

Table des matières

0.1	Introduction générale	3
1	Définitions et théorèmes généraux	4
1.1	Fonctions localement intégrable	4
1.1.1	Définition	4
1.2	Les types des intégrales impropres	5
1.2.1	Intégral impropre à droite	5
1.2.2	Intégral impropre à gauche	6
1.2.3	Intégral impropre on deux points	7
1.3	Critères de convergence d'un Intégrales impropres	8
1.3.1	Critère de Cauchy pour les intégrales	8
1.3.2	Convergence absolue d'un Intégrale impropre	10
1.4	Propriétés sur les intégrales impropres	12
1.4.1	Linéarité de l'intégrale impropre	12
1.4.2	Relations de chasles	13
1.4.3	Intégration par parties	14
2	Intégrales impropres des fonctions positives	15
2.1	Intégrales de Riemann	15
2.1.1	Généralités	15
2.2	Le fameux Critère de convergence	17
2.2.1	Condition nécessaire et suffisante de convergence	17
2.2.2	Règles des equivalentes	18
2.2.3	Règle de comparaison	19

3	Intégrales impropres des fonctions de signe quelconque	22
3.1	Intégrales absolument convergentes	22
3.2	Intégrales semi-convergentes	23
3.3	Formules de la moyenne	24
3.3.1	Première formule de la moyenne	24
3.3.2	Deuxième formule de la moyenne	25
3.4	Critère d'Abel-Dirichlet pour les intégrales	26

0.1 Introduction générale

Pour qu'une fonction f de la variable réelles x soit intégrable au sens de Riemann, il suffit qu'elle soit continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$.

Dans le cas où la fonction f à intégrer sur un intervalle non fermé ou non borné I de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle d'un des types suivants: intervalles non bornés, ouverts ou semi-ouverts. cet cas porte le nom d'intégrale impropre.

En mathématiques, l'intégrale impropre désigne une extension de l'intégrale usuelle, définie par une forme de passage à la limite dans des intégrales.

Au chapitre 1, on parle alors d'intégrale impropre. Et là, deux cas peuvent se produire, soit l'intégral converge et l'aire est finie soit elle diverge et la l'aire est infinie.

Dans le chapitre 2 , on à faire une étude de convergence d'intégrale impropre à partir des fonctions positives par la notion de Riemann.

Au chapitre 3, on traite dans un cadre plus général les intégrales. Nous s'intéresse pas par la nature de la fonction, soit négative ou positive.

Chapitre 1

Définitions et théorèmes généraux

Introduction

Le chapitre 1 traite d'intégrer une fonction sur un intervalle non fermé ou non borné I de \mathbb{R} , ces deux sortes d'intégrales dites impropres seront définies comme limites d'intégrales prises sur des sous-intervalles compacts de I .

Nous commencerons par étudier le cas d'une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ ou $]a, b]$ et sur un intervalle ouvert $]a, b[$. Puis on a donné quelques critères de convergences.

1.1 Fonctions localement intégrable

1.1.1 Définition

Soient I un intervalle quelconque de \mathbb{R} , et une application f de I dans \mathbb{R} est dite localement intégrable sur I , si sa restriction à chaque compact de I est intégrable. En particulier, toute application continue de I dans \mathbb{R} est localement intégrable sur I , toute fonction numérique monotone sur I est localement intégrable sur cet intervalle.

Exemples

- 1) la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est localement intégrable sur les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- 2) la fonction $x \rightarrow \log(x)$ est localement intégrable sur les intervalles $]0, +\infty[$.
- 3) la fonction $x \rightarrow \frac{1}{(1-x^2)}$ est localement intégrable sur les intervalles $] - \infty, -1[$, $] - 1, +1[$ et $]1, +\infty[$.

1.2 Les types des intégrales impropres

1.2.1 Intégral impropre à droite

Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction $F : x \in [a, b] \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie lorsque $x \rightarrow b$.

Si cette limite existe et est finie, on la note $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Si elle n'existe pas ou est infinie, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ diverge.

Exemples

Les intégrales impropres suivantes convergentes ou divergentes ?

