REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et Numérique

Thème

Sur une suite de polynomes orthogonaux

Présenté par :
M^{elle} Ben aissi Sabrina

Soutenu publiquement le : 15/06/2025.

Devant le jury composé de :

Président :	*KEHALI Salima*	M.C.B,	Université de M'sila
Encadreur :	*LAKHAL Aissa*	M.C.B,	Université de M'sila
Examinateur :	*SEGHIRI* Fakhreddine	M.A.A,	Université de M'sila

Année universitaire 2024/2025.

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rediger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercie Dr AISSA LAKHAL directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes soeurs qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon pére.

- A mes soeurs

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

$\mathbb{R}^n$	Espace euclidien de dimension n
L^p	Espaces de Lebesgue $1 \leq p$
C^0	Ensemble des fonctions continues
P_M	Opérateur de projection.
ω	Une fonction de poids
H_n	Polynôme de $Hermite$
$\widehat{H_n}$	Transformée de Fourier de H_n
L_n	Polynôme de $Laguerre$
$P_n^{(\alpha.\beta)}$	Polynôme de $Jacobi$
$T_n = T_n^1$	Polynôme de $Tchebychev$ de premier espèce
$U_n = T_n^2$	polynôme de $Tchebychev$ de seconde espèce
T_n^3	polynôme de $Tchebychev$ de troisième espèce
T_n^4	polynôme de $Tchebychev$ de quatrième espèce

Table des matières

Introduction

0.1 Introduction

L'approximation dans les espaces de Hilbert joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et de l'analyse fonctionnelle. En particulier, la notion de projection orthogonale permet de minimiser l'erreur entre une fonction donnée et son approximation dans un sous-espace de dimension finie.

Considérons un espace de Hilbert réel H muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et un ensemble d'éléments linéairement indépendants $\{s_1, ..., s_n\}$ de H. Pour une fonction $x \in H$, on cherche à minimiser la norme $\|x - x_n\|$ où x_n est une combinaison linéaire des éléments de base sous la forme :

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k s_k(t)$$

L'existence et l'unicité de la projection orthogonale x_n garantissent que cette approximation est optimale, ce qui se traduit par la condition d'orthogonalité :

$$\langle x - x_n, s_k \rangle = 0, k = 1, ..., n$$

Cette condition mène à un système linéaire de n équations à n inconnues sous la forme matricielle :

$$AX = B$$

où

$A = (\langle s_i, s_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$, $B = \langle x, s_k \rangle_{k=1,\ldots,n}$, $X = (\alpha_k)_{k=1,\ldots,n}$

Lorsque la famille $\{s_1, ..., s_n\}$ est orthonormale, la matrice A devient l'identité, simplifiant considérablement le calcul des coefficients α_k.

Cela justifie l'intérêt porté aux bases orthonormales, notamment aux suites de polynômes orthogonaux telles que les polynômes de Legendre, de Chebyshev ou de Hermite, qui jouent un rôle clé dans l'approximation, l'interpolation et la résolution numérique.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons particulièrement à une suite de polynômes orthogonaux, en mettant en évidence leurs propriétés et leur utilité dans la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm. Nous soulignons leur intérêt tant théorique que pratique dans le cadre des méthodes numériques.

Plan du mémoire :

Premier chapitre : rappel des notions fondamentales sur les polynômes orthogonaux.

Deuxième chapitre : présentation de la théorie des équation intégrales.

Troisième chapitre : application des polynômes orthogonaux à la résolution des équations intégrales

On termine notre mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Rappels et propriétés

1.1 Définitions et Généralités

1.1.1 Suite de polynômes orthogonaux

Définition 1.1.1 *une suite de polynômes orthogonaux est une suite infinie de polynômes*

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x) .....$$

à coefficients réels, où chaque $P_n(x)$ *est de degré* n*, et tels que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux relativement à un produit scalaire donné défini sur un espace des fonctions. Cette type de suite est utilisé dans plusieurs domaines, notamment en cryptologie et en analyse numérique . Elle permet de résoudre de nombreux problèmes en physique, comme en mécanique des fluides, en mécanique quantique ou en traitement du signal. Des familles particulière de polynômes orthogonaux, comme ceux de Legender ou de Tchebychev, permettent non seulement d'approximer des fonctions, mais aussi résoudre plus facilement certaines équations différentielles complexes grâce à leurs propriétés spécifiques*

1.1.2 Espace des polynômes

L'étude des polynômes orthogonaux à une variable nécessite de travailler dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, noté $\mathbb{R}[x]$.

Une base naturelle de cet espace est constituée des monômes x^n, avec $n \in N$.

Un polynôme $P_n(x)$ est dit de degré n s'il s'écrit sous la forme :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{où } a_n \neq 0 \tag{1.1.1}$$

Ainsi, toute constante non nulle est un polynôme de degré *zéro*.

1.2 Polynômes classiques

Certaines familles de polynômes orthogonaux sont particulièrement importantes car elles apparaissent dans de nombreuses applications, entre autres comme solutions d'équations différentielles ayant une signification physique. C'est le cas de notre premier exemple.

