

REPUBLIQUE ALGERIENNE
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Algèbre et mathématiques discrète

Thème

Sur la fonction somme des diviseurs

Présentée par :

M^{lle} HAMOUMA Ibtissem

Soutenu publiquement le : 19/06/2023.

Devant le jury composé de :

Mr. N.Ghadbane	M.C.A,	Université de M'sila	Président.
Mr. A.BOUDAUD	Prof,	Université de M'sila	Encadreur.
Mr. D.MIHOUBI	Prof,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2022/2023

الملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الدالة مجموع القواسم σ حيث درسنا انها ضربية وقدمنا صيغا تسمح بحساب σ ودرسنا بعض عائلات الأعداد الصحيحة المعرفة بواسطة σ .
في نهاية المذكرة قدمنا جداء Dirichlet وصيغة انعكاس Moebius. خلال المذكرة كانت البراهين موجودة وممرجة.
الكلمات المفتاحية: الدالة مجموع القواسم, الأعداد الأولية, القسمة الإقليدية, عدد مثالي, اعداد ودية, عدد وفير وعدد ناقص صيغة انعكاس Moebius, جداء Dirichlet.

Résumé

L'objet de ce travail était l'étude de la fonction somme des diviseur σ , où nous avons montré sa multiplicative, donné des formules permettant le calcul de σ et étudier quelques familles d'entiers définis moyennant σ . Vers la fin du mémoire on a introduit le produit de Dirichlet et la formule d'inversion de Moebius. Durant tout le mémoire les preuves étaient présentes et référencées.

Mot clés: Fonction somme des diviseurs, nombres premiers, division euclidienne, nombre parfait, nombres amis, nombre premier et imparfait, produit de Dirichlet, formule d'inversion de Moebius.

Abstract

The object of this work was the study of the function sum of the divisor σ , where we showed its multiplicatively, gave formulas allowing the calculation of σ and studied some families of integers defined by means of σ . Towards the end of the thesis we introduced the Dirichlet product and the Moebius inversion formula. Throughout the thesis, the proof were present and referenced.

Keywords: Function sum of divisors, prime numbers, Euclidean division, perfect number, friendly numbers, prime and imperfect number, Dirichlet product, Moebius inversion formula.

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour tant d'amours et de soutiens moraux.

Je remercie mon professeur « Mr. A. Boudaoud » pour tout le soutien qu'il m'a apporté dans la rédaction de ce mémoire. Toutes les lettres ne suffisent pas à le remercier. Merci, mon professeur.

Je remercie tous les membres du jury et je suis honoré de leurs présence pour évaluer mon travail.

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé dans mon travail, en particulier ma sœur Djawhara, dont le soutien m'a accompagné tout au long de mon étude.

Enfin, je remercie toutes mes amies collègues et tous mes enseignants de département des mathématiques.

Dédicaces

C'est avec grand plaisir que je dédie ce modeste travail :

À l'être le plus cher de ma vie, ma mère.

À l'homme qui a fait de moi une femme, mon père.

À Mes chers frères, à mon beau-frère et sœurs.

À Mes chers fils de ma sœurs, à Ma chers mon neveu.

À Ma petite sœur****Hamouma Ola.****

À tous mes amis de promotion de Master en mathématique.

toute personne qui occupe une place dans mon cœur.

À tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom

Hamouma, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ma

réussite.

Table des matières

Notations	5
Introduction	6
1 Préliminaires et notions de base	7
1.1 Nombres premiers	7
1.2 Diviseurs et multiples : Pgcd et PPCM	7
1.3 Théorème fondamental de l'arithmétique	8
1.4 Fonctions arithmétiques	9
1.5 Quelques fonctions arithmétiques les plus utilisé	11
2 La fonction σ	15
2.1 Critère de multiplicativité	16
2.2 Calcule effectif de σ	17
2.3 Entiers définis moyennant σ	19
2.3.1 Nombres Parfaits	19
2.3.2 Nombres de Mersenne	22
2.3.3 Nombres abondant et Nombres déficient	23
2.3.4 Nombres amicaux	27
3 Produit de Dirichlet et Formule d'inversion de Moebius	29
3.1 Convolution de Dirichlet	29
3.2 Inversion de Moebius	32
Annexe	37
Conclusion	39
Bibliographie	40

Notations

\mathbb{C} : L'ensemble des nombres complexes.

\mathbb{N} : L'ensemble des entiers positifs.

\mathbb{Z} : L'ensemble des entiers.

$\pi(n)$: Le nombre de nombres premiers $\leq n$.

$\sigma(n)$: Somme des diviseurs positifs de n .

$d(n)$ ou $\tau(n)$: Nombre de diviseurs positifs de n .

$\sigma_r(n)$: Somme généralisée des fonctions des diviseurs.

$\varphi(n)$: La fonction essentielle d'Euler.

$\mu(n)$: La fonction de Möbius.

$\zeta(n)$: La fonction de Riemann.

$\omega(n)$: Le nombre de facteurs premiers distincts de n .

$\Omega(n)$: Le nombre total de facteurs premiers distincts de n .

$\Lambda(n)$: Fonction de Von Mangolt.

$Id(n)$: Fonction d'identité : $Id(n)$; défini par $Id(n) = n$ pour tout n .

$\mu(n)$: Fonction Moebius.

$\iota(n)$: Fonction iota.

$\text{pgcd}(a, b)$: Le plus grand commun diviseurs des entiers a et b.

$\text{ppcm}(a, b)$: Le plus petit commun multiple des entiers a et b.

Introduction

Dans le domaine de la théorie des nombres les fonctions sont considérées définies sur l'ensemble des entiers naturels et on les appelle « fonctions arithmétiques ». La classe la plus importante de ces fonctions est celle des fonctions multiplicatives, à savoir, les fonctions f telles que si m et n sont deux entiers naturels premiers entre eux alors

$$f(m.n) = f(m).f(n).$$

D'où la valeur d'une fonction multiplicative en un entier m est le produit de sa valeur en chacune des puissances premières dans sa factorisation comme produit de nombres premiers élevés à des puissances entières. Dans ce mémoire nous sommes intéressés par l'étude de la fonction $\sigma(n)$ qui a été introduite par Euler et qui associée à tout entier $n \geq 1$ à la somme de ses diviseurs.

Le mémoire est présenté en trois chapitres où un rappel des notions et outils fondamentaux fait l'objet du premier chapitre. Le deuxième chapitre contient en premier lieu un théorème « critère » de multiplicativité qui nous a permis de déduire la multiplicativité de $\sigma(n)$. Aussi il contient des formules permettant le calcul effectif de $\sigma(n)$. Dans la dernière partie de ce chapitre nous étudions quelques familles d'entiers définis moyennant $\sigma(n)$ qui sont les nombres parfaits, les nombres de Mersenne, les nombres abondants et déficients et les nombres amicaux. Le dernier chapitre est consacré au produit de Dirichlet et formule d'inversion de Moebius.

Nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires et notions de base

Nous exposons dans ce chapitre les notions et outils de base dont nous aurons besoin. Dans ce chapitre nous utilisons, essentiellement, les références [2, 4, 8, 14].

1.1 Nombres premiers

Définition 1.1.1. *On dit qu'un entier positif a est un nombre premier, si et seulement si il admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.*

Exemple 1.1.1. *Les 8 nombres premiers inférieurs à 20 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.*

1.2 Diviseurs et multiples : Pgcd et PPCM

Définition 1.2.1.

On appelle $\text{pgcd}(a, b)$ le plus grand communs diviseurs des entiers a et b .

On appelle $\text{ppcm}(a, b)$ le plus petit commun multiple des entiers a et b .