- 1) $f(x) = e^{-2x}$ localement intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 2) $f(x) = \log(x)$ localement intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ localement intégrable sur l'intervalle $[0, 1[$.
- 4) $f(x) = \sin(x)$ est définie sur $[0, +\infty[$.

• On a pour tout $x > 0$: $\int_0^x e^{-2t} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$

d'où :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-2t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) = \frac{1}{2} \text{ converge.}$$

• On a pour tout $x \geq 1$: $\int_1^x \log(t)dt = (x \log(x) - x + 1) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$
 Donc $\int_1^{+\infty} \log(t)dt$ diverge.

• $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0, 1[$ donc a priori uniquement un problème en 1.
 Soit $x \in [0, 1[$ Alors:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = -2 \int_0^x \frac{-1}{2\sqrt{1-t}} dt = 2 - \sqrt{1-x}.$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \lim_{x \rightarrow 1} 2 - \sqrt{1-x} = 2$$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ est convergé.

• On a pour tout $x > 0$: $\int_0^x \sin(t)dt = 1 - \cos(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \cos(x)$ n'existe pas.

Donc $\int_1^{+\infty} \sin(x)dx$ diverge.

Proposition

Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle semi ouvert $[a, \omega[$, $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$. La nature de l'intégrale impropre $\int_a^\omega f(x)dx$ dépend du comportement de $f(x)$ au voisinage de ω (ne dépend pas de la valeur de a). Ceci résulte de la relation de Chasles :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt, \forall a < c < x.$$

1.2.2 Intégral impropre à gauche

Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si la fonction $F : x \in [a, b] \rightarrow \int_x^b f(t)dt$ possède une limite finie lorsque $x \rightarrow a$.

Si cette limite existe et est finie, on la note $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Si elle n'existe pas ou est infinie, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ diverge.

Exemples

1) La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, 1[$.

- Pour $x \in]0, 1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} \Big|_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

L'intégrale de f est donc convergente et on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \sqrt{x}) = 2$$

Donc : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est converge.

2) Soit $f :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$.

• Est ce que f diverge ?

On a

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 e^{-t} dt.$$

$$\int_x^0 e^{-t} dt = e^{-x} - 1 \rightarrow +\infty \text{ quand } x \rightarrow -\infty$$

alors : $\int_{-\infty}^0 e^{-t} dt$ diverge.

1.2.3 Intégral impropre on deux points

Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Et soit c un point quelconque de $]a, b[$.

On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si les deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergentes.

On appelle alors intégrale impropre de f sur $]a, b[$ le réel noté $\int_a^b f(t) dt$ défini par :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Remarques

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale impropre diverge s'il existe un réel $c \in]a, b[$ tels que l'une (au-moins) des deux intégrales impropres :

$\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont divergentes .

- $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t)dt + \lim_{y \rightarrow b} \int_c^y f(t)dt$$
$$= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \int_x^y f(t)dt$$

- Il faut se garder de croire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^{+x} f(t)dt$ car cette égalité n'est pas toujours vraie.

Exemple

- Soit $f(x) = x$ définie sur \mathbb{R} .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = +\infty \text{ diverge et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^{+x} f(t)dt = 0 \text{ converge.}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^{+x} f(t)dt$ si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < \infty$.

1.3 Critères de convergence d'un Intégrales impropres

1.3.1 Critère de Cauchy pour les intégrales

On considère une fonction f , localement intégrable sur un intervalle $[a, \omega[$, avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$.

Nous avons vu que le problème de la convergence de l'intégrale

$\int_a^\omega f(t)dt$ revient au problème de l'existence de la limite de la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ quand x tend vers ω .

On se ramène à un problème de limite de suites, en utilisant le théorème qui lie l'existence de la limite d'une fonction en un point ω à la convergence de toutes les suites images des suites convergentes de limite ω , Cette convergence est montrée par le critère de Cauchy, d'où le nom de critère de Cauchy relatif aux intégrales impropres, par lequel on désigne le théorème suivant.

Théorème

Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, \omega[$, avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$. Pour que l'intégrale $\int_a^\omega f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que, pour toute suite (x_n) de limite ω , la suite $(F(x_n))$ définie par: $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt$ soit convergente.

