

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



N° d'ordre:

THÈSE

*Présentée pour l'obtention du diplôme
de Doctorat troisième cycle*

Spécialité:

Mathématique Pures et Applications

Option:

EDP et Optimisation

Par:

MOHAMED DILMI

Thème

Analyse asymptotique de quelques problèmes aux limites non linéaires dans un film mince

Soutenue publiquement le : 12/10/2019, devant le jury :

L. Zedam	Prof.	Université Mohamed Boudiaf-M'sila	Président
M. Dilmi	Prof.	Université Ferhat Abbas-Sétif I	Rapporteur
A. Merouani	Prof.	Université Ferhat Abbas-Sétif I	Examineur
D. Achour	Prof.	Université Mohamed Boudiaf-M'sila	Examineur
A. Sengouga	M.C.A.	Université Mohamed Boudiaf-M'sila	Examineur



Remerciements

Avant toutes choses, je remercie Dieu qui m'a donné le courage, la volonté, l'espérance et la patience pour finaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mon remerciement les plus profonds à mon encadreur Monsieur Mourad DILMI professeur à l'université de Ferhat Abbas Sétif I qui m'a proposé le sujet. Je tiens plus à le remercier pour sa compétence, sa rigueur, ainsi que pour le caractère novateur de ses idées.

Je remercie particulièrement Monsieur Lemnaouar ZEDAM qui a accepté d'être le président de mon jury, messieurs Abdelbaki MEROUANI, Dahmane ACHOUR et Abdelmouhcene SENGOUGA qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Je terminerais en rendant hommage à tous les enseignants de département de mathématiques de l'université de M'sila.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle	10
1.1 Quelques espaces fonctionnels	11
1.1.1 Espaces de Lebesgue	11
1.1.2 Espaces de Sobolev	13
1.1.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	15
1.2 Convergence faible et convergence faible étoile	17
1.3 Théorèmes de Riesz-Fréchet et Lax-Milgram	18
1.4 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement	19
1.5 Différentiabilité et sous-différentiabilité	21
1.6 Opérateurs monotones et inéquations variationnelles	22
1.7 Lemmes de Gronwall	23
2 Comportement asymptotique d'un problème d'élasticité avec terme dissipatif non linéaire	25
2.1 Description du problème	26
2.2 Formulation variationnelle du problème	29
2.3 Changement du domaine et estimations a priori	31
2.4 Théorème de convergence et problème limite	39
3 Analyse asymptotique d'un problème viscoélastique avec termes dissipatif et source non linéaire	46
3.1 Formulation mécanique du problème	47
3.2 Formulation variationnelle du problème	49

3.3	Analyse asymptotique du problème	50
3.3.1	Changement d'échelle et problème variationnel sur Ω	50
3.3.2	Estimations a priori	51
3.3.3	Théorème de convergence	57
3.3.4	Problème limite	58
4	Analyse asymptotique d'un système généralisé de type Stokes	65
4.1	Introduction et position du problème	66
4.2	Problème variationnel	68
4.2.1	Le problème variationnel dans un domaine fixe	69
4.3	Estimations a priori	71
4.4	Résultats de convergence et problème limite	73
5	Sur le comportement asymptotique d'un fluide non-Newtonien généralisé dans un film mince	79
5.1	Position du problème et formulation variationnelle	80
5.2	Changement du domaine et certaines estimations	83
5.3	Résultats de convergence et l'équation spécifique de Reynolds	88
	Conclusion générale	96
	Bibliographie	98

Introduction générale

L'analyse du comportement asymptotique des modèles mis en place sur des films minces (l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres), et comprendre comment l'épaisseur du film affecte le problème, est une question très importante en sciences appliquées, parce que les problèmes qui sont posés dans un film mince sont largement utilisés dans plusieurs domaines tels que la mécanique, la chimie, l'aéronautique et encore le génie civil.

En mécanique des solides, les structures minces (barres minces, plaques minces, coques minces) sont largement utilisées dans plusieurs domaines de l'industrie, par exemple dans l'industrie sous-marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches,...), on retrouve également l'utilisation des structures minces dans l'industrie métallurgique notamment dans le processus de laminage des tôles minces etc. Plus de détails peuvent être vus à [3].

En littérature mathématique, les problèmes dans les domaines minces et surtout dans l'élasticité concernant les fils minces, les plaques et les coques ont déjà été étudiés pendant plus d'un siècle. Par exemple Ciarlet et Destuynder [17], Destuynder [18], ont étudié des états d'équilibre d'une plaque mince $\Omega \times (-\varepsilon, +\varepsilon)$ sous des forces externes où Ω est un domaine lisse dans \mathbb{R}^2 et ε est un petit paramètre, pour justifier le modèle bidimensionnel des plaques.

Au cours des dernières années, de nombreux auteurs ont appliqué les méthodes asymptotiques dans les problèmes d'élasticité et de viscosité tridimensionnels ou bidimensionnels pour dériver de nouveaux modèles réduits bidimensionnels ou unidimensionnels. L'importance de ces derniers qui sont obtenus réside dans le fait qu'on peut les utiliser à la place des modèles

tridimensionnels complets lorsque l'épaisseur est suffisamment petite. En outre, les modèles bidimensionnels ou unidimensionnels sont plus simples que leur contrepartie tridimensionnelle ce qui facilite leur étude. Ils permettent aussi d'effectuer des simulations numériques moins coûteuses des simulations tridimensionnelles.

Dans [6], Bayada et Lhalouani ont étudié un problème de contact avec la loi de frottement de Coulomb entre un matériau élastique et un joint élastique de faible épaisseur encastré dans un support rigide. Paumier [37] réalise une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince, il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un autre bidimensionnel sans frottement. La justification par l'analyse asymptotique des plaques élastiques donnée par Gilbert et Vashakmadze [27] et pour les coquilles données par Chacha et Miloudi [15]. Dans [7], Benseridi et Dilmî étudient le comportement asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité dans un domaine borné en dimension trois avec les conditions de frottement de Tresca, dans le cas isotherme. Le même problème mais dans le cas non isotherme a été étudié dans [44]. Dans le cadre de l'étude des problèmes de viscosité, Rodríguez-Arós et Viaño dans ([42], [43]) justifient deux modèles pour l'étirement en flexion d'une barre viscoélastique en utilisant la méthode d'expansion asymptotique. Dilmî et d'autres ont étudié dans [21] l'analyse asymptotique d'un modèle mathématique impliquant un contact friction entre un corps électro-viscoélastique et une base dans un domaine mince tridimensionnel.

Le lecteur peut également consulter certains travaux concernant des équations aux dérivées partielles posées dans différents domaines minces, voir par exemple ([26], [28], [36], [38]-[40]).

En dynamique des fluides, les applications des problèmes qui sont posés dans un film mince sont : lubrification, problèmes de météorologie, dynamique des océans, (voir [13], etc...).

La lubrification est une science qui s'intéresse à l'étude des phénomènes d'interaction entre deux corps en contact entre lesquels est intercalé un troisième corps appelé lubrifiant qui peut être fluide, solide ou semi solide. Selon la nature du lubrifiant utilisé, on distingue deux types de lubrification, à savoir: la lubrification solide et la lubrification fluide.

Selon le mathématicien irlandais O. Reynolds, la lubrification désigne le contrôle de l'usure des matériaux par l'introduction d'un film fluide qui réduit le frottement entre les surfaces en quasi-contact et en mouvement relatif. L'étude des problèmes de lubrification hydrodynamique remonte au célèbre travail de Reynolds [41] publié en 1886. Il a présenté sa fameuse

équation "L'équation de Reynolds" à partir des équations de la mécanique des fluides. Cette équation est donnée comme suit

$$\operatorname{div} (h^3 \cdot \nabla \pi) = \operatorname{div} (s \cdot h), \quad (\text{Rey})$$

où h est l'épaisseur de l'écoulement, π la pression et s un vecteur donné représentant le cisaillement de l'une des deux surfaces solides. L'équation (*Rey*) permet de prévoir le comportement des contacts lubrifiés. La résolution de cette équation permet de déterminer le champ de pression dans un contact lubrifié et ainsi ses caractéristiques de fonctionnement, à savoir : la capacité de charge, le débit, la puissance dissipée, le nombre de frottement, etc.

La relation entre l'équation de Reynolds et les équations de Navier-Stokes a été donnée formellement par Elrod [25], Capriz [14] et Wannier [47]. Dans les problèmes de lubrification, l'équation de Reynolds peut être mathématiquement justifiée à partir de l'équation de Stokes sur les domaines minces (Bayada et Chambat [5]).

Des résultats concernant l'étude du phénomène de lubrification par des fluides Newtoniens avec glissement ont été obtenus par Bayada et Boukrouche [4], lorsque le glissement est donné par la loi de frottement de type Tresca et par Boukrouche, Lukaszewicz [11] dans le cas où le glissement est donné par la loi de frottement de Coulomb. Dans le cas du fluide non-Newtonien, la littérature concernant ce sujet est vaste (voir par exemple ([10], [8])).

L'objet de cette thèse est l'analyse asymptotique de quelques problèmes aux limites non linéaires dans un film mince, quand l'épaisseur ε du film tend vers zéro. En présence des conditions non linéaires de type Tresca sur une partie de bord du film mince. Les modèles que l'on étudie sont issus de la mécanique des solides et des fluides. L'étude asymptotique de ces problèmes lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ est motivée par des aspects physiques et mathématiques. Du point de vue de la physique, il s'agit de dériver des modèles limites valables dans différents régimes. Par contre du point de vue mathématique, ils se posent les questions suivantes :

1. Quel est le problème limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$?
2. Ce problème est-il bien posé?
3. Peut-on montrer un résultat de convergence?

Cette thèse se compose de cinq chapitres que nous allons brièvement décrire.

Le premier chapitre 1, comprend les outils nécessaires pour une bonne compréhension des problèmes traités. Nous commençons par la présentation de quelques espaces fonctionnels. On y introduit des espaces de Lebesgue et de Sobolev, puis nous rappelons les espaces

des fonctions à valeurs vectorielles, ainsi que leurs principales propriétés. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle. Nous finissons en donnant quelques lemmes de Gronwall, qui seront plus utiles dans la démonstration d'unicité des solutions faibles et pour former les estimations a priori.

Le deuxième chapitre 2, est consacré sur l'étude du comportement asymptotique d'un problème associé à des déformations lentes d'une membrane élastique homogène et isotrope en régime dynamique avec terme dissipatif $(\alpha^\varepsilon + |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ et conditions de frottement non linéaires du type Tresca dans un domaine mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$. Dans une première étape, nous donnons la formulation variationnelle du problème et l'établissement des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible, puis on passe à l'étude de l'analyse asymptotique. Pour cela, on utilise le changement d'échelle suivant la deuxième composante et des nouvelles inconnues pour mener l'étude sur un domaine Ω ne dépend pas de ε . Ensuite, et par l'utilisation de différentes inégalités (Poincaré, Young, Hölder et Korn), nous prouvons après un travail explicite des estimations a priori ce qui nous permet de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro dans la formulation variationnelle, on obtient le problème limite suivant

$$-\mu \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial z^2}(t) + \hat{\alpha} \frac{\partial u_1^*}{\partial t}(t) = \hat{f}_1(t),$$

$$u_1^*(x, z, 0) = \hat{v}_{0,1},$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu |\tau^*| < \hat{k} \Rightarrow \frac{\partial s^*}{\partial t} = 0, \\ \mu |\tau^*| = \hat{k} \Rightarrow \exists \beta > 0 : \frac{\partial s^*}{\partial t} = \beta \tau^*, \end{array} \right\} \text{p.p sur }]0, l[\times]0, T[,$$

et l'équation faible de Reynolds suivante

$$\int_0^l \left(\tilde{F} - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h u_1^*(x, z, t) dz + \tilde{U}_1 \right) \psi'(x) dx = 0, \quad \forall \psi \in H^1(]0, l[),$$

où

$$\tau^*(x, t) = \frac{\partial u^*}{\partial z}(x, 0, t), \quad s^*(x, t) = u^*(x, 0, t),$$

$$\tilde{F}(x, h, t) = \frac{1}{\mu} \int_0^h F(x, z, t) dz - \frac{h}{2\mu} F(x, h, t),$$

$$\tilde{U}_1(x, h, t) = -\frac{\hat{\alpha}}{\mu} \int_0^h U_1(x, z, t) dz + \frac{\hat{\alpha}h}{2\mu} U_1(x, h, t),$$

$$F(x, z, t) = \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_1(x, \eta, t) d\eta d\zeta, \quad U_1(x, z, t) = \int_0^z \int_0^\zeta \frac{\partial u_1^*}{\partial t}(x, \eta, t) d\eta d\zeta.$$

Ce chapitre est un article accepté dans le journal de Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, (voir [23]).

Dans le **troisième chapitre 3**, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème associé à des déformations d'un corps plus général de type viscoélastique homogène et isotrope et ce dans un domaine mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ avec le terme dissipatif $(1 + |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ et le terme source $|u^\varepsilon| u^\varepsilon$. Ce problème est lié aux conditions de frottement non linéaires de Tresca. Nous étudions l'analyse asymptotique du problème par les mêmes techniques que nous avons utilisées dans le deuxième chapitre. Nous obtenons un théorème de convergence, qui nous permet de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Enfin, nous obtenons le problème limite suivant

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\mu u_i^*(t) + \lambda \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} \right) + \hat{\alpha} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} &= \hat{f}_i(t), \quad i = 1, 2, \\ u_i^*(x', z, 0) &= \hat{u}_{0,i}(x', z), \quad i = 1, 2, \\ \left. \begin{aligned} |\mu\tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t}| < \hat{k} &\Rightarrow \frac{\partial s^*}{\partial t} = 0, \\ |\mu\tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t}| = \hat{k} &\Rightarrow \exists \beta > 0 : \frac{\partial s^*}{\partial t} = \beta (\mu\tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t}), \end{aligned} \right\} \text{ p.p sur } \omega \times]0, T[, \end{aligned}$$

avec l'équation spécifique de Reynolds suivante

$$\int_\omega \left(\tilde{F} - \frac{h}{2} \left(\mu s^* + \lambda \frac{\partial s^*}{\partial t} \right) + \int_0^h \left(\mu u^* + \lambda \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) (x', z, t) dz + \tilde{U}_t \right) \nabla \psi(x') dx = 0, \forall \psi \in H^1(\omega),$$

où

$$\begin{aligned} \tau^*(x', t) &= \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0, t), \quad s^*(x', t) = u^*(x', 0, t), \\ \tilde{F}(x', h, t) &= \int_0^h F(x', z, t) dz - \frac{h}{2} F(x', h, t), \quad F(x', z, t) = \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}(x', \eta, t) d\eta d\zeta, \\ \tilde{U}_t(x', h, t) &= -\hat{\alpha} \int_0^h U_t(x', z, t) dz + \frac{\hat{\alpha} h}{2} U_t(x', h, t), \\ U_t(x', z, t) &= \int_0^z \int_0^\zeta \left(1 + \left| \frac{\partial u^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u^*}{\partial t}(x', \eta, t) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Ce chapitre est un article accepté dans le journal de Mathematical Methods in the Applied Sciences, (voir [22]).

Dans le **quatrième chapitre 4**, nous nous intéressons à l'analyse asymptotique d'un problème de lubrification dans un domaine mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ en régime stationnaire gouverné par le système de Stokes généralisé avec la condition de Tresca sur une partie du bord. Ce problème soumis à la loi de comportement suivant

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) = \mu_0 D(u^\varepsilon) + \mu_1 \frac{D(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|^{2-p}} - \pi^\varepsilon I_3, \text{ avec } p \in]1, 2[,$$

où u^ε est la vitesse, π^ε la pression, I_3 le tenseur identité et $D(u^\varepsilon) = (d_{ij}(u^\varepsilon))_{1 \leq i, j \leq 3}$ le tenseur des taux de déformation avec

$$d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right).$$

Après nous mentionnons la formulation mécanique de l'écoulement stationnaire du fluide, nous dérivons l'inéquation variationnelle, ensuite, nous passons à l'étude du comportement asymptotique de la même manière que dans les chapitres précédents. En effet, nous utilisons le changement d'échelle pour obtenir un problème dans un domaine fixe Ω , puis on établit des estimations sur la vitesse et la pression. Ces estimations nous permettent d'obtenir le problème limite suivant

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\mu_0}{2} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} &= \hat{f}_i, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\mu_0}{2} |\tau^*| < \hat{k} &\Rightarrow s^* = 0, \\ \frac{\mu_0}{2} |\tau^*| = \hat{k} &\Rightarrow \exists \alpha > 0 : s^* = \alpha \tau^*, \end{aligned} \right\} \text{p.p sur } \omega,$$

avec l'équation de Reynolds spécifique suivante

$$\int_{\omega} \left(\frac{h^3(x')}{12} \nabla \pi^* + \frac{h(x') \mu_0}{8} s^* + \tilde{F} + \frac{\mu_0}{2} \int_0^h u^*(x', \zeta) d\zeta \right) \nabla \psi(x') dx' = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\omega),$$

où

$$\begin{aligned} \tau^*(x') &= \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0), \quad s^*(x') = u^*(x', 0), \\ \tilde{F}(x', h) &= \int_0^h F(x', z) dz - \frac{h}{2} F(x', h), \\ F(x', z) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}(x', \eta) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

L'analyse de ce problème a fait l'objet de la publication [20].

Dans le **dernier chapitre 5**, nous considérons un problème tridimensionnel qui décrit l'écoulement stationnaire lent du fluide non-Newtonien généralisé gouverné par la loi de comportement suivant

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) = T^\varepsilon(D(u^\varepsilon)) - \pi^\varepsilon I_3,$$

dans un domaine mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, avec une condition aux limites de frottement de Tresca. Après avoir présenté les hypothèses nécessaires sur le tenseur non linéaire $T^\varepsilon(\cdot)$, nous établissons une formulation variationnelle faible du problème; nous étudions ensuite le comportement asymptotique du problème en suivant les mêmes étapes que nous avons suivies dans

les chapitres précédents. En utilisant le fait que la dimension du domaine fluide tend vers zéro, nous prouvons la convergence faible des inconnues qui sont la vitesse et la pression du fluide. Ensuite, nous obtenons le problème limite suivant

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{T}_{i3} \left(\hat{D} (u^*) \right) \right] + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \hat{f}_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\left. \begin{array}{l} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\hat{T}_{i3} (D^* (\tau^*)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \hat{k} \Rightarrow s_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \\ \left[\sum_{i=1}^2 \left(\hat{T}_{i3} (D^* (\tau^*)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \hat{k} \Rightarrow \exists \alpha > 0 : s_j^* = \alpha \hat{T}_{j3} (D^* (\tau^*)), \quad j = 1, 2, \end{array} \right\} \text{ p.p sur } \omega,$$

avec l'équation généralisée de Reynolds suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} + \tilde{F}_i + \int_0^h \int_0^z \hat{T}_{i3} \left(\hat{D} (u^*) \right) (x', \zeta) d\zeta dz \right) \frac{\partial \psi (x')}{\partial x_i} dx' \\ & + \int_{\omega} \left(-\frac{h}{2} \int_0^h \hat{T}_{i3} \left(\hat{D} (u^*) \right) (x', \zeta) d\zeta \right) \frac{\partial \psi (x')}{\partial x_i} dx' = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall \psi \in W^{1,p} (\omega), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tau^* (x') &= \frac{\partial u^*}{\partial z} (x', 0), \quad s^* (x') = u^* (x', 0), \\ D^* (\tau^* (x')) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} (x', 0) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^*}{\partial z} (x', 0) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} (x', 0) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^*}{\partial z} (x', 0) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i (x', h) &= \int_0^h F_i (x', z) dz - \frac{h}{2} F_i (x', h), \\ F_i (x', z) &= \int_0^z \int_0^{\zeta} \hat{f}_i (x', \eta) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Enfin, nous montrons l'unicité de la solution (u^*, π^*) du problème limite.

Chapitre 1

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Résumé. Les problèmes qui seront fait étudier dans cette thèse sont des problèmes non linéaires. Afin d'étudier ces problèmes de plus précisément, il est nécessaire d'utiliser quelques outils mathématiques. Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés dans la suite de cette thèse. Les résultats seront donnés sans démonstrations, car ils sont standards et connus chez les lecteurs comme ils peuvent être trouvés dans beaucoup de références de mathématiques. Nous supposerons dans ce chapitre que Ω est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$).

Contenu

1.1 Quelques espaces fonctionnels;

1.1.1 Espaces de Lebesgue.

1.1.2 Espaces de Sobolev.

1.1.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles.

1.2 Convergence faible et convergence faible étoile.

1.3 Théorème de Riesz-Fréchet et Lax-Milgram.

1.4 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement.

1.5 Différentiabilité et sous-différentiabilité.

1.6 Opérateurs monotones et inéquations variationnelles.

1.7 Lemmes de Gronwall.

1.1 Quelques espaces fonctionnels

Dans cette section nous allons définir les espaces de Lebesgue (les espaces des fonctions p-intégrables), les espaces de Sobolev et les espaces des fonctions à valeurs vectorielles. Ces derniers qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur, par exemple, aux références ([1], [12], [24]).

Dans le suit, on désigne par

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty := \{ \text{fonctions de classe } C^\infty \text{ a support compact } K \subset \Omega \},$$

l'espace des fonctions tests sur Ω . $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω , c'est-à-dire l'espace des formes linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$).

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1 Soit $p \in [1, +\infty[$, et $x \in \mathbb{R}^d$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} |v|^p dx < +\infty \right\}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |v(x)| < +\infty \right\},$$

où

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |v(x)| = \inf \{ M > 0; |v(x)| \leq M \text{ presque partout dans } \Omega \}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |v(x)|,$$

est aussi un espace de Banach.

Dans ce qui suit nous allons rappeler quelques propriétés des espaces $L^p(\Omega)$. Soit $1 < p < \infty$ un réel. On pose $q = \frac{p}{p-1}$ et on dit que q est l'exposant conjugué de p , qu'il est caractérisé par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $p = 1$ (resp. $p = \infty$) nous posons naturellement $q = \infty$ (resp. $q = 1$).

Théorème 1.1 Soit $p \in [1, +\infty]$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes

- 1) Les duaux des espaces $L^p(\Omega)$, pour $p \in [1, +\infty[$, vérifient $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$.
- 2) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces réflexifs pour $p \in]1, +\infty[$.
- 3) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $p \in [1, +\infty[$.
- 4) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire que pour tout $u \in L^p(\Omega)$ il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

- 5) De toute suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout dans Ω .

Théorème 1.2 (Inégalité de Hölder) Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$.

Alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |u.v| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Remarque 1.1 Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder.

Soient u_1, u_2, \dots, u_k , des fonctions telles que

$$u_i \in L^{p_i}(\Omega), 1 \leq i \leq k \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $u = u_1.u_2.\dots.u_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Corollary 1.1 L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u.v dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondante à l'inégalité de Hölder, c'est-à-dire

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe, nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les outils fondamentaux de dériver la formulation variationnelle.

Définition 1.2 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, 2, \dots, d\} \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ au sens des distributions.

Proposition 1.1 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} (u(x) \cdot v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.3 (de densité) Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 , alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Nous définissons maintenant d'autres espaces de Sobolev qui sont des sous-espace de $H^1(\Omega)$. Ces espaces sont très utiles pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.3 L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \exists v_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } v_n \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \right\}.$$

Définition 1.4 Le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$.

Proposition 1.2 L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est caractérisé par

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ u = v_0 + \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \text{ avec } v_i \in L^2(\Omega), 0 \leq i \leq d \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|\mathcal{L}\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \left| \langle \mathcal{L}, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right|,$$

l'espace $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de Banach.

On peut aisément généraliser la Définition 1.2 de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ aux fonctions qui sont $m \geq 0$ fois dérivables au sens faible. Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ un multi-indice. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ et pour une fonction u ,

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(x).$$

Définition 1.5 Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m\},$$

où la dérivée D^α est à prendre au sens faible.

Proposition 1.3 Muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \cdot D^\alpha v dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \cdot D^\alpha u dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.4 Pour m et m' deux entiers non nuls, avec $m \geq m'$, on a

$$H^m(\Omega) \subset H^{m'}(\Omega),$$

et l'injection est continue.