Théorème 1.2.1. *Enter le $\text{pgcd}(a, b)$ et le $\text{ppcm}(a, b)$, on a la relation suivante:*

$$\text{ppcm}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{pgcd}(a, b)}.$$

Exemple 1.2.1.

- $\text{pgcd}(22, 55) = 11$ et $\text{ppcm}(22, 55) = \frac{22 \times 55}{11} = 22 \times 5 = 110$.
- $\text{pgcd}(20, 52) = 4$ et $\text{ppcm}(20, 52) = \frac{20 \times 52}{4} = 20 \times 13 = 260$.

Lorsque les nombres sont grands, ce théorème devient moins pertinent. Pour cela nous utilisons d'autres méthodes suivantes, à savoir, l'algorithme d'Euclide, et la décomposition en facteurs premiers.

Algorithme d'Euclide :

Théorème 1.2.2. Soit deux entiers a et b , pour connaître le $\text{pgcd}(a, b)$, on effectués les divisions euclidiennes successives suivantes :

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0 \\ b &= r_0q_1 + r_1 \text{ division de } b \text{ par } r_0 \\ r_0 &= r_1q_2 + r_2 \text{ division de } r_0 \text{ par } r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \text{ division de } r_1 \text{ par } r_2 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul correspond au $\text{pgcd}(a, b)$.

Lemme 1.2.1. Si c et d sont des entiers et $c = dq + r$ où c et d deux entiers, alors $(c, d) = (d, r)$.

Démonstration. [8] Si un entier e divise à la fois c et d , alors puisque $r = c - dq$, et si a, b, m et n sont des entiers, et si $e|a$ et $e|d$, alors $e|(ma + nb)$. montre que $e|r$. Si $e|d$ et $e|r$, alors depuis $c = dq + r$, on voit que $e|c$. Puisque les diviseurs communs de c et d sont de même que les diviseurs communs de d et r , on voit que $(c, d) = (d, r)$. \square

Exemple 1.2.2. Le $\text{pgcd}(833, 721)$, on effectués les divisions suivantes :

$$\begin{aligned} 833 &= 721 \times 1 + 112 \\ 721 &= 112 \times 6 + 49 \\ 112 &= 49 \times 2 + 14 \\ 49 &= 14 \times 3 + 7 \\ 14 &= 7 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

Donc $\text{pgcd}(833, 721) = 7$.

1.3 Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier positif $n > 1$, peut s'écrire uniquement comme un produit de nombres premiers :

$$n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^k q_i^{\alpha_i},$$

où q_1, q_2, \dots, q_k sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des nombres naturels.

Cette forme d'écriture est appelée la décomposition en puissances premiers de n , ou la factorisation première standard de n .

Exemple 1.3.1. Soit $n = 1200$ et $m = 6936$. Alors $n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ et $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 17^2$.

Décomposition en nombres premiers

Théorème 1.3.1. (*Théorème fondamental de l'arithmétique*)

Tout nombre entier supérieur ou égale à deux peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.

Exemple 1.3.2.

- $833 = 7^2 \times 17$.
- $721 = 7 \times 103$.

Pour déterminer le pgcd, il suffit de prendre les facteurs en commun, donc :

$$\text{pgcd}(833, 721) = 7.$$

Nombres premiers entre eux

Définition 1.3.1. Deux entiers a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Exemple 1.3.3. Déterminons le $\text{pgcd}(5, 13)$ par l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 13 &= 5 \times 2 + 3 \\ 5 &= 3 \times 1 + 2 \\ 3 &= 2 \times 1 + 1 \\ 2 &= 1 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

$\text{pgcd}(13, 5) = 1$, donc 13 et 5 des nombres premiers entre eux.

Par la factorisation en facteurs premiers, on a $\text{pgcd}(13, 5) = 1$ car $13 = 13 \times 1$ et $5 = 5 \times 1$. Donc $\text{pgcd}(13, 5) = 1$.

1.4 Fonctions arithmétiques

Définition 1.4.1. Toute fonction f de \mathbb{N} vers \mathbb{C} , est dite fonction arithmétique.

Exemple 1.4.1. f est une fonction de \mathbb{N} vers \mathbb{N} , $f(n) = n$ et $f(n) = n^2$ des fonctions arithmétiques.

Les fonctions arithmétiques les plus étudiées sont les fonctions **multiplicatives** et les fonctions **additives**, pour cela nous donnons ci-après ces notions.

Définition 1.4.2. Une fonction arithmétique f est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour $(m, n) = 1$. Une fonction arithmétique f est dite totalement multiplicative (complètement multiplicative) si $f(1) = 1$ et si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous les entiers positifs m et n .

Exemple 1.4.2. Considérons la fonction "noyau" de n définie par

$$\gamma(n) = \begin{cases} 1 & : n = 1; \\ \prod_{p|n} p & : n > 1. \end{cases}$$

γ est multiplicative. En effet $\gamma(1) = 1$ et si m et $n \dots$ tel que $(m, n) = 1$ alors

$$\begin{aligned} \gamma(m.n) &= \prod_{p|m.n} p \\ &= \prod_{p|m} p \cdot \prod_{p|n} p \\ &= \gamma(m) \cdot \gamma(n). \end{aligned}$$

Exemple 1.4.3. La fonction $f(n) = n$ est complètement multiplicative car $\forall m, n$ on a:

$$f(m.n) = m.n = f(m).f(n)$$

et aussi $f(1) = 1$.

Exemples.

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_\alpha(n) = n^\alpha$ est une fonction complètement multiplicative.

$$f(nm) = (nm)^\alpha = n^\alpha m^\alpha = f(n)f(m).$$

- Il est connu que φ est une fonction multiplicative mais n'est pas complètement multiplicative.

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n) \text{ si } (m, n) = 1 \quad \varphi(4) = 2 \text{ alors que } \varphi(2)\varphi(2) = 1.1 = 1$$

- La fonction

$$E(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1; \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

est complètement multiplicative. En effet $E(1) = 1$ par définition. Soit mn un produit de deux entiers naturels. Alors si $mn = 1$ ou $m = 1$ et $n = 1$ donc

$$E(mn) = 1 = E(m).E(n)$$

et si $mn > 1$ on a d'une part $E(mn) = 0 = E(m).E(n)$ car au moins m ou n doit être strictement supérieure à 1.

- Si f et g deux fonctions multiplicatives (respectivement complètement multiplicative), alors fg multiplicative (respectivement complètement multiplicative).

Définition 1.4.3. Une fonction arithmétique f est dit additive si $f(1) = 0$ et si $f(mn) = f(m) + f(n)$ où $(m, n) = 1$. Une fonction arithmétique f est dit totalement additive (complètement additive) si $f(1) = 0$ et si $f(mn) = f(m) + f(n)$ pour tout les entiers positifs m et n .

Théorème 1.4.1. La fonction ω est additive. Ω est une fonction complètement additive.

Démonstration. Soit $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ et $m = q_1^{l_1} \dots q_s^{l_s}$ avec p_i, q_j nombres premiers et e_i, l_j deux entier positif et $(m, n) = 1$.

$$\Omega(mn) = \sum_i e_i + \sum_j l_j = \Omega(m) + \Omega(n).$$

alors : $\omega(mn) = r + s = \omega(m) + \omega(n)$. □

1.5 Quelques fonctions arithmétiques les plus utilisé

Nous utilisons, pour ces exemples, les références [3, 5].

□ **Fonction nombre des diviseur:** $d(n)$ si $n \geq 1$ est un entier, alors

$$d(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Par exemple, les diviseurs positifs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Donc

$$d(30) = 8.$$

□ **fonction somme diviseurs:** si $n \geq 1$, alors

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

De l'exemple précédent:

$$\sigma(30) = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 72.$$

□ **Somme de la r-ème puissance des diviseurs:** défini par

$$\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r.$$

De l'exemple précédent:

$$\sigma_2(30) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 10^2 + 15^2 + 30^2 = 900.$$

□ **Nombre des facteurs premiers distincts:** $\omega(n)$ défini par

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1,$$

et $\omega(n) = 0$.