On a alors : $\int_a^\omega f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n)$.

On en déduit le critère de Cauchy pour les intégrales impropres.

Théorème

Soit f une fonction réelle, localement intégrable sur un intervalle $[a, \omega[$, avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$. Pour que l'intégrale $\int_a^\omega f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $X(\epsilon)$ tel que, quels que soient les réels X_1 et X_2 vérifiant les inégalités $X(\epsilon) < X_1 < X_2 < \omega$,

on ait $\left| \int_{X_1}^{X_2} f(t)dt \right| < \epsilon$.

Soit encore en langage formalisé:

$$\forall \epsilon > 0, \exists X_1, X_2 \in [a, \omega[, X(\epsilon) < X_1 < X_2 < \omega \implies \left| \int_{X_1}^{X_2} f(t)dt \right| < \epsilon.$$

Preuve

Idée de la démonstration c'est pour la démonstration de la condition suffisante, qu'on utilise le théorème précédent. Il s'agit d'un critère de Cauchy, c'est-à-dire un critère qui utilise la convergence des suites de Cauchy donc la propriété de \mathbb{R} d'être complet.

Pour la condition nécessaire, il s'agit d'une application directe de la définition de la limite.

Condition nécessaire

On suppose l'intégrale $\int_a^\omega f(t)dt$ convergente. Cela signifie que la fonction F définie par: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite que nous noterons L , quand x tend vers ω .

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $X(\epsilon)$ tel que les inégalités $X(\epsilon) < x < \omega$ entraînent $|F(x) - L| < \epsilon$.

On a donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists, X(\epsilon) \in [a, \omega[, \forall X_1, \forall X_2, X(\epsilon) < X_1 < X_2 < \omega \implies |F(X_1) - L| < \epsilon.$$

et $|F(X_2) - L| < \epsilon.$

On déduit $|F(X_2) - F(X_1)| < 2\epsilon.$

et donc $\left| \int_{X_1}^{X_2} f(t)dt \right| < 2\epsilon.$

Condition suffisante

On suppose la condition réalisée. On considère une suite (x_n) de points de $[a, \omega[$, telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \omega$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que, pour $n > N(\epsilon)$, on ait $x_n > X(\epsilon)$. Les inégalités $p > n > N(\epsilon)$ entraînent alors :

$$|F(X_p) - F(X_n)| = \left| \int_{X_n}^{X_p} f(t)dt \right| < \epsilon.$$

La suite $(F(x_n))$ est une suite de Cauchy, elle est donc convergente dans \mathbb{R} .

D'après le théorème précédent, l'intégrale $\int_a^\omega f(t)dt$ est convergente.

1.3.2 Convergence absolue d'un Intégrale impropre

Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle ouvert ou semi-ouvert I de \mathbb{R} d'extrémités a et b .

On dit que l'intégrale de f sur I est absolument convergente sur I si l'intégrale $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

Théorème

Pour que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, avec f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$, soit convergente il suffit qu'elle soit absolument convergent.

Preuve

l'intégrable $\int_a^b |f(x)|dx$, est convergente par hypothèse, donc elle vérifie le critère de Cauchy.

$$\forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) \in [a, b[\text{ tel que: } b > v > u \geq X(\epsilon) \implies \int_u^v |f(x)|dx < \epsilon$$

Comme on a $|\int_u^v f(x)dx| \leq \int_u^v |f(x)|dx < \epsilon$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ vérifie aussi le critère de Cauchy, donc elle est convergente.

Théorème

*soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$.
Pour que l'intégrale impropre de f sur $[a, b[$ soit absolument convergent, il suffit qu'il exist une fonction numérique φ localement intégrable sur $[a, b[$ dans l'intégrale sur $[a, b[$ est convergente, tel que pour $x \in [a, b[$, on ait $|f(x)| \leq \varphi(x)$ sur $[a, b[$.*

Preuve

Soit $\epsilon > 0$ En vertu du critère de Cauchy on sait qu'il existe un nombre $X(\epsilon) \in [a, b[$ tel que les inégalités $X(\epsilon) < u < v < b$ entraînent l'inégalité $\int_u^v \varphi(x)dx < \epsilon$.

$$\text{D'où on déduit que } \int_u^v |f(x)|dx \leq \int_u^v \varphi(x)dx < \epsilon.$$

C'est-à-dire l'intégrale de f sur $[a, b[$ vérifie le critère de Cauchy, donc elle converge.