Plus généralement, on peut définir les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ pour un entier m et pour un réel $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.6 Pour tout entier m , l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m\},$$

où la dérivée D^α est à prendre au sens faible.

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Nous désignons par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ dans } W^{1,p}(\Omega),$$

et par $W^{-1,q}(\Omega)$ le dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposition 1.5 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . Il existe une constante $C_{(\Omega)}$ telle que pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dans l'étude des problèmes aux limites linéaires ou non linéaires, l'injection de Sobolev joue un rôle important, car elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ et les normes des espaces de Lebesgue $L^q(\Omega)$.

Théorème 1.4 (Injection de Sobolev) *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , ou bien $\Omega = \mathbb{R}^d$, et $1 \leq p < \infty$, alors*

1. *Si $p \in [1, d[$; alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in \left[1, \frac{dp}{d-p}\right]$.*
2. *Si $p = d$; alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [d, +\infty[$.*
3. *Si $p \in]d, +\infty[$; alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\Omega)$.*

Avec injections compactes.

1.1.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Nous allons introduire maintenant des outils supplémentaires qui sont fondamentaux pour l'étude des problèmes en régime dynamique. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel.

Définition 1.7 *Soient X un espace de Banach et T un réel strictement positif. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables définies sur $]0, T[$*

et à valeurs dans X , telles que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_X$ soit dans $L^p(0, T)$. L'espace $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u(t)\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{c > 0; \|u(t)\|_X \leq c, t \in]0, T[\}, \text{ si } p = \infty.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

Proposition 1.6 Pour $p \in [1, +\infty[$, on a

1. Si X est séparable, alors $L^p(0, T; X)$ est aussi séparable.
2. Si X est réflexif, alors $L^p(0, T; X)$ est aussi réflexif.
3. Si X et Y désignent deux espaces de Banach, X inclus dans Y , avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0, T; X)$ dans $L^p(0, T; Y)$.
4. Si $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

5. Si X est un espace de Banach réflexif et X' son dual, alors

$$(L^p(0, T; X))' = L^q(0, T; X'), \quad 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$(L^1(0, T; X))' = L^\infty(0, T; X'),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.5 (Bochner) Une fonction mesurable $u : [0, T] \rightarrow X$ est intégrable si et seulement si $x \mapsto \|u(x)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

Lemme 1.1 Si $u \in L^p(0, T; X)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$), alors u est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0, T)$ est dans $C(0, T; X)$, où $C(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Théorème 1.6 Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace de Hilbert et soit $u :]0, T[\rightarrow X$ une fonction telles que $u \in L^p(0, T; X)$, et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; X)$, alors

1. La fonction $t \mapsto \|u(t)\|_X$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$.
2. $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_X^2 = \left(\frac{du(t)}{dt}, u(t) \right)$, presque partout dans $]0, T[$.
3. $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t \left(\frac{du(s)}{ds}, u(s) \right)_X ds, \forall t \in]0, T[$.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques préliminaires sur la convergence faible et la convergence faible étoile, les fonctions convexes et les fonctions semi-continues inférieurement. Nous présentons ensuite quelques notions afférentes au différentiel et sous-différentiel. Enfin nous donnons une notion sur les opérateurs monotones et les inéquations variationnelles. Extraits de ([12], [48], [34]).

1.2 Convergence faible et convergence faible étoile

Soient X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, et X' son dual. On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X \times X'}$ le produit de dualité entre X et X' .

Définition 1.8 On dit que la suite $(u_n)_n \subset X$, converge faiblement vers $u \in X$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v \rangle_{X \times X'} = \langle u, v \rangle_{X \times X'}, \forall v \in X'.$$

Proposition 1.7 Soit u_n une suite de X . On a

1. Si $u_n \rightarrow u$, alors $u_n \rightharpoonup u$.
2. Si $u_n \rightharpoonup u$, alors $\|u_n\|_X$ est bornée et $\|u\|_X \leq \liminf \|u_n\|_X$.
3. Si $u_n \rightharpoonup u$ et si $v_n \rightarrow v$ fortement dans X' (c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{X'} = 0$), alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v_n \rangle_{X \times X'} = \langle u, v \rangle_{X \times X'}$.

Théorème 1.7 (Compacité faible des bornés du dual d'un espace réflexif) Soient X un espace réflexif, et (u_n) une suite bornée de X . Alors il existe une sous-suite, encore notée (u_n) et $u \in X$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X .

Définition 1.9 On dit que la suite $(u_n) \in X'$ converge faiblement étoile vers un élément $u \in X'$, et on note $u_n \rightharpoonup^* u$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v, u_n \rangle_{X \times X'} = \langle v, u \rangle_{X \times X'}, \forall v \in X.$$

Proposition 1.8 Soit u_n une suite de X' . On a

1. Si $u_n \rightarrow u$ fortement, alors $u_n \xrightarrow{*} u$ faiblement.

2. Si $u_n \xrightarrow{*} u$ faiblement, alors $\|u_n\|_{X'}$ est bornée et $\|u\|_{X'} \leq \liminf \|u_n\|_{X'}$.

3. Si $u_n \xrightarrow{*} u$ faiblement et si $v_n \rightarrow v$ fortement dans X (c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_X = 0$),

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v_n \rangle_{X' \times X} = \langle u, v \rangle_{X' \times X}$.

Théorème 1.8 (Compacité faible étoile des bornés du dual d'un espace séparable)

Soient X un espace séparable, et (u_n) une suite bornée de X' . Alors il existe une sous-suite, encore notée (u_n) et $u \in X'$ telle que $u_n \xrightarrow{*} u$ dans X' .

Une application importante de ce théorème est la suivante: si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d et (u_n) est une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$, alors il existe une sous-suite encore notée (u_n) et $u \in L^\infty(\Omega)$ tels que $\int_\Omega u_n v dx \rightarrow \int_\Omega u v dx$ pour tout $v \in L^1(\Omega)$. En effet, $L^\infty(\Omega)$ est le dual de $L^1(\Omega)$, qui est séparable.

1.3 Théorèmes de Riesz-Fréchet et Lax-Milgram

Théorème 1.9 (Riesz-Fréchet) Soient X un espace de Hilbert réel et $(\cdot, \cdot)_X$ un produit scalaire de X . Pour tout $v \in X'$; il existe $u \in X$ unique tel que

$$\langle w, v \rangle_{X \times X'} = (u, w)_X, \forall w \in X.$$

De plus on a

$$\|u\|_X = \|v\|_{X'}.$$

Définition 1.10 On appelle forme bilinéaire sur un espace de Hilbert X une application $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. Pour tout $v \in X$, l'application

$$\begin{aligned} a_v : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto a(v, w), \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur X .

2. Pour tout $w \in X$, l'application

$$\begin{aligned} a_w : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto a(v, w), \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur X .

De plus, on dit que $a(.,.)$ est symétrique si $a(v, w) = a(w, v)$ pour tout v et tout w dans X .

Supposons maintenant que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire définie sur $X \times X$ et que $l(.)$ est une forme linéaire définie sur X .

Définition 1.11 La forme bilinéaire $a(.,.)$ est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \quad \forall v \in X.$$

Définition 1.12 La forme bilinéaire $a(.,.)$ est dite continue s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$a(v, w) \leq \gamma \|v\|_X \|w\|_X, \quad \forall v, w \in X.$$

Théorème 1.10 (Lax-Milgram) Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert X . Soit $l(.)$ une forme linéaire continue sur X . Alors il existe un unique $u \in X$ tel que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in X.$$

1.4 Fonctions convexes et semi-continues inférieurement

Soit $j(.)$ est une fonction définie sur un espace vectoriel réel X et à valeur dans $]-\infty, +\infty]$.

Définition 1.13 La fonction $j(.)$ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est-à-dire s'il existe $v_0 \in X$ tel que $j(v_0) < +\infty$.

Définition 1.14 La fonction $j(.)$ est dite convexe si

$$j(tu + (1-t)v) \leq tj(u) + (1-t)j(v), \quad \forall u, v \in X, t \in [0, 1].$$

La fonction $j(.)$ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tel que $u \neq v$.

Pour toute fonction $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de $j(\cdot)$ respectivement par

$$\begin{aligned} \text{dom}(j) &= \{u \in X : j(u) < +\infty\}, \\ \text{epi}(j) &= \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : j(u) < \alpha\}. \end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants

- 1) $j(\cdot)$ est propre si et seulement si $\text{dom}(j) \neq \emptyset$.
- 2) Le domaine de $j(\cdot)$ est un ensemble convexe de X si $j(\cdot)$ est convexe.
- 3) $j(\cdot)$ est convexe si et seulement si $\text{epi}(j)$ est un ensemble convexe de $X \times \mathbb{R}$.

Définition 1.15 Une fonction $j(\cdot)$ définie sur un espace topologique X et à valeur dans $]-\infty, +\infty]$ est dite *semi-continue inférieurement* si

$$\text{l'ensemble } \{(v, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : j(v) \leq \alpha\} \text{ est fermé.}$$

Nous donnons maintenant quelques propriétés des fonctions semi-continues inférieurement.

Lemme 1.2 Soit $j : X \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

1. $j(\cdot)$ est semi-continue inférieurement si et seulement si $\text{epi}(j)$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.
2. $j(\cdot)$ est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout $u \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_u de u dans X tel que $j(v) \geq j(u) - \varepsilon$ pour tout $v \in V_u$.
3. Si $j(\cdot)$ est semi-continue inférieurement et si $u_n \rightarrow u$; alors

$$\liminf j(u_n) \geq j(u).$$

Ce lemme nous conduit au résultat suivant:

Théorème 1.11 Soient X un espace de Hilbert et $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre. Alors $j(\cdot)$ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de X . Il en résulte en particulier que si $j(\cdot)$ est semi-continue inférieurement et si $u_n \rightharpoonup u$; alors

$$\liminf j(u_n) \geq j(u).$$

1.5 Différentiabilité et sous-différentiabilité

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$. On note par X' l'espace dual de X , et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ le produit de dualité entre X et X' .

Définition 1.16 Une fonction $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite *Gâteaux-différentiable* au point $u \in X$ s'il existe un élément $\nabla j(u) \in X'$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(u + tv) - j(u)}{t} = \langle \nabla j(u), v \rangle_{X' \times X}, \forall v \in X.$$

L'élément $\nabla j(u)$ s'appelle la *différentielle* au sens de Gâteaux de j en u . La fonction $j(\cdot)$ est dite *Gâteaux-différentiable* si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de X ; dans ce cas l'opérateur $u \rightarrow \nabla j(u)$ de X dans X' s'appelle le *gradient* de j .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiable peut être caractérisée comme suit:

Lemme 1.3 Soit $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors $j(\cdot)$ est une fonction convexe si et seulement si

$$j(u) - j(v) \geq \langle \nabla j(u), u - v \rangle_{X' \times X}, \forall u, v \in X.$$

Définition 1.17 On dit que la fonction $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est *sous-différentiable* en un point $u \in X$ s'il existe $w \in X'$ tel que

$$j(u) - j(v) \geq \langle w, u - v \rangle_{X' \times X}, \forall v \in X.$$

L'élément w est appelé le *sous-gradient* de j en u et l'ensemble des sous-gradients de j en u est appelé le *sous-différentiel* de j en u qu'on le note $\partial j(u)$, avec

$$\partial j(u) = \{w \in X'; j(u) - j(v) \geq \langle w, u - v \rangle_{X' \times X}, \forall v \in X\}. \quad (1.1)$$

On note par $\text{dom}(\partial j)$ l'ensemble défini par

$$\text{dom}(\partial j) = \{u \in X; \partial j(u) \neq \emptyset\}. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1), (1.2) et la définition du domaine d'une fonction, il résulte

$$\text{dom}(\partial j) \subset \text{dom}(j).$$

La fonction $j(\cdot)$ est dite *sous-différentiable* si elle est sous-différentiable en tout point de X ; c'est-à-dire $\text{dom}(\partial j) = X$.

Lemme 1.4 Soit $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors $j(\cdot)$ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.

Lemme 1.5 Soit $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors $j(\cdot)$ est sous-différentiable et on a

$$\partial j(u) = \{\nabla j(u)\}, \forall u \in X.$$

1.6 Opérateurs monotones et inéquations variationnelles

Soient X un espace de Banach réflexif et séparable, $\mathcal{A} : X \rightarrow X'$ un opérateur non linéaire, $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in X'$. Un nombre considérable de problèmes aux limites en mécanique des milieux continus qui se traduit par les problèmes suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in X \text{ tel que} \\ \langle \mathcal{A}(u), u - v \rangle_{X' \times X} + j(v) - j(u) \geq \langle f, u - v \rangle_{X' \times X}, \forall v \in X. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Le problème (1.3) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur X . Un cas particulière, pour $j \equiv 0$, nous obtenons l'inéquation variationnelle de première espèce.

L'opérateur $\mathcal{A}(\cdot)$ est dit:

- monotone si et seulement si

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v \rangle_{X' \times X} \geq 0, \forall u, v \in X.$$

- strictement monotone si et seulement si

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v \rangle_{X' \times X} > 0, \forall u, v \in X, \text{ tel que } u \neq v.$$

- hémicontinu si et seulement si la fonction réelle

$$\lambda \rightarrow \langle \mathcal{A}(u + \lambda v), w \rangle_{X' \times X}, \forall u, v, w \in X.$$

est continue pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- coercif si et seulement si

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\langle \mathcal{A}(u), u \rangle_{X' \times X}}{\|u\|_X} = \infty.$$

En ce qui concerne le problème (1.3), on a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.12 Soit $\mathcal{A} : X \rightarrow X'$ un opérateur strictement monotone, borné, hémicontinu et coercif et soit $j(\cdot)$ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce (1.3) admet une solution unique.

Lemme 1.6 (de Minty) Soit X un espace de Banach, $\mathcal{A} : X \rightarrow X'$ un opérateur hémicontinu et monotone et $j : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement. Si $u \in X$ et $f \in X'$, alors les deux inégalités suivantes sont équivalentes

$$\langle \mathcal{A}(u), u - v \rangle_{X' \times X} + j(v) - j(u) \geq \langle f, u - v \rangle_{X' \times X}, \forall v \in X,$$

$$\langle \mathcal{A}(v), u - v \rangle_{X' \times X} + j(v) - j(u) \geq \langle f, u - v \rangle_{X' \times X}, \forall v \in X.$$

1.7 Lemmes de Gronwall

À la fin de ce chapitre, nous passons en revue les lemmes de Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes aux limites, en particulier pour établir l'unicité de la solution, ainsi que pour former les estimations a priori. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, le lecteur pourra consulter par exemple ([29], [45]).

Lemme 1.7 Soient $u, v \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$ sur $[0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $w \in C([0, T]; \mathbb{R})$.

1. Si

$$w(t) \leq a + \int_0^t u(s) ds + \int_0^t v(s) w(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

alors

$$w(t) \leq \left(a + \int_0^t u(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t v(s) ds \right), \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$w(t) \leq u(s) + a \int_0^t v(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t w(s) ds \leq \exp(aT) \int_0^t u(s) ds.$$

Dans le cas particulier $u \equiv 0$, la partie (1) de ce lemme devient :

Corollary 1.2 Soient $v \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $v(t) \geq 0$ sur $[0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $w \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$w(t) \leq a + \int_0^t v(s) w(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

alors

$$w(t) \leq a \exp\left(\int_0^t v(s) ds\right), \forall t \in [0, T].$$

Ce Corollaire est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution.

Lemme 1.8 Soient $u, v \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $u(t) \geq 0, v(t) \geq 0$ sur $[0, T]$, et $a \geq 0$. Soit également $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}w^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t u(s) w(s) ds + \int_0^t v(s) w^2(s) ds, \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$|w(t)| \leq \left(a + \int_0^t u(s) ds\right) \exp\left(\int_0^t v(s) ds\right), \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 2

Comportement asymptotique d'un problème d'élasticité avec terme dissipatif non linéaire

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'un problème dynamique lié au système d'élasticité linéaire dans un domaine de faible épaisseur $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ avec un terme dissipatif $(\alpha^\varepsilon + |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$. Supposons qu'il y a un frottement non linéaires du type Tresca sur une partie de la frontière et la condition de Dirichlet sur l'autre partie. Notre objectif est d'étude du comportement asymptotique de la solution du problème considéré lorsque ε tend vers zéro.

Contenu

2.1 Description du problème.

2.2 Formulation variationnelle du problème.

2.3 Changement du domaine et estimations a priori.

2.4 Théorème de convergence et problème limite.

2.1 Description du problème

Nous considérons un problème associé à des déformations d'une membrane élastique homogène et isotrope en régime dynamique dans un domaine mince Ω^ε borné de \mathbb{R}^2 , où ε est un réel positif appartenant à $]0, 1[$ et qui tend vers zéro. La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon$, avec $\omega =]0, l[$ est un intervalle borné, qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε , Γ_L^ε est la frontière latérale et Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $y = \varepsilon h(x)$, où $h(\cdot)$ est une fonction de classe C^1 définie sur $\bar{\omega}$ telle que

$$0 < \underline{h} = h_{\min} \leq h(x) \leq h_{\max} = \bar{h}, \forall x \in [0, l].$$

On note $x' = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le domaine physique Ω^ε est donné par

$$\Omega^\varepsilon = \{x' = (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < l, 0 < y < \varepsilon h(x)\}.$$

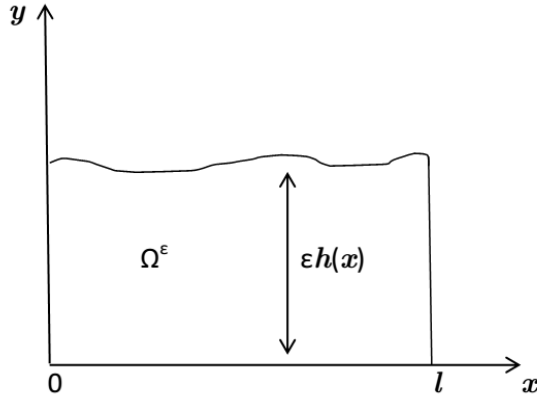


Figure 2.1: Le membrane élastique Ω^ε .

On note par $u^\varepsilon(x', t) = (u_1^\varepsilon(x', t), u_2^\varepsilon(x', t))$ le champ de déplacement et σ^ε le tenseur des contraintes dont les composantes $\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)$, $1 < i, j < 2$ sont données par la loi de Hooke suivante

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + \lambda \sum_{k=1}^2 d_{kk}(u^\varepsilon) \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad \text{et} \quad d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right),$$

où λ, μ sont les coefficients de Lamé, $d_{ij}(u^\varepsilon)$ le tenseur des taux de déformations et δ_{ij} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Les équations qui gouvernent les déformations d'une membrane élastique homogène et isotrope avec un terme dissipatif non linéaire en régime dynamique sont les suivantes

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon)) + \left(\alpha^\varepsilon + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = f^\varepsilon, \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[, \quad (2.1)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 , $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon)$ représente la densité massique des forces extérieures et $\alpha^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Nous allons maintenant décrire les conditions aux limites, pour cela on définit les composantes normales et tangentielles du déplacement u^ε par

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot n = \sum_{i=1}^2 u_i^\varepsilon \cdot n_i, \quad u_\tau^\varepsilon = (u_{\tau i}^\varepsilon)_{1 \leq i \leq 2} \text{ avec } u_{\tau i}^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon \cdot n_i, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

pour les composantes normales et tangentielles du tenseur des contraintes σ^ε la définition est la suivante

$$\sigma_n^\varepsilon = (\sigma^\varepsilon \cdot n) \cdot n = \sum_{i,j=1}^2 (\sigma_{ij}^\varepsilon \cdot n_i) \cdot n_j, \quad \sigma_\tau^\varepsilon = (\sigma_{\tau i}^\varepsilon)_{1 \leq i \leq 2} \text{ avec } \sigma_{\tau i}^\varepsilon = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}^\varepsilon \cdot n_j - \sigma_n^\varepsilon \cdot n_i, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Où $n = (n_1, n_2)$ la normale extérieure unitaire sur Γ^ε .

- Nous supposons que le déplacement est connu sur $\Gamma_1^\varepsilon \times]0, T[$ et $\Gamma_L^\varepsilon \times]0, T[$

$$u^\varepsilon(x, \varepsilon h(x), t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0, T[, \quad (2.2)$$

$$u^\varepsilon(0, y, t) = u^\varepsilon(l, y, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0, T[.$$

- Sur ω la vitesse est supposée inconnue et elle vérifié la condition suivante

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \cdot n = 0 \quad \text{sur }]0, l[\times]0, T[. \quad (2.3)$$

- Nous supposons aussi l'existence du frottement sur ω , ce frottement est modélisé par la loi non linéaire de Tresca. Cette loi de frottement présente un seuil de frottement (coefficient de frottement) $k^\varepsilon(x)$, lorsque la membrane élastique et la fondation sont en contact, la fondation exerce sur la membrane élastique un effort tangentiel qui ne dépasse pas le seuil $k^\varepsilon(x)$. Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil $k^\varepsilon(x)$, la membrane élastique ne peut pas se déplacer par rapport à la fondation et il y a blocage. Lorsque ce seuil est atteint, la membrane élastique peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation et il y a alors glissement. Donc, la loi de frottement du type Tresca résume comme suit

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Rightarrow \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Rightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau = -\beta \sigma_\tau^\varepsilon, \end{array} \right\} \text{ sur }]0, l[\times]0, T[, \quad (2.4)$$

où le réel positif β est inconnu.

Le problème (2.1) – (2.4) est complété par les conditions initiales suivantes

$$u^\varepsilon(x', 0) = \vartheta_0(x'), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x', 0) = \vartheta_1(x'), \quad \forall x' \in \Omega^\varepsilon. \quad (2.5)$$

Remarque 2.1 Sur $]0, l[\times]0, T[$ la deuxième composante de la vitesse est nulle

$$\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial t} = 0, \quad \text{sur }]0, l[\times]0, T[.$$

En effet, d'après la condition 2.3 on a

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \cdot n = \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t} \cdot n_1 + \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial t} \cdot n_2 = 0 \quad \text{sur }]0, l[\times]0, T[,$$

où $n = (n_1, n_2) = (0, -1)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à ω . Donc $\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial t} = 0$, sur $]0, l[\times]0, T[$.

Afin de donner la formulation variationnelle du problème (2.1) – (2.5), nous allons établir le lemme suivant

Lemme 2.1 [24] La condition de Tresca (2.4) est équivalente à la relation ponctuelle suivante

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \left| \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \right| = 0, \quad \text{sur }]0, l[\times]0, T[. \quad (2.6)$$

Preuve. Supposons que $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ vérifie la condition aux limites de Tresca (2.4).

- Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors $\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau = 0$, d'où (2.6).
- Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors il existe $\beta > 0$ tel que $\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau = -\beta \sigma_\tau^\varepsilon$, d'où

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \left| \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \right| = -\beta |\sigma_\tau^\varepsilon|^2 + \beta |\sigma_\tau^\varepsilon|^2 = 0.$$

Réciproquement, on suppose que $\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \left| \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \right| = 0$, sur $]0, l[\times]0, T[$.

- Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \cdot \sigma_\tau^\varepsilon = - \left| \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \right| |\sigma_\tau^\varepsilon|,$$

donc il existe $\beta > 0$ tel que

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau = -\beta \sigma_\tau^\varepsilon.$$

- Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \left| \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \right| &\geq - \left| \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \right| |\sigma_\tau^\varepsilon| + k^\varepsilon \left| \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \right| \\ &\geq \underbrace{(k^\varepsilon - |\sigma_\tau^\varepsilon|)}_{>0} \left| \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau \right|, \end{aligned}$$

donc

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau = 0.$$

D'où le résultat. ■

2.2 Formulation variationnelle du problème

Dans cette section, nous construisons la formulation variationnelle du problème (2.1) – (2.5).

Pour cela, nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega^\varepsilon)^2$

$$K^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^2 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon, v \cdot n = 0 \text{ sur } \omega \right\},$$

et pour simplifier l'écriture, on note

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d(u) d(v) dx dy + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) dx dy, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^2,$$

$$j^\varepsilon(v) = \int_0^l k^\varepsilon |v| dx,$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $K^\varepsilon \times K^\varepsilon$ et $j^\varepsilon(\cdot)$ est une fonctionnelle convexe et continue sur K^ε .

