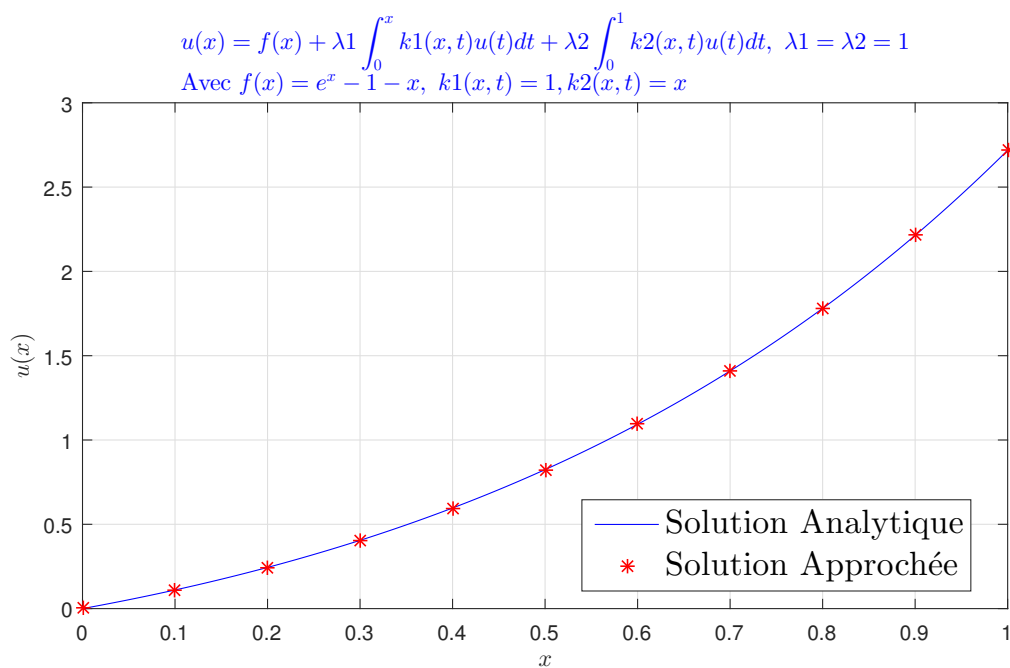


FIGURE 3.12 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3.4) pour $n = 10$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, la méthode de collocation basée sur les polynômes de Legendre est introduite pour les solutions approchées des équations intégro-différentielles linéaires de Fredholm, Volterra et Fredholm–Volterra (FVIDE). En outre, des exemples numériques sont inclus pour démontrer la validité et l'applicabilité de la technique et des comparaisons sont effectuées avec les solutions exactes.

4.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'équation intégro-différentielle linéaire, d'ordre n définie par :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x) u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t) u(t) dt \quad (4.1)$$

Où $\alpha_i(x)$, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, λ est paramètre réel et $E = [a, b]$, où $E = [a, x]$, On suppose que la solution est de la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x). \quad (4.2)$$

Où $L_{i,n}$ sont les polynômes de Legendre, c_i des constantes inconnues être déterminer, Alors :

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \sum_{i=0}^n c_i L'_{i,n}(x), \\
u''(x) &= \sum_{i=0}^n c_i L''_{i,n}(x) \\
&\vdots \\
u^n(x) &= \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}^{(n)}(x)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

On remplace 4.2 et 4.3 dans l'équation 4.1, nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_n(x) c_i L_{i,n}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x,t) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(t) dt \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[\alpha_n(x) L_{i,n}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) L_{i,n}^{(i)}(x) - \lambda \int_E k(x,t) L_{i,n}(t) dt \right] = f(x) \tag{4.5}$$

Pour déterminés les coefficients inconnues c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), nous choisissons les points collocation :

$$x = x_j, j = 0, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[L_{i,n}^n x_j + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_j) L_{i,n}^{(i)} x_j - \lambda \int_E k(x_j, t) L_{i,n} dt \right] = f(x_j) \tag{4.6}$$

Alors, on obtient un système linéaire :

$$AX = b \tag{4.7}$$

Tel que :

$$\begin{aligned}
A = a_{i,j} &= \left[L_{i,n}^n(x_j) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_j) L_{i,n}^{(i)}(x_j) - \lambda \int_E k(x_j, t) L_{i,n} dt \right] \cdot j, i = 0, 1, 2, \dots, n \\
b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\
X &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t
\end{aligned}$$

Le système linéaire 4.7 peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution de système linéaire pour déterminer les coefficients c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). : Ces c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) lorsqu'ils sont remplacés dans (4.1) produisent une approximation de la solution $u(x)$.

4.1.1 Application de la méthode

4.1.1.1 Equation intégrro-différentielle linéaire de Fredholm

Exemple 4.1.1. : Soit l'équation intégrro-différentielle linéaire du second ordre de Fredholm :

$$\begin{cases} xu''(x) + xu'(x) + u(x) = e^{-x} - (1 - e^{-1})x + \int_0^1 xu(t)dt, x \in [0, 1] \\ u'(0) = -1, u(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est donnée par : $u(x) = e^{-x}$.

Les résultats de la méthode sont présentés dans le tableau 4.1 et la figure 4.1

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.100	0.90483742	0.90483742	1.471478e-11
3	0.200	0.81873075	0.81873075	3.548750e-11
4	0.300	0.74081822	0.74081822	5.363165e-11
5	0.400	0.67032005	0.67032005	6.904211e-11
6	0.500	0.60653066	0.60653066	8.204792e-11
7	0.600	0.54881164	0.54881164	9.295531e-11
8	0.700	0.49658530	0.49658530	1.020509e-10
9	0.800	0.44932896	0.44932896	1.095944e-10
10	0.900	0.40656966	0.40656966	1.158146e-10
11	1.000	0.36787944	0.36787944	1.209310e-10