Nous verrons plus loin qu'il existe des intégrales impropres convergentes, qui ne sont pas absolument convergentes de telles intégrales sont dites semi-convergentes.

Exemples

1) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$.

On a $\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$, et on a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ converge

Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ est converge.

2) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp(-x^2)$.

On a pour $x \geq 1$, $x^2 \geq x$ alors $\exp(-x^2) \leq \exp(-x)$

En plus la fonction $\exp(-x^2)$ localement intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \exp(-t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \exp(-t) dt \\ &= \exp(-1) \text{ converge.} \end{aligned}$$

Alors, on resulte que $\int_1^{+\infty} \exp(-t^2) dt$ absolument convergente.

1.4 Propriétés sur les intégrales impropres

1.4.1 Linéarité de l'intégrale impropre

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[\subset \mathbb{R}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixe, $\lambda \neq 0$. Alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b \lambda f(t) dt$ sont de même nature.

De plus en cas de convergence. $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$.

• Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent. $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$ converge, et

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

• Si $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$ diverge.

Théorème: (Linearité)

Soit $[a, b[\subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. Si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergentes, alors quelque soient les réelles λ et μ l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt$ converge.

En outre, l'intégration est linéaire, c'est-à-dire que l'on a:

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

Remarque

la condition pour écrire comme $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$ est la convergence de deux intégrales impropres à droite seulement où bien de deux intégrales impropres à gauche.

Proposition

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$ et soient α et β deux réels quelconques.

- Si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent alors l'intégrale impropres $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$ converge également.
- Si une des deux intégrales impropres converge et que l'autre diverge, alors l'intégrale impropre $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$ diverge.
- Si les intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ divergent alors on ne connaît pas à priori la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$.

1.4.2 Relations de chasles**Théorème**

Soit une fonction f continue sur $[a, b[$, et un réel c de $[a, b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Alors: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

1.4.3 Intégration par parties

Propriété

Soient f et g deux fonctions continûment dérivables sur $[a, b[$. Si f et g admettent une intégrale impropre convergente sur $[a, b[$, alors pour tout x dans $[a, b[$, on peut écrire:

$$\int_a^x f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)g(t)dt.$$

Si le second membre de cette égalité a une limite lorsque x tend vers b , il en sera de même du premier membre. C'est, par exemple, le cas lorsque chacun des deux termes du second membre admet une limite en b . On aura alors:

$$\int_a^x f(t)g'(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)dt.$$

Exemple

On se propose d'étudier la nature de l'intégrale impropre suivante $\int_0^1 \log(t)$.

· Pour tout $0 < x \leq 1$, on peut intégrer par parties dans $[x, 1]$, ce qui donne:

$$\int_x^1 \log(t)dt = [t \log(t)]_x^1 - \int_x^1 dt = x \log(x) - (1 - x).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x \log(x) = 0$, on en déduit que l'intégrale impropre est convergente et que sa valeur est:

$$\int_0^1 \log(t)dt = -1.$$

Chapitre 2

Intégrales impropres des fonctions positives

Introduction

On va commencer l'étude de la convergence des intégrales impropres par des intégrales dont la fonction à intégrer est positive.

2.1 Intégrales de Riemann

2.1.1 Généralités

L'étude des intégrales de Riemann, intégrales des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ ($s \in \mathbb{R}$) sur $]0, 1]$ ou sur $[1, +\infty[$ est fondamentale car, jointe aux théorèmes de comparaison, elle constitue le principal outil dans l'étude des intégrales impropres des fonctions positives et donc compte tenu de la convergence absolue, des intégrales impropres en général.