Lemme 2.2 *Si u^ε est une solution du problème (2.1) – (2.5), alors elle vérifie le problème variationnel suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in K^\varepsilon \text{ où } \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in K^\varepsilon, \text{ telle que} \\ \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + a \left(u^\varepsilon, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + \alpha^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + \left(\left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + j^\varepsilon(\varphi) - j^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \geq \left(f^\varepsilon, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right), \forall \varphi \in K^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x', 0) = \vartheta_0(x'), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x', 0) = \vartheta_1(x'). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Preuve. En multipliant l'équation (2.1) par $(\varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t})$, où $\varphi \in K^\varepsilon$, on intègre sur Ω^ε et on utilise la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \cdot n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' \quad (2.8) \\ & + \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\alpha^\varepsilon + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' \\ & = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx'. \end{aligned}$$

La condition aux limite (2.2) impliquent que

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \cdot n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' = \int_0^l \sigma_{ij}^\varepsilon \cdot n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx.$$

D'autre part, $\sigma_{ij}^\varepsilon \cdot n_j = \sigma_{\tau_i}^\varepsilon + \sigma_n^\varepsilon \cdot n_i$ et $\left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) n_i = 0$ sur $]0, l[$, alors

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \cdot n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' = \int_0^l \sigma_\tau^\varepsilon \left(\varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) dx.$$

En revenant à (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' - \int_0^l \sigma_\tau^\varepsilon \left(\varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) dx \quad (2.9) \\ & + \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\alpha^\varepsilon + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' \\ & = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx'. \end{aligned}$$

Dans (2.9) on ajoute et on retranche le terme

$$\int_0^l k^\varepsilon \left(|\varphi| - \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) dx,$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' + \int_0^l k^\varepsilon \left(|\varphi| - \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) dx \\ & - \int_0^l \sigma_\tau^\varepsilon \left(\varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) dx - \int_0^l k^\varepsilon \left(|\varphi| - \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\alpha^\varepsilon + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' \\ & = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx'. \end{aligned}$$

Posons

$$B = \int_0^l \sigma_\tau^\varepsilon \left(\varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) dx + \int_0^l k^\varepsilon \left(|\varphi| - \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) dx.$$

Par le lemme 2.1, nous montrons que

$$B = \int_0^l \sigma_\tau^\varepsilon \varphi dx + \int_0^l k^\varepsilon |\varphi| dx \geq 0.$$

En utilisant le fait que

$$\int_0^l \sigma_\tau^\varepsilon \varphi dx \geq - \int_0^l |\sigma_\tau^\varepsilon| |\varphi| dx \geq - \int_0^l k^\varepsilon |\varphi| dx,$$

on déduit que B est positif.

L'équation (2.9) se ramené à l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' + \int_0^l k^\varepsilon \left(|\varphi| - \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) dx \\ & + \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\alpha^\varepsilon + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx' \\ & \geq \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right) dx'. \end{aligned}$$

Et par suit, le lemme 2.2 est prouvé. ■

À partir au problème variationnel (2.7), nous avons le résultat suivant

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses*

$$\begin{aligned} f^\varepsilon, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2} & \in L^2(0, T, L^2(\Omega^\varepsilon)^2), \\ \vartheta_0 & \in H^1(\Omega^\varepsilon)^2, \quad \vartheta_1 \in H^1(\Omega^\varepsilon)^2, \quad (\vartheta_1)_\tau = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

il existe une solution unique u^ε de (2.7), telle que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} & \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega^\varepsilon)^2), \\ \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} & \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega^\varepsilon)^2). \end{aligned}$$

La preuve de ce Théorème est similaire dans Lions ([24], [35]).

2.3 Changement du domaine et estimations a priori

Notre domaine Ω^ε est variable en ε , donc pour étudier l'analyse asymptotique du problème considéré on va d'abord transformer Ω^ε en un domaine fixe Ω . Pour cela, nous utilisons le changement d'échelle

$$z = \frac{y}{\varepsilon}.$$

Le domaine fixe Ω est défini par

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l, 0 < z < h(x)\}.$$

On note par $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_L \cup \bar{\Gamma}_1$, sa frontière.

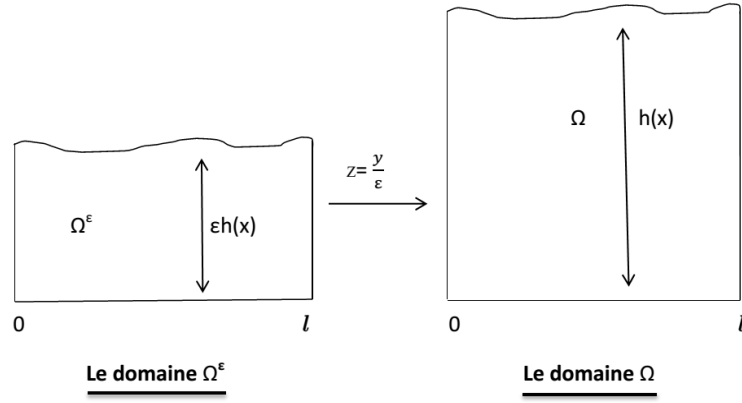


Figure 2.3: Passage de Ω^ε à Ω .

Nous définissons sur Ω des nouvelles inconnues

$$\begin{cases} \hat{u}_1^\varepsilon(x, z, t) = u_1^\varepsilon(x, y, t), \\ \hat{u}_2^\varepsilon(x, z, t) = \varepsilon^{-1} u_2^\varepsilon(x, y, t), \end{cases}$$

donc, nous avons les expressions suivantes

$$\int_{\Omega^\varepsilon} u_1^\varepsilon(x, y, t) dx dy = \varepsilon \int_{\Omega} \hat{u}_1^\varepsilon(x, z, t) dx dz, \quad \int_{\Omega^\varepsilon} u_2^\varepsilon(x, y, t) dx dy = \varepsilon^2 \int_{\Omega} \hat{u}_2^\varepsilon(x, z, t) dx dz,$$

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial z}.$$

Pour les données du problème, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante

$$\begin{cases} \hat{f}_i(x, z, t) = \varepsilon^2 f_i^\varepsilon(x, y, t), \quad i = 1, 2, \\ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \quad \hat{\alpha} = \varepsilon^2 \alpha^\varepsilon, \end{cases}$$

avec \hat{f}_i , $i = 1, 2$, \hat{k} et $\hat{\alpha}$ indépendants de ε .

De plus, nous définissons les espaces des fonctions sur Ω

$$K = \{ \varphi \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \text{ et } \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \omega \},$$

$$\Pi(K) = \{ \varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \},$$

$$V_z = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial z} \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

V_z est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|v\|_{V_z} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant (2.7) par ε , et en passant au domaine fixe Ω , on montre que le problème variationnel (2.7) est équivalent au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u}^\varepsilon \in K, \text{ où } \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \in K, \text{ telle que} \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right) + \hat{a} \left(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + \hat{\alpha} \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) + \hat{\alpha} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + \varepsilon^2 \left(\left[\left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + \varepsilon^4 \left(\left[\left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right) + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J} \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ \geq \left(\hat{f}_1, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_2, \hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right), \forall \hat{\varphi} \in K, \\ \hat{u}^\varepsilon(0) = \hat{v}_0, \quad \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(0) = \hat{v}_1, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où

$$\hat{J}(\hat{\varphi}) = \int_0^l \hat{k} |\hat{\varphi}| dx,$$

et

$$\begin{aligned} \hat{a} \left(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) &= 2\mu\varepsilon^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) dx dz \\ &+ \mu \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right) \right] dx dz \\ &+ 2\mu\varepsilon^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right) dx dz + \lambda\varepsilon^2 \int_\Omega \operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) \cdot \operatorname{div} \left(\hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) dx dz. \end{aligned}$$

Nous essayons maintenant de prouver des estimations a priori sur le déplacement \hat{u}^ε et la vitesse $\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}$. Pour cela nous avons besoin d'établir les lemmes suivants :

Lemme 2.3 (Inégalité de Poincaré) *Pour $0 < h(x) < \bar{h}, \forall x \in]0, l[$, on a l'inégalité suivante*

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{h} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad i = 1, 2.$$

Preuve. Pour tout $0 < z < h(x) < \bar{h}$, on a

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x, z, t) = - \int_z^{h(x)} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta, t) d\zeta + \hat{u}_i^\varepsilon(x, h(x), t), \quad i = 1, 2.$$

et puisque $\hat{u}_i^\varepsilon(x, h(x), t) = 0, i = 1, 2$ sur Γ_1 , il vient

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x, z, t) = - \int_z^{h(x)} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta, t) d\zeta, \quad i = 1, 2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$|\hat{u}_i^\varepsilon(x, z, t)|^2 \leq \bar{h} \int_z^{h(x)} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta, t) \right|^2 d\zeta, \quad i = 1, 2,$$

et par intégration en z de 0 à $h(x)$, on obtient

$$\int_0^{h(x)} |\hat{u}_i^\varepsilon(x, \zeta, t)|^2 d\zeta \leq \bar{h}^2 \int_0^{h(x)} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta, t) \right|^2 d\zeta, \quad i = 1, 2,$$

en intégrant cette fois sur $]0, l[$, on trouve

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{h} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad i = 1, 2.$$

■

Lemme 2.4 (Inégalité de Korn [30]) *Pour tout $\varphi \in K^\varepsilon$, on a*

$$C_K \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \leq \|d(\varphi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2,$$

où C_K est une constante positive ne dépend ni de ε ni de φ .

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, il existe une constante c indépendante de ε , telle que*

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \left\| \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}^3 + \left\| \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}^3 \leq c, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (2.7), on prend $\varphi = 0$, on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + a \left(u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + \left(\left(\alpha^\varepsilon + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + j^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right).$$

En utilisant le fait que $j^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)$ est positive, on déduit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \right] + \alpha^\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^2}^3 \leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right),$$

par intégration sur $]0, t[$ nous avons

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^2}^3 ds \\ & \leq \|\vartheta_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + (2\mu + 3\lambda) \|\nabla \vartheta_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 + 2 \int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right) ds, \end{aligned}$$

comme

$$2 \int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right) ds = 2(f^\varepsilon, u^\varepsilon) - 2(f^\varepsilon(0), \vartheta_0) - 2 \int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t}, u^\varepsilon(s) \right) ds,$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} \leq \varepsilon \bar{h} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}},$$

et l'inégalité de Young

$$ab \leq \eta^2 \frac{a^2}{2} + \eta^{-2} \frac{b^2}{2}, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \eta > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left| 2 \int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right) ds \right| \tag{2.14} \\ & \leq \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 + \frac{4\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\mu C_K} \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + 4\varepsilon^2 \bar{h}^2 \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 \\ & \quad + \|\nabla \vartheta_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 + \mu C_K \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 ds + \frac{4(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 ds. \end{aligned}$$

De (2.14) et de l'inégalité de Korn il existe une constante $C_K > 0$ indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} & \left[\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \right] + 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^2}^3 ds \tag{2.15} \\ & \leq \|\vartheta_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + (1 + 2\mu + 3\lambda) \|\nabla \vartheta_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 + \frac{4\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\mu C_K} \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + 4\varepsilon^2 \bar{h}^2 \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 \\ & \quad + \frac{4(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 ds + \int_0^t \left[\left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \right] ds. \end{aligned}$$

En multipliant (2.15) par ε et en utilisant l'égalité

$$\varepsilon^2 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 = \varepsilon^{-1} \|\hat{f}\|_{L^2(\Omega)^2}^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left[\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \right] + 2\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^2}^3 ds \\ & \leq \int_0^t \varepsilon \left[\left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \right] ds + A, \end{aligned}$$

où A est une constante ne dépend pas de ε , avec

$$\begin{aligned} A = & \left\| \hat{\vartheta}_1 \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + (1 + 2\mu + 3\lambda) \left\| \nabla \hat{\vartheta}_0 \right\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}}^2 + 4\bar{h}^2 \left\| \hat{f}(0) \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ & + \frac{4\bar{h}^2}{\mu C_K} \left\| \hat{f} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{4\bar{h}^2}{\mu C_K} \left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^2)}^2. \end{aligned}$$

Maintenant le lemme 1.7 nous donne

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \leq c.$$

Donc l'estimation (2.12) est démontrée.

Le fonctionnel $j^\varepsilon(\cdot)$ est convexe mais non différentiable, pour cela on régularise cette fonctionnelle par :

$$j_\zeta^\varepsilon(v) = \int_0^l k^\varepsilon(x) \phi_\zeta(|v_\tau|^2) dx, \text{ où } \phi_\zeta(\lambda) = \frac{1}{1+\zeta} |\lambda|^{(1+\zeta)}, \zeta > 0,$$

donc l'inéquation variationnelle (2.7) devenir comme suit

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi - \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) + a \left(u_\zeta^\varepsilon, \varphi - \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) + \left(\left(\alpha^\varepsilon + \left| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \varphi - \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ & + j_\zeta^\varepsilon(\varphi) - j_\zeta^\varepsilon \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ & \geq \left(f^\varepsilon, \varphi - \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right), \forall \varphi \in K^\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.16)$$

comme le fonctionnel $j_\zeta^\varepsilon(\cdot)$ est devenu différentiable, donc l'inéquation (2.16) équivalente à l'équation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi \right) + a(u_\zeta^\varepsilon, \varphi) + \left(\left(\alpha^\varepsilon + \left| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \varphi \right) + \left((j_\zeta^\varepsilon)' \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right), \varphi \right) \\ & = (f^\varepsilon, \varphi), \forall \varphi \in K^\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec

$$u_\zeta^\varepsilon(x', 0) = \vartheta_0(x'), \quad \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(x', 0)}{\partial t} = \vartheta_1(x').$$

Maintenant, pour montrer l'estimation a priori (2.13), on dérive (2.17) en t et on prend $\varphi = \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}$, on trouve

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) + a \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) + \alpha^\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) + \left(\left| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial t} (j_\zeta^\varepsilon)' \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \\ & = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Mais $\left(\frac{\partial}{\partial t} (j_\zeta^\varepsilon)' \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \geq 0$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + a \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \right] \leq \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right).$$

En intégrant la dernière inégalité sur $(0, t)$ et utilisant l'inégalité de Korn, on trouve

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + 2\mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \\ & \leq \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + (2\mu + 3\lambda) \|\nabla \vartheta_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \\ & + 2 \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) - 2 \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} (0), \vartheta_1 \right) - 2 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 f^\varepsilon(s)}{\partial t^2}, \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right) ds, \end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + 2\mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \tag{2.18} \\ & \leq \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + (2\mu + 3\lambda) \|\nabla \vartheta_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 + \mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \\ & + \mu C_K \|\nabla \vartheta_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 + \frac{4(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} (0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \frac{4(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 f^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 ds \\ & + \frac{4(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 ds. \end{aligned}$$

Maintenant, il faut estimer $\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} (0)$, d'après l'équation (2.17) et (2.10) on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} (0), \varphi \right) = (f^\varepsilon(0), \varphi) - a(\vartheta_0, \varphi) - \alpha^\varepsilon(\vartheta_1, \varphi) - (|\vartheta_1| \vartheta_1, \varphi), \forall \varphi \in K^\varepsilon,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \varphi \right) \right| &\leq \varepsilon \bar{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}} + (2\mu + 3\lambda) \|\vartheta_0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^2} \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^2} \\
&\quad + \alpha^\varepsilon \|\vartheta_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} \|\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} + \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |\vartheta_1|^4 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} \\
&\leq \left(\varepsilon \bar{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} + (2\mu + 3\lambda) \|\vartheta_0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^2} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^2} \\
&\quad + \left(\hat{\alpha} \bar{h}^2 \|\nabla \vartheta_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}} + \varepsilon \bar{h} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |\vartheta_1|^4 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^2}.
\end{aligned}$$

Multipliant cette dernière inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$ et en utilisant l'injection de Sobolev $\|v\|_{L^4(\Omega)^2} \leq c_s \|v\|_{H^1(\Omega)^2}$, on obtient

$$\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2} \leq C',$$

où $C' = \left(\bar{h} \|\hat{f}(0)\|_{L^2(\Omega)^2} + (2\mu + 3\lambda) \|\hat{\vartheta}_0\|_{H^1(\Omega)^2} + \hat{\alpha} \bar{h}^2 \|\hat{\vartheta}_1\|_{H^1(\Omega)^2} + \bar{h} c_s \|\hat{\vartheta}_1\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \right)$ indépendant de ε . En passant à la limite dans (2.18) quand ζ tend vers zéro, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \right] \tag{2.19} \\
&\leq \left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + (2\mu + 3\lambda + \mu C_K) \|\nabla \vartheta_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \\
&\quad + \frac{4(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \frac{4(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 f^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 ds \\
&\quad + \frac{4(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \int_0^t \left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \right] ds.
\end{aligned}$$

En multipliant maintenant (2.19) par ε , il vient :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \right] \\
&\leq \int_0^t \varepsilon \left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \right] ds + B,
\end{aligned}$$

où B est une constante ne dépend pas de ε

$$\begin{aligned}
B &= (2\mu + 3\lambda + \mu C_K) \|\nabla \hat{\vartheta}_1\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}}^2 + (C')^2 + \frac{4\bar{h}^2}{\mu C_K} \left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
&\quad + \frac{4\bar{h}^2}{\mu C_K} \left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{4\bar{h}^2}{\mu C_K} \left\| \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2.
\end{aligned}$$

D'après lemme de Gronwall (lemme 1.7), il existe une constante c ne dépend pas de ε telle que

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}^2 + \varepsilon \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2 \times 2}}^2 \leq c,$$

ce qui donne l'estimation (2.13). ■

2.4 Théorème de convergence et problème limite

Nous avons établi dans la section précédente des estimations a priori sur la solution du problème (2.11). La question qui se pose naturellement est de savoir quel sera le comportement asymptotique de la membrane élastique lorsque l'épaisseur est très petit?.

Mathématiquement, cela revient à savoir si le champ de déplacement \hat{u}^ε admet une limite quand ε tend vers zéro et quel est le problème vérifié par cette limite?.

Dans cette section, nous allons essayer de répondre à ces questions.

Théorème 2.3 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, il existe $u_1^* \in L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$ telle que pour toute sous suite de \hat{u}^ε , notée encore \hat{u}^ε , on a les résultats de convergences suivants*

$$\left. \begin{array}{l} \hat{u}_1^\varepsilon \rightharpoonup u_1^* \\ \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{faiblement dans } L^2(0, T, V_z) \\ \text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, V_z), \end{array} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x \partial t} \rightharpoonup 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \end{array} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \end{array} \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x \partial t} \rightharpoonup 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \end{array} \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial z \partial t} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \end{array} \quad (2.24)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \\ \varepsilon^{\frac{5}{3}} \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \end{array} \right\} \text{faiblement dans } L^3(0, T, L^3(\Omega)). \quad (2.25)$$

Preuve. Du Théorème 2.2, il existe une constante c indépendante de ε , telle que

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c.$$

Utilisant cette estimation et l'inégalité de Poincaré

$$\|\hat{u}_1^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \bar{h} \left\| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on déduit que la suite \hat{u}_1^ε est bornée dans $L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$, donc le résultat de convergence faible et faible *. De même, d'après (2.13) et par l'inégalité de Poincaré pour $\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}$, on déduit que $\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}$ est borné dans $L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$ et par suite converge vers une limite v . Comme $\hat{u}_1^\varepsilon \rightharpoonup u_1^*$, donc $v = \frac{\partial u_1^*}{\partial t}$. Pour (2.21) – (2.25), ils viennent directement du (2.12), (2.13) et (2.20). ■

Théorème 2.4 *Sous les hypothèses du Théorème 2.3, la solution \hat{u}_1^ε du problème (2.11) converge faiblement vers la solution u_1^* de l'inéquation variationnelle*

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_1 - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) dx dz + \hat{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \cdot \left(\hat{\varphi}_1 - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) dx dz + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) \\ & \geq \left(\hat{f}_1, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(K), \end{aligned} \quad (2.26)$$

de plus u_1^* satisfait le problème parabolique suivant

$$\left. \begin{aligned} -\mu \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial z^2}(t) + \hat{\alpha} \frac{\partial u_1^*}{\partial t}(t) &= \hat{f}_1(t), \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ u_1^*(x, z, 0) &= \hat{\vartheta}_{0,1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Preuve. Rappelons que l'inéquation variationnelle (2.11) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right) + \hat{a} \left(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) + \hat{\alpha} \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ & + \hat{\alpha} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \left(\left[\left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ & + \varepsilon^4 \left(\left[\left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right) + \hat{J}(\varphi) - \hat{J} \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ & \geq \left(\hat{f}_1, \hat{\varphi}_1 - \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_2, \hat{\varphi}_2 - \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right), \quad \forall (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \in K. \end{aligned}$$

Nous choisissons dans cette inégalité $\hat{\varphi} = \left(\hat{\varphi}_1, \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)$, puis on étend ε vers zéro, et en utilisant les résultats de convergence du Théorème 2.3 et le fait que $J(\cdot)$ est convexe et semi-continue

inférieurement c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf \int_0^l \hat{k} \left| \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t} \right| dx \right) \geq \int_0^l \hat{k} \left| \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right| dx,$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_1 - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) dx dz + \hat{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \cdot \left(\hat{\varphi}_1 - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) dx dz + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) \\ & \geq \int_{\Omega} \hat{f}_1 \left(\hat{\varphi}_1 - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) dx dz. \end{aligned}$$

Nous choisissons maintenant dans cette inéquation variationnelle

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \pm \psi, \quad \psi \in H_0^1(\Omega),$$

donc

$$\mu \int_{\Omega} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dz + \hat{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \cdot \psi dx dz = \int_{\Omega} \hat{f}_1 \psi dx dz.$$

Utilisant maintenant la formule de Green, on obtient

$$- \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial z} \right) \psi dx dz + \int_{\Omega} \hat{\alpha} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \cdot \psi dx dy = \int_{\Omega} \hat{f}_1 \psi dx dz, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent

$$- \mu \frac{\partial^2 u_1^*(t)}{\partial z^2} + \hat{\alpha} \frac{\partial u_1^*(t)}{\partial t} = \hat{f}_1(t), \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega), \quad \forall t \in]0, T[, \quad (2.28)$$

et comme $\hat{f}_1 \in L^2(\Omega)$, alors (2.28) est valable dans $L^2(\Omega)$. ■

Théorème 2.5 *Soit*

$$\tau^*(x, t) = \frac{\partial u_1^*}{\partial z}(x, 0, t) \quad \text{et} \quad s^*(x, t) = u_1^*(x, 0, t),$$

les traces du déplacement u_1^* sur $]0, l[$. Sous les mêmes hypothèses du Théorème 2.4, τ^* et s^* vérifient

$$\int_0^l \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx - \int_0^l \mu \tau^* \psi dx \geq 0, \quad \forall \psi \in L^2(]0, l[), \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu |\tau^*| < \hat{k} &\Rightarrow \frac{\partial s^*}{\partial t} = 0, \\ \mu |\tau^*| = \hat{k} &\Rightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } \frac{\partial s^*}{\partial t} = \beta \tau^*, \end{aligned} \right\} \text{ p.p sur }]0, l[\times]0, T[. \quad (2.30)$$

De plus u_1^* et s^* vérifient l'inéquation généralisée faible de Reynolds

$$\int_0^l \left(\tilde{F} - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h u_1^*(x, z, t) dz + \tilde{U}_1 \right) \psi'(x) dx = 0, \quad \forall \psi \in H^1(]0, l[), \quad (2.31)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x, h, t) &= \frac{1}{\mu} \int_0^h F(x, z, t) dz - \frac{h}{2\mu} F(x, h, t), \\ \tilde{U}_1(x, h, t) &= -\frac{\hat{\alpha}}{\mu} \int_0^h U_1(x, z, t) dz + \frac{\hat{\alpha}h}{2\mu} U_1(x, h, t), \\ F(x, z, t) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_1(x, \eta, t) d\eta d\zeta, \quad U_1(x, z, t) = \int_0^z \int_0^\zeta \frac{\partial u_1^*}{\partial t}(x, \eta, t) d\eta d\zeta.\end{aligned}$$