TABLE 4.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.1) pour $n = 10$

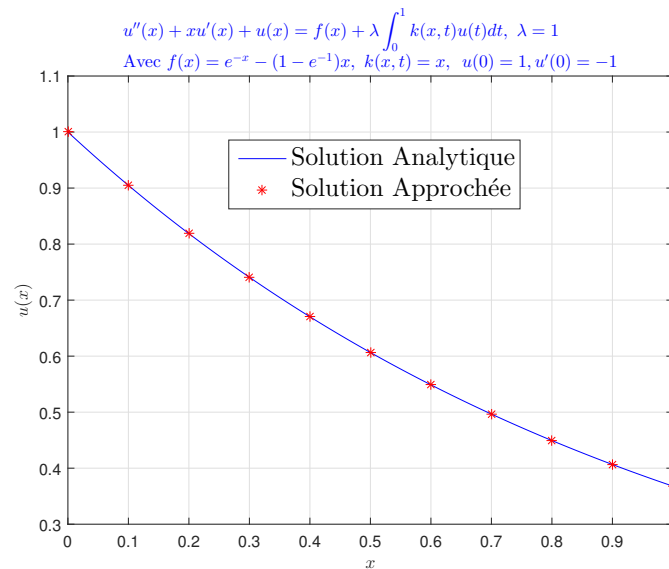


FIGURE 4.1 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.1) pour $n = 10$

Exemple 4.1.2. Soit l'équation intégro-différentielle du cinquième ordre de Fredholm :

$$\begin{cases} u^{(5)}(x) - x^2u^{(3)}(x) - u'(x) - xu(x) = x^2\cos(x) - x\sin(x) - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)dt \\ u(0) = u^{(2)}(0) = u^{(4)}(0) = 0 \quad u'(0) = 1, u^{(3)}(0) = -1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \sin(x)$.

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.2 et la figure 4.2

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.00	0.00000000	-0.00000000	8.004448e-15
2	0.16	0.15643447	0.15643447	1.078571e-10
3	0.31	0.30901699	0.30901700	2.854712e-09
4	0.47	0.45399050	0.45399052	1.831395e-08
5	0.63	0.58778525	0.58778532	6.648357e-08
6	0.79	0.70710678	0.70710696	1.778256e-07
7	0.94	0.80901699	0.80901739	3.936763e-07
8	1.10	0.89100652	0.89100729	7.669744e-07
9	1.26	0.95105652	0.95105788	1.363552e-06
10	1.41	0.98768834	0.98769060	2.264362e-06
11	1.57	1.00000000	1.00000357	3.569691e-06

TABLE 4.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.2) pour $n = 10$

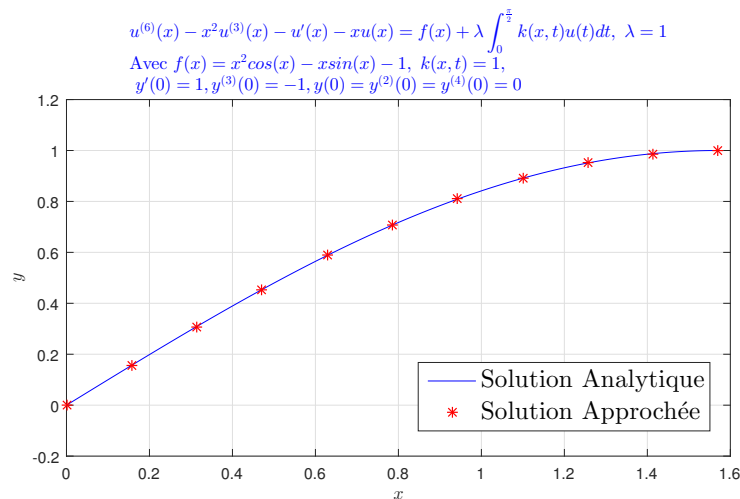


FIGURE 4.2 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.2) pour $n = 10$

Exemple 4.1.3. : Soit l'équation intégro-différentielle linéaire du second ordre de Fredholm :

$$\begin{cases} u''(x) = 32x + \int_{-1}^1 (1 - xt)u(t)dt & x \in [-1, 1] \\ u'(-1) = 12, u(-1) = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad (4.8)$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + 5x^3$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.3 et la figure 4.3

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.000	-2.500000000000	-2.500000000000	0.000000e+00
2	-0.800	-0.600000000000	-0.600000000000	0.000000e+00
3	-0.600	0.460000000000	0.460000000000	2.220446e-16
4	-0.400	0.920000000000	0.920000000000	2.220446e-16
5	-0.200	1.020000000000	1.020000000000	0.000000e+00
6	0.000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000e+00
7	0.200	1.100000000000	1.100000000000	2.220446e-16
8	0.400	1.560000000000	1.560000000000	0.000000e+00
9	0.600	2.620000000000	2.620000000000	0.000000e+00
10	0.800	4.520000000000	4.520000000000	0.000000e+00
11	1.000	7.500000000000	7.500000000000	0.000000e+00

TABLE 4.3 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.3) pour $n = 10$

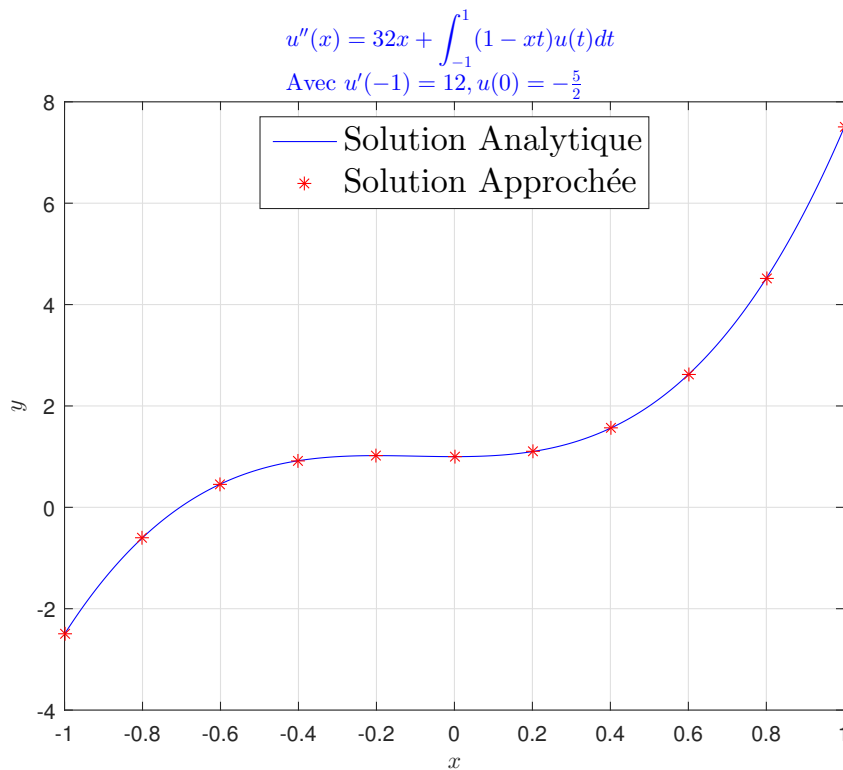


FIGURE 4.3 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.3) pour $n = 10$