Théorème

Soit s un réel

$$L'intégrale \int_0^1 \frac{dt}{t^s} : \begin{cases} \text{convergente si } s < 1 \\ \text{divergente si } s \geq 1 \end{cases}$$
$$L'intégrale \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} : \begin{cases} \text{convergente si } s > 1 \\ \text{divergente si } s \leq 1 \end{cases}$$

Preuve

a) Étude de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^s}$.

• Pour $s \neq 1$ et $x > 0$ on a : $\int_x^1 \frac{dt}{t^s} = \frac{1-x^{1-s}}{1-s}$.

• Si $s < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-s} = 0$. l'intégrale est convergente.

• Si $s > 1$, la fonction $x \rightarrow x^{1-s}$ tend vers $+\infty$, l'intégrale est divergente.

• Pour $s = 1$ l'intégrale $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 l'intégrale est divergente.

b) Étude de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$.

• Pour $s \neq 1$ on a : $\int_1^x \frac{dt}{t^s} = \frac{x^{1-s}-1}{1-s}$.

• Si $s > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-s} = 0$. l'intégrale est convergente.

• Si $s < 1$, la fonction $x \rightarrow x^{1-s}$ tend vers $+\infty$, l'intégrale est divergente.

• Pour $s = 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ l'intégrale est divergente.

Exemple

L'étude des intégrales $\int_0^{+\infty} t^r e^{st} dt$ ($r \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$)

On pose : $f(x) = t^r e^{st}$.

$$I(r, s) = \int_0^1 f(t) dt.$$

$$J(r, s) = \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

La fonction f est positive sur tout l'intervalle d'intégration.

• Étude de l'intégrale $I(r, s)$

On a quand x tend vers 0 $f(x) \sim x^r$. L'intégrale est convergente si seulement si $r > -1$.

- Étude de l'intégrale $J(r, s)$ quand x tend vers $+\infty$ on a :
 - Si $s > 0$, la fonction $x \rightarrow x^r e^{sx}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et quelque soit r et $J(r, s)$ est divergente.
 - si $s = 0$, alors $f(x) = x^r$ et $J(r, s)$ est convergente si et seulement si $r < -1$.
 - si $s < 0$, alors $\forall r, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r e^{sx} = 0$ et $J(r, s)$ est convergente.

Les intégrales $\int_0^{+\infty} t^r e^{st} dt$ ($r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$) sont convergentes si et seulement si $s < 0$ et $r > -1$.

2.2 Le fameux Critère de convergence

2.2.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème

Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, \omega[$, avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$, et vérifiant $f \geq 0$ sur cet intervalle.

L'intégrale $\int_a^\omega f(t)dt$ est convergente, si et seulement si, il existe un réel M tel que l'on ait : soit $x \in [a, \omega[$, $0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq M$.

Preuve

D'après le théorème de la limite monotone, la fonction F étant croissante elle a une limite finie quand x tend vers ω , si et seulement si, elle est majorée au voisinage de ω . Sinon la fonction F tend vers $+\infty$ et l'intégrale est divergente.

Convention d'écriture. Dans le cas des fonctions positives et dans ce cas seulement on écrit,

Dans le cas où la fonction F est majorée et donc l'intégrale convergente

$$\int_a^\omega f(t)dt < +\infty.$$

Dans le cas où la fonction F n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale $\int_a^b f(t)dt = +\infty$ est divergente.

2.2.2 Règles des équivalentes

Théorème

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a, \omega[$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ ou $\omega = +\infty$, et vérifiant $f \geq 0$, $g \geq 0$.

Si quand x tend vers ω , on a $f(x) \sim g(x)$, les intégrales $\int_a^\omega f(t)dt$ et $\int_a^\omega g(t)dt$ sont de même nature.

(C'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

Preuve

C'est un corollaire du théorème précédent. Par hypothèse, on a :

$$f(x) = (1 + \epsilon(x))g(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0.$$

On peut donc trouver X tel que les inégalités $X < x < \omega$ entraînent

$$|\epsilon(x)| < \frac{1}{2}$$

d'où:

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x). \text{ On applique alors le théorème précédent.}$$

Exemples

1) Étude de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{t-1}{t+1}\right)e^{-t} dt$.