Preuve. Dans l'inéquation variationnelle (2.26), on choisit $\varphi = \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + \psi$, où $\psi \in \Pi(K)$, on trouve

$$\begin{aligned}& \mu \int_\Omega \frac{\partial u_1^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dz + \hat{\alpha} \int_\Omega \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \cdot \psi dx dz + \hat{J} \left(\psi + \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right) \\ & \geq \int_\Omega \hat{f}_1 \psi dx dz, \quad \forall \psi \in \Pi(K),\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green, il vient que

$$\begin{aligned}& -\mu \int_\Omega \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial z^2} \psi dx dz + \hat{\alpha} \int_\Omega \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \psi dx dz + \int_0^l \mu \frac{\partial u_1^*(x, 0, t)}{\partial z} n_2 \psi dx \\ & + \int_0^l \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx \\ & \geq \int_\Omega \hat{f}_1 \psi dx dz.\end{aligned}$$

Mais $n = (0, -1)$ sur $]0, l[$, donc on trouve

$$\begin{aligned}& -\mu \int_\Omega \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial z^2} \psi dx dz + \hat{\alpha} \int_\Omega \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \psi dx dz - \int_0^l \mu \tau^* \psi dx + \int_0^l \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx \\ & \geq \int_\Omega \hat{f}_1 \psi dx dz,\end{aligned}$$

de (2.27), on obtient

$$\int_0^l \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx - \int_0^l \mu \tau^* \psi dx \geq 0, \quad \psi \in \mathcal{D}(]0, l[).$$

Donc par la densité de $\mathcal{D}(]0, l[)$ dans $L^2(]0, l[)$, on déduit (2.29). Pour montrer (2.30), on prend $\psi = \pm \frac{\partial s^*}{\partial t}$ dans (2.29), il résulte

$$\int_0^l \left[\hat{k} \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \mu \tau^* \frac{\partial s^*}{\partial t} \right] dx = 0, \quad (2.32)$$

et si on prend dans (2.29) $\psi = \theta - \frac{\partial s^*}{\partial t}$ avec $\theta \in L^2(]0, l[)$, nous obtenons

$$\int_0^l \hat{k} |\theta| dx - \int_0^l \mu \tau^* \theta dx \geq \int_0^l \left[\hat{k} \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \mu \tau^* \frac{\partial s^*}{\partial t} \right] dx,$$

l'égalité (2.32), nous donnons

$$\int_0^l \hat{k} |\theta| dx - \int_0^l \mu \tau^* \theta dx \geq 0, \forall \theta \in L^2(]0, l[). \quad (2.33)$$

Pour $\theta > 0$ dans (2.33), nous trouvons

$$\int_0^l \hat{k} |\theta| dx - \mu \int_0^l \tau^* |\theta| dx = \int_0^l [\hat{k} - \mu \tau^*] |\theta| dx \geq 0, \forall \theta \in L^2(]0, l[),$$

alors

$$\mu \tau^* \leq \hat{k}, \text{ p.p sur }]0, l[. \quad (2.34)$$

Maintenant, on prend dans (2.33) $-\theta$, avec $\theta > 0$, on obtient

$$\int_0^l \hat{k} |\theta| dx + \mu \int_0^l \tau^* |\theta| dx = \int_0^l [\hat{k} + \mu \tau^*] |\theta| dx \geq 0, \forall \theta \in L^2(]0, l[),$$

ce qui donne

$$-\hat{k} \leq \mu \tau^*, \text{ p.p sur }]0, l[. \quad (2.35)$$

De (2.34) et (2.35), on déduit que

$$\mu |\tau^*| \leq \hat{k}, \text{ p.p sur }]0, l[.$$

D'après (2.32), nous obtenons

$$\hat{k} \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \mu \tau^* \frac{\partial s^*}{\partial t} = 0, \text{ p.p sur }]0, l[.$$

Donc en appliquant le Lemme 2.1, nous déduisons la loi de Tresca (2.30) sur $]0, l[$.

Pour démontrer (2.31), en intégrant deux fois l'équation (2.27) de 0 à z , on trouve

$$u_1^*(x, z, t) = s^* + z\tau^* + \frac{\hat{\alpha}}{\mu} \int_0^z \int_0^\zeta \frac{\partial u_1^*}{\partial t}(x, \eta, t) d\eta d\zeta - \frac{1}{\mu} \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_1(x, \eta, t) d\eta d\zeta, \quad (2.36)$$

en particulier pour $z = h(x)$, on a

$$s^* + h\tau^* = -\frac{\hat{\alpha}}{\mu} \int_0^h \int_0^\zeta \frac{\partial u_1^*}{\partial t}(x, \eta, t) d\eta d\zeta + \frac{1}{\mu} \int_0^h \int_0^\zeta f_1(x, \eta, t) d\eta d\zeta. \quad (2.37)$$

Intégrant (2.36) entre 0 et h , on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^h u_1^*(x, z, t) dz &= h s^* + \frac{1}{2} h^2 \tau^* + \frac{\hat{\alpha}}{\mu} \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \frac{\partial u_1^*}{\partial t}(x, \eta, t) d\eta d\zeta dz \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_1(x, \eta, t) d\eta d\zeta dz. \end{aligned} \quad (2.38)$$

De (2.37)-(2.38), nous déduisons

$$\int_0^h u_1^*(x, z, t) dz - \frac{h}{2}s^* + \tilde{F} + \tilde{U}_1 = 0,$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x, h, t) &= \frac{1}{\mu} \int_0^h F(x, z, t) dz - \frac{h}{2\mu} F(x, h, t), \\ \tilde{U}_1(x, h, t) &= -\frac{\hat{\alpha}}{\mu} \int_0^h U_1(x, z, t) dz + \frac{\hat{\alpha}h}{2\mu} U_1(x, h, t), \\ F(x, z, t) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_1(x, \eta, t) d\eta d\zeta, \quad U_1(x, z, t) = \int_0^z \int_0^\zeta \frac{\partial u_1^*}{\partial t}(x, \eta, t) d\eta d\zeta.\end{aligned}$$

Donc, on obtient la formulation faible de l'équation de Reynolds

$$\int_0^l \left(\int_0^h u_1^*(x, z, t) dz - \frac{h}{2}s^* + \tilde{F} + \tilde{U}_1 \right) \psi'(x) dx = 0.$$

■

Théorème 2.6 *La solution u_1^* du problème limite (2.26)-(2.27) est unique dans $L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions u_1^* et u_1^{**} de l'inéquation variationnelle (2.26), donc on a

$$\begin{aligned}\mu \int_\Omega \frac{\partial u_1^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi} - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) dx dz + \hat{\alpha} \int_\Omega \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \cdot \left(\hat{\varphi} - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right) dx dz + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J}\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t}\right) \\ \geq \left(\hat{f}_1, \hat{\varphi} - \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right),\end{aligned}\quad (2.39)$$

et

$$\begin{aligned}\mu \int_\Omega \frac{\partial u_1^{**}}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi} - \frac{\partial u_1^{**}}{\partial t} \right) dx dz + \hat{\alpha} \int_\Omega \frac{\partial u_1^{**}}{\partial t} \cdot \left(\hat{\varphi} - \frac{\partial u_1^{**}}{\partial t} \right) dx dz + \hat{J}(\hat{\varphi}) \\ - \hat{J}\left(\frac{\partial u_1^{**}}{\partial t}\right) \geq \left(\hat{f}_1, \hat{\varphi} - \frac{\partial u_1^{**}}{\partial t} \right).\end{aligned}\quad (2.40)$$

On prend $\hat{\varphi} = \frac{\partial u_1^{**}}{\partial t}$ dans (2.39), puis $\hat{\varphi} = \frac{\partial u_1^*}{\partial t}$ dans (2.40) et en sommant les deux inéquations, on obtient

$$\mu \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} (u_1^* - u_1^{**}) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t} - \frac{\partial u_1^{**}}{\partial t} \right) dx dz + \hat{\alpha} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t} - \frac{\partial u_1^{**}}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t} - \frac{\partial u_1^{**}}{\partial t} \right) dx dz \leq 0,$$

en posant $\bar{W}(t) = u_1^*(t) - u_1^{**}(t)$, ceci implique

$$\mu \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha} \left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Comme $\bar{W}(0) = 0$, on déduit que

$$\left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Enfin par l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\|\bar{W}\|_{L^2(0,T,V_z)} = \|\bar{W}\|_{L^\infty(0,T,V_z)} = 0.$$

■

Chapitre 3

Analyse asymptotique d'un problème viscoélastique avec termes dissipatif et source non linéaire

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème viscoélastique avec le terme dissipatif $(1 + |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ et le terme source $|u^\varepsilon| u^\varepsilon$ dans un domaine mince tridimensionnel Ω^ε . Les conditions aux limites utilisées sont la condition de Dirichlet sur les frontières latérale et supérieure et la condition de frottement non linéaires de type Tresca sur la frontière inférieure. Nous étudions le comportement asymptotique de ce problème quand la dimension du domaine tend vers zéro.

Contenu

3.1 Formulation mécanique du problème.

3.2 Formulation variationnelle du problème.

3.3 Analyse asymptotique du problème;

3.3.1 Changement d'échelle et problème variationnel sur Ω .

3.3.2 Estimations a priori.

3.3.3 Théorème de convergence.

3.3.4 Problème limite.

3.1 Formulation mécanique du problème

Nous considérons un corps viscoélastique occupant dans un film mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, avec une surface frontière régulière Γ^ε partitionnée en trois parties mesurables $\bar{\omega}$, $\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ et $\bar{\Gamma}_L^\varepsilon$, où ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 d'équation $x_3 = 0$. On suppose que ω la frontière inférieure du domaine, Γ_L^ε la frontière latérale et Γ_1^ε la surface supérieure définie par l'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$, où ε est un petit paramètre destiné à tendre vers zéro ($0 < \varepsilon < 1$) et $h(\cdot)$ est une fonction définie sur ω telle que

$$0 < \underline{h} = h_{min} \leq h(x_1, x_2) \leq h_{max} = \bar{h}, \forall (x_1, x_2) \in \omega.$$

On note par $x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, donc le domaine physique Ω^ε est donné par

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

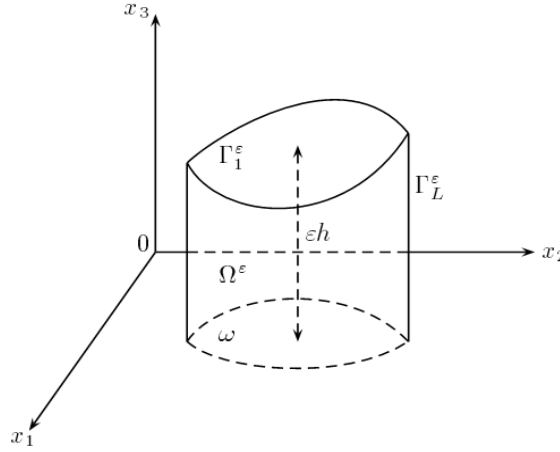


Figure 3.1: Le domaine physique Ω^ε .

Soit $T > 0$, nous étudions dans l'intervalle de temps $]0, T[$ l'évolution du corps matériel due à l'application des forces volumiques f^ε . Supposons que le corps viscoélastique satisfait la loi de comportement suivante (voir, par exemple, Duvaut et Lions [24])

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \mathcal{A}_{ijkl} d_{ij}(u^\varepsilon) + \mathcal{B}_{ijkl} d_{ij}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq 3,$$

où \mathcal{A}_{ijkl} et \mathcal{B}_{ijkl} , sont les tenseurs élastiques et visqueux du quatrième ordre, respectivement. Supposé à la matière est d'être homogène et isotrope, par conséquent, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique est caractérisé uniquement par les constantes: les coefficients de Lamé et de viscosité. Par conséquent, nous utilisons la loi de comportement suivante :

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + 2\lambda d_{ij}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

où μ le coefficient de Lamé, λ le coefficient de viscosité, $u^\varepsilon(x, t) = (u_1^\varepsilon(x, t), u_2^\varepsilon(x, t), u_3^\varepsilon(x, t))$ le champ de déplacement du corps viscoélastique au point x au temps $t \in]0, T[$ et $d_{ij}(u^\varepsilon)$, $1 \leq i, j \leq 3$ le tenseur des taux de déformations donné par

$$d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right), 1 \leq i, j \leq 3.$$

Soit $n = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal unitaire extérieure à Γ^ε , et $n = (0, 0, -1)$ le vecteur normale unitaire extérieure à ω . Pour un vecteur u^ε nous définissons les composantes normales et tangentielles par

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot n, \quad u_\tau^\varepsilon = u^\varepsilon - u_n^\varepsilon \cdot n.$$

Pour les composantes normales et tangentielles du tenseur des contraintes la définition est comme suit

$$\sigma_n^\varepsilon = (\sigma^\varepsilon \cdot n) \cdot n, \quad \sigma_\tau^\varepsilon = \sigma^\varepsilon \cdot n - (\sigma_n^\varepsilon) \cdot n.$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de déplacement $u^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^3$ qui vérifie les équations et les conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} - \sigma_{ij,j}^\varepsilon(u^\varepsilon) + \alpha^\varepsilon \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} = f_i^\varepsilon - \gamma^\varepsilon |u_i^\varepsilon| u_i^\varepsilon, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + 2\lambda d_{ij} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[, \quad (3.2)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0, T[, \quad (3.3)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0, T[, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \cdot n = 0 \text{ sur } \omega \times]0, T[, \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Rightarrow \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Rightarrow \exists \beta > 0, \text{ tel que } \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right)_\tau = -\beta \sigma_\tau^\varepsilon, \end{array} \right\} \text{ sur } \omega \times]0, T[, \quad (3.6)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x \in \Omega^\varepsilon. \quad (3.7)$$

Le problème (3.1) – (3.7) représente l'évolution dynamique des matériaux viscoélastiques, où l'équation (3.1) représente les déformations d'un corps viscoélastique avec termes dissipatif et source dans le régime dynamique, $\sigma_{ij,j}^\varepsilon$ la divergence du tenseur des contraintes σ_{ij}^ε , γ^ε , α^ε sont des constantes positives et f_i^ε représente la densité des forces extérieures. L'équation (3.2) représente la loi de comportement des matériaux viscoélastiques. (3.3) – (3.4) représentent la condition de Dirichlet pour le déplacement sur $\Gamma_1^\varepsilon \times]0, T[$ et $\Gamma_L^\varepsilon \times]0, T[$. (3.6) représente

la loi de frottement de Tresca sur $\omega \times]0, T[$, où $|\cdot|$ désigne la norme Euclidienne de \mathbb{R}^2 et $k^\varepsilon : \omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée. (3.7) représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 et le champ de vitesse u_1 .

3.2 Formulation variationnelle du problème

Avant de donner la formulation variationnelle du problème (3.1) – (3.7), nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$

$$K^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon, v \cdot n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

En multipliant l'équation (3.1) par $(\varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t})$, où $\varphi \in K^\varepsilon$, intégrons sur Ω^ε , et utilisons la formule de Green on obtient le problème variationnel suivant

Problème P(Ω^ε). Trouver u^ε où $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in K^\varepsilon$, telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + a_\mu \left(u^\varepsilon, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + a_\lambda \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + \gamma^\varepsilon \left(|u^\varepsilon| u^\varepsilon, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + \alpha^\varepsilon \left(\left(1 + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + j^\varepsilon(\varphi) - j^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \geq (f^\varepsilon, \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}), \forall \varphi \in K^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \end{array} \right. \quad (3.8)$$

où

$$a_\vartheta(u, v) = 2\vartheta \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u) d_{ij}(v) dx, \quad \vartheta \in \mathbb{R}_+^*,$$

$$j^\varepsilon(v) = \int_{\omega} k^\varepsilon |v| dx', \quad \forall v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3,$$

et

$$(f, v) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} f_i \cdot v_i dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3.$$

Théorème 3.1 *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées*

$$f^\varepsilon, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T, L^2(\Omega^\varepsilon)^3),$$

$$k^\varepsilon \in L^\infty(\omega), \quad k^\varepsilon > 0, \quad \text{indépendante de } t,$$

$$u_0 \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3, \quad u_1 \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3, \quad (u_1)_\tau = 0. \quad (3.9)$$

Alors, il existe une solution unique u^ε de (3.8) vérifie

$$u^\varepsilon \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega^\varepsilon)^3), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega^\varepsilon)^3),$$

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega^\varepsilon)^3) \cap L^2(0, T, H^1(\Omega^\varepsilon)^3).$$

La preuve de ce Théorème est similaire dans Lions ([24], [35]).

3.3 Analyse asymptotique du problème

Dans cette section, nous étudions le comportement asymptotique de la solution du problème (3.8).

3.3.1 Changement d'échelle et problème variationnel sur Ω

Pour l'analyse asymptotique du problème, on commence notre étude par le changement d'échelle qui nous permettra de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur ε . Posant $z = x_3/\varepsilon$, le domaine Ω^ε se transforme à un domaine Ω indépendant de ε

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, 0 < z < h(x')\},$$

où $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L \cup \bar{\omega}$ sa frontière.

Maintenant, nous définissons des nouvelles fonctions sur Ω

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(x', z, t) = u_i^\varepsilon(x', x_3, t), \quad i = 1, 2, \\ \hat{u}_3^\varepsilon(x', z, t) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3, t). \end{cases}$$

Pour les données du problème, nous avons les relations suivantes

$$\begin{cases} \hat{f}_i(x', z, t) = \varepsilon^2 f_i^\varepsilon(x', x_3, t), \quad i = 1, 2, 3, \\ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \quad \hat{\alpha} = \varepsilon^2 \alpha^\varepsilon, \quad \hat{\gamma} = \varepsilon \gamma^\varepsilon, \end{cases}$$

avec \hat{f}_i , \hat{k} , $\hat{\alpha}$ et $\hat{\gamma}$ ne dépendent pas de ε . Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit :

$$K = \{\varphi \in H^1(\Omega)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1 \text{ et } \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \omega\},$$

$$\Pi(K) = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1\},$$

$$V_z = \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

où V_z est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^2 \left(\|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le problème variationnel (3.8) est reformulé sur le domaine fixe Ω par

Problème P(Ω). Trouver $\hat{u}^\varepsilon \in K$, où $\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \in K$, telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) + \hat{a}_\mu \left(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + \hat{a}_\lambda \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon \hat{\gamma} \sum_{i=1}^2 \left(|\hat{u}_i^\varepsilon| \hat{u}_i^\varepsilon, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^3 \hat{\gamma} \left(|\hat{u}_3^\varepsilon| \hat{u}_3^\varepsilon, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \left(\left(1 + \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \hat{\alpha} \left(\left(1 + \left| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J}\left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}\right) \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right), \forall \hat{\varphi} \in K, \\ \hat{u}^\varepsilon(0) = \hat{u}_0, \quad \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(0) = \hat{u}_1, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

où

$$\hat{J}(\hat{\varphi}) = \int_\omega \hat{k} |\hat{\varphi}| dx',$$

et

$$\begin{aligned} \hat{a}_\vartheta(\hat{\psi}, \hat{\varphi}) &= \vartheta \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx' dz \\ &+ \vartheta \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial x_i} \right) dx' dz \\ &+ 2\vartheta \varepsilon^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial z} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx' dz, \forall \hat{\psi}, \hat{\varphi} \in K. \end{aligned}$$

3.3.2 Estimations a priori

Notre but maintenant est l'obtention des estimations a priori sur la solution \hat{u}^ε . Pour cela nous utilisons les trois inégalités fondamentales suivantes:

- L'inégalité de Korn

$$\vartheta C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}} \leq a_\vartheta(u^\varepsilon, u^\varepsilon), \quad (C_K \text{ indépendant de } \varepsilon). \quad (3.11)$$

- L'inégalité de Poincaré

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq \varepsilon \bar{h} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}. \quad (3.12)$$

• L'inégalité de Young

$$ab \leq \eta^2 \frac{a^2}{2} + \eta^{-2} \frac{b^2}{2}, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \eta > 0. \quad (3.13)$$

Théorème 3.2 *Avec les mêmes hypothèses du Théorème 3.1, il existe une constante c indépendante de ε satisfaisant les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^{\frac{1}{3}} \hat{u}_i^\varepsilon \right\|_{L^3(\Omega)}^3 \right) \\ & + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^{\frac{4}{3}} \hat{u}_3^\varepsilon \right\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq c, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}^3 + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^3(0,T,L^3(\Omega))}^3 \leq c, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (3.8). Nous choisissons $\varphi = 0$, donc nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + a_\mu \left(u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + a_\lambda \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + \gamma^\varepsilon \left(|u^\varepsilon| u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ & + \alpha^\varepsilon \left(\left(1 + \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \\ & \leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + a_\mu(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{2}{3} \gamma^\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 \right] + a_\lambda \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) + \alpha^\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 \\ & \leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

En intégrant sur $(0, t)$ et en utilisant l'inégalité de Korn (3.11), on trouve

$$\begin{aligned}
& \left[\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 + \frac{2}{3} \gamma^\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 \right] \\
& + 2\lambda C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 ds + \alpha^\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 ds \\
& \leq 2 \int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right) ds + \left[\|u_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 + \frac{2}{3} \gamma^\varepsilon \|u_0\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 \right].
\end{aligned} \tag{3.17}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Poincaré (3.12) et de Young (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}
2 \int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right) ds & \leq 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \|f^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds \\
& \leq 2\lambda C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 ds + \frac{2\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\lambda C_K} \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Insérer (3.18) dans (3.17), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 + \frac{2}{3} \gamma^\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 + \alpha^\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 ds \\
& \leq \frac{2\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\lambda C_K} \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds + \|u_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 + \frac{2}{3} \gamma^\varepsilon \|u_0\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

comme

$$\varepsilon^2 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 = \varepsilon^{-1} \left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\Omega)^3}^2,$$

en multipliant (3.19) par ε , nous déduisons

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 \right] + 2\mu C_K \left[\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] + \frac{2}{3} \left[\varepsilon \gamma^\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 \right] \\
& + \varepsilon \alpha^\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^3 ds \\
& \leq A,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

où A est une constante ne dépend pas de ε , avec

$$A = \|\hat{u}_1\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + 2\mu \|\nabla \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2 + \frac{2}{3} \hat{\gamma} \|\hat{u}_0\|_{L^3(\Omega)^3}^3 + \frac{4\bar{h}^2}{\lambda C_K} \left\| \hat{f}(s) \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)}^2 ds.$$

Donc, à partir de (3.20), nous concluons (3.14) et (3.15).

Pour montrer l'estimation a priori (3.15), on considère l'équation approchée

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi \right) + a_\mu (u_\zeta^\varepsilon, \varphi) + a_\lambda \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \varphi \right) + \alpha^\varepsilon \left(\left(1 + \left| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \varphi \right) \\ & + 2\gamma^\varepsilon (|u_\zeta^\varepsilon| u_\zeta^\varepsilon, \varphi) + \left((j_\zeta^\varepsilon)' \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right), \varphi \right) \\ & = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$j_\zeta^\varepsilon(v) = \int_{\omega} k^\varepsilon(x') \phi_\zeta(|v_\tau|^2) dx' \text{ avec } \phi_\zeta(\lambda) = \frac{1}{1+\zeta} |\lambda|^{(1+\zeta)}, \zeta > 0,$$

on dérive (3.21) par rapport à t et on prend $\varphi = \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) + a_\mu \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) + a_\lambda \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) + 2\alpha^\varepsilon \left(\left(\frac{1}{2} + \left| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \\ & + 2\gamma^\varepsilon \left(|u_\zeta^\varepsilon| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} (j_\zeta^\varepsilon)' \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \\ & = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right), \end{aligned}$$

comme $\left(\frac{\partial}{\partial t} (j_\zeta^\varepsilon)' \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \geq 0$; nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + a_\mu \left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right) \right] + 2\lambda C_K \left\| \nabla \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \\ & \leq \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right) - 2\gamma^\varepsilon \left(|u_\zeta^\varepsilon| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière inégalité sur $(0, t)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left[\left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] + 4\lambda C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 ds \\ & \leq \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + \frac{2(\varepsilon \bar{h})^2}{\lambda C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds + 2\lambda C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 ds \\ & + 2\mu \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 - 4\gamma^\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(s)| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} dx' dx_3 ds. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Maintenant, nous allons analyser le terme sur le côté droit de (3.22).