Exemple 4.1.4. : Soit l'équation intégrale-différentielle linéaire du second ordre de Fred-

holm :

$$\begin{cases} u''(x) = -\sin(x) + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ u'(0) = 1, u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.4 et la figure 4.4

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000000000	-0.000000000005	5.410702e-11
2	0.157	0.15643446504	0.15643446498	5.606349e-11
3	0.314	0.30901699437	0.30901699429	8.747081e-11
4	0.471	0.45399049974	0.45399049960	1.386308e-10
5	0.628	0.58778525229	0.58778525208	2.082917e-10
6	0.785	0.70710678119	0.70710678089	2.927051e-10
7	0.942	0.80901699437	0.80901699399	3.875370e-10
8	1.100	0.89100652419	0.89100652370	4.880218e-10
9	1.257	0.95105651630	0.95105651576	5.392037e-10
10	1.414	0.98768834060	0.98768834083	2.324939e-10
11	1.571	1.000000000000	1.00000000744	7.436660e-09

TABLE 4.4 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.4) pour $n = 10$

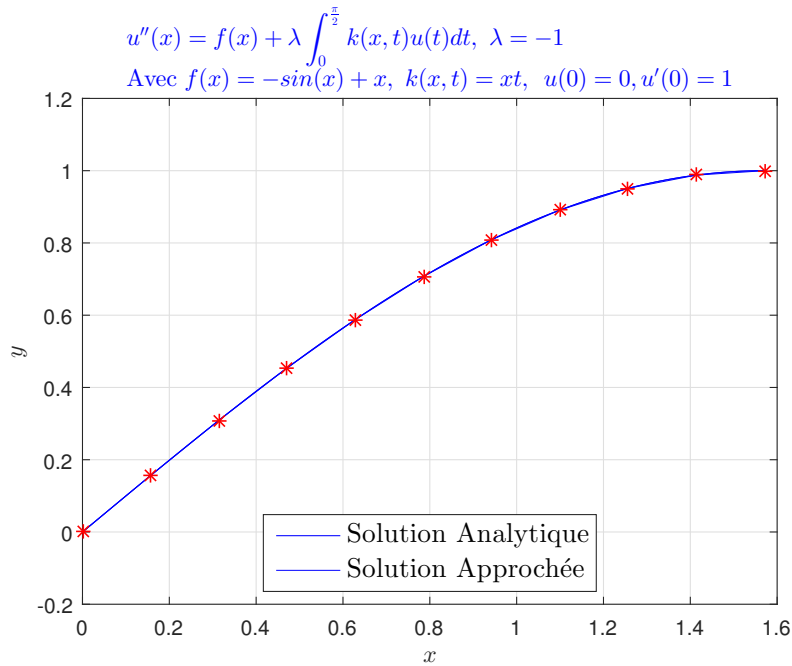


FIGURE 4.4 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.4) pour $n = 10$

4.1.1.2 Equation intégrô-différentielle linéaire de Volterra

Considérons l'équation intégrô-différentielle linéaire de Volterra, d'ordre n définie par :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x)u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad (4.9)$$

Où $\alpha_i(x)$ et $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, λ est paramètre réel

On suppose que la solution est de la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x). \quad (4.10)$$

Pour déterminer la solutio approchée on procède comme auparavant, on remplace 4.9 et 4.3 dans l'équation 4.8, nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_n(x)c_i L_{i,n}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x,t) \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(t)dt \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[\alpha_n(x) L_{i,n}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) L_{i,n}^{(i)}(x) - \lambda \int_E k(x,t) L_{i,n}(t) dt \right] = f(x) \quad (4.12)$$

Pour déterminés les coefficients inconnues c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), nous choisissons les points collocation :

$$x = x_j, j = 0, 2, \dots, n$$

Alors :

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[L_{i,n}^n x_j + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_j) L_{i,n}^{(i)} x_j - \lambda \int_E k(x_j, t) L_{i,n} dt \right] = f(x_j) \quad (4.13)$$

Alors, on obtient un système linéaire :

$$AX = b \quad (4.14)$$

Tel que :

$$A = a_{i,j} = \left[L_{i,n}^n(x_j) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_j) L_{i,n}^{(i)}(x_j) - \lambda \int_a^x k(x_j, t) L_{i,n} dt \right], \quad j, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

$$X = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

Le système linéaire 4.7 peut être résolu par la méthode directe pour déterminer les coefficients c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Ces c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) seront alors substituer dans l'équation (4.8) produisent une approximation de la solution $u(x)$.

4.1.2 Application de la méthode

Exemple 4.1.5. : Soit l'équation intégró-différentielle linéaire du premier ordre de Volterra :

$$\begin{cases} u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x u(t) dt, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 2x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.5 et la figure 4.5

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.100	0.200000	0.200000	0.000000e+00
3	0.200	0.400000	0.400000	0.000000e+00
4	0.300	0.600000	0.600000	0.000000e+00
5	0.400	0.800000	0.800000	0.000000e+00
6	0.500	1.000000	1.000000	0.000000e+00
7	0.600	1.200000	1.200000	0.000000e+00
8	0.700	1.400000	1.400000	0.000000e+00
9	0.800	1.600000	1.600000	0.000000e+00
10	0.900	1.800000	1.800000	0.000000e+00
11	1.000	2.000000	2.000000	0.000000e+00

TABLE 4.5 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.5) pour $n = 13$

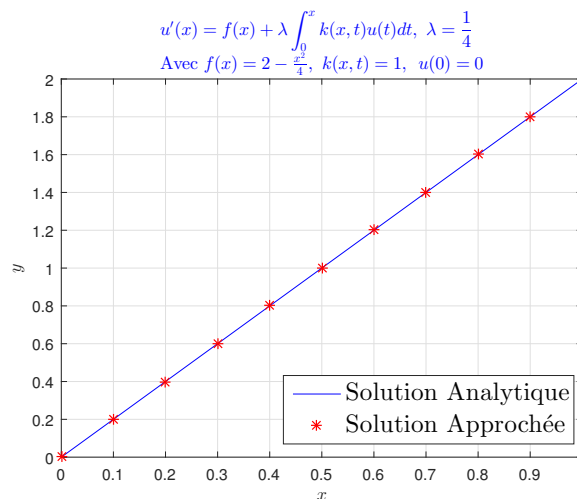


FIGURE 4.5 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.5) pour $n = 13$