· On a, pour tout $x > 1$: $\frac{t-1}{t+1} > 0$ et la fonction à intégrer est donc alors positive. Quand x tend vers $+\infty$ on a :

$$\left(\frac{t-1}{t+1}\right)e^{-t} \sim e^{-t}$$

$$\left(\text{Car : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)e^{-t}}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t-1}{t+1} = 1 \right).$$

Et on a l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente.

donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{t-1}{t+1}\right)e^{-t} dt$ est convergente.

2) Étude de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

• Pour tout $x \in]0, 1]$: $\frac{\sin(x)}{x^2} \geq 0$

Quand x tend vers 0 on a : $\frac{\sin(x)}{x^2} \sim \frac{1}{x}$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ est divergente.

Et on a $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ sont de même nature.

Alors L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ est donc divergente.

Corollaire

Soient f et g deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle de la forme $[a, \beta]$, $\beta < b$. On suppose qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives.

Telles que:

$$0 \leq C_1 f \leq C_2 f \leq g$$

Alors, l'intégrale impropre de f est convergente sur $[a, b[$ si et seulement si:

l'intégrale impropre de g est convergente sur $[a, b[$.

2.2.3 Règle de comparaison

Théorème

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a, b[$ avec $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. et vérifiant sur cet intervalle $0 \leq f \leq g$:

• Si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

• Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est divergente alors $\int_a^b g(t) dt$ est divergente.

Preuve

Elle repose sur l'utilisation des inégalités entre intégrales et les théorèmes de comparaison sur les limites.

On pose : $\forall x \geq a \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.

Pour tout $x \geq a$, on a :

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \text{ soit } F(x) \leq G(x).$$

Les fonctions F et G sont croissantes. On en déduit :

Si la fonction G a une limite quand x tend vers b , elle est majorée, la fonction F est alors majorée et a donc une limite.

Remarques

1) si la fonction F tend vers $+\infty$ quand x tend vers b , elle n'est pas majorée donc la fonction G n'est pas majorée et tend vers $+\infty$ quand x tend vers b .

2) La nature d'une intégrale impropre ne dépendant que du comportement de la fonction quand x tend vers b , il suffit dans la pratique de supposer les inégalités vérifiées au voisinage de b .

3) Il est important que f et g soient de même signe au voisinage du problème étudié, si non les fonctions peuvent être équivalentes et leurs intégrales de nature différente.

Exemples

1) Étude de l'intégrale $\int_0^1 \sin(t) \ln(t) dt$.

· Pour tout x vérifiant $0 < x \leq 1$, la fonction $x \rightarrow \sin(x) \ln(x)$ garde un signe constant négatif.

On a alors : $0 < -\sin(x) \ln(x) \leq -\ln(x)$.

Où l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t) dt$ est convergente.

donc l'intégrale $\int_0^1 \sin(t) \ln(t) dt$ est convergente.

2) Étude de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t \ln(t)}}$.

· On a pour x assez grand : $0 < \ln(x) < \sqrt{x}$

d'où $\frac{1}{\sqrt{t \ln(t)}} > \frac{1}{t}$.

l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente.

donc l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t \ln(t)}}$ est divergente.

Corollaire

Soient $f, g, h : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions localement intégrables sur $[a, b[$ tels que:

$\forall x \in [a, b[\quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ alors si

$\int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b h(x) dx$, convergent $\implies \int_a^b f(x) dx$ converge.

Chapitre 3

Intégrales impropres des fonctions de signe quelconque

3.1 Intégrales absolument convergentes

Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert, f est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b \|f(t)dt\|$ est convergente.

Théorème

Soit I un intervalle ouvert ou semi-ouvert de \mathbb{R} , d'extrémités a, b et $f : I \rightarrow E$ une application localement intégrable de I dans un espace vectorielle normé complet E .

Pour que l'intégrale de f sur I soit convergente, il suffit qu'il existe une fonction numérique positive φ localement intégrable sur I .

Telles que pour tout $t \in I$, on ait $\|f(t)dt\| \leq \varphi(t)$ et l'intégrale $\int \varphi(t)dt$ soit convergente, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors absolument convergente.