□ **Fonction d'identité:** $Id(n)$, définie par $Id(n) = n$ pour tout $n \geq 1$.

□ **Fonction de Moebius:**

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait } > 1, \\ (-1)^{w(n)} & \text{sinon;} \end{cases}$$

□ **Fonction de Von Mangoldt:** $\Lambda(n)$, définie par:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\alpha \text{ pour un } p \text{ premier et certains } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□ **Nombre total de facteurs premiers:** $\Omega(n)$, défini par:

$$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha || n} \alpha,$$

et $\Omega(1) = 0$,. Par exemple $\omega(100) = 4$

□ **Fonction de liouville:** $\lambda(n)$, définie par: $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$.

□ **La fonction $\iota_r(n)$:** défini par: $\iota_r(n) = n^r$.

□ **Le nombre $\pi(x)$:** Le nombre des nombres premiers inférieur ou égales à x .

Par exemple, $\pi(5.3) = 3$.

□ **Fonction d'Euler:** $\varphi(n)$ est défini comme

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leq k \leq n, \text{pgcd}(k,n)=1} 1,$$

Prenons les premiers chiffres:

- $\varphi(1) = 1$. Le seul nombre n tel que $\text{pgcd}(n, 1) = 1$ est 1 lui-même.
- $\varphi(2) = 1$. Le seul nombre n tel que $\text{pgcd}(n, 2) = 1$ est 1.
- $\varphi(4) = 2$. Le seul nombre n tel que $\text{pgcd}(n, 4) = 1$ sont 1, 3.

Théorème 1.5.1. *la fonction phi d'Euler est multiplicative et*

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Théorème 1.5.2. *Soit n un entier positif. Alors*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Démonstration. Nous divisons l'ensemble des entiers de 1 à n en classes. Mettre l'entier m dans la classe C_d si le plus grand commun diviseur de m et n est d . On voit ça m est en C_d , i.e. $(m, n) = d$, si $(m/d, n/d) = 1$. Par conséquent, le nombre d'entiers dans C_d est le nombre d'entiers positifs n'excédant pas n/d qui sont relativement premier à l'entier n/d . De cette observation, on voit qu'il y a $\varphi(n/d)$ entiers dans C_d . Puisque nous avons divisé les entiers de 1 à n en disjointes classes et chaque entier est exactement dans une seule classe, n est la somme des nombres d'entier dans les différentes classes. En conséquence,

$$n = \sum_{d|n} \varphi(n/d).$$

Comme d parcourt les entiers positifs qui divisent n , n/d parcourt également ces diviseurs, donc :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(n/d) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

□

Exemple 1.5.1. *Soit $n = 30$ et $d|30$. Soit C_d la classe des valeurs positives entiers $\leq n$, où $(m, n) = d$.*

Puisque 30 admet 8 facteurs positifs 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30, il existe 8 classes de ce type:

- $C_1 = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,
- $C_2 = \{2, 4, 8, 14, 16, 22, 26, 28\}$,
- $C_3 = \{3, 9, 21, 27\}$,
- $C_5 = \{5, 25\}$,
- $C_6 = \{6, 12, 18, 24\}$,
- $C_{10} = \{10, 20\}$,

- $C_{15} = \{15\}$,

- $C_{30} = \{30\}$,

En fait, ces classes contiennent $8 = \varphi(30) = \varphi(30/1)$, $8 = \varphi(15) = \varphi(30/2)$, $4 = \varphi(10) = \varphi(30/3)$, $2 = \varphi(6) = \varphi(30/5)$, $4 = \varphi(5) = \varphi(30/6)$, $2 = \varphi(3) = \varphi(30/10)$,

$1 = \varphi(2) = \varphi(30/15)$, et $1 = \varphi(1) = \varphi(30/30)$ éléments, respectivement. De plus,

il forme une partition de l'ensemble des entiers positifs ≤ 30 . Par conséquent,

la somme des nombres d'éléments dans les différentes classes doit être égale à 30 ;

c'est-à-dire $8 + 8 + 4 + 2 + 4 + 2 + 1 + 1$.

Autrement dit,

$$\varphi(30) + \varphi(15) + \varphi(10) + \varphi(6) + \varphi(5) + \varphi(3) + \varphi(2) + \varphi(1) = 30,$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{d|30} \varphi(d) = 30.$$

Chapitre 2

La fonction σ

C'est vers 1760 qu'Euler présenta en arithmétique la fonction $\varphi(n)$. Dans ce même domaine, il avait auparavant déjà introduit la fonction σ . Ces deux fonctions possèdent de nombreuses propriétés importantes. Dans ce chapitre nous utilisons, essentiellement, les références [8, 9].

Définition : La Fonction somme des diviseurs est définie par

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Exemple : Nous donnons $\sigma(n)$ pour $1 \leq n \leq 16$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31

TABLE 2.1 – la somme des diviseurs pour $1 \leq n \leq 16$

Soit le nombre naturel $n \geq 2$ avec sa représentation canonique $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$, où q_1, \dots, q_k sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des entiers positifs, on a la formule calculatoire suivante :

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k \frac{q_i^{\alpha_i+1} - 1}{q_i - 1}.$$

On démontre cette formule par la suite.

Définition : La fonction nombre de diviseurs est définie par

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

2.1 Critère de multiplicativité

Pour prouver que σ et τ sont multiplicatives, on utilise le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *Si f est une fonction multiplicative, alors la fonction arithmétique $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ est aussi multiplicative.*

Avant de prouver le théorème, nous illustrons l'idée derrière sa preuve avec l'exemple suivant. Soit f une fonction multiplicative, et soit $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Soit $m = 4$ et $n = 15$ de telle façon que $60 = 4.15$. Alors $F(60) = F(4)F(15)$. Chacun des diviseurs de 60 peut être écrit comme produit d'un diviseur de 4 et d'un diviseur de 15 de la manière suivante : $1 = 1.1$, $2 = 2.1$, $3 = 1.3$, $4 = 4.1$, $5 = 1.5$, $6 = 2.3$, $10 = 2.5$, $12 = 4.3$, $15 = 1.15$. $20 = 4.5$, $30 = 2.15$, $60 = 4.15$ (dans chaque produit, le premier facteur est le diviseur de 4, et le second est le diviseur de 15). Ainsi,

$$\begin{aligned}
 F(60) &= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(10) + f(12) + f(15) \\
 &+ f(20) + f(30) + f(60) \\
 &= f(1.1) + f(2.1) + f(1.3) + f(4.1) + f(1.5) + f(2.3) + f(2.5) \\
 &+ f(4.3) + f(1.15) + f(4.5) + f(2.15) + f(4.15) \\
 &= f(1)f(1) + f(2)f(1) + f(1)f(3) + f(4)f(1) + f(1)f(5) + f(2)f(3) \\
 &+ f(2)f(5) + f(4)f(3) + f(1)f(15) + f(4)f(5) + f(2)f(15) + f(4)f(15) \\
 &= (f(1) + f(2) + f(4))(f(1) + f(3) + f(5) + f(15)) \\
 &= F(4)F(15).
 \end{aligned}$$

Démonstration. Pour montrer que F est une fonction multiplicative, il faut montrer que si m et n sont des entiers positifs relativement premiers, alors $f(mn) = f(m)f(n)$. Supposons que $(m, n) = 1$. Donc

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d).$$

Puisque $(m, n) = 1$, chaque diviseur de mn s'écrit de manière unique comme le produit de diviseurs relativement premiers d_1 de m et d_2 de n , et chaque paire de diviseurs d_1 de m et d_2 de n correspond à un diviseur $d = d_1d_2$ de mn . Alors

$$F(mn) = \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1d_2).$$

Puisque f est multiplicative et puisque $(d_1, d_2) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1)(d_2) \\ &= \sum_{d_1|m} f(d_1) \sum_{d_2|n} f(d_2) \\ &= F(m)F(n). \end{aligned}$$

□

Corolaire. τ et σ sont multiplicative.