Exemple 4.1.6. : Soit l'équation intégrale-différentielle linéaire du premier ordre de Volterra :

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.6 et la figure 4.6

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.100	1.10517092	1.10517092	0.000000e+00
3	0.200	1.22140276	1.22140276	0.000000e+00
4	0.300	1.34985881	1.34985881	0.000000e+00
5	0.400	1.49182470	1.49182470	0.000000e+00
6	0.500	1.64872127	1.64872127	0.000000e+00
7	0.600	1.82211880	1.82211880	2.220446e-16
8	0.700	2.01375271	2.01375271	4.440892e-16
9	0.800	2.22554093	2.22554093	4.440892e-16
10	0.900	2.45960311	2.45960311	0.000000e+00
11	1.000	2.71828183	2.71828183	8.881784e-16

TABLE 4.6 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.6) pour $n = 13$

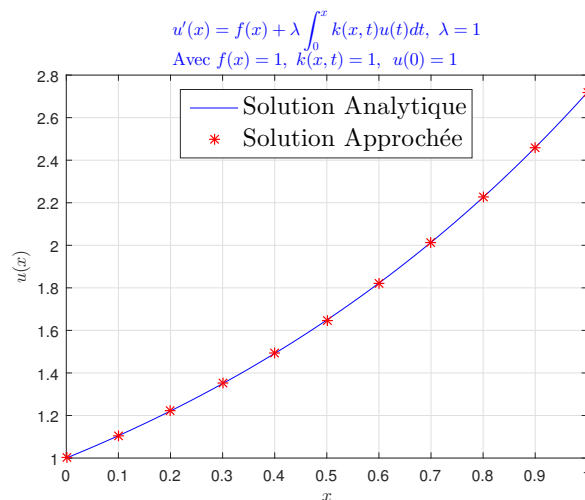


FIGURE 4.6 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.6) pour $n = 13$

Exemple 4.1.7. [19] : Soit l'équation intégro-différentielle linéaire du second ordre de Volterra :

$$\begin{cases} u''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ u'(0) = 1, \quad u(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.7 et la figure 4.7

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	1.000000	1.000000	0.000000e+00
2	0.100	1.105171	1.105171	2.220446e-15
3	0.200	1.221403	1.221403	5.107026e-15
4	0.300	1.349859	1.349859	7.993606e-15
5	0.400	1.491825	1.491825	1.065814e-14
6	0.500	1.648721	1.648721	1.376677e-14
7	0.600	1.822119	1.822119	1.687539e-14
8	0.700	2.013753	2.013753	1.998401e-14
9	0.800	2.225541	2.225541	2.309264e-14
10	0.900	2.459603	2.459603	2.575717e-14
11	1.000	2.718282	2.718282	2.886580e-14

TABLE 4.7 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.7) pour $n = 13$

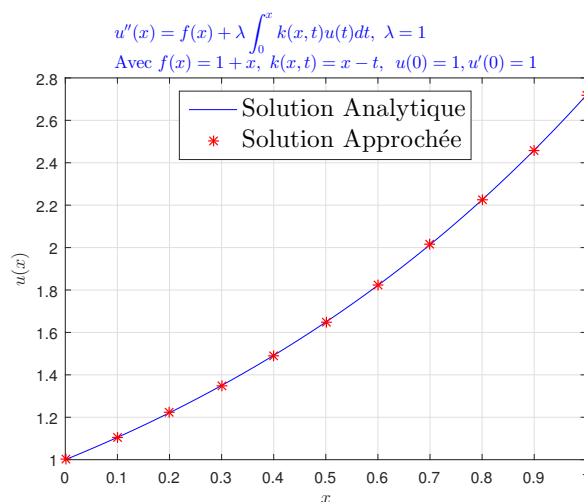


FIGURE 4.7 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.7) pour $n = 13$

Exemple 4.1.8. [19] : Soit l'équation intégral-différentielle linéaire du second ordre de Volterra :

$$\begin{cases} u''(x) = -x - \frac{1}{6}x^3 + \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ u'(0) = 2, \quad u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $y(x) = x + \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.8 et la figure 4.8

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.00000000	-0.00000000	1.387779e-17
2	0.100	0.19983342	0.19983342	6.661338e-16
3	0.200	0.39866933	0.39866933	1.720846e-15
4	0.300	0.59552021	0.59552021	2.775558e-15
5	0.400	0.78941834	0.78941834	3.552714e-15
6	0.500	0.97942554	0.97942554	4.329870e-15
7	0.600	1.16464247	1.16464247	5.107026e-15
8	0.700	1.34421769	1.34421769	5.995204e-15
9	0.800	1.51735609	1.51735609	6.883383e-15
10	0.900	1.68332691	1.68332691	8.215650e-15
11	1.000	1.84147098	1.84147098	8.437695e-15

TABLE 4.8 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.8) pour $n = 13$

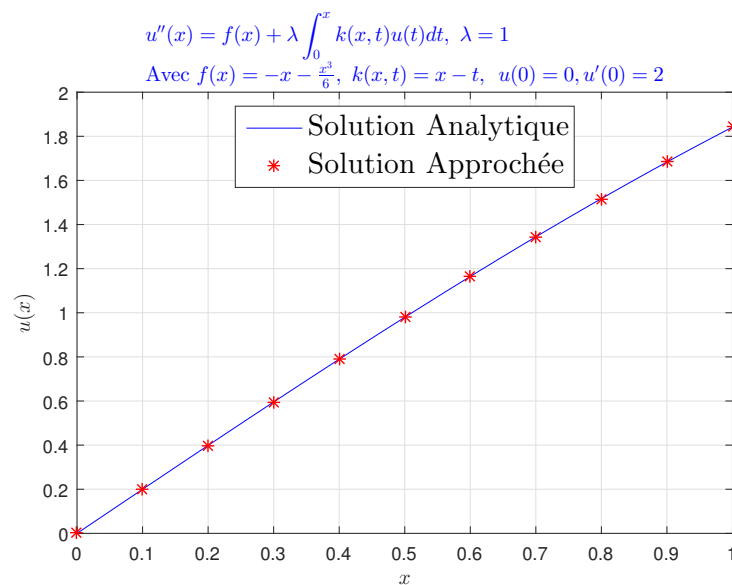


FIGURE 4.8 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.8) pour $n = 13$