1.2.1 Polynôme d' Hermite

Les polynômes d'Hermite est une famille de polynômes orthogonaux, souvent utilisés en analyse mathématique, notamment dans le contexte des séries de Fourier, des équations différentielles et des probabilités, en particulier dans le cadre de la mécanique quantique et des processus stochastiques. Ils sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n exp^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{-\frac{x^2}{2}} && \text{(forme dite probabiliste)} \\ \widehat{H_n}(x) &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{-x^2} && \text{(forme dite physique)} \end{aligned}$$

Les deux définitions sont associées à l'échelle suivante.

$$\widehat{H_n}(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n(x\sqrt{2})$$

Ils peuvent aussi être écrits en utilisant un développement polynomial. :

$$H_n(x) = \sum_{\ell=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^\ell \frac{n!}{2^\ell \ell!\,(n-2\ell)!} x^{n-2\ell}$$

$$\widehat{H_n}(x) = \sum_{\ell=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^\ell \frac{n!}{\ell!\,(n-2\ell)!} (2x)^{n-2\ell}$$

où $E(\frac{n}{2})$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$

Les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, & \widehat{H_0}(x) &= 1 \\
H_1(x) &= x, & \widehat{H_1}(x) &= 2x \\
H_2(x) &= x^2 - 1, & \widehat{H_2}(x) &= 4\tau^2 - 2 \\
H_3(x) &= x^3 - 3x, & \widehat{H_3}(x) &= 8x^3 - 12x \\
H_4(x) &= x^4 - 6x + 3, & \widehat{H_4}(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12
\end{aligned}$$

Propriétés similaires pour les polynômes d'Hermite :

On considère les $(H_n)_{n \in N}$, la famille des polynômes d'Hermite.

Voici quelques propriétés :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$ (Formule de récurrence).
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|H_n(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x)^2 dx = 2^n \sqrt{\pi} n!$ (Norme).
3. Les polynômes d'Hermite sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

1.2.2 Polynôme de Legendre

En mathémathique et en physique théorique, les polynômes de Legendre constituent l'éxemple le plus simple d'une suite de polynôme orthogonaux. Ce sont des solutions polynominales $P_n(x)$ sur le segment $[-1,1]$, de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right) \frac{d}{dx} P_n(x)\right] + n(n+1) P_n(x) = 0,$$

dans le cas particulier où le paramètre n est un entier naturel. De façon équivalente, les polynômes de Legendre sont les fonctions propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P \to u(P) = \left[\left(1 - x^2\right) \frac{dP}{dx}\right]$$

pour les valeurs propres $-n(n+1)$, $n \in N$.

Ces polynômes orthogonaux ont de nombreuses applications tant en mathématiques, par exemple pour la décomposition d'une fonction en série de polynômes de Legendre, qu'en calcul numérique des intégrales notamment dans les méthodes de quadrature de Gausse, qu'en physique, où l'équation de Legendre apparâit naturrellement lors de la résolution des équations de Laplace ou de Helmholtz en coordonnées sphériques.

Propriétés Polynômes associés de Legendre :

Un polynômes associé de Legendre est une solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left(n\left(n+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

Cette équation différentielle n'a de solution régulière que sur l'intervalle $[-1,1]$ et si $-n\leq m\leq n$ avec n et m entiers. Cette équation est l'équation différentielle générale des polynômes de Legendre si $m=0$.

Formule de Rodrigues :

$$\begin{aligned} P_n^m\left(x\right) &= \left(-1\right)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}\left(P_n\left(x\right)\right) \\ &= \left(-1\right)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{\left(-1\right)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^n\right] \end{aligned}$$

Norme :

$$\left\|P_n^m\right\|^2=\int_{-1}^{1}P_n^m\left(x\right)^2dx=\frac{2\left(n+|m|\right)!}{\left(2n+1\right)\left(n-|m|\right)!}$$

1.2.3 Polynôme de Laguerre

En mathématiques, les polynômes de Laguerre, nommés d'après Edmond Laguerre, sont les solutions normalisées de l'équation de Laguerre

$$xy''+\left(1-x\right)\acute{y}+ny=0$$

qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 et se réecrit sous la forme de Sturm-Liouville

$$-\frac{d}{dx}\left(x\exp(-x)\frac{dy}{dx}\right)=n\exp(-x)\,y$$

Cette équation a des solutions non singulières seulement si n est un entier positif. Les solutions L_n forment une suite de polynômes ortogonaux dans $L^2(\mathbb{R}^+,\exp(-x)\,dx)$, et la normalisation se fait en leur imposant d'être de norme 1, donc de former une base orthonormée. Ils forment même une base Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^+,\exp(-x)\,dx)$.

Cette suite de polynômes peut être définie par la formule de Rodrigues

$$L_n(x)=\frac{\exp(x)}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\exp(-x)\,x^n\right)$$

La suite des polynômes de Laguerre est une suite de Sheffer.

1.2.4 Polynômes de Jacobi

Définition 1.2.1 *Les polynomes de Jacobi sont les polynômes orthogonaux du produit scalaire*

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P(x)\,Q(x)\,dx \qquad \text{avec } \alpha>-1 \text{ et } \beta>-1.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note le polynôme de Jacobi d'indice n par $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Il sont des solutions de l'équation différentielle homogène de deuxième ordre

$$(1-x^2)z^{''}+[\beta-\alpha-(\alpha+2+\beta)x]z^{'}+n(n+1+\alpha+\beta)z=0,$$

avec n est le degré du polynôme.

Les polynômes de *Jacobi* est définis explicitement par trois formule :

Formule de Rodrigue

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right],$$

tels que α, β sont deux paramètres vérifient des conditions d'orthogonalité $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

Formule analytique

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\ell}\binom{n+\beta}{\ell}(x-1)^{\ell}(x+1)^{n-\ell}.$$

Relation de récurrence

Les polynômes de Jacobi vérifiant la relation de récurrence

$$\begin{array}{rcl} P_0^{(\alpha,\beta)}(x) & = & 1, \\ P_1^{(\alpha,\beta)}(x) & = & \dfrac{\alpha+\beta+2}{2}\tau + \dfrac{\alpha-\beta}{2}, \\ P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) & = & \alpha_n \tau P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \beta_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \end{array}$$

avec

$$\alpha_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}$$

$$\beta_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+2)\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}$$

$$\gamma_n = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)^2}$$

Les polynomes orthogonaux standard sont des cas particuliers des polynomes de $Jacobi$. Les cas les plus connus sont :

• Les polynomes de *Gegenbauer* (ou ultrasphérique), obtenus en posant $\alpha = \beta$.