Démonstration

Soit I un intervalle semi-ouvert $[a, b[$. Soit $\epsilon > 0$ donné. par une première application du critère de Cauchy on sait qu'il existe un nombre $X \in [a, b[$ tel que les inégalités $X \leq u < v < b$ entraînent :

$$\int_u^v \varphi(t) dt \leq \epsilon.$$

On en déduit :

$$\left\| \int_u^v f(t) dt \right\| \leq \int_u^v \|f(t)\| dt \leq \int_u^v \varphi(t) dt \leq \epsilon.$$

Corollaire

Pour que l'intégrale d'une fonction localement intégrable soit convergente il suffit qu'elle soit absolument convergente.

Nous verrons plus loin qu'il existe des intégrales impropres convergentes qui ne sont pas absolument convergentes : de telles intégrales sont dites semi convergentes .

3.2 Intégrales semi-convergentes

Définition

On dit qu'une intégrale impropre est semi-convergente si elle est convergente mais elle n'est pas absolument convergente.

Exemple

· En intégrant par parties, on peut montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ est convergente.}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \left[-\frac{\cos x}{x} dx \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= -\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx + \cos 1.\end{aligned}$$

· à l'aide du critère de comparaison on peut montrer que l'intégrale de droite est convergente.

· Etudions la convergence absolue. Soit $b \in [1, +\infty[$

$$\int_1^b \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_1^b \frac{\sin^2 x}{x} = \int_1^b \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^b \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

En intégrant par parties on peut montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$

est convergente, et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente, donc leur

différence est divergent, c'est-à-dire l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ est divergente.

3.3 Formules de la moyenne

3.3.1 Première formule de la moyenne

Théorème

Soient f et g deux fonctions telles que :

f intégrable et a un signe constant sur $[a, b]$, avec g continue sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(c) \int_a^b f(x) dx.$$

Preuve

Supposons que $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et soient $m = \inf_{x \in [a, b]} g(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} g(x)$.

Alors
$$mf(x) \leq f(x)g(x) \leq Mf(x).$$

d'où:
$$m \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b f(x)dx.$$

par suite
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \leq M$$

g continue sur $[a, b] \implies \exists c \in [a, b]$ tel que : $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} = g(c)$.

Dans le cas particulier où $f = 1$ on obtient $\int_a^b g(x)dx = (b - a)g(c)$.

3.3.2 Deuxième formule de la moyenne

Théorème

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si f est positive et décroissante, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^c g(x)dx.$$

Preuve

On fait la démonstration uniquement dans le cas où f est continûment dérivable, et g est continue, les autres cas sont admis (*Cf [9, Lelong Ferrand]*).

Posons: $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.

et soient $m = \inf_{x \in [a, b]} G(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} G(x)$.

Soit $\mathbf{I} = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)G'(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

$$\mathbf{I} = f(b)G(b) + \int_a^b (-f'(x))g(x)dx \text{ car } G(a) = 0.$$

Comme $f'(x) \leq 0$ et $f(b) > 0$, il vient:

$$mf(b) \leq f(b)G(b) \leq mf(b)$$

et
$$m(-f'(x)) \leq (-f'(x))G(x) \leq M(-f'(x))$$

par suite,
$$m(f(a) - f(b)) \leq \int_a^b (-f'(x))G(x)dx \leq M(f(a) - f(b))$$

d'où
$$mf(a) \leq \mathbf{I} \leq Mf(a)$$

donc
$$m \leq \frac{\mathbf{I}}{f(a)} \leq M$$

par suite, il existe $c \in [a, b]$ tel que
$$\frac{\mathbf{I}}{f(a)} = G(c) = \int_a^c g(x)dx$$

d'où
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^c g(x)dx.$$

3.4 Critère d'Abel-Dirichlet pour les intégrales

Théorème

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, \gamma[$
($\gamma = \text{constante finie}$ ou $\gamma = +\infty$).

Alors pour que l'intégrale impropre $\int_a^\gamma f(x)g(x)dx$ soit convergente il suffit qu'une des deux paires de conditions suivantes soit vérifiée:

$A_1)$ L'intégrale $\int_a^\gamma f(x)dx$ est convergente.