Démonstration. En utilisant le théorème 2.1.1 et le fait que

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

et

$$d(n) = \sum_{d|n} 1.$$

C'est-à-dire on a appliqué le théorème 2.1.1 avec $f(x) = x$ et $f(1) = 1$ respectivement. □

2.2 Calcule effectif de σ

Dans la suite nous donnons des formule de calcul en se basant uniquement sur la factorisation en question de l'étudier, on peut dériver des formules pour leurs valeurs basées sur des factorisations premières. Tout d'abord, on trouve des formules pour $\sigma(n)$ et $\tau(n)$ lorsque n est la puissance d'un nombre premier.

Lemme 2.2.1. *Soient p premier et a un entier positif. Alors*

$$\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \dots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1},$$

et

$$\tau(p^a) = a + 1.$$

Démonstration. Les diviseurs de p^a sont $1, p, p^2, \dots, p^{a-1}, p^a$. Par conséquent, p^a a exactement $a + 1$ diviseur, de sorte que $\tau(p^a) = a + 1$. et

$$\sigma(p^a) = 1 + p + p^2 + \dots + p^{a-1} + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}.$$

□

Exemple 2.2.1. Soit $p = 5$ et $a = 3$, on a :

$$\sigma(5^3) = (1 + 5 + 5^2 + 5^3) = \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 156, \quad \tau(5^3) = 3 + 1 = 4.$$

Le lemme ci-dessus conduit au théorème suivant.

Théorème 2.2.1. Si l'entier positif n une factorisation en nombres premières $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ alors

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_s^{a_s+1} - 1}{p_s - 1} = \prod_{j=1}^s \frac{p_j^{a_j+1} - 1}{p_j - 1},$$

et

$$\tau(n) = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \dots + (a_s + 1) = \prod_{j=1}^s (a_j + 1).$$

Démonstration. Puisque σ et τ sont multiplicatives, on voit que $\sigma_n = \sigma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}) =$

$$\sigma(p_1^{a_1}) \sigma(p_2^{a_2}) \dots \sigma(p_s^{a_s}) = \text{et } \tau(n) = \tau(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}) = \tau(p_1^{a_1}) \tau(p_2^{a_2}) \dots \tau(p_s^{a_s}).$$

Insertion des valeurs pour $\sigma(p_i^{a_i})$ et $\tau(p_i^{a_i})$ trouvé dans le lemme précédent. On

obtient la formule recherchée. □

Exemple 2.2.2. En utilisant le théorème 2.2.1, on a :

$$\sigma(200) = \sigma(2^3 5^2) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 31 = 465,$$

et

$$\tau(200) = \tau(2^3 5^2) = (3 + 1)(2 + 1) = 12.$$

Aussi

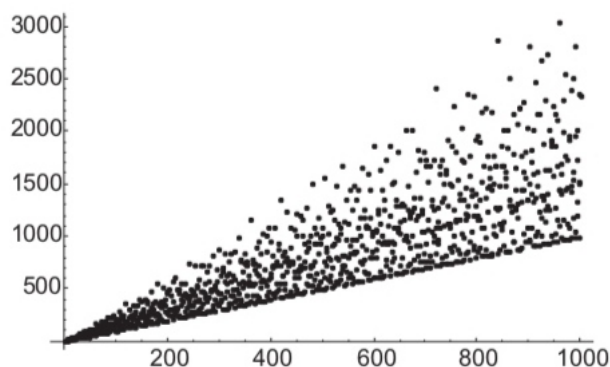
$$\sigma(720) = \sigma(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 31 \cdot 13 \cdot 6 = 2418,$$

et

$$\tau(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) = (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 30.$$

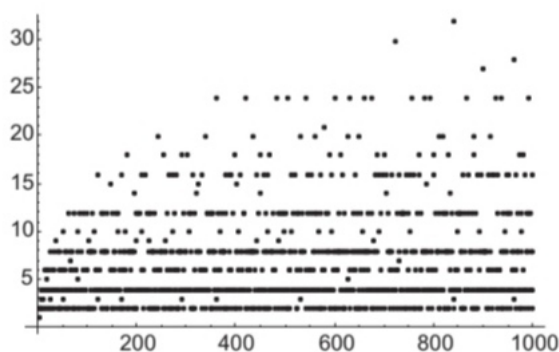
Illustration graphique :

Voici un graphique de $\sigma(n)$ pour $1 \leq n \leq 1000$ où on trace le point $(n, \sigma(n))$ [9]:



Notez que si p est premier, $\sigma(p) = p + 1$. Cela donne le point $p, p + 1$, qui réside sur la droite $y = x + 1$.

Voici un graphique de $\tau(n)$ pour $1 \leq n \leq 1000$ où on trace le point $(n, \tau(n))$ [9]:



Notez que si p est premier, $\tau(p) = 2$. revient à plusieurs reprises à la ligne horizontale $y = 2$.

2.3 Entiers définis moyennant σ

2.3.1 Nombres Parfaits

En raison de certaines croyances mystiques, les anciens Grecs s'intéressaient à ces nombres entiers qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs positifs propres. Ces nombres entiers sont appelés nombres parfaits [6, 8].

Définition 2.3.1. *Un entier $n \geq 1$ est appelé nombre parfait si $\sigma(n) = 2n$.*

Un entier $n \geq 1$ est dit k -parfait si $\sigma(n) = kn$. Notez qu'un nombre parfait est 2-parfait.

Un entier positif $n \geq 1$ est dit super-parfait si $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.

Les calculs ci-dessous que nous avons fait avec le programme Maple pour calculer de grandes valeurs sur l'intervalle $[1, 2000000]$:

$$\begin{aligned} \square \sigma(n) = 3n & & 120 \\ & & 672 \\ & & 523776. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \sigma(n) = 4n & & 30240 \\ & & 32760. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.1. $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, on dit que 6 est parfait.

$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$, alors 28 est un autre nombre parfait.

$\sigma(\sigma(16)) = \sigma(31) = 32 = 2.16$. Alors 16 est super-parfait.

Parce que $120 = 2^3.3.5$ est σ multiplicative, nous avons $\sigma(120) = \sigma(2^3.3.5) =$

$\sigma(2^3)\sigma(3)\sigma(5) = 15.4.6 = 360$. $\sigma(120) = 360 = 3.120$ donc 120 est 3-parfait.

Remarque 2.3.1. [6]

- Les quatre premiers nombres parfaits, 6, 28, 496, 8128, connus depuis l'Antiquité.
- Le cinquième nombre parfait, 33550336, apparaît dans un codex latin datant 1456.
- Les sixième et septième nombres parfaits, 8589869056 et 137438691328, sont dus à Cataldi à fin du 16 siècle.
- Le huitième est du à Euler (1772): 2305843008139952128.

Les anciens Grecs savaient comment trouver tous les nombres parfaits pairs. Le théorème suivant indique quels entiers positifs pairs sont parfaits.

Théorème 2.3.1. *L'entier positif n est un nombre parfait pair si et seulement si*

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

où m est un entier positif tel que $m \geq 2$ et $2^m - 1$ est premier.

Démonstration.