• Les polynomes de *Legendre* L_n en posant $\alpha = \beta = 0$.

• Les différents types de polynômes de $Tchebyshev$ T_n^i pour $i = 1, 2, 3$ et 4 qui sont obtenus en choisissant des valeurs spécifiques de α et β comme suit :

$$\begin{cases} T_n^1(x) = P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) \\ T_n^2(x) = P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) \\ T_n^3(x) = P_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) \\ T_n^4(x) = P_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) \end{cases}$$

1.2.5 Polynôme de Tchebychev

Polynômes de première espèce de Tchebyshev

Définition 1.2.2 *Les polynômes $T_n(x)$ de Tchebyshev de la première espèce en x de degré n, sont définis par la relation :*

$$T_n(x) = cos\,(n\rho) \text{ avec } x = cos\rho.$$

où $x \in [-1, 1]$, ce qui implique que la variable correspondante $\rho \in [0, \pi]$. Il est facile de voir que $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$.

A l'aide de la formule trigonométrique suivante :

$$\cos n\rho + \cos(n-2)\rho = 2\cos\rho\cos(n-1)\rho,$$

on obtient la relation de récurrence fondamentale

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, ...$$

Proposition 1.2.1 *Les polynomes $\{T_n(x),\ n = 0, 1, 2, ...\}$ de Tchebyshev de la première espèce forment un système orthogonal sur l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Autrement dit

$$\langle T_\ell(x), Tj(x)\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_\ell(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \pi, \text{si } \ell = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{si } \ell = j \neq 0 \\ 0, \text{si } \ell \neq j \end{cases} .$$

Remarque 1.2.1 *D'après la relation de récurence,*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),\ n = 2, 3, ... \\ T_0(x) &= 1 \quad et \ \ T_1(x) = x \end{aligned}$$

les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.

Proposition 1.2.2 *Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1 - x^2)z^{''}(x) - xz^{'}(x) + n^2 z(x) = 0.$$

Proposition 1.2.3 *Les zéros du polynôme $T_n(x)$ sont de la forme :*

$$x_\ell = cos\frac{\left(\ell - \frac{1}{2}\right)\pi}{n}\ ,\ \ell = 1, 2, 3, ..., n$$

Polynômes de seconde espèce de Tchebyshev

Définition 1.2.3 *Les polynômes $U_n(x)$ de Thebyshev de la second espèce de degré n, sont définis par la relation :*

$$U_n(x) = \frac{\sin \rho(n+1)}{\sin \rho} \text{ tel que } x = \cos \rho.$$

La formule de récurrence des termes qui s'applique aux polynômes de Tchebyshev est la traduction de l'identité trigonométrique élémentaire suivante :

$$\sin(n+1)\rho + \sin(n-1)\rho = 2\cos\sin n\rho$$

qui donne

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),\ n = 2, 3, ...$$

Avec

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x$$

Proposition 1.2.4 *Les polynomes de Chebyshev de la seconde espèce* $\{U_n(x), n = 0, 1, 2, ...\}$ *forment un système orthogonal sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *par rapport au poids* $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$*.*

Autrement dit

$$\langle U_\ell(x), Uj(x)\rangle = \int_{-1}^{1} U_\ell(x)U_j(x)\sqrt{1 - x^2}dx = \begin{cases} 0 \text{ if } \ell \neq j \\ \frac{\pi}{2} \text{ if } \ell = j \end{cases}$$

Remarque 1.2.2 *D'après la relation de récurence,*

$$\begin{aligned} U_n(x) &= 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),\ n = 2, 3, ... \\ U_0(x) &= 1 \quad et \ \ U_1(x) = 2x \end{aligned}$$

Les polynômes $U_n(x)$ de Tchebychev de la première espèce sont des polynômes de degré n en x.

Proposition 1.2.5 *Les polynômes de Tchebychev de la deuxieme espèce* $U_n(x)$ *sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1 - x^2)z''(x) - 3xz'(x) + n(n + 2)z(x) = 0.$$

Proposition 1.2.6 *Les zéros du polynôme* $U_n(x)$ *sont déterminés a partir des zéros de* $\sin(n + 1)\rho$, $\rho \in [0, \pi]$ *comme suit,*

$$x = x_\ell = cos\frac{\ell\pi}{n + 1}\ ,\ \ell = 1, 2, 3, ..., n$$

1.3 Relation de récurrence

Proposition 1.3.1 *Soit $(P_n(x))_{n\in N}$ une famille de polynômes orthogonaux associée à un produit scalaire $\langle .,. \rangle$, il existe trois suites réelles (a_n), (b_n) et (c_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$$

Preuve. Puisque deg $(XP_n(x)) = n+1$, le polynôme $xP_n(x)$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les $P_0(x)$, $P_1(x)$,......, $P_{n+1}(x)$, c'est-à-dire :

$$xP_n(x) \in Vect(P_0, P_{1,}.....P_{n+1})$$

Il existe $\tau_0, ..., \tau_{n+1}$ tel que :