$A_2)$ La fonction g est monotone et bornée sur $[a, \gamma[$.

$B_1)$ La fonction $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ est borée sur $[a, \gamma[$.

$B_2)$ La fonction g est monotone et tend vers 0 quand x tend vers γ .

Preuve

Pour démontrer ce Théorème on va utiliser la formule

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx = g(b_1) \int_{b_1}^{\xi} f(x)dx + g(b_2) \int_{\xi}^{b_2} f(x)dx$$

où ξ est un point appartenant à l'intervalle $[b_1, b_2]$.

Supposons que la première paire de conditions est vérifiée.

g est bornée donc il existe $M > 0$, tel qu'on ait:

$$|g(x)| \leq M \text{ soit } x \in [a, \gamma[.$$

Soit $\epsilon > 0$. L'intégrale $\int_a^{\gamma} f(x)dx$ est convergente, alors à

partir d'un certain rang A . C'est-à-dire si $b_1, b_2, \xi \geq A$.

$$\text{on a } \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x)dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2M} \text{ et } \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x)dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2M}.$$

$$\text{par suite } \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx \right| \leq |g(b_1)| \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x)dx \right| + |g(b_2)| \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x)dx \right| \leq \epsilon.$$

D'où d'après le Critère de Cauchy l'intégrale

$$\int_a^{\gamma} f(x)g(x)dx \text{ est convergente.}$$

Supposons maintenant que la 2^{ème} partie de conditions est vérifiée:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq N \rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leq 2N.$$

$g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers γ , alors il existe B tel que $x \geq B$

$$\text{entraîne } |g(x)| \leq \frac{\epsilon}{4N}$$

donc de même que précédemment on a :

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx \right| \leq \epsilon, \text{ soit } b_1, b_2 \geq B.$$

d'où en vertu du critère de Cauchy l'intégrale

$$\int_a^\gamma f(x)g(x)dx \text{ est convergente.}$$

Exemple

Étude de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est une fonction positive décroissante et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x dx \right| = |\cos x_1 - \cos x_2| \leq 2.$$

Soit $x_1, x_2 \geq \alpha$ il en résulte que

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est convergente.

D'une manière plus générale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ converge pour tout $\alpha > 0$.

D'autre part, au voisinage de 0 $\sin x = x$ donc l'intégrale

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ est convergente pour $\alpha < 1$.

De ces résultats on déduit que l'intégrale

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ est convergente pour $0 < \alpha < 2$.

Conclusion générale

Pour étudier l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ ($a < b$ éléments de \mathbb{R}), la première chose à faire est invariablement de préciser l'intervalle I de continuité de f : $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Les bornes de I qui ne lui appartiennent pas sont appelées bornes d'impropreté (ou de généralisation) de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$.

Il convient d'identifier ces bornes dès le départ puisque l'étude se produit au voisinage de chacune d'elles :

- Aucune étude supplémentaires si f est continue sur le segment $[a; b]$
(avec $a, b \in \mathbb{R}$),

on dira par extension que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, même si elle n'est pas impropre :

-Une étude particulière en a (resp. en b) si f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a, b]$, $b \in \mathbb{R}$ (resp. $[a, b[$, $a \in \mathbb{R}$)

-Des études particulières en a et en b si f est seulement continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Bibliographie

- [1] **Arezki kessi et Abdelouahab Mohmoudi**, *Elements d'analyse mathématique, séries et intégrales*, 2001.
- [2] **J.Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès**, *Analyse*, 4^e édition, 1977 Paris.
- [3] **Annette Decomp**, *intégrales impropres*, université en ligne, université Pierre et marie curie.
- [4] **Mohammed El Amrani**, *intégrales de Riemann, Théorie et pratique*, Hermann 2009.
- [5] **École des Mines de Douai-FIAASMathématique** /*Intégrales impropres*/ 6 octobre 2010.
- [6] **Houcine Chebli**, *Intégrale Impropre*, Université Virtuelle de Tunis.
- [7] http://uel.unisciel.fr/mathematiques/intimp/intimp_ch01/co/apprendre_ch1_01.html.