En utilisant l'inégalité de Hölder généralisée, en observant que $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$, nous

concluons

$$\begin{aligned} & \left| -4\gamma^\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(s)| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} dx' dx_3 ds \right| \\ & \leq 4\gamma^\varepsilon \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(s)\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} \left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^6(\Omega^\varepsilon)^3} \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds. \end{aligned}$$

Par l'injection de Sobolev $H^1(\Omega^\varepsilon) \hookrightarrow L^6(\Omega^\varepsilon)$, ainsi

$$\left\| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^6(\Omega^\varepsilon)^3} \leq c_s \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}},$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \left| -4\gamma^\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(s)| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} dx' dx_3 ds \right| \\ & \leq 4\gamma^\varepsilon c_s \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(s)\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}} \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant les inégalités (3.12)-(3.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| -4\gamma^\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(s)| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} dx' dx_3 ds \right| \\ & \leq 8 \frac{(\bar{h}c_s(\varepsilon\gamma^\varepsilon))^2}{\lambda C_K} \int_0^t \|u_\zeta^\varepsilon(s)\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3}^2 \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 ds \\ & \quad + 2\lambda C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 ds. \end{aligned}$$

D'autre part, le fait que $\varepsilon\gamma^\varepsilon \|u_\zeta^\varepsilon(s)\|_{L^3(\Omega^\varepsilon)^3} \leq c^*$, (où c^* indépendant de ζ et ε , selon (3.20)), nous donnons

$$\begin{aligned} & \left| -4\gamma^\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} |u_\zeta^\varepsilon(s)| \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} dx' dx_3 ds \right| \tag{3.23} \\ & \leq \int_0^t \left[8 \frac{(\bar{h}c_s c^*)^2}{\lambda C_K} \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 + 2\lambda C_K \left\| \nabla \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] ds. \end{aligned}$$

De (3.22)-(3.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left[\left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] \tag{3.24} \\ & \leq \int_0^t \left[\left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 8 \frac{(\bar{h}c_s c^*)^2}{\lambda C_K} \left\| \nabla \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] ds \\ & \quad + \left[\left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] + \frac{2(\varepsilon\bar{h})^2}{\lambda C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds. \end{aligned}$$

Maintenant, il faut estimer $\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$. De (3.21) et (3.9), il vient que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \varphi \right) &= (f^\varepsilon(0), \varphi) - a_\mu(u_0, \varphi) - a_\lambda(u_1, \varphi) \\ &\quad - \alpha^\varepsilon((1 + |u_1|)u_1, \varphi) - \gamma^\varepsilon(|u_0|u_0, \varphi), \forall \varphi \in K^\varepsilon. \end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré (3.12), on déduit

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \varphi \right) \right| \\ &\leq \left(\varepsilon \bar{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu \|u_0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} + (2\lambda + \varepsilon^2 \alpha^\varepsilon \bar{h}^2) \|u_1\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} \\ &\quad + \varepsilon \alpha^\varepsilon \bar{h} \sqrt{\varepsilon} \left(\int_\Omega |\hat{u}_1|^4 dx' dz \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}} + \varepsilon \gamma^\varepsilon \bar{h} \left(\int_\Omega |\hat{u}_0|^4 dx' dz \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}, \end{aligned}$$

comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \varphi \right) \right| \\ &\leq \left(\varepsilon \bar{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu \|u_0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} + (2\lambda + \varepsilon^2 \alpha^\varepsilon \bar{h}^2) \|u_1\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} \\ &\quad + \left(\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^\varepsilon \right) \bar{h} c_s \|\hat{u}_1\|_{H^1(\Omega)^3}^2 + (\varepsilon \gamma^\varepsilon) \bar{h} c_s \|\hat{u}_0\|_{H^1(\Omega)^3}^2 \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}. \end{aligned}$$

Si on multiplie cette inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$, on obtient

$$\sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq C',$$

où

$$\begin{aligned} C' &= \bar{h} \left\| \hat{f}(0) \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \left(2\mu + \hat{\gamma} \bar{h} c_s \|\hat{u}_0\|_{H^1(\Omega)^3} \right) \|\hat{u}_0\|_{H^1(\Omega)^3} \\ &\quad + \left(2\lambda + \hat{\alpha} \bar{h}^2 + \hat{\alpha} \bar{h} c_s \|\hat{u}_1\|_{H^1(\Omega)^3} \right) \|\hat{u}_1\|_{H^1(\Omega)^3}, \end{aligned}$$

ne dépend pas de ε .

Nous passons à la limite dans (3.24) quand ζ tend vers zéro, nous trouvons

$$\begin{aligned} &\left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] \\ &\leq \int_0^t \left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 8 \frac{(\bar{h} c_s c^*)^2}{\lambda C_K} \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] ds \\ &\quad + \left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0) \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] + \frac{2(\varepsilon \bar{h})^2}{\lambda C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds. \end{aligned}$$

En multipliant maintenant cette inégalité par ε , on obtient

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 2\mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] \\ & \leq B + \int_0^t \varepsilon \left[\left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon(s)}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + 8 \frac{(\bar{h} c_s c^*)^2}{\lambda C_K} \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \right] ds, \end{aligned} \quad (3.25)$$

où B est une constante ne dépend pas de ε avec

$$B = 2\mu \|\nabla \hat{u}_1\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2 + \frac{2\bar{h}^2}{\lambda C_K} \left\| \frac{\partial \hat{f}(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)}^2 ds + C'.$$

En utilisant le lemme de Gronwall dans l'inégalité (3.25), nous obtenons

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + \varepsilon \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^2 \leq c, \quad (3.26)$$

où c est une constante positive indépendante de ε . De (3.26), nous concluons (3.16). ■

3.3.3 Théorème de convergence

Théorème 3.3 *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 3.1, il existe $u_i^* \in L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$, $i = 1, 2$, telle que*

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_i^\varepsilon &\rightharpoonup u_i^*, \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial u_i^*}{\partial t}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{faiblement dans } L^2(0, T, V_z) \\ &\text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, V_z), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial u_i^*}{\partial t}, \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon^{\frac{4}{3}} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} &\rightharpoonup 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{faiblement dans } L^3(0, T, L^3(\Omega)), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \hat{u}_i^\varepsilon &\rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon^{\frac{4}{3}} \hat{u}_3^\varepsilon &\rightharpoonup 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{faiblement dans } L^3(0, T, L^3(\Omega)) \\ &\text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, L^3(\Omega)), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} &\rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} &\rightharpoonup 0 \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} &\rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} &\rightharpoonup 0 \\ \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} &\rightharpoonup 0, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ &\text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) \rightharpoonup 0, \quad i, j = 1, 2 \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \rightharpoonup 0 \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \\
& \varepsilon \frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0
\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{faiblement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \text{et faiblement } * \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)). \end{array} \quad (3.31)$$

Preuve. D'après les estimations (3.14) et (3.16) il existe une constante positive c indépendante de ε , telle que

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c, \quad i = 1, 2.$$

En utilisant ces estimations avec l'inégalité de Poincaré dans le domaine Ω , on déduit que les suites $(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ et $\left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)_\varepsilon$ sont bornées dans $L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$, ce qui implique l'existence des éléments (u_1^*, u_2^*) et $\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t}, \frac{\partial u_2^*}{\partial t} \right)$ dans $L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$ telles que $(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ (resp. $\left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t} \right)_\varepsilon$) converge faiblement vers (u_1^*, u_2^*) (resp. $\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t}, \frac{\partial u_2^*}{\partial t} \right)$) dans $L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$. Donc nous obtenons (3.27). Aussi il est clair que les convergences (3.28) – (3.31) découlent directement de (3.14) – (3.16) et (3.27). ■

3.3.4 Problème limite

Nous avons vu que la solution \hat{u}^ε du problème variationnel (3.10) admet une limite faible u^* quand ε tend vers zéro. Il nous reste qu'à chercher le problème limite vérifié par cette limite faible.

Théorème 3.4 *La solution limite (u_1^*, u_2^*) vérifie*

$$\begin{aligned}
& \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz \quad (3.32) \\
& + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right) + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz \\
& \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz, \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(K)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\mu u_i^*(t) + \lambda \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} \right) + \hat{\alpha} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} = \hat{f}_i(t), \quad i = 1, 2 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ u_i^*(x', z, 0) = \hat{u}_{0,i}(x', z), \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.33)$$

Preuve. On prend $\hat{\varphi} = \left(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t} \right)$ dans l'inéquation variationnelle (3.10) puis en passant à la limite quand ε tend vers zéro et en utilisant les résultats de convergence du Théorème 3.3, on déduit

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz \quad (3.34) \\ & + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right) + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz \\ & \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Nous choisissons maintenant dans (3.34),

$$\hat{\varphi}_i = \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \pm \psi_i, \quad \psi_i \in H_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

et en utilisant la formule de Green, puis en choisissant $\psi_1 = 0$ et $\psi_2 \in H_0^1(\Omega)$, en suite $\psi_2 = 0$ et $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_i^*}{\partial z} + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) \right) \psi_i dx' dz + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \psi_i dx' dz \\ & = \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx' dz. \end{aligned}$$

Donc

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\mu u_i^*(t) + \lambda \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} \right) + \hat{\alpha} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} = \hat{f}_i, \quad i = 1, 2 \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \quad (3.35)$$

la formule (3.35) est valable dans $L^2(\Omega)$, puisque $(\hat{f}_1, \hat{f}_2) \in L^2(\Omega)^2$. ■

Théorème 3.5 *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 3.1, les traces*

$$\tau^*(x', t) = \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0, t), \quad s^*(x', t) = u^*(x', 0, t),$$

vérifient

$$\int_{\omega} \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx' - \int_{\omega} \left(\mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right) \psi dx' \geq 0, \quad \forall \psi \in L^2(\omega)^2, \quad (3.36)$$

et la condition aux limites de Tresca sur $\omega \times]0, T[$

$$\left. \begin{aligned} |\mu\tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t}| < \hat{k} &\Rightarrow \frac{\partial s^*}{\partial t} = 0, \\ |\mu\tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t}| = \hat{k} &\Rightarrow \exists \beta > 0 : \frac{\partial s^*}{\partial t} = \beta (\mu\tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t}), \end{aligned} \right\} p.p \text{ sur } \omega \times]0, T[. \quad (3.37)$$

En plus u^* et s^* vérifient l'équation généralisée de Reynolds

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left(\tilde{F} - \frac{h}{2} \left(\mu s^* + \lambda \frac{\partial s^*}{\partial t} \right) + \int_0^h \left(\mu u^* + \lambda \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) (x', z, t) dz + \tilde{U}_t \right) \nabla \psi(x') dx \\ = 0, \forall \psi \in H^1(\omega), \end{aligned} \quad (3.38)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x', h, t) &= \int_0^h F(x', z, t) dz - \frac{h}{2} F(x', h, t), \\ F(x', z, t) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}(x', \eta, t) d\eta d\zeta, \\ \tilde{U}_t(x', h, t) &= -\hat{\alpha} \int_0^h U_t(x', z, t) dz + \frac{\hat{\alpha} h}{2} U_t(x', h, t), \\ U_t(x', z, t) &= \int_0^z \int_0^\zeta \left(1 + \left| \frac{\partial u^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u^*}{\partial t}(x', \eta, t) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Preuve. Nous choisissons φ dans (3.32) avec $\varphi_i = \frac{\partial u_i^*}{\partial t} + \psi_i$, $i = 1, 2$, où $\psi_i \in \Pi(K)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx' dz + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx' dz \\ + \hat{J} \left(\psi + \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) - \hat{J} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right) + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \psi_i dx' dz \\ \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx' dz, \forall \psi_i \in \Pi(K). \end{aligned}$$

Par la formule de Green, on déduit

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\mu u_i^* + \lambda \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) \cdot \psi_i dx' dz + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \psi_i dx' dz \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{\omega} \left(\mu \tau_i^* + \lambda \frac{\partial \tau_i^*}{\partial t} \right) \psi_i dx' + \int_{\omega} \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx' \\ \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx' dz. \end{aligned}$$

De (3.33), on trouve

$$\int_{\omega} \hat{k} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \right) dx' - \int_{\omega} \left(\mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right) \psi dx' \geq 0, \psi \in \mathcal{D}(\omega)^2.$$

Par la densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$ on déduit (3.36).

Pour prouver (3.37), nous prenons $\psi = \pm \frac{\partial s^*}{\partial t}$, dans (3.36), il vient que

$$\int_{\omega} \left[\hat{k} \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left(\mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right) \frac{\partial s^*}{\partial t} \right] dx' = 0. \quad (3.39)$$

En prenant $\psi = \theta - \frac{\partial s^*}{\partial t}$ avec θ dans $L^2(\omega)^2$, dans (3.36), on trouve

$$\int_{\omega} \left[\hat{k} |\theta| - \left(\mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right) \theta \right] dx' \geq \int_{\omega} \left[\hat{k} \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left(\mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right) \frac{\partial s^*}{\partial t} \right] dx', \theta \in L^2(\omega)^2.$$

Donc, nous déduisons

$$\int_{\omega} \left[\hat{k} |\theta| - \left(\mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right) \theta \right] dx' \geq 0, \theta \in L^2(\omega)^2, \quad (3.40)$$

on choisit d'abord $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ tel que $\theta_i > 0$, $i = 1, 2$, dans (3.40), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left[\hat{k} |\theta| - \left| \mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right| |\theta| \cos \left(\tau^* + \frac{\partial \tau^*}{\partial t}, \theta \right) \right] dx' \\ & \geq \int_{\omega} \left[\hat{k} - \left| \mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right| \cos \left(\tau^* + \frac{\partial \tau^*}{\partial t}, \theta \right) \right] |\theta| dx', \theta \in L^2(\omega)^2, \end{aligned}$$

donc

$$\left| \mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right| \cos \left(\tau^* + \frac{\partial \tau^*}{\partial t}, \theta \right) \leq \hat{k}, \text{ p.p sur } \omega \times]0, T[. \quad (3.41)$$

Prenant maintenant dans (3.40) $-\theta$, avec $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ tel que $\theta_i > 0$, $i = 1, 2$, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left[\hat{k} |\theta| + \left| \mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right| |\theta| \cos \left(\tau^* + \frac{\partial \tau^*}{\partial t}, \theta \right) \right] dx' \\ & \geq \int_{\omega} \left[\hat{k} + \left| \mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right| \cos \left(\tau^* + \frac{\partial \tau^*}{\partial t}, \theta \right) \right] |\theta| dx', \theta \in L^2(\omega)^2, \end{aligned}$$

d'où

$$-\hat{k} \leq \left| \mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right| \cos \left(\tau^* + \frac{\partial \tau^*}{\partial t}, \theta \right), \text{ p.p sur } \omega \times]0, T[. \quad (3.42)$$

De (3.41) et (3.42) on trouve

$$\left| \mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right| \leq \hat{k}, \text{ p.p sur } \omega \times]0, T[.$$

D'après (3.39), on a

$$\hat{k} \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left(\mu \tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t} \right) \frac{\partial s^*}{\partial t} = 0, \text{ p.p sur } \omega \times]0, T[.$$

Par le lemme 2.1, nous déduisons la loi de Tresca sur $\omega \times]0, T[$.

Pour prouver (3.38) on intègre (3.33) de 0 à z , on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu u_i^* - \lambda \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) (x', z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu u_i^* + \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) (x', 0, t) \\ & + \hat{\alpha} \int_0^z \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} (x', \eta, t) d\eta \\ & = \int_0^z \hat{f}_i (x', \eta, t) d\eta. \end{aligned}$$

En intégrant pour la deuxième fois entre 0 et z , on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\mu u_i^* + \lambda \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) (x', z, t) \tag{3.43} \\ & = \left(\mu s_i^* + \lambda \frac{\partial s_i^*}{\partial t} \right) + z \left(\mu \tau_i^* + \lambda \frac{\partial \tau_i^*}{\partial t} \right) \\ & + \hat{\alpha} \int_0^z \int_0^\zeta \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} (x', \eta, t) d\eta d\zeta - \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i (x', \eta, t) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

En substituant z par $h(x')$, d'où

$$\begin{aligned} \left(\mu s_i^* + \lambda \frac{\partial s_i^*}{\partial t} \right) + h \left(\mu \tau_i^* + \lambda \frac{\partial \tau_i^*}{\partial t} \right) & = + \int_0^h \int_0^\zeta f_i (x', \eta, t) d\eta d\zeta \tag{3.44} \\ & - \hat{\alpha} \int_0^h \int_0^\zeta \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} (x', \eta, t) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

En intégrant (3.43) de 0 à $h(x')$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^h \left(\mu u_i^* + \lambda \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) (x', z, t) dz & = h \left(\mu s_i^* + \lambda \frac{\partial s_i^*}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left(\mu \tau_i^* + \lambda \frac{\partial \tau_i^*}{\partial t} \right) \tag{3.45} \\ & + \hat{\alpha} \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} (x', \eta, t) d\eta d\zeta dz \\ & - \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i (x', \eta, t) d\eta d\zeta dz. \end{aligned}$$

De (3.44)-(3.45), nous déduisons que

$$\tilde{F} - \frac{h}{2} \left(\mu s^* + \lambda \frac{\partial s^*}{\partial t} \right) + \int_0^h \left(\mu u^* + \lambda \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) (x', z, t) dz + \tilde{U}_t = 0.$$

Et par conséquent

$$\int_\omega \left(\tilde{F} - \frac{h}{2} \left(\mu s^* + \lambda \frac{\partial s^*}{\partial t} \right) + \int_0^h \left(\mu u^* + \lambda \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) (x', z, t) dz + \tilde{U}_t \right) \nabla \psi (x') dx' = 0.$$

■

Théorème 3.6 *La solution $u_i^*, i = 1, 2$, du problème limite (3.32)-(3.33) est unique dans $L^2(0, T, V_z) \cap L^\infty(0, T, V_z)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions u_i^* et u_i^{**} , $i = 1, 2$ de l'inéquation variationnelle (3.32), nous avons

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz \quad (3.46) \\ & + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) \\ & \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^{**}}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dx' dz + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dx' dz \quad (3.47) \\ & + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(1 + \left| \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right| \right) \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dx' dz + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J} \left(\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) \\ & \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Nous prenons $\hat{\varphi} = \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}$ dans (3.46) (resp $\hat{\varphi} = \frac{\partial u_i^*}{\partial t}$ dans (3.47)) et en additionnant les deux nouvelles inéquations, on obtient

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} (u_i^* - u_i^{**}) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dx dz \\ & + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dx dz \\ & + \lambda \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dx dz \\ & + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right| \frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \left| \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right| \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dx dz \\ & \leq 0, \end{aligned}$$

Posons $\bar{W}(t) = u^*(t) - u^{**}(t)$, ceci implique que

$$\mu \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \lambda \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \hat{\alpha} \left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\hat{\alpha}}{4} \left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right\|_{L^3(\Omega)^2}^3 \leq 0.$$

En utilisant le fait que $\bar{W}(0) = 0$, nous trouvons

$$\left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq 0.$$

Finalement, par l'inégalité de Poincaré, nous concluons

$$\|\bar{W}\|_{L^2(0,T,V_z)} = \|\bar{W}\|_{L^\infty(0,T,V_z)} = 0.$$

■

Chapitre 4

Analyse asymptotique d'un système généralisé de type Stokes

Résumé. Dans ce chapitre nous étudions le comportement d'un fluide non-Newtoniens incompressible en régime stationnaire gouverné par le système de Stokes généralisé dans un domaine mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ avec une condition de frottement non linéaire sur une partie du bord. Nous allons étudier le comportement de la vitesse u^ε et la pression π^ε du fluide lorsque l'épaisseur ε tend vers zéro. Pour cela on va utiliser, comme dans les chapitres précédents, la technique de changement d'échelle.

Contenu

4.1 Introduction et position du problème.

4.2 Problème variationnel;

4.2.1 Le problème variationnel dans un domaine fixe.

4.3 Estimations a priori.

4.4 Résultats de convergence et problème limite.

4.1 Introduction et position du problème

En mécanique des fluides, ces derniers peuvent être classés en deux grandes familles

- La famille des fluides Newtoniens (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) qui ont une viscosité constante.

- La deuxième famille est constituée des fluides non-Newtoniens (quasiment tout le reste...le sang, le gel,...) qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse. Par conséquent, le tenseur des contraintes n'est plus une fonction linéaire des déformations.

L'équation de Stokes forment un modèle mathématique qui décrit l'écoulement d'un fluide Newtonien. OA. Ladyzhenskaya ([31], [32] et [33]) a proposé dans les années 1960 le modèle mathématique qui généralise le système de Stokes

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) = \mu_0 d_{ij}(u^\varepsilon) + \mu_1 \frac{d_{ij}(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|^{2-p}} - \pi^\varepsilon \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (4.1)$$

où $\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) = \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)$ le tenseur des contraintes, $D(u^\varepsilon) = d_{ij}(u^\varepsilon)$ le tenseur des taux de déformations

$$d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

u^ε désigne la vitesse du fluide, π^ε est la pression, μ_0, μ_1 sont des constantes positives qui représentent les coefficients de viscosité, le paramètre p ; est l'exposant de loi de puissance du matériau représentant l'indice d'écoulement et δ_{ij} le symbole de Kronecker. Lorsque $\mu_1 = 0$ ou $p = 2$ nous obtenons le tenseur des contraintes de Stokes.

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique d'un écoulement de fluide non-Newtoniens et incompressible, soumis à la loi de comportement (4.1) avec $1 < p < 2$. Nous considérons l'écoulement de ce fluide en régime stationnaire dans un domaine de faible épaisseur [voir la figure 3.1]

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\},$$

avec $\varepsilon \in]0, 1[$ est un réel strictement positif à tendre vers zéro et $h(x')$ est une fonction de classe $C^1(\omega)$ tel que

$$0 < \underline{h} = h_{min} \leq h(x') \leq h_{max} = \bar{h}, \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \bar{\omega}$, avec

- $\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x')$.
- $\bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ la frontière latérale.
- $\bar{\omega}$ est un domaine borné de \mathbb{R}^3 d'équation $x_3 = \varepsilon h(x')$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε .

La normale extérieure unitaire sur Γ^ε est notée $n = (n_1, n_2, n_3)$. La normale unitaire sur ω est le vecteur $(0, 0, -1)$.

On note

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= u^\varepsilon \cdot n, & u_\tau^\varepsilon &= u^\varepsilon - u_n^\varepsilon \cdot n, \\ \sigma_n^\varepsilon &= (\sigma^\varepsilon \cdot n) \cdot n, & \sigma_\tau^\varepsilon &= \sigma^\varepsilon \cdot n - (\sigma_n^\varepsilon) \cdot n, \end{aligned}$$

respectivement, la vitesse normale, la vitesse tangentielle, la composante normale et tangentielle du tenseur de contrainte.

Les équations qui traduisent l'écoulement en régime stationnaire d'un fluide incompressible dans Ω^ε sont les suivantes

- La loi de conservation de la quantité de mouvement

$$-\operatorname{div}(\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon)) = f^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (4.2)$$

où $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon)$ représente une densité massique des forces extérieures.

- La condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon. \quad (4.3)$$

Pour les conditions aux limites

- Nous supposons que la vitesse est connue sur Γ_1^ε et Γ_L^ε

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, \quad (4.4)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon. \quad (4.5)$$

- Sur ω nous supposons qu'il n'y a pas de flux sortant à travers ω

$$u^\varepsilon \cdot n = 0 \text{ sur } \omega, \quad (4.6)$$

cette condition est appelée condition de non-pénétration.

• Nous supposons aussi l'existence du frottement liquide-solide sur ω , ce frottement est modélisé par la loi non linéaire de Tresca

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon &\Rightarrow u_\tau^\varepsilon = 0, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon &\Rightarrow \exists \alpha > 0, \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = -\alpha \sigma_\tau^\varepsilon, \end{aligned} \right\} \text{ sur } \omega, \quad (4.7)$$

avec $k^\varepsilon(x)$ le coefficient de frottement.

4.2 Problème variationnel

Pour étudier la formulation variationnelle du problème on définit les ensembles suivants

$$V^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon, v \cdot n = 0 \text{ sur } \omega\},$$

$$V_{\text{div}}^\varepsilon = \{v \in V^\varepsilon : \text{div}(v) = 0\},$$

$$L_0^2(\Omega^\varepsilon) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega^\varepsilon) : \int_{\Omega^\varepsilon} \varphi dx = 0 \right\},$$

$L_0^2(\Omega^\varepsilon)$ sous espace vectoriel de fonctions de $L^2(\Omega^\varepsilon)$ à moyenne nulle.