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \tau_k P_k(x)$$

En utilisant l'orthogonalité des polynômes, et en supposant que la base (P_k) est orthonormée (ou au moins orthogonale) on a :

$$\langle xP_n, P_k \rangle = \langle P_n, xP_k \rangle$$

Puisque xP_k est de degré $K+1$, le produit scalaire $\langle P_n, xP_k \rangle$ est nul lorsque $|K-n|\rangle 1$. Ainsi, seuls les termes P_{n-1}, P_n et P_{n+1} apparaissent, ce qui donne :

$$xP_n(x) = \tau_{n+1} P_{n+1}(x) + \tau_n P_n(x) + \tau_{n-1} P_{n-1}(x)$$

En posant :

$$a_n = \tau_{n+1}, \quad b_n = \tau_n, \quad c_n = \tau_{n-1}$$

on obtient la relation de récurrence à trois termes :

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$$

■

Remarque 1.3.1 *Cette relation est essentielle, car elle permet :*

*1) De **générer récursivement** tous les polynômes de la suite à partir des premiers .*

*2) De **calculer la série génératrice** des polynômes en un point fixé, sous la forme :*

$$\sum_{n=0}^{n} P_n(x)\, t^n$$

Chapitre 2

Équations intégrales et leurs classification

Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue apparaît sous le signe intégrale.De manière générale,elle s'écrit sous la forme:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt + \lambda g(t)$$

où :

$f(x)$ est une fonction donnée, $K(x,t)$ est le noyau de l'intégrale, qui dépend des variables x et t, $g(t)$ est la fonction inconnue (ou la fonction à déterminer), λ est un paramètre réel ou complex, l'intégrale est effectuée sur intervalle $[a,b]$.

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Équations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.1 *On appelle équation de Fredholm de premièr espèce une équation de la forme:*

$$\int_a^b K(x,\, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x).$$

Où φ est la fonction inconnue, f et k sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

Définition 2.1.2 *On appelle équation intégrale de Fredholm de second espèce une équation de la forme:*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Où $\varphi(x)$ est la fonctoin inconnue, $k(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions donnés, λ est un facteur inconnu.

2.1.2 Équations intégrale de Volterra

les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x,t) = 0$ pour $x\langle t$

Définition 2.1.3 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme :*

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

Définition 2.1.4 *On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

2.1.3 Équations intégrales de Volterra-Fredholm

Une équation intégrale de Volterra-Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints, apparaît dans une équation intégrale.

Définition 2.1.5 *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\,\varphi(t)\,dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \quad x \in [a,b]. \tag{2.1.1}$$

On appele équation intégrale mixte une équation de la forme 2 :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s,t)\,\varphi(t)\,dtds.$$

Où les fonctions k_1, k_2 et f sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.1.1

$$\varphi(x) = \exp(x) + x + 1 + \int_0^x (x - t)\varphi(t)\,dt + \int_0^1 \exp(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad x \in [0,1]$$

$$\varphi(x) = \frac{17}{2}x^2 + 11x + \int_a^x \int_a^b (s-t)\varphi(t)\,dtds$$

2.2 Existence et unicité de la solution des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'éxistence et unicité de solution de l'équation (2.2.1).

Définition 2.2.1 *Soit X un espace normé et $T : X \to X$ un opérateur T est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que*

$$T(\varphi) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n\to\infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{pour tout } \varphi \text{ de } X$$

Théorème 2.2.1 (*principe de contraction*) *Siot X un espace normé si $T : X \to X$ un opérateur de contraction admet un piont fixe unique φ, alors T est un opérateur de Picard*

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi)\| \leq \frac{a^n}{1-a}\|\varphi - T(\varphi)\| \text{ pour tout } n \in N.$$

Théorème d'éxistence et d'unicité

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)\,dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)\,dt, \qquad x \in [a,b] \ . \tag{2.2.1}$$

Où

1) $f \in C[a,b], k_1(x,t) \in C(D_1)$, avec $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\}$

2) $\varphi \in C[a,b], k_2(x,t) \in C(D_2)$, avec $D_2 = [a,b] \times [a,b]$

3) $M = \max_{(x,t)\in D_1} |k_1(x,t)|$,et $\max_{(x,t)\in D_1} |k_1(x,t)|$

Théorème 2.2.2 *Dans les condition de continuité ci-dessus, supposns qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ tel que:*

$$\frac{1}{c}\left[M_1 + M_2 \exp\left(c\left(b-a\right)\right)\right] \lessdot 1.$$

Alors l'équation (2.2.1) *a une solution unique $\varphi \in C\left[a,b\right]$, et cette solution peut être obtenue par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi \in C\left[a,b\right]$*

Preuve. voir[7] . ■

2.3 Méthodes de résolution classiques

2.3.1 Méthode des quadratures appliquée aux équations intégrales de Fredholm à l'aide des polynômes orthogonaux

La méthode des quadratures constitue une approche efficace et largement utilisée pour la résolution numérique des équations intégrales, en particulier celles de Fredholm du second type. Cette méthode consiste à approximer les intégrales présentes dans l'équation par des sommes pondérées des valeurs de la fonction en certains points d'intégration convenablement choisis.

L'utilisation des polynômes orthogonaux permet d'améliorer la précision de cette approximation et de réduire l'erreur globale du calcul numérique.

Formulation de l'équation intégrale de Fredholm du second type

Considérons une équation intégrale de Fredholm du second type sous la forme générale :

$$\varphi\left(x\right) = f\left(x\right) + \lambda \int_a^b k\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt.$$

Où $\varphi\left(x\right)$ est la fonctoin inconnue, $k\left(x,t\right)$ et $f\left(x\right)$ des fonctions donnés, λ est un paramètre réel donné,

Principe de la méthode des quadratures

L'idée fondamentale est d'approcher l'intégrale par une formule de quadrature. En utilisant une formule de quadrature appropriée, on a :

$$\int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \approx \sum \beta_j k(x,t_j)\,\varphi(t_j)\,dt$$

où

t_j sont les points d'intégration,

β_j sont les poids de quadrature associés.