(\Rightarrow)

Si $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ où $2^m - 1$ est premier, alors n est parfait. On note que $2^m - 1$ est impair, on a $(2^{m-1}, 2^m - 1) = 1$. Puisque σ est une fonction multiplicative, on voit que

$$\sigma(n) = \sigma(2^{m-1})\sigma(2^m - 1).$$

Par le lemme 2.2.1 $\sigma(2^{m-1}) = 2^m - 1$ et $\sigma(2^m - 1) = 2^m$, on suppose que $2^m - 1$ est premier. Conséquent,

$$\sigma(n) = (2^m - 1)2^m = 2n.$$

démontrer que n est un nombre parfait.

(\Leftarrow)

Pour montrer que l'inverse est vrai, soit n un nombre parfait pair, écrire $n = 2^s t$ où s et t sont des entiers positifs et t est impair. Depuis $(2^s, t) = 1$, voir lemme 2.2.1

$$\sigma(n) = \sigma(2^s t) = \sigma(2^s)\sigma(t) = (2^{s+1} - 1)\sigma(t). \quad (2.1)$$

Comme n est parfait, on a

$$\sigma(n) = 2n = 2^{s+1}t. \quad (2.2)$$

(2.1) et (2.2) montre que

$$(2^{s+1} - 1)\sigma(t) = 2^{s+1}t. \quad (2.3)$$

Depuis $(2^{s+1}, 2^{s+1} - 1) = 1$, on voit que $2^{s+1} | \sigma(t)$. Donc, il existe un entier q tel que $\sigma(t) = 2^{s+1}q$. Pour $\sigma(t)$ dans (2.3) dit que

$$(2^{s+1} - 1)2^{s+1}q = 2^{s+1}t$$

Donc,

$$(2^{s+1} - 1)q = t. \quad (2.4)$$

Par conséquent, $q|t$ et $q \neq t$. On remplace t par l'expression du membre de gauche de (2.4), trouvons que

$$t + q = (2^{s+1} - 1)q + q = 2^{s+1}q = \sigma(t). \quad (2.5)$$

On montre que $q = 1$. Notez que si $q \neq 1$, alors il y a au moins trois diviseurs positifs distincts de t , à savoir $1, q$, et t . Ceci implique que $\sigma(t) \geq t + q + 1$, ce qui contredit (2.5). Ainsi, $q = 1$ et, depuis (2.4), donc $t = 2^{s+1} - 1$. Aussi de (2.5) on voit ça $\sigma(t) = t + 1$, t doit être premier, puisque ses seuls diviseurs positifs sont 1 et t . Donc $n = 2^s(2^{s+1} - 1)$, où $2^{s+1} - 1$ est premier. \square

Du théorème 2.3.1 on voit que pour trouver des nombres parfaits pairs, il faut trouver nombres premiers de la forme $2^m - 1$. Dans notre recherche des nombres premiers de cette forme, montrons d'abord que l'exposant m doit être premier.

Théorème 2.3.2. *Si m est un entier positif et $2^m - 1$ est premier, alors m doit être premier.*

Démonstration. Supposons que m n'est pas premiers, de sorte que $m = ab$ où $1 < a < m$ et $1 < b < m$. Alors

$$2^m - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1).$$

Puisque les deux facteurs du côté droit de l'équation sont supérieurs à 1, $2^m - 1$ est composé si m n'est pas premier. Donc, si $2^m - 1$ est premier, alors m doit aussi être premier. \square

Du théorème 2.3.2, nous savons que pour chercher des nombres premiers de la forme $2^m - 1$ nous avons besoin de considérer seulement les entiers m premiers. Les entiers $2^m - 1$ sont les nombres de Mersenne que nous allons les voir dans ce qui suit.

2.3.2 Nombres de Mersenne

Marin Mersenne s'est intéressé aux nombres premiers et a tenté de trouver une formule représentant tous les nombres premiers. Quoiqu'il ait échoué dans ses tentatives, ses travaux sur les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ ont trouvé des échos jusqu'à aujourd'hui [8].

Définition 2.3.2. *Si m est un entier positif, alors $M_m = 2^m - 1$ est appelé nombre de Mersenne, et, si p est premier et $M_p = 2^p - 1$ est également premier, alors M_p , est appelé un nombre premier de Mersenne.*

Exemple 2.3.2. *Le nombre de Mersenne $M_7 : 2^7 - 1$ est premier, alors que le nombre de Mersenne $M_{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ est composé.*

Il nous faut plusieurs théorèmes pour décider si un nombre est de Mersenne est premier.

Théorème 2.3.3. *Si p est un nombre premier impair, alors tout diviseur du nombre de Mersenne $M_p : 2^p - 1$ est de la forme $2kp + 1$ où k est un entier positif.*

Démonstration. Soit q un nombre premier $M_p = 2^p - 1$. D'après le petit théorème de Fermat, donné $q | (2^{q-1} - 1)$. Alors

$$(2^p - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^{(p, q-1)} - 1. \quad (2.6)$$

Comme q est un diviseur commun de $2^p - 1$ et $2^{q-1} - 1$, on sait que $(2^p - 1, 2^q - 1) > 1$. Donc, $(p, q-1) = p$, puisque la seule autre possibilité, à savoir $(p, q-1) = 1$, implique par (2, 6) que $(2^p - 1, 2^q - 1) = 1$. Alors $p | (q-1)$, et donc il existe un entier positif m avec $q-1 = mp$. Ce q est impair on voit que m doit être pair, donc $m = 2k$, où k est un entier positif. Donc, $q = mp + 1 = 2kp + 1$. \square

Exemple 2.3.3. Pour décider si $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$ est premier, il suffit de regarder pour un facteur premier n'excédant pas $\sqrt{8191} = 90,504\dots$. De plus, à partir de Théorème 2.3.3 un tel diviseur premier doit être de la forme $26k + 1$. Les seuls candidats pour les nombres premiers un tel diviseur premier doit être de la forme $26k + 1$. Les seuls candidats pour les nombres premiers divisant M_{13} inférieurs ou égaux à $\sqrt{M_{13}}$ sont 53 et 79. La division de première instance exclut facilement ces cas, de sorte que M_{13} est premier.

Exemple 2.3.4. Pour décider si $M_{23} = 2^{23} - 1 = 8388607$ est premier, il suffit de déterminer si M_{23} est divisible par un nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{M_{23}} = 2896.309\dots$ de la forme $46k + 1$. Le premier nombre premier de cette forme est 47. Une division d'essai montre que $8388607 = 47 \cdot 178481$, de sorte que M_{23} est composite.

Mais lorsque les nombres de Mersenne deviennent très grands, il nous est difficile de savoir s'ils sont premiers ou non. Alors, le test suivant est utile pour trouver les plus grands nombres premiers de Mersenne.

Le test de Lucas-Lehmer. Soit p un nombre premier et $M_p = 2^p - 1$ désigne le p -ème nombre de Mersenne. Définissons une séquence d'entiers de manière récurrente en mettant $r_1 = 4$, et pour $k \geq 2$,

$$r_k \equiv r_{k-1}^2 - 2 \pmod{M_p}, 0 \leq r_k < M_p.$$

Alors, M_p , est premier si et seulement si $r_{p-1} \equiv 0 \pmod{M_p}$. L'exemple suivant pour illustrer une application du test de Lucas-Lehmer.

Exemple 2.3.5. Considérons le nombre de Mersenne $M_5 = 2^5 - 1 = 31$. Alors $r_1 = 4$, $r_2 \equiv 4^2 - 2 = 14 \pmod{31}$, $r_3 \equiv 14^2 - 2 = 18 \pmod{31}$, et $r_4 \equiv 18^2 - 2 = 0 \pmod{31}$. Puisque $r_4 \equiv 0 \pmod{31}$, on conclut que $M_5 = 31$ est premier.