Proposition 4.1 *La formulation variationnelle du problème s'écrit*

Trouver $(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \in V_{\text{div}}^\varepsilon \times L_0^2(\Omega^\varepsilon)$, tel que

$$\begin{aligned} a_{\mu_0}(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + a_{\mu_1}(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) - (\pi^\varepsilon, \text{div}(\varphi)) + j^\varepsilon(\varphi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \\ \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi \in V^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Où

$$a_{\mu_1}(u^\varepsilon, v) = \mu_1 \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^{p-2} d(u^\varepsilon) d(v) dx, \quad a_{\mu_0}(u^\varepsilon, v) = \mu_0 \int_{\Omega^\varepsilon} d(u^\varepsilon) d(v) dx,$$

$$(\pi^\varepsilon, \text{div}(v)) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} \pi^\varepsilon \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx, \quad j^\varepsilon(v) = \int_{\omega} k^\varepsilon |v| dx', \quad \forall v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3,$$

$$(f^\varepsilon, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \cdot v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3.$$

Preuve. Soit u^ε la solution de (4.2) – (4.7). En multipliant l'équation (4.2) par $(\varphi - u^\varepsilon)$ et par l'intégration sur Ω^ε , on obtient

$$- \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \cdot (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx.$$

Par la formule de Green, il vient que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \frac{\partial(\varphi_i - u_i^\varepsilon)}{\partial x_j} dx - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) n_j \cdot (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \cdot (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx.$$

En utilisant la symétrie de σ^ε , on a

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \frac{\partial(\varphi_i - u_i^\varepsilon)}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \frac{\partial(\varphi_i - u_i^\varepsilon)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sigma_{ji}^\varepsilon(u^\varepsilon) \frac{\partial(\varphi_j - u_j^\varepsilon)}{\partial x_i} \\ &= \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) d_{ij}(\varphi - u^\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.9)$$

En utilisant (4.9) et l'expression du tenseur de contrainte σ^ε , on obtient

$$a_{\mu_0}(u^\varepsilon, v) + a_{\mu_1}(u^\varepsilon, v) - (\pi^\varepsilon, \operatorname{div}(\varphi)) - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) n \cdot (\varphi - u^\varepsilon) dx = (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon). \quad (4.10)$$

Sur Γ^ε on a

$$- \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) n \cdot (\varphi - u^\varepsilon) dx = - \int_{\omega} \sigma_\tau^\varepsilon(u^\varepsilon) (\varphi - u^\varepsilon)_\tau dx,$$

car $(\varphi - u^\varepsilon) = 0$ sur $\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$, et $(\varphi - u^\varepsilon) \cdot n = 0$ sur ω .

D'autre part, d'après la condition de Tresca on a

$$\int_{\omega} k^\varepsilon (|\varphi| - |u^\varepsilon|) dx \geq - \int_{\omega} \sigma_\tau^\varepsilon(u^\varepsilon) (\varphi - u^\varepsilon)_\tau dx. \quad (4.11)$$

De (4.10) et (4.11) on obtient l'inéquation variationnelle (4.8). ■

4.2.1 Le problème variationnel dans un domaine fixe

Afin de pouvoir appréhender le comportement de $(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon)$, le domaine doit être indépendant de ε . Comme le chapitre précédent, nous utiliserons la technique de changement d'échelle dans Ω^ε sur la coordonnée x_3 , en introduisant le changement de variable $z = x_3/\varepsilon$, donc le domaine Ω^ε est transformé à un domaine Ω indépendant de ε , où

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, 0 < z < h(x')\},$$

où $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L \cup \bar{\omega}$ sa frontière.

Nous définissons des nouvelles variables pour la vitesse et la pression comme suit

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(x', z) = u_i^\varepsilon(x', x_3), \quad i = 1, 2, \\ \hat{u}_3^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3), \\ \hat{\pi}^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^2 \pi^\varepsilon(x', x_3). \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour les données, on suppose qu'elles dépendent de ε de la façon suivante

$$\begin{cases} \hat{f}(x', z) = \varepsilon^2 f^\varepsilon(x', x_3), \\ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \end{cases} \quad (4.13)$$

où \hat{f} et \hat{k} ne dépendent pas de ε .

Soit

$$V = \{\varphi \in H^1(\Omega)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1 \text{ et } \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \omega\},$$

$$V_{\text{div}} = \{\varphi \in V : \text{div}(\varphi) = 0\},$$

$$\Pi(V) = \{\varphi \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1, i = 1, 2\},$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} \varphi dx' dz = 0 \right\},$$

$$V_z = \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

où V_z est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^2 \left(\|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant (4.12) et (4.13), le problème (4.8) prend la forme

Trouver $(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\pi}^\varepsilon) \in V_{\text{div}} \times L_0^2(\Omega)$, tel que

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{\mu_0}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) + \hat{a}_{\mu_1}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) - (\hat{\pi}^\varepsilon, \text{div}(\hat{\varphi})) + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J}(\hat{u}^\varepsilon) \\ & \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right), \forall \hat{\varphi} \in V, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où

$$\hat{J}(\hat{\varphi}) = \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\varphi}| dx',$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mu_0}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) &= \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx' dz \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) \right] dx' dz \\ &+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \mu_0 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx' dz, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \hat{a}_{\mu_1}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) \\
&= \varepsilon^{4-p} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\mu_1}{2} |\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)|^{p-2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx' dz \\
&+ \varepsilon^{2-p} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\mu_1}{2} |\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)|^{p-2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) \right] dx' dz \\
&+ \varepsilon^{4-p} \int_{\Omega} \mu_1 |\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)|^{p-2} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx' dz,
\end{aligned}$$

avec

$$|\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)| = \left[\varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

4.3 Estimations a priori

Nous essayons maintenant d'étudier les estimations a priori sur la vitesse \hat{u}^ε et la pression $\hat{\pi}^\varepsilon$.

Théorème 4.1 *Supposons que $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)^3$ et soit $(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \in V_{\text{div}}^\varepsilon \times L_0^2(\Omega^\varepsilon)$, est une solution au problème (4.8), où $k^\varepsilon \in L_+^\infty(\omega)$ et $1 < p < 2$. Alors il existe une constante c indépendant de ε , telle que*

$$\sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c, \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left(\left\| \varepsilon^{\frac{2-p}{p}} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \varepsilon^{\frac{p+2}{p}} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right) + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \varepsilon^{\frac{2}{p}} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \varepsilon^{\frac{2}{p}} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq c, \quad (4.16)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{\pi}^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c, \quad (4.17)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{\pi}^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c, \quad (4.18)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{\pi}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon \cdot c. \quad (4.19)$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (4.8), nous choisissons $\varphi = 0$, donc nous avons

$$a_{\mu_0}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a_{\mu_1}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + j^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq (f^\varepsilon, u^\varepsilon).$$

Grâce à l'inégalité de Korn, il existe des constantes C_{K_1} et C_{K_2} indépendantes de ε telle que

$$\begin{aligned} a_{\mu_1}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) &\geq \mu_1 C_{K_1} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}^p, \\ a_{\mu_0}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) &\geq \mu_0 C_{K_0} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

donc, on obtient

$$\mu_0 C_{K_0} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \mu_1 C_{K_1} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}^p \leq (f^\varepsilon, u^\varepsilon).$$

D'autre part d'après l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Poincaré

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \varepsilon \bar{h} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},$$

et l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned} (f^\varepsilon, u^\varepsilon) &\leq \int_{\Omega^\varepsilon} |f^\varepsilon| |u^\varepsilon| dx' dx_3 \\ &\leq \left[\left(\frac{2}{\mu_0 C_{K_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon \bar{h} \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \right] \left[\left(\frac{\mu_0 C_{K_1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \right] \\ &\leq \frac{2}{\mu_0 C_{K_1}} (\varepsilon \bar{h})^2 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{\mu_0 C_{K_1}}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

donc, nous concluons

$$\frac{\mu_0 C_{K_0}}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \mu_1 C_{K_1} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}^p \leq \frac{2}{\mu_0 C_{K_1}} (\varepsilon \bar{h})^2 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2. \quad (4.20)$$

Comme

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 &= \varepsilon^{-1} \|\hat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \left\| \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 &= \varepsilon^{-1} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

en multipliant l'inégalité (4.20) par ε nous déduisons

$$\frac{\mu_0 C_{K_0}}{2} \left[\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \right] + \mu_1 C_{K_1} \left[\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}^p \right] \leq A,$$

où A est une constante ne dépend pas de ε avec

$$A = \frac{2}{\mu_0 C_{K_1}} \bar{h}^2 \|\hat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et à partir de là nous trouvons (4.15) et (4.16).

Pour prouver les estimations sur la pression (4.17) – (4.19), on choisit $\varphi = u^\varepsilon \pm \psi$ dans (4.8) avec $\psi \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$, on obtient

$$(\pi^\varepsilon, \operatorname{div}(\psi)) = a_{\mu_0}(u^\varepsilon, \psi) + a_{\mu_1}(u^\varepsilon, \psi) + (f^\varepsilon, \psi), \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega^\varepsilon),$$

cela implique que

$$\begin{aligned} |(\pi^\varepsilon, \operatorname{div}(\psi))| &\leq \mu_1 \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}^p + \mu_1 \|\nabla \psi\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}^p \\ &\quad + \mu_0 \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu_0} \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + 2\mu_0 \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

on prend $\psi = (\psi_1, 0, 0)$, $\psi = (0, \psi_2, 0)$, $\psi = (0, 0, \psi_3)$ respectivement dans (4.21), et en passant au domaine fixe Ω , on obtient (4.17) – (4.19). ■

Les estimations que nous venons d'obtenir nous permettent de passer à la limite quand ε tend vers zéro et justifier le modèle bidimensionnel obtenu.

4.4 Résultats de convergence et problème limite

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses du Théorème 4.1, il existe $u_i^* \in V_z$, $i = 1, 2$ et $\pi^* \in L_0^2(\Omega)$ tels que*

$$\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*, \quad i = 1, 2, \text{ faiblement dans } V_z, \quad (4.22)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0, \quad i, j = 1, 2, \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \quad (4.23)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2, \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \quad (4.24)$$

$$\varepsilon^{\frac{2-p}{p}} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2, \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (4.25)$$

$$\varepsilon^{\frac{2}{p}} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0, \quad i, j = 1, 2, \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (4.26)$$

$$\varepsilon^{\frac{2+p}{p}} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2, \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (4.27)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0, \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \quad (4.28)$$

$$\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0, \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \quad (4.29)$$

$$\hat{\pi}^\varepsilon \rightharpoonup \pi^*, \text{ faiblement dans } L_0^2(\Omega). \quad (4.30)$$

Preuve. De l'estimation

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \quad i = 1, 2,$$

et l'inégalité de Poincaré sur Ω on en déduit (4.22). Pour (4.23) – (4.27) selon (4.15), (4.16) et (4.22).

D'après l'inégalité de Poincaré on a

$$\|\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

donc il existe une fonction v telle que

$$\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup v, \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Puisque $\operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ dans Ω , donc

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} g(x) \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_i} dx' dz + \int_{\Omega} g(x) \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dx' dz = 0, \quad \forall g(x) \in L_0^2(\Omega).$$

Utilisons la formule de Green, on obtient

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon \hat{u}_i^\varepsilon \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx' dz + \int_{\Omega} \varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \frac{\partial g(x)}{\partial z} dx' dz = 0, \quad \forall g(x) \in L_0^2(\Omega), \quad (4.31)$$

comme $\varepsilon \hat{u}_i^\varepsilon \rightarrow 0$, et $\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup v$, on déduit que

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial g(x)}{\partial z} dx' dz = 0, \quad \forall g(x) \in L_0^2(\Omega),$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \text{ p.p dans } \Omega.$$

Comme dans ([5]), on choisit $g(x) = z\eta(x') - |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} z\eta(x') dx' dz$, $\eta(x') \in \mathcal{D}(\omega)$ dans (4.31), on obtient que

$$v = 0, \text{ p.p dans } \Omega.$$

D'après le Théorème 4.1 il existe une constante positive C indépendante de ε telle que

$$\|\nabla \hat{\pi}^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)^3} \leq C,$$

en utilisant [46], on en déduit que

$$\|\hat{\pi}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla \hat{\pi}^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)^3} \leq C.$$

Donc il existe une sous suite $\hat{\pi}^\varepsilon$ qui converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers π^* , et comme $L_0^2(\Omega)$ est un sous espace faiblement fermé dans $L^2(\Omega)$, donc $\pi^* \in L_0^2(\Omega)$. ■

Lemme 4.1 *La limite (u^*, π^*) satisfait*

$$\pi^*(x', z) = \pi^*(x'), \text{ p.p dans } \Omega, \quad (4.32)$$

et l'équation suivante

$$\int_{\Omega} \pi^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) dx' dz = 0. \quad (4.33)$$

Preuve. Nous avons selon (4.21)

$$\left| \left(\hat{\pi}^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right| \leq \varepsilon.c, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \left(\hat{\pi}^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \left(\frac{\partial \hat{\pi}^\varepsilon}{\partial z}, \varphi \right) \right| = 0, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

et en utilisant (4.30), on en déduit (4.32).

Comme $\text{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ dans Ω , on obtient pour $\theta \in \mathcal{D}(\omega)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \theta(x') \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right) dx' dz \\ &= \int_{\Omega} \theta(x') \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_2} \right) dx' dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

comme $\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*$, $i = 1, 2$ dans V_z , on obtient pour u^*

$$\int_{\Omega} \theta(x') \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) dx' dz = 0. \quad (4.34)$$

En utilisant (4.32), π^* est maintenant dans $L^2(\omega)$. Donc il existe (θ_m) dans $\mathcal{D}(\omega)$ tel que $\theta_m \rightarrow \pi^*$ dans $L^2(\omega)$, et à partir de (4.34), on obtient (4.33) lorsque $m \rightarrow \infty$. ■

Théorème 4.3 *Avec les mêmes hypothèses du Théorème 4.2, (u^*, π^*) satisfait*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial (\hat{\varphi}_i - u_i^*)}{\partial z} dx' dz - \int_{\Omega} \pi^* \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} \right) dx' dz \\ & + \int_{\omega} \hat{k} (|\hat{\varphi}| - |u^*|) dx' \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u_i^* \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(V), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$- \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \hat{f}_i, \text{ pour } i = 1, 2 \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (4.36)$$

Preuve. En passant à la limite dans (4.14), en utilisant le résultat du Théorème 4.2 et le fait que $\hat{J}(\cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial (\hat{\varphi}_i - u_i^*)}{\partial z} dx' dz - \int_{\Omega} \pi^* \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} \right) dx' dz \\ & + \int_{\omega} \hat{k} (|\hat{\varphi}| - |u^*|) dx' \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u_i^* \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(V). \end{aligned}$$

On choisit maintenant dans cette inéquation variationnelle

$$\hat{\varphi}_i = u_i^* \pm w_i, \quad w_i \in H_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

donc, on trouve

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial z} dx' dz - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \pi^* \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dx' dz = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i w_i dx' dz,$$

en utilisant la formule de Green et en choisissant $w_1 = 0$ et $w_2 \in H_0^1(\Omega)$, puis $w_2 = 0$ et $w_1 \in H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu_0}{2} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right] w_i dx' dz + \int_{\Omega} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} w_i dx' dz = \int_{\Omega} \hat{f}_i w_i dx' dz, \quad \forall w_i \in H_0^1(\Omega),$$

donc, nous aurons

$$- \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2} + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \hat{f}_i, \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ dans } H^{-1}(\Omega). \quad (4.37)$$

Comme $\hat{f}_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$ alors (4.37) est valide dans $L^2(\Omega)$. ■

Théorème 4.4 *Soit*

$$\tau^*(x') = \frac{\partial u^*}{\partial z}(x', 0) \quad \text{et} \quad s^*(x') = u^*(x', 0),$$

les traces de u^* sur ω . Sous les mêmes hypothèses du Théorème 4.3, τ^* , s^* vérifient l'inégalité suivante

$$\int_{\omega} \hat{k} (|\psi + s^*| - |s^*|) dx' - \int_{\omega} \frac{\mu_0}{2} \tau^* \psi dx' \geq 0, \quad \forall \psi \in L^2(\omega), \quad (4.38)$$

et la forme de la condition aux limites de Tresca suivante

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\mu_0}{2} |\tau^*| < \hat{k} \Rightarrow s^* = 0, \\ & \frac{\mu_0}{2} |\tau^*| = \hat{k} \Rightarrow \exists \alpha > 0 : s^* = \alpha \tau^*, \end{aligned} \right\} \text{ p.p sur } \omega. \quad (4.39)$$

Aussi u^* et π^* vérifient la formulation faible de l'équation de Reynolds

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left(\frac{h^3(x')}{12} \nabla \pi^* + \frac{h(x') \mu_0}{8} s^* + \tilde{F} + \frac{\mu_0}{2} \int_0^h u^*(x', \zeta) d\zeta \right) \nabla \psi(x') dx' \\ & = 0, \forall \psi \in H^1(\omega), \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x', h) &= \int_0^h F(x', z) dz - \frac{h}{2} F(x', h), \\ F(x', z) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}(x', \eta) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

De plus la solution (u^*, π^*) est unique dans $V_z \times L_0^2(\omega)$.

Preuve. Pour (4.38), (4.39), il suffit de suivre les mêmes techniques dans le chapitre 3 [Théorème (3.5)]. Pour prouver (4.40), en intégrant (4.36) de 0 à z , on voit que

$$-\frac{\mu_0}{2} \frac{\partial u_i^*}{\partial z}(x', z) + \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial u_i^*}{\partial z}(x', 0) + z \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \int_0^z \hat{f}_i(x', \eta) d\eta.$$

En intégrant pour la deuxième fois entre 0 et z , on obtient

$$\frac{\mu_0}{2} u^*(x', z) = z \frac{\mu_0}{2} \tau_i^* + \frac{\mu_0}{2} s_i^* + \frac{z^2}{2} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} - \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x', \eta) d\eta d\zeta, \quad (4.41)$$

on remplace z par $h(x')$, et comme $u^*(x', h(x')) = 0$, on déduit que

$$h(x') \frac{\mu_0}{2} \tau_i^* + \frac{\mu_0}{2} s_i^* + \frac{h(x')^2}{2} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \int_0^h \int_0^\zeta \hat{f}_i(x', \eta) d\eta d\zeta. \quad (4.42)$$

Intégrant (4.41) de 0 à $h(x')$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{2} \int_0^h u^*(x', \zeta) d\zeta dz &= h(x') \frac{\mu_0}{2} s_i^* + \frac{1}{2} h(x')^2 \frac{\mu_0}{2} \tau_i^* + \frac{h(x')^3}{6} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} \\ &\quad - \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x', \eta) d\eta d\zeta dz. \end{aligned} \quad (4.43)$$

De (4.42) et (4.43), nous en déduisons (4.40).

Pour prouver l'unicité de la solution, supposons qu'il existe deux solutions (u^{*1}, π^{*1}) et (u^{*2}, π^{*2}) du problème limite (4.35) – (4.36). On prend $\hat{\varphi} = u^{*2}$ puis $\hat{\varphi} = u^{*1}$ respectivement dans (4.35), et en sommant les deux inéquations, on obtient

$$\frac{\mu_0}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i^{*1}}{\partial z} - \frac{\partial u_i^{*2}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_i^{*1}}{\partial z} - \frac{\partial u_i^{*2}}{\partial z} \right) dx' dz \leq 0,$$

ainsi on trouve

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z} (u^{*1} - u^{*2}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

Par l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|u^{*1} - u^{*2}\|_{V_z} = 0.$$

L'unicité de la pression π^* dans $L_0^2(\omega)$ découle ensuite de (4.40), en fait on obtient d'abord

$$\int_{\omega} \frac{h^3}{12} \nabla (\pi^{*1} - \pi^{*2}) \nabla \psi dx' = 0,$$

en choisissant $\psi = \pi^{*1} - \pi^{*2}$, et par l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\pi^{*1} = \pi^{*2}, \text{ p.p dans } \omega.$$

■

Chapitre 5

Sur le comportement asymptotique d'un fluide non-Newtonien généralisé dans un film mince

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude mathématique et asymptotique d'un modèle non linéaire qui décrit l'écoulement d'un fluide non-Newtonien généralisé et incompressible en régime stationnaire dans un domaine mince Ω^ε borné de \mathbb{R}^3 avec la condition de frottement non linéaire du type Tresca sur une partie du bord. On cherche à connaître le comportement asymptotique de ce problème lorsque ε tend vers zéro.

Contenu

5.1 Position du problème et formulation variationnelle.

5.2 Changement du domaine et certaines estimations.

5.3 Résultats de convergence et l'équation spécifique de Reynolds.

5.1 Position du problème et formulation variationnelle

Dans ce chapitre désignera le même domaine mince considéré dans le troisième chapitre

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

Nous rappelons que Γ^ε est sa frontière, avec

$$\Gamma^\varepsilon = \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \bar{\omega}.$$

On considère un problème mécanique qui décrit l'écoulement stationnaire du fluide non-Newtonien généralisé incompressible occupant un domaine Ω^ε , on désigne par $u^\varepsilon(x)$ la vitesse et $\pi^\varepsilon(x)$ la pression du fluide. Soit \mathbb{S} l'ensemble des matrices symétriques du type 3×3 . Donc $D(u^\varepsilon) \in \mathbb{S}$ dénote le gradient symétrique de u^ε dont les composantes sont $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right)$, $1 \leq i, j \leq 3$. Pour $\eta, \zeta \in \mathbb{S}$, nous définissons le produit scalaire et la norme correspondante par

$$(\eta : \zeta) = \sum_{i,j=1}^3 \eta_{ij} \zeta_{ij} \quad \text{et} \quad |\eta| = (\eta : \eta)^{\frac{1}{2}}.$$

Le tenseur des contraintes est donné par

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) = T^\varepsilon(D(u^\varepsilon)) - \pi^\varepsilon I_3,$$

où la fonction tensorielle non linéaire $T^\varepsilon : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ est supposée satisfaire les propriétés suivantes; nous considérons d'abord le cas $p \geq 2$.

Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ indépendantes de ε et μ^ε tels que $\forall \eta, \zeta \in \mathbb{S}$

A₁)

$$|T^\varepsilon(\eta)| \leq c_1 (\mu^\varepsilon + |\eta|)^{p-2} |\eta|,$$

A₂)

$$c_2 |\eta - \zeta|^p \leq (T^\varepsilon(\eta) - T^\varepsilon(\zeta) : \eta - \zeta),$$

A₃)

$$T(0) = 0.$$

Ensuite, nous considérons le cas $1 < p < 2$.

Il existe des constantes $c_3, c_4 > 0$ indépendantes de ε et μ^ε tels que $\forall \eta, \zeta \in \mathbb{S}$

B₁)

$$|T^\varepsilon(\eta)| \leq c_3 |\eta|^{p-1},$$

$B_2)$

$$c_4 |\eta - \zeta|^2 (\mu^\varepsilon + |\eta| + |\zeta|)^{p-2} \leq (T^\varepsilon(\eta) - T^\varepsilon(\zeta) : \eta - \zeta),$$

$B_3)$

$$T(0) = 0.$$

Exemple standard pour le tenseur non linéaire $T^\varepsilon(\cdot)$

$$T^\varepsilon(\eta) = (\mu^\varepsilon + |\eta|)^{p-2} \eta. \quad (5.1)$$

Ce modèle a été étudié initialement par OA. Ladyzhenskaya (voir [31], [32] et [33]).