Exemple 4.1.9. [22] : Soit l'équation intégréo-différentielle linéaire du second ordre de Volterra :

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \sin(x) + \int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.9 et la figure 4.9

n	x	solution exacte	Solution Approach	Eureur
1	0.000	-1.00000000	-1.00000000	1.287859e-14
2	0.100	-0.89983742	-0.89983742	1.199041e-14
3	0.200	-0.79873066	-0.79873066	1.310063e-14
4	0.300	-0.69581721	-0.69581721	1.254552e-14
5	0.400	-0.59031436	-0.59031436	1.232348e-14
6	0.500	-0.48150896	-0.48150896	1.182388e-14
7	0.600	-0.36874683	-0.36874683	1.115774e-14
8	0.700	-0.25142189	-0.25142189	1.088019e-14
9	0.800	-0.12896485	-0.12896485	1.071365e-14
10	0.900	-0.00083145	-0.00083145	1.043610e-14
11	1.000	0.13350972	0.13350972	1.310063e-14

TABLE 4.9 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.9) pour $n = 13$

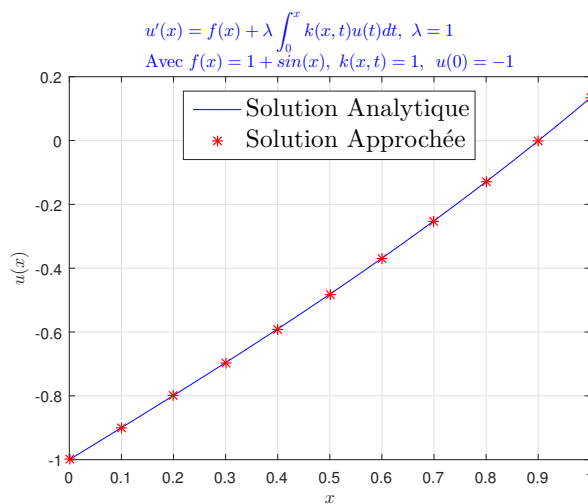


FIGURE 4.9 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.9) pour $n = 13$

4.1.2.1 Equation intégrô-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra

Considérons l'équation intégrô-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra, d'ordre n définie par :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x)u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^x k_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_0^1 k_2(x,t)u(t)dt \quad (4.15)$$

Où $\alpha_i(x)$, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, λ est paramètre réel.

On suppose que la solution est de la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_{i,n}(x). \quad (4.16)$$

Pour déterminer la solution approchée on procède comme suit, on remplace 4.9 et 4.3 dans l'équation 4.8, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left(\alpha_i(x) \sum_{j=0}^n c_j L_{j,n}^{(j)}(x) \right) &= f(x) + \lambda 1 \int_0^x k1(x, t) \sum_{j=0}^n c_j L_{j,n}(t) dt \\ &+ \lambda 2 \int_0^1 k2(x, t) \sum_{j=0}^n c_j L_{j,n}(t) dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\sum_{j=0}^n c_j \left[\sum_{i=0}^n \alpha_i(x) L_{j,n}^{(i)}(x) - \lambda 1 \int_0^x k1(x, t) L_{j,n}(t) dt - \lambda 2 \int_0^1 k2(x, t) L_{j,n}(t) dt \right] = f(x) \quad (4.18)$$

Pour déterminer les coefficients inconnues c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), nous choisissons les points collocation :

$$x = x_j, j = 0, 2, \dots, n$$

Alors :

$$\sum_{j=0}^n c_j \left[\sum_{i=0}^n \alpha_i(x_j) L_{j,n}^{(i)}(x_j) - \lambda 1 \int_0^{x_j} k1(x_j, t) L_{j,n}(t) dt - \lambda 2 \int_0^1 k2(x_j, t) L_{j,n}(t) dt \right] = f(x_j) \quad (4.19)$$

Alors, on obtient un système linéaire :

$$AX = b \quad (4.20)$$

Tel que :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \left[\sum_{i=0}^n \alpha_i(x_j) L_{j,n}^{(i)}(x_j) - \lambda 1 \int_0^{x_j} k1(x_j, t) L_{j,n}(t) dt - \lambda 2 \int_0^1 k2(x_j, t) L_{j,n}(t) dt \right] \\ b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\ X &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), on résout Le système linéaire 4.7 par la méthode directe. En substituant les valeurs de c_i dans l'équation (4.8), on obtient une approximation de la solution $u(x)$.

Exemple 4.1.10. [23] : Soit l'équation intégral-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra :

$$\begin{cases} u'(x) = 2e^x - 2 + \int_0^x u(t)dt + \int_0^1 u(t)dt, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = xe^x$

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1.2.1 et la figure 4.10

n	x	solution exacte	Solution Approach	Eureur
1	0.00	0.00000000	0.00000000	4.263256e-14
2	0.10	0.11051709	0.11051709	6.669856e-11
3	0.20	0.24428055	0.24428055	7.930534e-11
4	0.30	0.40495764	0.40495764	9.423379e-11
5	0.40	0.59672988	0.59672988	1.098183e-10
6	0.50	0.82436064	0.82436064	1.266112e-10
7	0.60	1.09327128	1.09327128	1.446008e-10
8	0.70	1.40962690	1.40962690	1.641092e-10
9	0.80	1.78043274	1.78043274	1.851490e-10
10	0.90	2.21364280	2.21364280	2.083431e-10
11	1.00	2.71828183	2.71828183	2.319673e-10

TABLE 4.10 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.10) pour $n = 10$

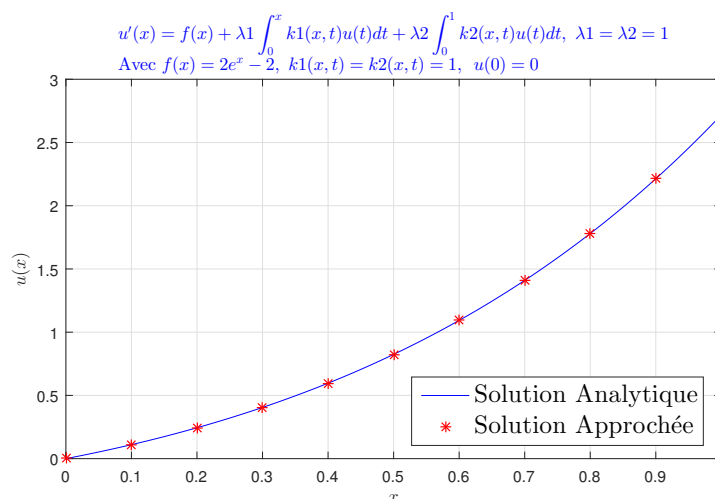


FIGURE 4.10 – comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.10) pour $n = 10$