L'équation intégrale est alors approchée par :

$$\varphi(x) \approx \lambda \sum \beta_j k(x,t_j)\,\varphi(t_j)\,dt + f(x)$$

Discrétisation du problème

Pour obtenir un système algébrique, on évalue cette expression aux points $x = t_i$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n$, ce qui donne :

$$\varphi(t_i) \approx \lambda \sum_{j=0}^{n} \beta_j k(t_i,t_j)\,\varphi(t_j)\,dt + f(t_i)\,.$$

On obtient ainsi un système linéaire de $n+1$ équations :

$$\varphi(t_i) - \lambda \sum_{j=0}^{n} \beta_j k(t_i,t_j)\,\varphi(t_j)\,dt = f(t_i)\,.$$

En posant :

$$A_{ij} = \delta_{ij-}\lambda\beta_j k(t_i,t_j)\,,$$

le système s'écrit sous forme matricielle :

$$A\varphi = F,$$

où :

$\varphi = [\varphi(t_0)\,, \varphi(t_1)\,, ..., \varphi(t_n)]^T$

$F = [f(t_0)\,, f(t_1)\,, ..., f(t_n)]^T$

A est la matrice des coefficients.

La solution numérique de l'équation intégrale est alors obtenue en résolvant ce système linéaire.

Application des polynômes orthogonaux dans la quadrature

Pour améliorer la précision, on choisit souvent les points d'intégration comme les racines d'un polynôme orthogonal $P_n(x)$ défini sur $[a, b]$ avec une fonction poids $\omega(x)$, satisfaisant la propriété d'orthogonalité :

$$\int_a^b P_k(x) P_m(x) \omega(x) dx = 0 \qquad \text{pour} \quad k = m$$

Les poids de quadrature β_j sont alors calculés selon des formules spécifiques aux polynômes orthogonaux choisis. Cette approche conduit à la quadrature de Gauss, qui atteint un degré de précision maximal égal à $2n + 1$

Avantages de la méthode

Précision élevée avec un nombre réduit de points d'intégration .

Bonne convergence lorsque le noyau $K(x, t)$ et la fonction $f(x)$ sont réguliers.

Mise en œuvre numérique simple lorsque les polynômes orthogonaux et les poids sont connus (Gauss-Legendre, Gauss-Tchebychev, etc.).

2.3.2 Méthode des approximations successives appliquée aux équations intégrales de Fredholm à l'aide des polynômes orthogonaux

Principe général de la méthode

La méthode des approximations successives (ou méthode de Picard) permet de déterminer numériquement la solution d'une équation intégrale de Fredholm du second type sous la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt.$$

où $\varphi(x)$ est la fonctoin inconnue, $k(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions donnés, λ est un facteur inconnu.

L'ideé est de reformuler l'équation intégrale sous une forme itérative :

$$\varphi(x) = T(\varphi)(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt + f(x)$$

On définit alors une suite de récurrence :

$$\varphi_{n+1}(x) = T(\varphi_n)(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt + f(x)$$

avec une approximation intiale $\varphi_0(x)$, souvent prise comme $\varphi_0(x) = f(x)$.

Sous certaines conditions sur le noyau $K(x,t)$, cette suite converge vers la solution exacte de l'équation.

Conditions de convergence

La convergence de la méthode est garantie si l'opérateur intégral T est contractant, c'est-à-dire s'il existe une constante $\alpha \in [0,1]$ telle que :

$$\|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)\| \leq \alpha \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

pour toute fonctions φ_1 et φ_2 appartenant à l'espace fonctionel considéré. cette condition est souvent assurée si λ est sffisament petit et si $k(x,t)$ est borné.

Estimation de l'erreur

Lorsque la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on peut majorer l'errer de l'itération n par :

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|\varphi_1 - \varphi_0\|$$

ce qui permet d'estimer le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision donnée.

En pratique, on arrête les itérations lorsque la différence entre deux approximations successives devient inférieure à un seuil fixé :

$$\left\|\varphi_n - \varphi_{n+1}\right\| \leq \varepsilon$$

Application des polynômes orthogonaux

Pour améliorer la stabilité et la précision des approximations successives, on peut représenter la solution approché $\varphi_n(x)$ sous forme de série de polynômes orthogonaux :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x)$$

où $P_k(x)$ sont des polynômes orthogonaux définis sur l'intervalle $[a, b]$ par rapport à une fonction poids $\omega(x)$, α_k sont les coefficients à déterminer.

Ces coefficients peuvent être calculés par projection orthogonale grâce à la relation :

$$\alpha_k = \frac{\langle \varphi_n, P_k \rangle_\omega}{\langle P_k, P_k \rangle_\omega}$$

avec le produit scalaire pondéré défini par :

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

Cette approche permet de mieux capturer le comportement global de la solution, en particulier lorsque la fonction $f(x)$, et le noyau $K(x,t)$ présentent une structure régulière adaptée à la base orthogonale choisie.

2.3.3 Propriétés des noyaux symétriques et dégénérés

En analyse fonctionnelle, les concepts de noyaux symétriques et noyaux dégénérés jouent un rôle fondamental, notamment dans la théorie des opérateurs et les équations intégrales.

1. Noyaux symétriques

Un noyau $K(x, y)$ défini sur $D \times D$ est dit symétrique si :

$$K(x, y) = K(y, x) \text{ } \textit{pour tout } x, y \in D$$

Propriétés :

1) L'opérateur intégral associé est auto-adjoint dans un espace de Hilbert $L^2(D)$.

2) Son spectre est réel (valeurs propres réelles).