Pour le cas $p = 2$, nous pouvons choisir par exemple le tenseur suivant

$$T^\varepsilon(\eta) = \frac{\eta}{\sqrt{1 + e^{-|\varepsilon\eta|^2}}}.$$

Comme d'habitude, on note par $n = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur de l'unité normal sortant de la frontière Γ^ε . Les composantes normales et tangentielles de u^ε sont données par

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot n, \quad u_\tau^\varepsilon = u^\varepsilon - u_n^\varepsilon n.$$

De même, pour un champ tensoriel σ^ε , nous notons σ_n^ε et σ_τ^ε les composantes normales et tangentielles de σ^ε données par

$$\sigma_n^\varepsilon = (\sigma^\varepsilon \cdot n) \cdot n, \quad \sigma_\tau^\varepsilon = \sigma^\varepsilon \cdot n - (\sigma_n^\varepsilon) \cdot n.$$

Le problème mécanique peut se formuler de la manière suivante

Problème 1. Trouver le champ de vitesse $u^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ et la pression $\pi^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, tels que

$$-\operatorname{div}(\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon)) = f^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (5.2)$$

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) = T^\varepsilon(D(u^\varepsilon)) - \pi^\varepsilon I_3 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div}(u^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (5.4)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, \quad (5.5)$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \quad (5.6)$$

$$u^\varepsilon \cdot n = 0 \text{ sur } \omega, \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Rightarrow u_\tau^\varepsilon = 0, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Rightarrow \exists \alpha > 0, \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = -\alpha \sigma_\tau^\varepsilon, \end{array} \right\} \text{ sur } \omega. \quad (5.8)$$

Où l'équation (5.2) représente la loi de conservation de la quantité de mouvement avec $f^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ la force externe. La relation (5.3) représente la loi de comportement du fluide incompressible pour le modèle non-Newtonien généralisé. L'équation (5.4) décrit la condition d'incompressibilité du fluide. (5.5) et (5.6) les conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_1^ε et Γ_L^ε . (5.7) est une condition sans flux sur ω . (5.8) est une condition de la loi de frottement de Tresca sur la partie ω de la frontière avec k^ε le coefficient de frottement.

Dans la suite, p désigne un nombre réel tel que $1 < p < \infty$ et q représente son conjugué: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour étudier la formulation variationnelle du problème on introduit le cadre fonctionnel suivant

$$V^{\varepsilon,p} = \{v \in W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon, v.n = 0 \text{ sur } \omega\},$$

$$V_{\text{div}}^{\varepsilon,p} = \{v \in V^{\varepsilon,p} : \text{div}(v) = 0\},$$

qui sont des sous espaces vectoriels de $W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^3$.

On note par $L_0^q(\Omega^\varepsilon)$ le sous espace vectoriel de fonctions de $L^q(\Omega^\varepsilon)$ à moyenne nulle

$$L_0^q(\Omega^\varepsilon) = \left\{ \varphi \in L^q(\Omega^\varepsilon) : \int_{\Omega^\varepsilon} \varphi dx' dx_3 = 0 \right\}.$$

Soit u^ε la solution de (5.2) – (5.8), en multipliant l'équation (5.2) par $(\varphi - u^\varepsilon)$ et intégrons le résultat obtenu sur Ω^ε , puis en utilisant la formule de Green, nous pouvons montrer que le problème (5.2) – (5.8) est équivalent au problème variationnel suivant

Problème 2. Trouver $(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \in V_{\text{div}}^{\varepsilon,p} \times L_0^q(\Omega^\varepsilon)$ tel que

$$a_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) - (\pi^\varepsilon, \text{div}(\varphi)) + j^\varepsilon(\varphi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \forall \varphi \in V^{\varepsilon,p}. \quad (5.9)$$

Où

$$a_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} T^\varepsilon(D(u^\varepsilon)) : D(v) dx' dx_3, \quad (\pi^\varepsilon, \text{div}(v)) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} \pi^\varepsilon \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx' dx_3,$$

$$j^\varepsilon(v) = \int_{\omega} k^\varepsilon |v| dx', \quad (f^\varepsilon, v) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon . v_i dx' dx_3, \forall v \in W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^3, \text{ où } dx' = dx_1 dx_2.$$

Théorème 5.1 Supposons que $f^\varepsilon \in L^q(\Omega^\varepsilon)^3$ et $k^\varepsilon \in L^\infty(\omega)$, $k^\varepsilon > 0$ alors il existe une solution unique $u^\varepsilon \in V_{\text{div}}^{\varepsilon,p}$ de (5.9).

Preuve. Lorsque la fonction test appartient à $V_{\text{div}}^{\varepsilon,p}$ dans (5.9), on obtient le problème variationnel suivant: Trouver $u^\varepsilon \in V_{\text{div}}^{\varepsilon,p}$ tel que

$$(\mathcal{A}_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon), \varphi - u^\varepsilon) + j^\varepsilon(\varphi) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi \in V_{\text{div}}^{\varepsilon,p},$$

où

$$(\mathcal{A}_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon), \varphi) = a(u^\varepsilon, \varphi).$$

La preuve est basée sur la théorie des opérateurs non linéaires $\mathcal{A}_{T^\varepsilon}(\cdot)$ (voir le Théorème 1.12)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{T^\varepsilon} : W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^3 &\longrightarrow (W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^3)' \\ v &\longmapsto \mathcal{A}_{T^\varepsilon}(v). \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (A_i) et (B_i) , $i = 1, 2, 3$, on peut montrer que l'opérateur $\mathcal{A}_{T^\varepsilon}(\cdot)$ est borné, coercif, hémicontinue et strictement monotone, et que $j^\varepsilon(\cdot)$ est convexe, propre et semi-continue inférieurement. ■

La preuve de l'existence de $\pi^\varepsilon \in L_0^q(\Omega^\varepsilon)$ telle que $(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon)$ vérifie (5.9) est donné comme dans [2].

5.2 Changement du domaine et certaines estimations

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents pour étudier l'analyse asymptotique du problème (5.9), nous allons utiliser la technique de changement de la variable $z = x_3/\varepsilon$. Donc $\forall (x', x_3) \in \Omega^\varepsilon$, nous trouvons $(x', z) \in \Omega$ où

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, 0 < z < h(x')\},$$

avec $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L \cup \bar{\omega}$ sa frontière.

Maintenant, nous définissons des nouvelles fonctions sur Ω

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(x', z) = u_i^\varepsilon(x', x_3), \quad i = 1, 2, \\ \hat{u}_3^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^{-1}u_3^\varepsilon(x', x_3), \\ \hat{\pi}^\varepsilon(x', z) = \varepsilon^p\pi^\varepsilon(x', x_3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{f}(x', z) = \varepsilon^p f^\varepsilon(x', x_3), \\ \hat{k} = \varepsilon^{p-1}k^\varepsilon, \\ \hat{T}_{ij}(x', z) = \varepsilon^{p-1}T_{ij}^\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}\eta\right), \quad \forall \eta \in \mathbb{S}, 1 \leq i, j \leq 3, \end{cases}$$

où \hat{f} , \hat{k} et $\hat{T}_{ij}(\cdot)$, $1 \leq i, j \leq 3$ indépendants de ε . Nous présentons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme suit

$$V^p = \{\varphi \in W^{1,p}(\Omega)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1 \text{ et } \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \omega\},$$

$$V_{\text{div}}^p = \{\varphi \in V^p : \text{div}(\varphi) = 0\},$$

$$\Pi^p(V^p) = \{\varphi \in W^{1,p}(\Omega)^2 : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1, i = 1, 2\},$$

$$L_0^q(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^q(\Omega) : \int_{\Omega} \varphi dx' dz = 0 \right\},$$

$$V_z^p = \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^p(\Omega) : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^p(\Omega), i = 1, 2 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

V_z^p est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{V_z^p} = \left(\sum_{i=1}^2 \left(\|v_i\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque nous passons au domaine fixe Ω en introduisant les nouvelles variables dans l'inéquation variationnelle (5.9) et après la multiplication par ε^{p-1} , nous obtenons

Problème 3. Trouver $(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\pi}^\varepsilon) \in V_{\text{div}}^p \times L_0^q(\Omega)$, tel que

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{\hat{T}}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) - (\hat{\pi}^\varepsilon, \text{div}(\hat{\varphi})) + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J}(\hat{u}^\varepsilon) \\ & \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right), \forall \hat{\varphi} \in V^p, \end{aligned} \quad (5.10)$$

où

$$\hat{J}(\hat{\varphi}) = \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\varphi}| dx',$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\hat{T}}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) &= \varepsilon \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{ij}(\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx' dz \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{i3}(\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)) \left[\frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) \right] dx' dz \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} \hat{T}_{33}(\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon)) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx' dz, \end{aligned}$$

$$\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_1} \right) & \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_2} \right) & \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \end{pmatrix},$$

et

$$(\hat{\pi}^\varepsilon, \operatorname{div}(\hat{\varphi})) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\pi}^\varepsilon \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_i} dx' dz + \int_{\Omega} \hat{\pi}^\varepsilon \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx' dz.$$

Le Théorème qui suit donne des estimations a priori pour les suites \hat{u}^ε , $\hat{T} \left(\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon) \right)$ et $\hat{\pi}^\varepsilon$.

Théorème 5.2 *Supposons que $f^\varepsilon \in L^q(\Omega^\varepsilon)^3$ et $(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) \in V_{\operatorname{div}}^{\varepsilon,p} \times L^q(\Omega^\varepsilon)$ est une solution au problème (5.9), où le coefficient de frottement k^ε est une fonction non-négative dans $L^\infty(\omega)$.*

Alors il existe une constante c indépendante de ε telle que

$$\sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right) + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq c, \quad (5.11)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left\| \hat{T}_{i3} \left(\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon) \right) \right\|_{L^q(\Omega)}^q + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \hat{T}_{ij} \left(\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon) \right) \right\|_{L^q(\Omega)}^q + \left\| \hat{T}_{33} \left(\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon) \right) \right\|_{L^q(\Omega)}^q \leq c, \quad (5.12)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{\pi}^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq c, \quad (5.13)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{\pi}^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq c, \quad (5.14)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{\pi}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \varepsilon \cdot c. \quad (5.15)$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (5.9), nous choisissons $\varphi = 0$, donc nous avons

$$a_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + j^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq (f^\varepsilon, u^\varepsilon),$$

comme $j^\varepsilon(\cdot)$ est positif, nous obtenons

$$a_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq (f^\varepsilon, u^\varepsilon),$$

donc, nous distinguons deux cas

1) Pour le cas $p \geq 2$, on a d'après les hypothèses (A_2) et (A_3) , il existe une constante c_1 indépendante de ε telle que

$$a_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq c_1 \|D(u^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p.$$

Utilisation l'inégalité de Korn $\|D(u^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p \geq C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p$, on obtient

$$c_1 C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p \leq (f^\varepsilon, u^\varepsilon). \quad (5.16)$$

Nous appliquons l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Poincaré

$$\|u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3} \leq \varepsilon \bar{h} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}},$$

et l'inégalité de Young, nous trouvons la majoration suivante

$$\begin{aligned} (f^\varepsilon, u^\varepsilon) &\leq \int_{\Omega^\varepsilon} |f^\varepsilon| |u^\varepsilon| dx' dx_3 \\ &\leq \left(\frac{2}{c_1 C_K}\right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon \bar{h} \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3} \left(\frac{c_1 C_K}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}} \\ &\leq \left(\frac{2}{c_1 C_K}\right)^{\frac{q}{p}} (\varepsilon \bar{h})^q \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3}^q + \frac{c_1 C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p. \end{aligned} \quad (5.17)$$

De (5.16)-(5.17), nous concluons

$$\frac{c_1 C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p \leq \left(\frac{2}{c_1 C_K}\right)^{\frac{q}{p}} (\varepsilon \bar{h})^q \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3}^q. \quad (5.18)$$

Comme

$$\varepsilon^q \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3}^q = \varepsilon^{1-p} \left\| \hat{f} \right\|_{L^q(\Omega)^3}^q,$$

nous multiplions (5.18) par ε^{p-1} , nous déduisons

$$\varepsilon^{p-1} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p \leq A, \quad (5.19)$$

où A est une constante ne dépend pas de ε avec

$$A = \left(\frac{2}{c_1 C_K}\right)^{\frac{q}{p}+1} \bar{h}^q \left\| \hat{f} \right\|_{L^q(\Omega)^3}^q.$$

2) Pour le cas $1 < p < 2$, on a selon les hypothèses (B_2) et (B_3) , il existe une constante c_4 indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} a_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) &\geq \int_{\Omega^\varepsilon} c_4 |D(u^\varepsilon)|^2 (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-2} dx' dx_3 \\ &\geq \int_{\Omega^\varepsilon} c_4 |D(u^\varepsilon)|^2 (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-2} dx' dx_3 \\ &\quad + \int_{\Omega^\varepsilon} c_4 (2\mu^\varepsilon |D(u^\varepsilon)| + (\mu^\varepsilon)^2) (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-2} dx' dx_3 \\ &\quad - \int_{\Omega^\varepsilon} c_4 (2\mu^\varepsilon |D(u^\varepsilon)| + (\mu^\varepsilon)^2) (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-2} dx' dx_3 \\ &\geq \int_{\Omega^\varepsilon} c_4 (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^p dx' dx_3 - \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon c_4 (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-1} dx' dx_3. \end{aligned}$$

Donc, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} c_4 (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^p dx' dx_3 \\ & \leq \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon c_4 (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-1} dx' dx_3 + \int_{\Omega^\varepsilon} |f^\varepsilon| |u^\varepsilon| dx' dx_3, \end{aligned} \quad (5.20)$$

d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} (2\mu^\varepsilon c_4) (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-1} dx' dx_3 \\ & \leq \left(\left((3)^{\frac{p}{q}} (2\mu^\varepsilon)^p (c_4)^{\frac{p(q-1)}{q}} \right) \varepsilon |\Omega| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{3} c_4 \int_{\Omega^\varepsilon} (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^p dx' dx_3 \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left((2\mu^\varepsilon)^p (3)^{\frac{p}{q}} (c_4)^{\frac{p(q-1)}{q}} \right) \varepsilon |\Omega| + \frac{c_4}{3} \int_{\Omega^\varepsilon} (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^p dx' dx_3, \end{aligned} \quad (5.21)$$

et

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |f^\varepsilon| |u^\varepsilon| dx' dx_3 \leq \left(\frac{2}{c_4 C_K} \right)^{\frac{q}{p}} (\varepsilon \bar{h})^q \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3}^q + \frac{c_4 C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p. \quad (5.22)$$

Insertion (5.22) et (5.21) dans (5.20), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{2c_4}{3} (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^p dx' dx_3 & \leq \frac{c_4 C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p + \left((3)^{\frac{p}{q}} (c_4)^{\frac{p(q-1)}{q}} \right) \varepsilon (2\mu^\varepsilon)^p |\Omega| \\ & \quad + \left(\frac{2}{c_4 C_K} \right)^{\frac{q}{p}} (\varepsilon \bar{h})^q \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3}^q, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\frac{c_4 C_K}{6} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p \leq \left((3)^{\frac{p}{q}} (c_4)^{\frac{p(q-1)}{q}} \right) \varepsilon (2\mu^\varepsilon)^p |\Omega| + \left(\frac{2}{c_4 C_K} \right)^{\frac{q}{p}} (\varepsilon \bar{h})^q \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3}^q,$$

si nous prenons $\mu^\varepsilon = \hat{\mu}/\varepsilon$, et nous multiplions cette inégalité par ε^{p-1} , nous aurons

$$\varepsilon^{p-1} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p \leq B, \quad (5.23)$$

où B est une constante ne dépend pas de ε avec

$$B = \frac{6}{c_4 C_K} \left[\left(\frac{2}{c_4 C_K} \right)^{\frac{q}{p}} \bar{h}^q \|\hat{f}\|_{L^q(\Omega)^3}^q + \left((3)^{\frac{p}{q}} (c_4)^{\frac{p(q-1)}{q}} \right) (2\hat{\mu})^p |\Omega| \right].$$

Enfin, pour obtenir l'estimation (5.11), nous utilisons les inégalités (5.19), (5.23) et l'égalité

$$\left\| \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_3} \right\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)}^p = \varepsilon^{1-p} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)}^p, \quad i = 1, 2.$$

Pour établir (5.12), on utilise l'hypothèse (A₁), on trouve pour $p \in [2, +\infty[$

$$\begin{aligned} |T^\varepsilon(D(u^\varepsilon))| &\leq c_1 (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-2} |D(u^\varepsilon)| \\ &\leq c_1 (\mu^\varepsilon + |D(u^\varepsilon)|)^{p-1} \\ &\leq c_1 (\mu^\varepsilon + |\nabla u^\varepsilon|)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons $\forall a, b > 0$, et $1 \leq \lambda < +\infty$

$$(a + b)^\lambda \leq 2^{\lambda-1} (a^\lambda + b^\lambda),$$

donc, on obtient

$$\|T^\varepsilon(D(u^\varepsilon))\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^q \leq 2^{p-1} (c_1)^q \varepsilon |\Omega| (\mu^\varepsilon)^p + 2^{p-1} (c_1)^q \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p. \quad (5.24)$$

De même, nous utilisons l'hypothèse (B₁), on trouve pour $p \in]1, 2[$

$$\|T^\varepsilon(D(u^\varepsilon))\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^q \leq (c_3)^q \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p. \quad (5.25)$$

Nous multiplions (5.24) et (5.25) par ε^{p-1} , et on utilise (5.19) et (5.23), nous obtenons (5.12).

Pour montrer (5.13) – (5.15), nous avons selon (5.9)

$$(\pi^\varepsilon, \operatorname{div}(\psi)) = a_{T^\varepsilon}(u^\varepsilon, \psi) + (f^\varepsilon, \psi), \quad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^3,$$

cela implique que

$$\begin{aligned} |(\pi^\varepsilon, \operatorname{div}(\psi))| &\leq \|T^\varepsilon(D(u^\varepsilon))\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}} \|\nabla \psi\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}} + \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3} \|\psi\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3} \\ &\leq \|T^\varepsilon(D(u^\varepsilon))\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^q + (\varepsilon \bar{h})^q \|f^\varepsilon\|_{L^q(\Omega^\varepsilon)^3}^q + 2 \|\nabla \psi\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3 \times 3}}^p, \end{aligned} \quad (5.26)$$

nous choisissons $\psi = (\psi_1, 0, 0)$, $\psi = (0, \psi_2, 0)$, $\psi = (0, 0, \psi_3)$ respectivement dans (5.26), et changeons les variables, nous obtenons (5.13) – (5.15). ■

5.3 Résultats de convergence et l'équation spécifique de Reynolds

Grâce aux estimations obtenues dans la section précédente nous obtenons d'abord le théorème de convergence et le problème limite. Puis nous établissons l'équation généralisée faible de Reynolds.

Théorème 5.3 *Sous les hypothèses du Théorème 5.2, il existe $u_i^* \in V_z^p$, $i = 1, 2$, $\pi^* \in L_0^q(\Omega)$ et $\hat{D}(u^*) \in L^p(\Omega)^{3 \times 3}$ tels que*

$$\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*, \quad i = 1, 2, \text{ faiblement dans } V_z^p, \quad (5.27)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0, \quad i, j = 1, 2, \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (5.28)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2, \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (5.29)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0, \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (5.30)$$

$$\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0, \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (5.31)$$

$$\tilde{D}(\hat{u}^\varepsilon) \rightharpoonup \hat{D}(u^*), \text{ faiblement dans } L^p(\Omega)^{3 \times 3}, \quad (5.32)$$

où

$$\hat{D}(u^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^*}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^*}{\partial z} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\pi}^\varepsilon \rightharpoonup \pi^*, \text{ faiblement dans } L_0^q(\Omega). \quad (5.33)$$

Preuve. Selon le Théorème 5.2, il existe une constante c indépendante de ε telle que

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq c, \quad i = 1, 2.$$

En utilisant cette estimation avec l'inégalité de Poincaré dans le domaine Ω , on obtient (5.27), pour (5.28) – (5.29) selon (5.11) et (5.27). Puisque $\operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$, par (5.12) et avec un choix particulier de la fonction test, on obtient (5.30) et (5.31). Nous obtenons (5.32) de (5.27)–(5.31) et (5.12). D'après (5.13)–(5.15) il existe une constante positive c indépendante de ε telle que

$$\|\nabla \hat{\pi}^\varepsilon\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq c,$$

comme $\hat{\pi}^\varepsilon \in L_0^q(\Omega)$, donc il existe une constante positive c' indépendante de ε telle que (voir par exemple [46])

$$\|\hat{\pi}^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leq c' \|\nabla \hat{\pi}^\varepsilon\|_{W^{-1,q}(\Omega)},$$

d'où

$$\|\hat{\pi}^\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leq c''.$$

Donc il existe une sous suite $\hat{\pi}^\varepsilon$ qui converge faiblement dans $L^q(\Omega)$ vers π^* , et par conséquent (5.33) découle. ■

Lemme 5.1 *La limite (u^*, π^*) satisfait*

$$\pi^*(x', z) = \pi^*(x'), \text{ p.p dans } \Omega, \quad (5.34)$$

et l'équation suivante

$$\int_{\Omega} \pi^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) dx' dz = 0. \quad (5.35)$$

Preuve. Nous avons selon (5.26)

$$\left| \left(\hat{\pi}^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right| \leq \varepsilon.c, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \left(\hat{\pi}^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \left(\frac{\partial \hat{\pi}^\varepsilon}{\partial z}, \varphi \right) \right| = 0, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

et en utilisant (5.33), nous en déduisons (5.34).