2.3.3 Nombres abondant et Nombres déficient

Nous utilisons, essentiellement, la référence [11].

Définition 2.3.3. On appelle nombre parfait un nombre égal à la somme de ses parties aliquotes (c'est-à-dire de ses diviseurs plus petits strictement que lui). Un nombre est dit **abondant** ou **déficient** suivant qu'il est plus petit ou plus grand que la somme de ses parties aliquotes. Un entier n est dit **k -abondant** si $\sigma(n) > (k+1)n$. Dans la suite, nous désignerons toujours par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs du nombre n . Donc

$$\begin{cases} 2n < \sigma(n) & \text{pour un nombre abondant,} \\ 2n > \sigma(n) & \text{pour un nombre déficient.} \end{cases}$$

D'abord, Nous mentionnons quelques propriétés de $\sigma(n)$.

1. p et q étant deux nombres premiers entre eux, on a

$$\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q).$$

2. a, b, c, \dots étant les facteurs premiers distincts du nombre n , on a

$$1 > \frac{n}{\sigma(n)} > \left(1 - \frac{1}{a}\right) > \left(1 - \frac{1}{b}\right) > \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

La première inégalité est évidente, car on a évidemment

$$\sigma(n) > n.$$

Nous prouvons la seconde

$$\sigma(n) = a^\alpha b^\beta c^\gamma \frac{a - \frac{1}{a^\alpha}}{a - 1} \frac{b - \frac{1}{b^\beta}}{b - 1} \frac{c - \frac{1}{c^\gamma}}{c - 1};$$

nous concluons

$$\sigma(n) < n \frac{a}{a - 1} \frac{b}{b - 1} \frac{c}{c - 1} \dots,$$

d'où

$$\frac{n}{\sigma(n)} > \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

Maintenant, nous mentionnons quelques propositions générales sur les nombres parfaits, abondants et déficients.

Théorème 2.3.4. *Un nombre est abondant, parfait ou déficient suivant que la somme des inverses de ses diviseurs est plus grande que 2, égale à 2, ou plus petite que 2.*

Démonstration. Soit n un nombre et soient

$$1, d_2, d_2, \dots, d_{k-2}, d_{k-1}, n$$

les diviseurs rangés par ordre de grandeur croissante. Alors,

$$d_1 d_{k-1} = n, \quad d_2 d_{k-2} = n, \quad \dots;$$

on a donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{d_{k-1}} + \frac{1}{d_{k-2}} + \dots + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{1}.$$

Or $\frac{\sigma(n)}{n}$ est plus grand que 2, égal à 2 ou plus petit que 2 suivant que le nombre n est abondant, parfait, ou déficient. \square

Théorème 2.3.5. *Tout nombre divisible par un nombre qui n'est pas déficient est abondant.*

Démonstration. Supposons que le nombre n admette comme diviseur un nombre m abondant ou parfait. Soient $1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{h-1}, m$ les diviseurs de m . On aura, d'après le théorème 2.3.4,

$$\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} + \dots + \frac{1}{\delta_{h-1}} + \frac{1}{m} \geq 2$$

Or n , admettant m ; pour diviseur, admet tous les diviseurs de m . La somme des inverses des diviseurs de n est donc plus grande que la somme des inverses des diviseurs de m , puisqu'elle est égale à cette somme augmentée de la somme des inverses des diviseurs de n qui ne divisent pas m .

On a donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(m)}{m},$$

et, par suite,

$$\frac{\sigma(n)}{n} > 2.$$

□

Remarque 2.3.2. Si $m = n$ on a $\frac{\sigma(n)}{n} \geq 2$.

Corollaires. Un nombre parfait ne peut pas être divisible par un nombre parfait, autre que lui-même.

Un nombre parfait ne peut admettre que des diviseurs déficients autres que lui-même.

Démonstration. Suppose que n parfait, et divisible par m parfait. i.e. n est abondant. D'où

$$\sigma(n) = 2n,$$

et

$$\sigma(n) > 2n.$$

Contradiction.

Suppose que n est parfait et il est divisible par m abondant. D'où le théorème 2.3.5 n est parfait et abondant.

Alors

$$\frac{\sigma(n)}{n} = 2,$$

et

$$\frac{\sigma(n)}{n} > 2.$$

Contradiction. □

Théorème 2.3.6. Si a, b, c, \dots étant les facteurs premiers distincts d'un nombre n qui n'est pas déficient, on a

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\dots < \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Car, si le nombre n est abondant ou parfait, on a

$$\frac{n}{\sigma(n)} \leq \frac{1}{2}.$$

Or on a aussi

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\dots < \frac{n}{\sigma(n)},$$

donc

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\dots < \frac{1}{2}.$$

□

Théorème 2.3.7. *Tout nombre de la forme a^α , a étant premier, est déficient.*

Démonstration. en effet

$$\sigma(a^\alpha) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

et l'on a, évidemment

$$2a^\alpha > \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

Ou

$$2a^{\alpha+1} - 2a^\alpha > a^{\alpha+1} - 1,$$

ou encore

$$a^{\alpha+1} > 2a^\alpha - 1.$$

Car, a étant un nombre premier,

$$a \geq 2,$$

donc

$$a^{\alpha+1} \geq 2a^\alpha,$$

et, par suite,

$$a^{\alpha+1} > 2a^\alpha - 1.$$

De cette dernière inéquation on tire que

$$\sigma(a^\alpha) < 2a^\alpha.$$

□

Corollaires. Il n'y a pas de nombre parfait n'admettant qu'un facteur premier.

Exercice 2.3.1. [8] Si n est un entier positif, tout entier est soit déficient, soit parfait, soit abondant.

1. Trouvez les six plus petits entiers positifs abondants.
2. Trouvez le plus petit entier positif abondant impair.
3. Montrer que tout multiple d'un nombre abondant ou parfait, autre que le nombre parfait lui-même, est abondant.

Solution :

1. Nous avons $\sigma(12) = 28$, $\sigma(18) = 39$, $\sigma(20) = 42$, $\sigma(24) = 60$, $\sigma(30) = 72$ et $\sigma(36) = 91$.

2. Si $n = p^a q^b$, alors $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{p^{a+1} - 1}{(p-1)p^a} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{(q-1)q^b} < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} < 2$ donc

n a au moins 3 factorisations premières distinctes.

Si $p < q$ sont premiers alors vérifier que $\frac{\sigma(p^a)}{p^a} > \frac{\sigma(q^a)}{q^a}$ nous pouvons donc on prendre les 3 facteurs premiers comme étant 3, 5 et 7. Essayez les possibilités

dans l'ordre : 3.5.7, $3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, 3.5.7.11, etc. Et Trouve ça $\sigma(3^5 \cdot 5 \cdot 7) =$

$\sigma(945) = 1920$ est le plus petit exemple.

3. Supposons que n est abondant ou parfait. Alors $\sigma(n) \geq 2n$. Suppose que $n|m$,

Alors $m = nk$ pour un k entier les diviseurs de m incluent les entiers kd et $d|n$.

Alors $\sigma(m) \geq \sum_{d|n} (k+1)d = (k+1) \sum_{d|n} d = (k+1)2n > 2kn = 2m$.

et m est abondant.

2.3.4 Nombres amicaux

Les nombres amicaux est une célèbre histoire qui remonte a (250–330ap.J.–C.), nous utilisons, essentiellement, la référence [10].

Définition 2.3.4. Deux entiers positifs m et n sont dits amis, amicaux ou amiables s'ils sont distincts et si chacun est la somme des diviseurs stricts de l'autre : $m \neq n$, $\sigma'(m) = n$, $\sigma'(n) = m$,

Il revient au même de dire : $m \neq n$, $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$.

Si $m < n$, alors n est déficient, et m est abondant.