Exemple 4.1.11. [10] : Soit l'équation intégral-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra :

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{27}{5} - \frac{1}{5}x^6 - \frac{3}{4}x^5 - x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{41}{20}x + \int_{-1}^x xtu(t)dt + \int_{-1}^1 (x-t)u(t)dt, \\ u(-1) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = (x+1)^3$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.11 et la figure 4.11

n	x	Solution exacte	Solution Approach	Eureur
1	-1.00	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
2	-0.80	0.00800000	0.00800000	1.214306e-17
3	-0.60	0.06400000	0.06400000	4.163336e-17
4	-0.40	0.21600000	0.21600000	1.110223e-16
5	-0.20	0.51200000	0.51200000	1.110223e-16
6	0.00	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
7	0.20	1.72800000	1.72800000	0.000000e+00
8	0.40	2.74400000	2.74400000	4.440892e-16
9	0.60	4.09600000	4.09600000	8.881784e-16
10	0.80	5.83200000	5.83200000	0.000000e+00
11	1.00	8.00000000	8.00000000	0.000000e+00

TABLE 4.11 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.11) pour $n = 10$

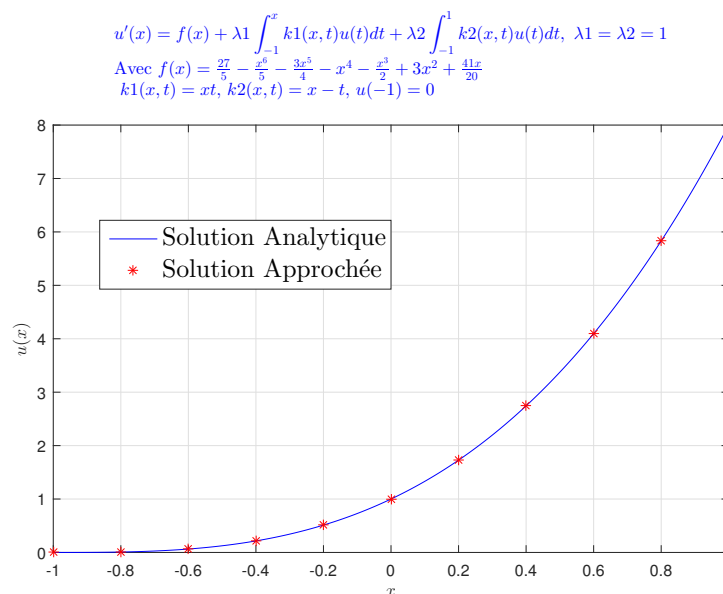


FIGURE 4.11 – comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.11) pour $n = 10$

Exemple 4.1.12. [23] [24] : Soit l'équation intégral-différentielle de Fredholm–Volterra :

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) - xu(x) = e^x - \sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \cos(x)e^{-t}u(t)dt + \int_0^1 \sin(x)e^{-t}u(t)dt, \\ u(-1) = u'(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.12 et la figure 4.12

n	x	Solution exacte	Solution Approach	Eureur
1	0.00	1.00000000	1.00000000	2.413847e-12
2	0.10	1.10517092	1.10517597	5.050976e-06
3	0.20	1.22140276	1.22141826	1.550172e-05
4	0.30	1.34985881	1.34988620	2.739150e-05
5	0.40	1.49182470	1.49186399	3.929188e-05
6	0.50	1.64872127	1.64877218	5.091099e-05
7	0.60	1.82211880	1.82218110	6.229794e-05
8	0.70	2.01375271	2.01382621	7.350490e-05
9	0.80	2.22554093	2.22562548	8.454965e-05
10	0.90	2.45960311	2.45969862	9.550475e-05
11	1.00	2.71828183	2.71838835	1.065212e-04

TABLE 4.12 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.12) pour $n = 6$

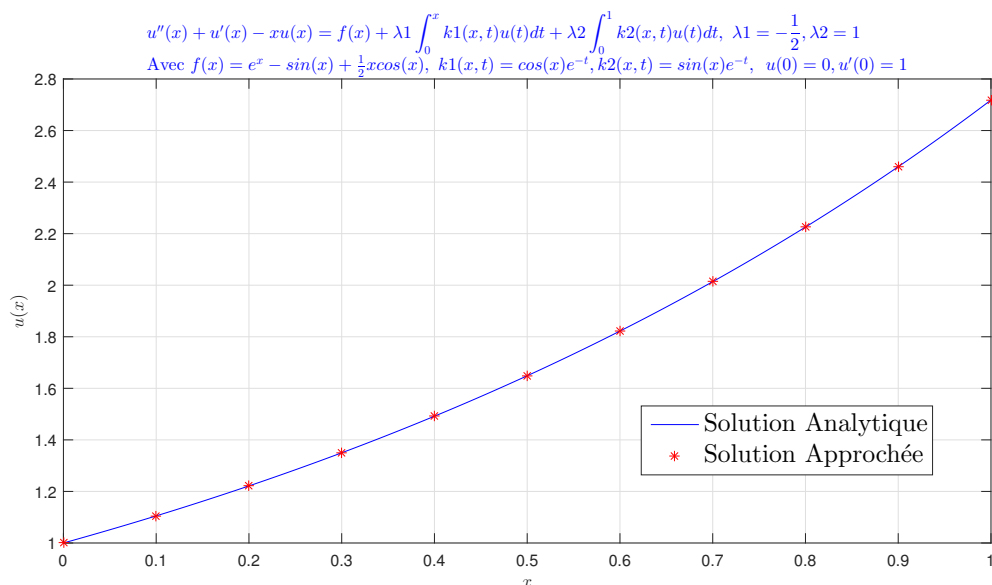


FIGURE 4.12 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.12) pour $n = 10$

Exemple 4.1.13. [16][25] : Soit l'équation intégral-différentielle de Fredholm–Volterra :

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \int_0^x x^2 t u(t) dt + \int_0^1 x(x-t)u(t) dt, \\ f(x) = -\sin(x) + x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x) + x^2 - x^2 \sin(1) + x \cos(1) + x \sin(1) - x \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = \cos(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.13 et la figure 4.13