3) Il admet une décomposition spectrale : base orthonormée de fonctions propres.

4) Utilisé dans les problèmes autoadjoints (ex: équations de Fredholm en physique mathématique).

2. Noyaux dégénérés

Un noyau $K(x, y)$ est dit dégénéré s'il peut s'écrire comme une combinaison finie de fonctions séparables :

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) \psi_i(y)$$

où ϕ_i et ψ_i et sont des fonctions données, et est fini.

Propriétés :

1)L'équation intégrale devient équivalente à un système linéaire de équations.

2)Permet une réduction de complexité dans les calculs numériques.

3)Couramment utilisé dans les méthodes de projection et d'approximation.

Chapitre 3

Application des polynômes orthogonaux à la résolution des équations intégrales

3.1 Méthodes numériques

3.1.1 Méthode de collocation

Pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(s) - \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{3.1.1}$$

on choisit un ensemble de noeuds distincts $\{s_0, s_1, ..., s_n\} \subset D$ tels que :

$$r_n(s_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j \left(\phi_j(s_i) - \int_D K(s_i,t)\,\phi_j(t)\,dt \right) - f(s_i) = 0 \qquad i = 0,1,2,......., n$$

ce qui permet de déterminer les coefficients$\{c_0, c_1, ..., c_n\}$ comme solution du système linéaire suivent :

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \left(\phi_j(s_i) - \int_D K(s_i,t)\,\phi_j(t)\,dt \right) = f(s_i), \qquad i = 0,1,2,......., n$$

D'où

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j (s_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j \int_D K (s_i, t) \phi_j (t) dt + f (s_i) \qquad i = 1, 2, ..., n \ .$$

Comme

$$P_n \varphi (s) = \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j (s) ,$$

on peut aussi écrire :

$$P_n \varphi (s_i) = \sum_{j=0}^{n} \left(\int_D c_j K (s_i, t) \phi_j (t) dt + f (s_i) \right) = \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j (s_i)$$

avec $s \in D$, et $P_n : V = C(D) \to V_n$, est un opérateur de projection. Pour déterminer les coefficiennts c_j,on résout le système

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \left(\phi_j (s_i) - \int_D K (s_i, t) \phi_j (t) dt \right) = f (s_i) , \qquad i = 0, 1, 2, ..., n \qquad (3.1.2)$$

Ce système admet une solution unique si et seulement si

$$\det \left[\psi_j (s_i) \right] \neq 0$$

où $\left[\psi_j (s_i) \right]$ est la matrice induite du système (3.1.2)

Il faut noter que cette condition implique que le système des fonctions $\{\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n\}$ est linéairement indépendant.

Application de la Méthode de collocation

Si l'on considère le système $\{1, s, ...s^n\}$ des monômes linéairement indépendants, alors on obtient le déterminant de Vandermonde, pour tout $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, on construit une fonction $l_i \in V_n$, telle que :

$$l_i (s_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si \ i = j \\ 0, & si \ i \neq j \end{cases}$$

D'où

$$P_n\varphi(s) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(s_j)\, l_j(s), \qquad s \in D$$

Le système $\{l_1, l_2, ..., l_k\}$ est appelé la base des fonctions de Lagrange vérifiant :

$$\|P_n\| = \max_{s\in D} \sum_{j=0}^{n} |l_i(s)|.$$

Si on prend $V_n = span\{1, s, ...s^n\}$ alors la base des fonctions de Lagrange est donnée par :

$$l_i(s) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{(s - s_i)}{(s_i - s_j)}, \qquad (i = 0, 1, ...n)$$

3.1.2 Méthode de projection (ou Ritz)

Définition des opérateurs de projection

Définition 3.1.1 *Soit V un espace vectoriel, V_1 et V_2 deux sous espace vectoriels de V, on dit que V est une somme direct de V_1 et V_2 et on écrit*

$$V = V_1 \oplus V_2,$$

si tout $v \in V$ peut être decomposé de manière unique

$$v = v_1 + v_2, \qquad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

De plus, si V est muni d'un produit scalaire et que

$$\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2 \qquad \langle v_1, v_2 \rangle = 0,$$

alors V est appelé somme directe orthogonale de V_1 et V_2.

Proposition 3.1.1 *Soit V un espace véctoriel. Alors $V = V_1 \oplus V_2$ si et seulement s'il existe un opérateur linéaire*

$$P : V \to V$$

tel que :

1- $P^2 = P$ *(c'est-à-dire est idempotent)*

2- pour tout $v \in V$*, ona une décomposition unique :*

$$v = v_1 + v_2 \ , avecv_1 = P(v) \in V_1 \ , \ \ v_2 = (I - P)(v) \in V_2.$$

3 - $V_1 = \mathrm{Im}\,(P)\,$*, et* $V_2 = \mathrm{Im}(I - P)$,

Définition 3.1.2 *Soit* V *un espace de Banach, et soit* $P \in L(V)$ *un opérateur linéaire continu tel que :*

$$P^2 = P.$$

Si V *est un espace de Hilbret (c'est -à-dir un espace de banach muni d'un produit scalaire), alors* P *est dit projecteur orthogonal si :*

$$\langle Pv, (I - P)(u) \rangle = 0, \forall v, u \in V.$$

Exemples d'opérateurs de projection

Exemple 3.1.1 *Soit* $V = C([a;b])$*,l'espace des fonctions continues sur* $[a,b]$ *et* $V_1 = \mathbf{P}_n$ *l'espace des polynômes de degré infèrieur ou égal à* n*.*