Sans la condition $m \neq n$, on peut considérer que les nombres parfaits sont les nombres qui sont amis avec eux-mêmes.

Exemple 2.3.6. Les entiers 220 et 284 sont amicaux car: $220 + 284 = 504$.
 $\sigma(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 + 220 = 504$.

$$\sigma(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 + 284 = 504.$$

Alors:

$$\sigma'(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

$$\sigma'(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Proposition 2.3.1. (*Thabit ibn Qurra, vers 850 ap. J.-C.*).

Si $k > 1$ et si les trois nombres suivants $p = 3 \times 2^{k-1} - 1$, $q = 3 \times 2^k - 1$ et $r = 9 \times 2^{2k-1} - 1$, sont premiers, alors $m = 2^k p q$ et $n = 2^k r$ sont amis.

Démonstration. En effet, $m + n = 9 \times 2^{2k-1} (2^{k+1} - 1)$

$$\text{Et } \sigma(m) = \sigma(2^k) \cdot \sigma(p) \cdot \sigma(q) = (2^{k+1} - 1) \cdot (p+1) \cdot (q+1) = 9 \times 2^{2k+1} (2^{k+1} - 1) = m + n.$$

$$\text{Enfin, } \sigma(n) = \sigma(2^k) \cdot \sigma(r) = (2^{k+1} - 1) \cdot (r+1) = m + n. \quad \square$$

Il n'y a pas de moyen général d'identifier les paires, Mais au fil des ans, certaines espèces spéciales ont été découvertes.

Exemples: Histoire de quelques exemples d'entiers amis[10].

Voici la liste des paires de nombres amis de moins de six chiffres.

Pour ($k = 2$): on a (220, 284)

(1184, 1210) découverte en 1866 par un jeune garçon de 16 ans, Nicolo Paganini.

(2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), (10744, 10856), (12285, 14595)

Pour $k = 4$:

(17296, 18416), signalée par Ibn al-Banna au XIV^{ème} siècle, redécouverte par Fermat dans une lettre à Roberval ou à Mersenne, 22 septembre 1636.

(63020, 76084), (66928, 66992), (67095, 71145), (69615, 87633), (79750, 88738).

Pour $k = 7$:

(9363584, 9437056), découverte par Muhammad Baqir Yazdi au 17^{ème} siècle, et par Descartes, lettre à Mersenne, 31 mars 1638.

En 2003, on connaissait 2185621 paires de nombres amis, et en particulier tous les nombres amis de moins de 12 chiffres. On ignore s'il en existe une infinité.

Les nombres amis connus sont répertoriés A063990 dans l'OEIS.

220, 284, 1184, 1210, 2620, 2924, 5020, 5564, 6232, 6368, etc.

Produit de Dirichlet et Formule d'inversion de Moebius

3.1 Convolution de Dirichlet

Il y a beaucoup d'opérations binaires définies sur l'ensemble des fonctions arithmétiques. D'abord la somme et le produit de deux fonctions arithmétiques, disons f et g , sont définies de la manière habituelle. Dans ce chapitre nous utilisons, essentiellement, les références [5, 13]: pour tout n on a

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

$$(fg)(n) = f(n)g(n).$$

Notons que les fonctions arithmétiques multiplicative et additive possèdent les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité. Maintenant nous définissons la convolution de Dirichlet.

Définition 3.1.1. *La convolution de Dirichlet de f et g , notée $f * g$, est définie comme suit:*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

La convolution de Dirichlet respecte elle aussi les propriétés de commutativité, de distributivité et d'associativité. En effet, on a la proposition suivante .

Proposition 3.1.1. *Si f , g et h sont des fonctions arithmétiques, alors*

1. $f * g = g * f$;
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$;
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Démonstration. f, g et h des fonctions arithmétiques: pour chaque entier positif n

1. Nous avons

$$\begin{aligned}(f * g)(n) &= \sum_{d|n} f(d)g(n/d) \\ &= \sum_{d|n} f(n/d)g(d) \\ &= (g * f)(n).\end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(n) &= \sum_{ab=n} (f * g)(a)h(b) \\ &= \sum_{ab=n} \sum_{cd=a} f(c)g(d)h(b) \\ &= \sum_{cdb=n} f(c)g(d)h(b).\end{aligned}$$

La même chose avec $(f * (g * h))(n) = \sum_{cdb=n} f(c)g(d)h(b)$.

3. Nous avons

$$\begin{aligned}(f * (g + h))(n) &= \sum_{d|n} f(d).(g + h)(n/d) \\ &= \sum_{d|n} f(d).(g(n/d) + h(n/d)) \\ &= \sum_{d|n} f(d)g(n/d) + f(d)h(n/d) \\ &= \sum_{d|n} f(d)g(n/d) + \sum_{d|n} f(d)h(n/d) \\ &= f * g + f * h \\ &= ((f * g) + (f * h))(n)\end{aligned}$$

D'où

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

□

Aussi, on peut facilement vérifier que l'ensemble des fonctions arithmétiques muni de l'addition et de la convolution de Dirichlet forme un anneau commutatif. Où, cet anneau possède la fonction E comme élément neutre pour l'opération $(*)$ est la fonction $0(n) = 0, \forall n$ l'élément neutre pour l'opération $(+)$.

Définition 3.1.2. Soit f une fonction arithmétique. On dit que la fonction arithmétique g est l'inverse de f si $f * g = g * f = E$. Cet inverse sera noté f^{-1} . Il est important de mentionner que si f possède un inverse, cette inverse est unique.

Dans la suite on a le condition nécessaire et suffisant par l'existence de l'inverse.

Proposition 3.1.2. Une fonction arithmétique a un élément inverse si et seulement si $f(1) \neq 0$.

Démonstration.

(\Rightarrow)

Supposons que f possède un inverse. Alors

$$1 = E(1) = (f * f^{-1})(1) = f^{-1}(1)f(1),$$

et c'est pourquoi $f(1) \neq 0$.

(\Leftarrow)

Supposons maintenant que $f(1) \neq 0$, et en définissant de manière inductive la fonction g par

$$g(1) = \frac{1}{f(1)},$$

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n, d>1} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Pour tout $n > 1$, alors, $f * g = E$, et par la proposition 3.1.1 g est inverse de f . \square

On désigne respectivement par \mathcal{M} et \mathcal{CM} l'ensemble des fonctions multiplicatives et l'ensemble des fonctions complètement multiplicatives. Nous vérifierons la propriété de multiplicativité des fonctions inverses. Alors l'inverse d'une fonction arithmétique multiplicative est lui-même multiplicative puisque nous savons déjà par la définition 3.1.1 que la convolution de Dirichlet de deux fonctions dans \mathcal{M} est aussi dans \mathcal{M} .

Proposition 3.1.3. Si $f \in \mathcal{M}$, alors $f^{-1} \in \mathcal{M}$.

La convolution de Dirichlet nous fournit une caractérisation des fonctions complètement multiplicatives. Notons d'abord qu'une fonction $f \in \mathcal{CM}$ si et seulement si $f^{-1} = \mu f$.

Dans la proposition suivante nous donne, moyens la convolution de Dirichlet, une condition nécessaire et suffisant pour une fonction f multiplicative soit complètement multiplicative.

Proposition 3.1.4. Une fonction multiplicative f est complètement multiplicative si et seulement si

$$f(g * h) = fg * fh,$$

pour toutes fonctions arithmétiques g et h .

Démonstration.