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.1	0.99500417	0.99500417	1.350253e-12
3	0.2	0.98006658	0.98006658	1.323053e-12
4	0.3	0.95533649	0.95533649	1.336597e-12
5	0.4	0.92106099	0.92106099	1.340372e-12
6	0.5	0.87758256	0.87758256	1.341594e-12
7	0.6	0.82533561	0.82533561	1.331046e-12
8	0.7	0.76484219	0.76484219	1.307066e-12
9	0.8	0.69670671	0.69670671	1.259659e-12
10	0.9	0.62160997	0.62160997	1.194378e-12
11	1.0	0.54030231	0.54030231	1.052713e-12

TABLE 4.13 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.13) pour $n = 10$

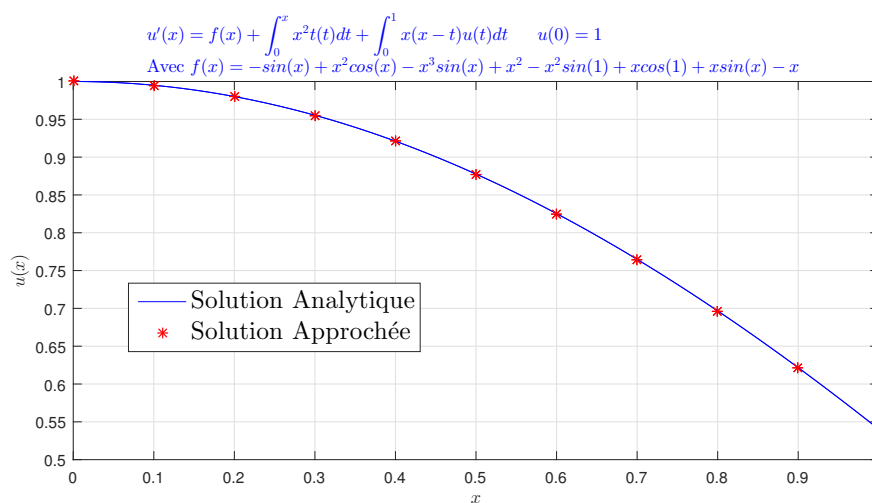


FIGURE 4.13 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.13) pour $n = 10$

Exemple 4.1.14. : Soit l'équation intégrô-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra :

$$\begin{cases} u''(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + \int_{-1}^x u(t)dt + \int_{-1}^1 (1 - 2xt)u(t)dt, \\ u(-1) = -7, \quad u'(-1) = 12 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = -3x^2 + 6x + 2$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.14 et la figure 4.14

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.00	-7.000000000000	-7.000000000000	0.000000e+00
2	-0.80	-4.720000000000	-4.720000000000	0.000000e+00
3	-0.60	-2.680000000000	-2.680000000000	0.000000e+00
4	-0.40	-0.880000000000	-0.880000000000	0.000000e+00
5	-0.20	0.680000000000	0.680000000000	0.000000e+00
6	0.00	2.000000000000	2.000000000000	0.000000e+00
7	0.20	3.080000000000	3.080000000000	0.000000e+00
8	0.40	3.920000000000	3.920000000000	0.000000e+00
9	0.60	4.520000000000	4.520000000000	0.000000e+00
10	0.80	4.880000000000	4.880000000000	0.000000e+00
11	1.00	5.000000000000	5.000000000000	0.000000e+00

TABLE 4.14 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1.14) pour $n = 10$

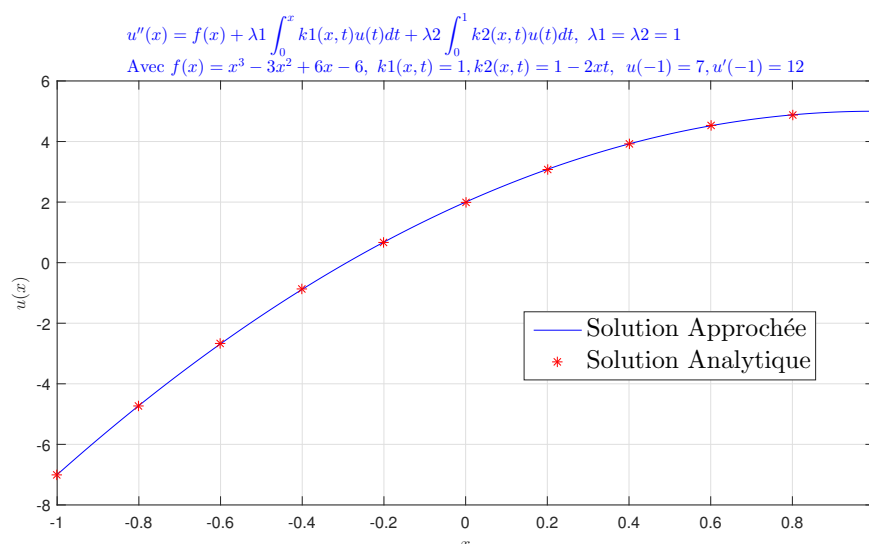


FIGURE 4.14 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1.14) pour $n = 10$

Conclusion

La méthode proposée pour résoudre les ODEs, les IEs et les IDEs linéaires, est basée sur la méthode de collocation de Legendre. Cette méthode convertit l'équation en un système linéaire d'équations algébriques. Sa précision est démontrée sur plusieurs exemples. Comme le montrent les exemples, l'erreur diminue lorsque le degré n du polynôme de Legendre augmente. Nous avons appliqué la méthode présentée sur des problèmes test et comparé les résultats avec leurs solutions exactes, révélant que la présente méthode est très effective et pratique.