Soit une subdivision $\tau : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ *. Pour toute fonction* $v \in C([a;b])$ *on définit* $P\,(v) \in \mathbf{P}_n$ *comme l' interpolent de Lagrange de* v *basé sur les points* x_i*, c'est-à-dire :*

$$Pv(x_i) = v(x_i), \quad i = 0, 1, 2, ..., n$$

Cette interpolation est unique, et on a :

$$Pv\,(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j \neq i} \frac{x - x_i}{x_i - x_j} \right) v\,(x_i)$$

Exemple 3.1.2 *En générale, soit* V_n *est un sous espace de dimension* n *de l'espace de Hilbert* V *, et* $\{u_0, ..., u_n\}$ *une base orthonormal de* V_n *pour tout* $v \in V$*, on définit l'opérateur de projection* P *par :*

$$P_v = \sum_{i=0}^{n} \langle u_i, v \rangle \, u_i$$

Principe des méthodes de projection

Dans toutes les méthodes de projection, on étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(s) - \int_D K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s), \qquad (s \in D) \tag{3.1.3}$$

où D est un domaine fermé et borné, un espace de fonctions tel que $V = C(D)$ ou $V = L^2(D)$.

On choisi une suite croissante de sous espace $V_n \subset V, n \geq 1$, et V_n chacun de dimension K_n, avec une base $(\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n)$.

On cherche une approximation $\varphi_n \in V_n$ de la forme :

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(s).$$

Le résidu $r_n(s)$ associé est :

$$r_n(s) = \varphi_n(s) - \int_D K(s,t)\,\varphi_n(t)\,dt - f(s),$$

ou encore, en remplaçant φ_n :

$$r_n(s) = \sum_{j=0}^{n} c_j \left(\phi_j(s) - \int_D K(s,t)\,\phi_j(t)\,dt \right) - f(s).$$

Cette formulation se réécrit de manière opératorielle :

$$A\varphi(s) = \varphi(s) - \int_D K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \qquad \Longrightarrow r_n = A\varphi_n - f$$

Les coefficients $\{c_j\}$ sont choisis de manière à minimiser ou annuler le résidu selon une méthode choisie.

Méthode de Galerkin

Soit $V = L^2(D)$ muni d'un produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \int_D u(s)\, v(s)\, ds.$$

La méthode de Galerkin impose :

$$\langle r_n, \phi_i\rangle = 0 \qquad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{3.1.4}$$

En injectant la définition de r_n , on obtient un système linéaire :

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \left(\langle \phi_j, \phi_i\rangle - \langle K\phi_j, \phi_i\rangle\right) = \langle f, \phi_i\rangle, \qquad i = 0, 1, 2, ..., n$$

Ce système est appelé système de Galerkin.

Des aspects fondamentaux doivent être examinés lors de l'étude de la méthode. Il s'agit notamment de la question de l'existence et de l'unicité de la solution du système obtenu. Il est également important d'étudier la convergence de la suite φ_n vers la solution exacte $\varphi \in V$, ainsi que la nature de cette convergence, notamment si elle est uniforme dans le cas où $V = C(D)$.

Par ailleurs, les intégrales à deux variables apparaissant dans les termes $\langle K\phi_j, \phi_i\rangle$ nécessitent, dans la majorité des cas, une évaluation numérique, en raison de leur complexité analytique.

Exemple 3.1.3 *Considérons l'équation intégrale :*

$$u(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^{1} \left(xt^2 - 1\right) u(t)\, dt.$$

On utilise comme base de test les polynômes de Legendre :

$$l_1(x) = 1, \quad l_2(x) = x, \quad l_3(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

On approxime $u(x)$ par :

$$u_3(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

En insérant dans l'équation, le résidu devient :

$$r_3(x) = u_3(x) - 1 - \frac{4}{3}x + \int_{-1}^{1} \left(xt^2 - 1\right) u_3(x)\, dt.$$

En exploitant l'orthogonalité des l_i , on impose :

$$\langle r_3, l_1 \rangle = 0, \quad \langle r_3, l_2 \rangle = 0, \qquad \langle r_3, l_3 \rangle = 0.$$

Après calculs, on trouve :

$$c_1 = \frac{1}{3},\ c_2 = \frac{3}{2},\ c_3 = 0,$$

d'où :

$$u(x) \approx u_3(x) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2}x$$

3.2 Application pratiques

3.2.1 Équations de Fredholm du 2^{eme} type

Forme générale :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \qquad x \in [a, b]$$

Méthode de Galerkin :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)$$

1. Approximation :

Où $\phi_k(x)$ sont des polynômes orthogonaux :

$P_k(x)$: polynômes de Legendre, orthogonaux sur avec poids $\omega(x) = 1$.

$T_k(x)$: polynômes de Tchebychev, orthogonaux sur avec poids $\omega(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

2. Projection :

On impose :

$$\langle r(x), \phi_j(x) \rangle = 0 \qquad pour\ j = 0, ..., n$$

où $r(x) = \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt - f(x)$

3. Système linéaire :

On obtient un système $(n+1) \times (n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \left(\delta_{jk} - \lambda A_{jk}\right) = F_j$$

avec :

$$A_{jk} = \int\int K(x,t)\,\phi_k(t)\,\phi_j(x)\,dtdx, \qquad F_j = \int f(x)\,\phi_j(x)\,dx$$

Comparaison des systèmes orthogonaux :

Propriété	**Legendre**	**Tchebychev**
Domaine	$[-1,1]$	$[-1,1]$
Poids	$\omega(x) = 1$	$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
Facilité d'intégration	Bonne	Excellente avec quadrature adaptée
Comportement en bord	Uniforme	Meilleure précision aux extrémités

3.2.2 Équations de Volterra

Forme générale :

$$\varphi(x) - \int_0^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \qquad x \in [0,\infty[\,.$$

Applications :

Modèles de croissance biologique avec mémoire, cinétique chimique à effet retardé, dynamique neuronale ou épidémiologie.