Comme $\text{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ dans Ω , nous obtenons pour $g \in \mathcal{D}(\omega)$.

$$\int_{\Omega} g(x') \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right) dx' dz = \int_{\Omega} g(x') \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial x_2} \right) dx' dz = 0,$$

on a $\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*$, $i = 1, 2$ dans V_z^p , donc nous obtenons pour u^*

$$\int_{\Omega} g(x') \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) dx' dz = 0. \quad (5.36)$$

Grâce à (5.34), π^* est maintenant dans $L^q(\omega)$. Donc il existe (g_m) dans $\mathcal{D}(\omega)$ tel que $g_m \rightarrow \pi^*$ dans $L^q(\omega)$, et de (5.36), on obtient (5.35) quand $m \rightarrow \infty$. ■

Théorème 5.4 *Avec les mêmes hypothèses de Théorème 5.3, (u^*, π^*) satisfait l'inéquation suivante*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^*) dx' dz - \int_{\Omega} \pi^* \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} \right) dx' dz \\ & + \int_{\omega} \hat{k} (|\hat{\varphi}| - |u^*|) dx' \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u_i^* \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi^p(V^p), \end{aligned} \quad (5.37)$$

et le problème limite suivant

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) \right] + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \hat{f}_i, \text{ pour } i = 1, 2 \text{ dans } L^q(\Omega). \quad (5.38)$$

Preuve. En utilisant le Lemme de Minty (1.6) et le fait que $\operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) = 0$ dans Ω , donc (5.10) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{\hat{T}}(\hat{\varphi}, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) - (\hat{\pi}^\varepsilon, \operatorname{div}(\hat{\varphi})) + \hat{J}(\hat{\varphi}) - \hat{J}(\hat{u}^\varepsilon) \\ & \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in V^p, \end{aligned} \quad (5.39)$$

en passant à la limite de (5.39) quand ε tend vers zéro, en utilisant le résultat du Théorème 5.3, et le fait que $\hat{J}(\cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(\hat{\varphi}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^*) dx' dz - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \pi^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_i - u_i^*) \right) dx' dz \\ & + \int_{\omega} \hat{k} (|\hat{\varphi}| - |u^*|) dx' \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u_i^* \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi^p(V^p), \end{aligned} \quad (5.40)$$

en utilisant le lemme de Minty encore une fois, donc (5.40) est équivalent

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^*) dx' dz - \int_{\Omega} \pi^* \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} \right) dx' dz \\ & + \int_{\omega} \hat{k} (|\hat{\varphi}| - |u^*|) dx' \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u_i^* \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi^p(V^p). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Nous choisissons maintenant dans l'inéquation variationnelle (5.41)

$$\hat{\varphi}_i = u_i^* \pm w_i, \quad w_i \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

on trouve

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) \frac{\partial w_i}{\partial z} dx' dz - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \pi^* \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dx' dz = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i w_i dx' dz.$$

En utilisant la formule de Green et en choisissant $w_1 = 0$ et $w_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, puis $w_2 = 0$ et $w_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on obtient

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) \right] w_i dx' dz + \int_{\Omega} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} w_i dx' dz = \int_{\Omega} \hat{f}_i w_i dx' dz, \quad \forall w_i \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donc

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) \right] + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \hat{f}_i, \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ dans } W^{-1,q}(\Omega), \quad (5.42)$$

et puisque $\hat{f}_i \in L^q(\Omega)$, donc (5.42) est valable dans $L^q(\Omega)$. ■

Théorème 5.5 *Sous les hypothèses du Théorème 5.4, on a*

$$\int_{\omega} \hat{k} (|\psi + s^*| - |s^*|) dx' - \sum_{i=1}^2 \int_{\omega} \hat{T}_{i3} (D^* (\tau^*)) \psi_i dx' \geq 0, \forall \psi \in L^p (\omega)^2, \quad (5.43)$$

$$\left. \begin{array}{l} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\hat{T}_{i3} (D^* (\tau^*)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \hat{k} \Rightarrow s_j^* = 0, j = 1, 2, \\ \left[\sum_{i=1}^2 \left(\hat{T}_{i3} (D^* (\tau^*)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \hat{k} \Rightarrow \exists \alpha > 0 : s_j^* = \alpha \hat{T}_{j3} (D^* (\tau^*)), j = 1, 2, \end{array} \right\} p.p \text{ sur } \omega, \quad (5.44)$$

où

$$\tau^* (x') = \frac{\partial u^*}{\partial z} (x', 0), s^* (x') = u^* (x', 0),$$

et

$$D^* (\tau^* (x')) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} (x', 0) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^*}{\partial z} (x', 0) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} (x', 0) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^*}{\partial z} (x', 0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Aussi u^* et π^* vérifient l'équation généralisée faible de Reynolds

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} + \tilde{F}_i + \int_0^h \int_0^z \hat{T}_{i3} \left(\hat{D} (u^*) \right) (x', \zeta) d\zeta dz \right) \frac{\partial \psi (x')}{\partial x_i} dx' \\ & + \int_{\omega} \left(-\frac{h}{2} \int_0^h \hat{T}_{i3} \left(\hat{D} (u^*) \right) (x', \zeta) d\zeta \right) \frac{\partial \psi (x')}{\partial x_i} dx' = 0, i = 1, 2, \forall \psi \in W^{1,p} (\omega), \end{aligned} \quad (5.45)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i (x', h) &= \int_0^h F_i (x', z) dz - \frac{h}{2} F_i (x', h), \\ F_i (x', z) &= \int_0^z \int_0^{\zeta} \hat{f}_i (x', \eta) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Preuve. Comme dans le chapitre 3, nous choisissons φ dans (5.37) tel que $\varphi = u^* + \psi$, avec $\psi \in \Pi^p (V^p)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{i3} \left(\hat{D} (u^*) \right) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx' dz - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \pi^* \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx' dz + \hat{J} (\psi + u^*) - \hat{J} (u^*) \\ & \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx' dz, \forall \psi \in \Pi^p (V^p), \end{aligned}$$

par la formule de Green, nous déduisons

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right)}{\partial z} \cdot \psi_i dx' dz - \sum_{i=1}^2 \int_{\omega} \hat{T}_{i3} (D^*(\tau^*)) \psi_i dx' + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} \psi_i dx' dz \\
& + \int_{\omega} \hat{k} (|\psi + s^*| - |s^*|) dx' \\
& \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx' dz.
\end{aligned}$$

De (5.38), nous trouvons

$$\int_{\omega} \hat{k} (|\psi + s^*| - |s^*|) dx' - \sum_{i=1}^2 \int_{\omega} \hat{T}_{i3} (D^*(\tau^*)) \psi_i dx' \geq 0, \forall \psi \in \mathcal{D}(\omega)^2.$$

Par la densité de $\mathcal{D}(\omega)^2$ dans $L^p(\omega)^2$ nous déduisons (5.43). Nous obtenons (5.44) comme dans le chapitre 3 [Théorème 3.5]. Pour montrer (5.45), en intégrant (5.38) de 0 à z , on obtient, pour tout $i = 1, 2$

$$-\hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) (x', z) + \hat{T}_{i3} (D^*(\tau^*)) + z \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \int_0^z \hat{f}_i (x', \eta) d\eta.$$

En intégrant pour la deuxième fois entre 0 et z , on trouve

$$\int_0^z \hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) (x', \zeta) d\zeta = z \hat{T}_{i3} (D^*(\tau^*)) + \frac{z^2}{2} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} - \int_0^z \int_0^{\zeta} \hat{f}_i (x', \eta) d\eta d\zeta, \quad (5.46)$$

nous remplaçons z par $h(x')$, d'où

$$-\int_0^h \hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) (x', \zeta) d\zeta + h \hat{T}_{i3} (D^*(\tau^*)) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \int_0^h \int_0^{\zeta} \hat{f}_i (x', \eta) d\eta d\zeta. \quad (5.47)$$

On intègre (5.46) de 0 à $h(x')$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^h \int_0^z \hat{T}_{i3} \left(\hat{D}(u^*) \right) (x', \zeta) d\zeta dz &= \frac{1}{2} h^2 \hat{T}_{i3} (D^*(\tau^*)) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} \\
&- \int_0^h \int_0^z \int_0^{\zeta} \hat{f}_i (x', \eta) d\eta d\zeta dz.
\end{aligned} \quad (5.48)$$

De (5.47) et (5.48), nous en déduisons (5.45). ■

Remarque 5.1 Pour le tenseur (5.1), le problème limite et l'équation de Reynolds, ils donnent comme suit

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^{p-2} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right] + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} = \hat{f}_i, \text{ pour } i = 1, 2 \text{ dans } L^q(\Omega),$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} + \tilde{F}_i + \int_0^h \int_0^z \frac{1}{2} \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^{p-2} \frac{\partial u_i^*}{\partial \zeta} (x', \zeta) d\zeta dz \right) \frac{\partial \psi(x')}{\partial x_i} dx' \\
& + \int_{\omega} \left(-\frac{h}{2} \int_0^h \frac{1}{2} \left(\hat{\mu} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^{p-2} \frac{\partial u_i^*}{\partial \zeta} (x', \zeta) d\zeta \right) \frac{\partial \psi(x')}{\partial x_i} dx' = 0, \\
& i = 1, 2, \forall \psi \in W^{1,p}(\omega).
\end{aligned}$$

Théorème 5.6 *La solution (u^*, π^*) du problème limite (5.37) – (5.38) est unique dans $V_z^p \times L_0^q(\omega)$.*

Preuve. Soit $\eta^\varepsilon, \zeta^\varepsilon \in \mathbb{S}$, tel que

$$\eta^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\eta_{13}}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \frac{\eta_{23}}{\varepsilon} \\ \frac{\eta_{13}}{\varepsilon} & \frac{\eta_{23}}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\zeta_{13}}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \frac{\zeta_{23}}{\varepsilon} \\ \frac{\zeta_{13}}{\varepsilon} & \frac{\zeta_{23}}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix},$$

d'après les hypothèses (A_2) et (B_2) , on trouve

$$c_2 |\eta^\varepsilon - \zeta^\varepsilon|^p \leq \sum_{i=1}^2 (T_{i3}^\varepsilon(\eta^\varepsilon) - T_{i3}^\varepsilon(\zeta^\varepsilon)) \cdot \left(\frac{\eta_{i3}}{\varepsilon} - \frac{\zeta_{i3}}{\varepsilon} \right), \quad (5.49)$$

et

$$c_4 |\eta^\varepsilon - \zeta^\varepsilon|^2 (\mu^\varepsilon + |\eta^\varepsilon| + |\zeta^\varepsilon|)^{p-2} \leq \sum_{i=1}^2 (T_{i3}^\varepsilon(\eta^\varepsilon) - T_{i3}^\varepsilon(\zeta^\varepsilon)) \cdot \left(\frac{\eta_{i3}}{\varepsilon} - \frac{\zeta_{i3}}{\varepsilon} \right), \quad (5.50)$$

nous multiplions les deux inégalités (5.49) et (5.50) par ε^p , nous déduisons que

$$c_2 |\eta - \zeta|^p \leq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{T}_{i3}(\eta) - \hat{T}_{i3}(\zeta) \right) \cdot (\eta_{i3} - \zeta_{i3}), \quad (5.51)$$

et

$$c_4 |\eta - \zeta|^2 (\hat{\mu} + |\eta| + |\zeta|)^{p-2} \leq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{T}_{i3}(\eta) - \hat{T}_{i3}(\zeta) \right) \cdot (\eta_{i3} - \zeta_{i3}). \quad (5.52)$$

Supposons maintenant qu'il existe deux solutions (u^{*1}, π^{*1}) et (u^{*2}, π^{*2}) de l'inéquation variationnelle (5.37), alors

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{i3}(\hat{D}(u^{*1})) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^{*1}) dx' dz - \int_{\Omega} \pi^{*1} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} \right) dx' dz \\
& + \int_{\omega} \hat{k} (|\hat{\varphi}| - |u^{*1}|) dx' \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u_i^{*1} \right),
\end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{T}_{i3} \left(\dot{D}(u^{*2}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - u_i^{*2}) dx' dz - \int_{\Omega} \pi^{*2} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial x_2} \right) dx' dz \\ + \int_{\omega} \hat{k} (|\hat{\varphi}| - |u^{*2}|) dx' \geq \sum_{i=1}^2 \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - u_i^{*2} \right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

On prend $\hat{\varphi} = u^{*2}$ dans (5.53), puis $\hat{\varphi} = u^{*1}$ dans (5.54), et en sommant les deux inéquations, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left(\hat{T}_{i3} \left(\dot{D}(u^{*1}) \right) - \hat{T}_{i3} \left(\dot{D}(u^{*2}) \right) \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} (u_i^{*1}) - \frac{\partial}{\partial z} (u_i^{*2}) \right) dx' dz \leq 0,$$

nous utilisons (5.51) et (5.52), nous concluons

$$\left\| \frac{\partial u^{*1}}{\partial z} - \frac{\partial u^{*2}}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)^2} \leq 0.$$

Par l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\|u^{*1} - u^{*2}\|_{V_z^p} = 0.$$

Enfin, pour prouver l'unicité de la pression π^* , on utilise l'équation (5.45), on trouve

$$\int_{\omega} \frac{h^3}{12} \nabla (\pi^{*1} - \pi^{*2}) \nabla \psi dx' = 0,$$

en choisissant $\psi = \pi^{*1} - \pi^{*2}$, et par l'inégalité de Poincaré nous trouvons

$$\pi^{*1} = \pi^{*2}, \text{ p.p dans } \omega.$$

■

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié l'analyse asymptotique de deux groupes des problèmes du film mince Ω^ε , avec la condition aux limites de frottement non linéaire du type Tresca sur une partie du bord: l'un concerne la mécanique des solides, alors que le second traite de la mécanique des fluides.

Dans le cadre de la mécanique des solides, on propose deux problèmes. Le premier problème concerne l'étude du comportement asymptotique d'une membrane élastique homogène et isotrope en régime dynamique avec un terme dissipatif $(\alpha^\varepsilon + |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ dans un domaine mince bidimensionnel $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$. Le deuxième problème concerne l'étude du comportement asymptotique d'un corps viscoélastique homogène et isotrope qui occupe dans un domaine mince tridimensionnel $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, avec un terme dissipatif $(1 + |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}|) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ et un terme source $|u^\varepsilon| u^\varepsilon$.

Concernant la mécanique des fluides, on considère deux modèles mathématiques qui décrivent l'écoulement stationnaire pour les fluides non-Newtoniens incompressibles dans un domaine mince tridimensionnel. Les deux modèles se posent dans le cadre de problèmes de lubrification. Le premier modèle est gouverné par le système généralisé de Stokes, où la loi de contrainte est donnée par la relation suivante

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) = \mu_0 D(u^\varepsilon) + \mu_1 \frac{D(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|^{2-p}} - \pi^\varepsilon I_3, \text{ avec } p \in]1, 2[.$$

Le deuxième modèle est une généralisation pour certaines classes des fluides non-Newtoniens, ce modèle est gouverné par la loi de contrainte

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon, \pi^\varepsilon) = T^\varepsilon(D(u^\varepsilon)) - \pi^\varepsilon I_3,$$

où $T^\varepsilon(\cdot)$ est un tenseur non linéaire qui vérifie certaines hypothèses.

Pour étudier l'analyse asymptotique de ces problèmes, nous utilisons la technique de changement d'échelle, nous transformons les problèmes initiaux posés dans le domaine Ω^ε

à de nouveaux problèmes posés sur un domaine fixe Ω indépendant du paramètre ε . On établit des estimations a priori sur les solutions des problèmes et on montre que les solutions admettent des limites faibles quand l'épaisseur ε du domaine tend vers zéro. Celles-ci vérifient ce qu'on appelle les problèmes limites. Pour obtenir ces problèmes limites, nous sommes passés à la limite dans les formulations variationnelles. Ensuite, sur la base de ces problèmes limites, nous dérivons des équations de Reynolds généralisées et on finit par démontrer le résultat d'unicité des solutions des problèmes limites.

Bibliography

- [1] R. S. ADAMS, Sobolev spaces, Academic press, New York (1975).
- [2] C. AMROUCHE AND V. GIRAULT, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension, Czechoslovak Math. J. 44 (1994).
- [3] K. ATTIPOU, Étude des instabilités dans les membranes minces sous chargements thermomécaniques, Thèse, Université de Lorraine 2015.
- [4] G. BAYADA AND M. BOUKROUCHE, On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions, J. Math. Anal. Appl., 382 (2003), pp.212–231.
- [5] G. BAYADA AND M. CHAMBAT, The transition between the Stokes equation and the Reynolds equation: a mathematical proof. Journal of Applied Mathematics and Optimization, vol. 4 (1986), pp. 73-93.
- [6] G. BAYADA AND K. LHALOUANI, Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer, Asymptot. Anal. 25 (2001), 329-362.
- [7] H. BENSERIDI AND M. DILMI, Some inequalities and asymptotic behaviour of dynamic problem of linear elasticity, Georgian Math. J., 20(1) (2013), pp. 25–41.
- [8] D BENTERKI, H BENSERIDI AND M DILMI, Asymptotic behavior of solutions to a boundary value problem with mixed boundary conditions and friction law, Boundary Value Problems, 1(2017):55.

- [9] D. BENTERKI, H. BENSERIDI AND M. DILMI, Asymptotic study of a boundary value problem governed by the elasticity operator with nonlinear term, *Adv. Appl. Math. Mech.*, 6 (2014), pp.191-202.
- [10] M. BOUKROUCHE AND R. EL MIR, Asymptotic analysis of non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 59 (2004), pp. 85–105.
- [11] M. BOUKROUCHE AND G. LUKASZEWICZ, On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(6) (2004), pp. 913–941.
- [12] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris (1987).
- [13] R. CAMASSA AND D.D. HOLM, Dispersive barotropic equations for stratified mesoscale ocean dynamics, *Physica D* 60 (1992), 1-15.
- [14] G. CAPRIZ, On the vibrations of shaft rotating on lubricated bearings, *Annali di Matematica Pura end Applicata. Series IV*, vol. 50 (1960), pp. 223-248.
- [15] D.A. CHACHA AND M. MILOUDI, Asymptotic analysis of nonlinearly elastic shells “mixed approach”, *Asymptotic Analysis*, 80 (2012), 323–346.
- [16] M. CHIPOT, *Elliptic equations an indroduction course*, Birkhauser Verlag AG, Basel · Boston · Berlin 2009.
- [17] P.G. CIARLET AND P. DESTUYNDER, A justification of the two-dimensional plate model, *J. Mécanique*, 18 (1979), 315-344.
- [18] P. DESTUYNDER, Comparaison entre les modules tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité, *RAIRO Analyse Numérique*, 15 (1981), 331-369.
- [19] M. DILMI, H. BENSERIDI AND A. SAADALLAH, Asymptotic behavior of a nonlinear boundary value problem with friction, *Natl. Acad. Sci., India*, 2016.
- [20] M. DILMI, M. DILMI AND H. BENSERIDI, Study of generalized Stokes operator in a thin domain with friction law (case $p < 2$), *Math Meth Appl Sci*, 41 (2018), 1-10. <https://doi.org/10.1002/mma.4876>.

- [21] M. DILMI, M. DILMI AND H. BENSERIDI, Asymptotic analysis of quasistatic electroviscoelastic problem with Tresca's friction Law, *Comp and Math Methods*, 2019. <https://doi.org/10.1002/cmm4.1028>.
- [22] M. DILMI, M. DILMI AND H. BENSERIDI, A 3D-2D asymptotic analysis of viscoelastic problem with nonlinear dissipative and source terms, article accepted in *Math Meth Appl Sci*, 2019. <https://doi.org/10.1002/mma.5755>.
- [23] M. DILMI, M. DILMI AND H. BENSERIDI, Asymptotic behavior for the elasticity system with a nonlinear dissipative term, article accepted in *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, vol. 51 (2019) pp. 41-60.
- [24] G. DUVAUT AND J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [25] H. G. ELROD, A derivation of the basic equations for hydrodynamic lubrication with a fluid having constant properties, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 17 (1960), pp. 349-359, .
- [26] T. ELSKEN, Continuity of attractors for net-shaped thin domain, *Topol. Methods Non-linear Anal*, 26 (2005), 315–354.
- [27] R.P. GILBERT AND T.S. VASHAKMADZE, A two-dimensional nonlinear theory of anisotropic plates, *Mathematical and Computer Modelling*, 32 (2000), 855–875.
- [28] J.K. HALE AND G. RAUGEL, Reaction–diffusion equation on thin domains, *J. Math. Pures Appl*, (9) 71 (1) (1992), 33–95.
- [29] I. R. IONESCU AND M. SOFONEA, *Functional and numerical methods in viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1993).
- [30] V.A. KONDRAT'EV AND O.A. OLEINIK, Boundary-value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn's inequalities, *Russian Math. Surveys*, 43 (5) (1988) 65.
- [31] O.A. LADYZHENSKAYA, New equations for the description of motion of viscous incompressible fluids and solvability in the large of boundary value problems for them, *Proc. Stek. Inst. Math*, 102 (1967), 95–118.

- [32] O.A. LADYZHENSKAYA, On some modifications of the Navier-Stokes equations for large gradients of velocity, LOMI 7 (1968), 126–154.
- [33] O.A. LADYZHENSKAYA, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1969, 2nd edition.
- [34] J.L. LIONS, Eléments d’analyse convexe, Bordas, 1974, ISBN 2-04-007368-X.
- [35] J. L. LIONS, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.
- [36] T.A. MEL’NYK AND A.V. POPOV, Asymptotic analysis of boundary value and spectral problems in thin perforated domains with rapidly changing thickness and different limiting dimensions, Mat. Sb, 203 (8) (2012), 97–124.
- [37] J.C. PAUMIER, Modélisation asymptotique d’un problème de plaque mince en contact unilatéral avec frottement sur un obstacle rigide, Rapport technique LMC-IMAG, juillet 2002 [[http : //www-lmc.imag.fr/~pamier/signoplaque.ps](http://www-lmc.imag.fr/~pamier/signoplaque.ps)].
- [38] M. PRIZZI, M. RINALDI AND K.P. RYBAKOWSKI, Curved thin domains and parabolic equations, Studia Math, 151 (2) (2002), 109-140.
- [39] M. PRIZZI AND K.P. RYBAKOWSKI, The effect of domain squeezing upon the dynamics of reaction–diffusion equations, J. Differential Equations, 173 (2) (2001), 271-320.
- [40] G. RAUGEL, Dynamics of partial differential equations on thin domains, Lecture Notes in Math., vol. 1609, Springer-Verlag, 1995.
- [41] O. REYNOLDS, On the theory of lubrication and its application to Beauchamp Tower’s experiments. Phil. Trans. Royal Society, London, A 117, 1886, pp. 157-234.
- [42] Á. RODRÍGUEZ-ARÓS AND J.M. VIAÑO, Mathematical justification of viscoelastic beam models by asymptotic methods, J. Math. Anal. Appl, 370(2010), 607–634.
- [43] Á. RODRÍGUEZ-ARÓS AND J.M. VIAÑO, Mathematical justification of Kelvin–Voigt beam models by asymptotic methods, Z. Angew. Math. Phys, 63(2012), 529-556.

- [44] A. SAADALLAH, H. BENSERIDI, M. DILMI AND S. DRABLA, Estimates for the asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction, *Georgian Math. J.*, 23 (2016), no. 3, pp 435-446.
- [45] M. SOFONEA, Problèmes mathématiques en élasticité et viscoplasticité, cours de DEA de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1991.
- [46] R. TEMAM, Navier-Stokes equations. Theory and Analysis. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [47] G. H. WANNIER, A contribution to the hydrodynamics of lubrication. *Quarterly of Applied Mathematics*, 8(1950), pp. 1-32.
- [48] M. WILLEM, Analyse convexe et optimisation, Editions Ciaco. ISBN: 2-87085-124-3, 1989.

المخلص : هذه الأطروحة مكرسة للتحليل التقاربي لبعض المشاكل الحدودية في غشاء رقيق ($d=2$ أو 3) $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$

مع شروط احتكاك غير خطية من نوع تريسكا على جزء من الحافة. بتعبير أدق ، لقد تمت دراسة أربعة أنواع من المشاكل الغير خطية، الأول يتعلق بمشاكل زاندي لمعادلات المرونة الخطية مع طرف تبديد غير خطي ، والثاني هو مشكل زاندي لمعادلات اللزوجة مع طرفي تبديد و منبع غير خطي ، في حين أن المسائل الثالثة والرابعة هي نماذج رياضية تصف التدفقات الثابتة للسوائل المعممة وغير النيوتونية غير القابلة للضغط. الدراسة المقاربة المستخدمة تعتمد على نقل المشاكل الأولية التي تطرح في غشاء رقيق Ω^ε إلى مشاكل مكافئة جديدة تطرح على مجال ثابت Ω مستقل عن ε ، مع ظهور المعامل الصغير ε في المؤثرات. بعد وضع تقديرات مسبقة لحل المشاكل ، نحصل على المسائل الحدودية مع معادلات رينولدز الضعيفة المعممة ، بجعل السماكة تميل نحو الصفر.

الكلمات المفتاحية : التحليل التقاربي ؛ معادلات رينولدز ؛ غشاء رقيق ؛ سائل غير نيوتوني ؛ الاحتكاك من نوع تريسكا ؛ طرف تبديد ؛ طرف منبع.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'analyse asymptotique de quelques problèmes aux limites dans un film mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2$ ou 3), avec conditions de frottement non linéaire du type Tresca sur une partie du bord. Plus précisément, nous avons fait ici l'étude de quatre types de problèmes non linéaires, le premier concerne un problème hyperbolique pour les équations de l'élasticité linéaire avec un terme dissipatif non linéaire, le second est un problème hyperbolique pour les équations de viscoélasticité avec termes dissipatif et source non linéaire, tandis que les troisième et quatrième problèmes sont des modèles mathématiques décrivant les écoulements stationnaires des fluides non-Newtoniens généralisés et incompressibles.

L'étude asymptotique utilisée consiste à transposer les problèmes initiaux posés dans le film mince Ω^ε à de nouveaux problèmes équivalents posés sur un domaine fixe Ω indépendant de ε , avec l'apparition du petit paramètre ε dans les opérateurs. Après avoir établi des estimations a priori sur les solutions des problèmes, nous obtenons les problèmes limites avec des équations généralisées faibles de Reynolds, en faisant tendre l'épaisseur ε vers zéro.

Mots-clés: Analyse asymptotique; Équations de Reynolds; Film mince; Fluide non-Newtonien; Frottement du type Tresca; Terme dissipatif; Terme source.

Abstract : This thesis is devoted to the asymptotic analysis of some boundary value problems in a thin film $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2$ or 3), with nonlinear friction conditions of the Tresca type on part of the boundary. More precisely, we have studied here four types of nonlinear problems, the first concerns a hyperbolic problem for linear elasticity equations with a nonlinear dissipative term, the second is a hyperbolic problem for viscoelastic equations with a dissipative and a nonlinear source terms, while the third and fourth problems are mathematical models describing stationary flows of generalized and incompressible non-Newtonian fluids. The asymptotic study used consists to the transposing the initial problems posed in a thin film Ω^ε to new equivalent problems posed on a fixed domain Ω independent of ε , with the appearance of the small parameter ε in the operators. After establishing a priori estimates of the solutions to the problems, we obtain the limit problems with the weak generalized Reynolds equations, by making the thickness ε tends to zero.

Keywords : Asymptotic analysis; Reynolds equations; Thin film; Non-Newtonian fluid; Friction of Tresca type; Dissipative term; Source term.