Bibliographie

- [1] B. N. Mandal and S. Bhattacharya, "Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials," *Appl. Math. Comput* 190, 1707–1716 (2007)..
- [2] B. N. Mandal and S. Bhattacharya, "Use of Bernstein polynomials in numerical solutions of Volterra integral equations," *Appl. Math. Sci* 2(36), 1773–1787 (2008).
- [3] J. Hou, C. Yang, and S. Wang, "Numerical solution of Fredholm integral equations by using Bernstein polynomials," *In Progress in Informatics and Computing IEEE International Conference*, No. 1 : 427–430 (2010).
- [4] K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, and R. Ezzati, "A new approach to the numerical solution of Volterra integral equations by using Bernstein's approximation," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul* 16, 647–655 (2011).
- [5] M. Alipour and D. Rostamy, "Bernstein polynomials for solving Abels integral equation," *J. Comput. Math. Appl* 3(4), 403–412 (2011).
- [6] K. Maleknejad, B. Basirat, and E. Hashemizadeh, "A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra Fredholm integro-differential equations," *Mathematical and Computer Modelling* 55, 1363–1372 (2012).
- [7] F. Hosseini Shekarabi, K. Maleknejad, and R. Ezzati, "Application of two-dimensional Bernstein polynomials for solving mixed Volterra Fredholm integral equations," *Afrika Matematika* 26, 1237–1251 (2015).
- [8] A. Alturk, "Application of the Bernstein polynomials for solving Volterra integral equations with convolution kernels," *Filomat* 30(4), 1045–1052 (2016).

- [9] Şuayip Yüzbaşı , Niyazi Şahin , Ahmet Yildirim,"A collocation approach for solving high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations," *Mathematical and Computer Modelling*, Volume 55, Issues 3–4, 2012, pp 547-563
- [10] Neşe İşler Acar, Ayşegül Daşcıoğlu (2019) "A projection method for linear Fredholm–Volterra integro-differential equations", *Journal of Taibah University for Science*, 13 :1,644-650
- [11] Salih Yalçınbas, Mehmet Sezer, Hüseyin Hilmi Sorkun "Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations", *Applied Mathematics and Computation* 210 (2009) 334–349
- [12] KHAN, Faheem, MUSTAFA, Ghulam, OMAR, Muhammad, et al. "Numerical approach based on Bernstein polynomials for solving mixed Volterra-Fredholm integral equations." *AIP Advances*, 2017, vol. 7, no 12, p. 125123.
- [13] ZHENG, Xiaoyang et YANG, Xiaofan. "Techniques for solving integral and differential equations by Legendre wavelets", *International Journal of Systems Science*, 2009, vol. 40, no 11, p. 1127–1137
- [14] B.N. Mandal, Subhra Bhattacharya,"Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials", *Applied Mathematics and Computation* 190 (2007) 1707–1716
- [15] Mohamed Abdel-Latif Ramadan, Kamal. Mohamed Raslan, Mahmoud Abd El Ghanny Nassar, "A Rational Chebyshev functions approach for Fredholm–Volterra integro–differential Equations", *Computational Methods for Differential Equations*, Vol. 3, No. 4, 2015, pp. 284-297
- [16] Shahooth MK, Ahmad RR, Din U-KS, Swidan W, Al-Husseini OK and Shahooth WK,"Approximation solution to solving linear Volterra-Fredholm integro-differential equations of the second kind by using Bernstein polynomials method", *J Appl Computat Math* 2016, Volume 5, Issue 2 (2016) pp. 1-4
- [17] LINZ, Peter. "Analytical and numerical methods for Volterra equations", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1985.
- [18] RAZZAGHI, M. et YOUSEFI, S. "Legendre wavelets direct method for variational problems", *Mathematics and computers in simulation*, 2000, vol. 53, no 3, p. 185–192.

- [19] Okai J.O, Ilejimi D.O and Musa Ibrahim, "Solution of linear Volterra integro-differential equation of the second kind using the modified adomian decomposition method ", *GSJ* : Volume 7, Issue 5, 2019, pp.288–294
- [20] Nagma Irfan, Sunil Kumar, and Saurabh Kapoor, "Bernstein operational matrix approach for integro-Differential Equation arising in control theory" *Nonlinear Engineering* 2014 ; 3(2) : 117–123
- [21] Mohammed Khalid Shahooth, "Numerical solution for mixed Volterra-Fredholm integral equations of the second kind by using Bernstein polynomials method " *Mathematical Theory and Modeling*, Vol.5, No.10, 2015
- [22] M. Al-Towaiq, Ahmed Kasasbeh, "Modified algorithm for solving linear integro-differential equations of the second kind " *American Journal of Computational Mathematics*, 2017, 7, 157-165
- [23] Şuayip Yüzbaşı, Nurbol ISMAILOV, "An operational matrix method for solving linear Fredholm-Volterra integro-differential equations " *Turk. J. Math* (2018) 42 : pp. 243–256
- [24] Şuayip, Yüzbaşı, Niyazi Şahin, Ahmet Yıldırım "A collocation approach for solving high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations", *Mathematical and Computer Modelling*, Volume 55, Issues 3–4, 2012, pp. 547-563
- [25] H. H. Omran, "Numerical methods for solving the first order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations ", *Journal of Al-Nahrain University* Vol.12 (2), 2009, pp.123-127

ملخص

المعادلات التكاملية، المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية عولجت في ميادين علمية واسعة خاصة ميدان الرياضيات التطبيقية، الغرض من دراستنا هو إيجاد الحل التقريبي لهذه المعادلات على أساس التقارب، باستخدام طريقة التجميع، والتي تعتبر أحد أنواع طرق الإسقاط القائمة على متعددات الحدود ليجندر المعمم، حيث قدمنا العديد من الأمثلة على المسائل المختلفة لإظهار إمكانية تطبيق الطريقة وصلاحياتها.

كلمات مفتاحية: المعادلات التفاضلية، المعادلة التكاملية، المعادلات التفاضلية، طريقة التجميع، كثير الحدود ليجندر.

Abstract

Differential equations, integral equations and integro-differential equations have been treated in large scientific fields, in particular in the field of applied mathematics, the aim of our study is to find an approximate solution to these equations based on convergence, using the collocation method, which is considered to be one of the types of projection methods based on generalized Legendre polynomials, as we have provided many examples of various problems to show the applicability and validity of the method.

Key words: Differential equations, Integral equations, Integro-differentials equations, collocation method, Legendre polynomials

Résumé

Les équations différentielles, les équations intégrales ainsi que les équations integro-différentielles ont été traitées dans de larges domaines scientifique, en Particulier dans le domaine de mathématiques appliquées, le but de notre étude est trouver la solution Approchée à ces équations basées sur la convergence, en utilisant la méthode de collocation, qui est considérée comme l'un des types de méthodes de projection basées sur les polynômes de Legendre généralisés, comme nous en avons fourni de nombreux exemples de divers problèmes pour montrer l'applicabilité et la validité de la méthode.

Mots clé: Equations différentielles linéaires, Equations intégrales, Equations integro-différentielles, Méthode de collocation, Polynômes de Legendre