Polynômes de Laguerre :

Définis sur $[0,\infty[$, orthogonaux pour $\omega(x) = e^{-x}$.

Approximant :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k L_k(x)\,.$$

Projection ou collocation avec quadrature de Laguerre.

Avantages :

1) Naturellement adaptés à des domaines infinis.

2) Très efficaces pour des solutions décroissantes ou à support infini.

3.2.3 Équations de Fredholm-Volterra (mixtes)

Forme générale :

$$\varphi(x) - \int_0^x k_1(x,t)\,\varphi(t)\,dt - \int_0^b k_2(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

Problèmes modélisés :

-Systèmes à mémoire locale et globale.

-Réactions avec interaction passée et effets globaux.

Construction du système hybride :

1. Approche mixte :

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x)$$

avec $\psi_k(x)$ adaptés au domaine $[0, b]$.

2. **La partie Volterra** (intégrale bornée supérieure par x) est traitée via quadrature adaptative.

3. **La partie Fredholm** (intégrale sur tout $[0, b]$) est résolue comme précédemment.

3.3 Analyse de l'erreur en fonction des polynômes orthogonaux

L'utilisation des polynômes orthogonaux pour approximer la solution d'une équation intégrale permet d'obtenir des résultats trés précis, à condition que l'on étudie soigneusement l'erreur $e_n(x)$ entre la solution exacte $\varphi(x)$ et l'approximation $\varphi_n(x)$, donnée par une combinaison des polynômes orthogonaux $P_i(x)$, est définie par :

$$e_n(x) = \varphi(x) - \varphi_n(x) = \varphi(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i P_i$$

On mesure généralement cette erreur dans le norme L^2, ce qui donne :

$$\|e_n\|_{L^2}^2 = \int_a^b (\varphi(x) - \varphi_n(x))^2 dx$$

Si la fonction $\varphi(x)$ est régulière (par exemple, analytique), l'erreur décroît de manière rapide lorsque degré n augment. En effet, les méthodes spectrales, qui utilisent des polynômes comme ceux de Tchebyshev ou de Legendre, montrent une convergence exponentielle dans le cas des fonctions régulières.

De plus, le choix du type de polynômes orthogonaux influence directement la précision de l'approximation. Par exemple, les polynômes de Tchebyshev sont particulièrement efficaces sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec une pondération adaptée.

Ainsi, l'analyse de l'erreur montre que ces méthodes ne sont pas seulement puissantes, mais aussi optimales pour les fonctions lisses, avec un taux de convergence bien supèrieur à celui des méthodes classiques

Conclusion

Ce mémoire a permis de mettre en lumière le rôle fondamental que jouent les polynômes orthogonaux dans la résolution numérique des équations intégrales, notamment celles de Fredholm du second type. En combinant des fondements théoriques solides à des approches numériques concrètes telles que les méthodes de Galerkin et de collocation, nous avons démontré l'éfficacité des séries orthogonales dans l'approximation de solutions analytiques souvent inaccessibles.

L'utilisation des polynômes de Legendre, en particulier, a facilité la construction de solutions approchées précises grâce à leurs propriétés d'orthogonalité sur des intervalles finis.

Au des résultats obtenus, ce travail ouvre plusieurs perspectives intéressantes. Il serait pertinent d'étendre ces méthodes à :

- des équations intégrales a noyaux singuliers ou non symétriques
- des systèmes d'équations intégrales couplées
- ou encore à des équations aux derivées partielles via les méthodes spéctrales, ou les polynômes orthogonaux jouent également un rôle central.

Par ailleurs, l'implémentation numérique sur des logiciels spécialisés (tels que MATLAB, Python ou Maple) pourrait offrir une interface plus flexible et permettre l'analyse de cas plus complexes, et compris en haute dimension.

En définitive, ce travail illustre la complémentarité entre théorie mathématique et calcul numérique, et confirme que les polynômes orthogonaux ne sont pas uniquement des objets d'étude académique, mais bien des outils puissants pour la modélisation et la résolution de problèmes scientifiques concrets.

Bibliographie

[1] Aissa.LAKHAL. Etude du point fixe de kannan sur les équations fonctionnelles,Doctorat, université de M'sila 2025.

[2] Aissa, L, Mostafa, N, Mohamed, Nasseh, Application of Chebyshev Polynomials to Volterra-Fredholm Integral. The Analysis and Application, 7,10 (2020),pp. 1-8.

[3] Atkinson, K. E. (1997). The numerical solution of integral equations of the second kind (Vol. 4). Cambridge university press.

[4] Beals, R. (2016). Special functions and orthogonal polynomials. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 153.

[5] Manal, B., & Roufia, B. (2020). Les polynômes orthogonaux de Laguerre et Tchebychev (Doctoral dissertation, Abdelhafid boussouf university Centre mila).

[6] .M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004.

[7] M,N,NADIR,Sur la solution numérique des équations intégrales de Volterra- Fredholm en utiisant les polynômes de Chebyshev,Master,université de M'sila 2022.

[8] Pe, M. H. (1952). Laguerre Polynomials (Master's thesis, Polytechnic Institute of Brooklyn).

[9] Szeg, G. (1939). Orthogonal polynomials (Vol. 23). American Mathematical Soc.

[10] Virchenko, N. O., & Fedotova, I. (2001). Generalized associated Legendre functions and their applications. World Scientific.

[11] Wazwaz, A. M. (2011). Linear and nonlinear integral equations (Vol. 639, pp. 35-36). Berlin: Springer.