(\Rightarrow)

Si f est complètement multiplicative alors, quelles que soient les fonctions g et h , pour tout n ,

$$\begin{aligned} (f(g * h))(n) &= f(n) \sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} f(d)g(d)f\left(\frac{n}{d}\right)h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= (fg * fh)(n). \end{aligned}$$

(\Leftarrow)

Supposons que l'équation tienne pour $g = 1$ et pour $h = \mu$. On a alors

$$E = fE = f(I * \mu) = fI * f\mu = f * \mu f,$$

et si pourquoi $f^{-1} = \mu f$, ce qui implique que f est complètement multiplicative. \square

Exercice 3.1.1. [8] Supposons que f est une fonction multiplicative avec $f(1) = 1$. Montrer que

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \dots (1 - f(p_k))$$

où $n = p_1^{a_1} p_1^{a_2} \dots p_1^{a_k}$ est la factorisation de puissance première de n .

Trouver une formule simple pour $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d)$ pour tout entier positif n .

Solution: La fonction σ jouer le rôle de f dans l'identité. Alors la somme est égale

$$\prod_{i=1}^k (1 - \sigma(p_j)) \prod_{i=1}^k (1 - (p_i + 1)) = (-1)^k \prod_{i=1}^k p_i.$$

3.2 Inversion de Moebius

Cette fonction fut étudiée systématiquement par Moebius¹⁴ en 1832. Elle a de nombreuses applications dans le domaine du combinatoire et de théorie des nombres: étude des p-groupes, graphes, ... [8, 10].

Définition 3.2.1. La *fonction de Moebius* est la fonction $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ définie par :

$$\begin{cases} \mu(1) = 1; \\ \mu(n) = 0 \text{ si } n \text{ est divisible par un carré.} \\ \mu(n) = (-1)^r \text{ si } n \text{ est produit de } r \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

Remarque 3.2.1. Un entier n est appelé **sans carrés** s'il est égal à 1 ou est produit de nombres premiers distincts.

La fonction de Möbius est référencée A008683 dans l'OEIS.

Exemple 3.2.1. D'après la définition de $\mu(n)$, on voit que $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = \mu(2^2) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = \mu(2.3) = 1$, $\mu(7) = -1$, $\mu(8) = \mu(2^3) = 0$, $\mu(9) = \mu(3^2) = 0$, et $\mu(10) = \mu(2.5) = 1$.

Théorème 3.2.1. La fonction de Mobius $\mu(n)$ est une fonction multiplicative.

Démonstration. Supposons que m et n soient des entiers positifs relativement premiers. Pour montrer que $\mu(n)$ est multiplicative nécessite de montrer que $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$. Pour établir cette égalité, on considère d'abord le cas où $m = 1$ or $n = 1$. si $m = 1$, on voit que les deux $\mu(mn)$ et $\mu(m)\mu(n)$ égale $\mu(n)$. Et pour $n = 1$, la même chose.

Si $m > 1$ et $n > 1$ avec $m = q_1^{\alpha_1} \dots q_s^{\alpha_s}$, $n = p_1^{\beta_1} \dots p_t^{\beta_t}$ et $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i \geq 1$ avec $q_1 < q_2 \dots < q_s$ et $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ sont des nombres primes. On distingue les deux cas suivants :

les nombres des α_i et les β_i est plus grand strictement que 1.

$$\mu(mn) = 0 = \mu(m).\mu(n)$$

$$\forall_i \alpha_i = 1 \text{ et } \beta_i = 1$$

$$\mu(mn) = (-1)^{s+t} = (-1)^s.(-1)^t = \mu(m).\mu(n). \quad \square$$

Définition 3.2.2. Soit f une fonction arithmétique, la fonction

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

est appelé fonction sommative de f .

Théorème 3.2.2. La fonction sommative $F(n)$ de la fonction Moebius satisfait

$$F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1; \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $n = 1$. Nous avons

$$f(1) = \sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1.$$

Ensuite, soit $n > 1$. D'après le théorème 2.1.1 puisque μ , est une fonction multiplicative, sa fonction sommative $F(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ est aussi multiplicative. Supposons

maintenant que p soit premier et que k est un entier positif. On voit ça

$$\begin{aligned} F(p^k) &= \sum_{d|p^k} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \dots + \mu(p^k) \\ &= 1 + (-1) + 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

L'inversion de Moebius fournit un moyen d'exprimer les valeurs de f en termes de valeurs de sa fonction sommative F . Cette formule est largement utilisée dans l'étude des fonctions multiplicatives et peut être utilisée pour établir de nouvelles identités impliquant ces fonctions.

Théorème 3.2.3. La formule d'inversion de Moebius. Supposons que f soit une fonction arithmétique et que F soit sa fonction sommative de f , i.e.

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

pour tout entier positif n . Alors,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(n/d).$$

Démonstration. La démonstration de cette formule implique quelques manipulations de doubles sommes. Nous procéder comme suit, en partant de la somme à droite de la formule, en substituant à $F(n/d)$ l'expression $\sum_{e|(n/d)} f(e)$, qui vient de la définition de la fonction F comme fonction sommative de f . Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d)F(n/d) &= \sum_{d|n} (\mu(d) \sum_{e|(n/d)} f(e)) \\ &= \sum_{d|n} \left(\sum_{e|(n/d)} \mu(d)f(e) \right). \end{aligned}$$

Notez que les couples d'entiers (d, e) avec $d|n$ et $e|(n/d)$ sont les mêmes que ceux avec $e|n$ et $d|(n/e)$. Il ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \left(\sum_{e|(n/d)} \mu(d)f(e) \right) &= \sum_{e|n} \left(\sum_{d|(n/e)} f(e)\mu(d) \right) \\ &= \sum_{e|n} (f(e) \sum_{d|(n/e)} \mu(d)). \end{aligned}$$

On voit maintenant par le théorème 3.2.2 que $\sum_{d|(n/e)} \mu(d) = 0$; Quand $n/e = 1$, c'est-à-dire que lorsque $n = e$, cette somme est égale à 1. Par conséquent

$$\sum_{e|n} (f(e) \sum_{d|(n/e)} \mu(d)) = f(n).1 = f(n).$$

Ceci achève la preuve.

La formule d'inversion de Moebius peut être utilisée pour construire de nombreuses nouvelles identités qui serait difficile à prouver d'une autre manière, comme le montre l'exemple suivant. \square

Exemple 3.2.2. Les fonctions $\sigma(n)$ et $\tau(n)$ sont les fonctions sommatives des fonctions $f(n) = n$ et $f(n) = 1$, respectivement. Autrement dit, $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ et $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. Par la formule d'inversion de Moebius, on peut conclure que pour toute entier positif n ,

$$n = \sum_{d|n} \mu(n/d) \sigma(d).$$

et

$$1 = \sum_{d|n} \mu(n/d) \tau(d).$$

Voilà, la formule d'inversion de Moebius, nous rend un bon service puisque démontrer ces deux dernières formules directement est très difficile.

Une autre conséquence de la formule d'inversion de Moebius est que si la fonction sommative F est multiplicative, alors la fonction correspondant f elle est aussi ; ceci est dans la proposition suivante.

Théorème 3.2.4. Soit f une fonction arithmétique de fonction sommative $F = \sum_{d|n} f(d)$. Alors, si F est multiplicative, f est aussi multiplicative.

Démonstration. Supposons que m et n soient des entiers positifs relativement premiers. Nous voulons montrer que $f(mn) = f(m)f(n)$. Pour le montrer, si d un diviseur de mn , alors $d = d_1d_2$ où $d_1|m$, $d_2|n$ et $(d_1, d_2) = 1$. Utilisation de l'inversion de Moebius formule et le fait que μ , et F sont multiplicatifs, on voit que

$$\begin{aligned} f(mn) &= \sum_{d|mn} \mu(d) F\left(\frac{mn}{d}\right) \\ &= \sum_{d_1|m, d_2|n} \mu(d_1d_2) F\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right) \\ &= \sum_{d_1|m, d_2|n} \mu(d_1)\mu(d_2) F\left(\frac{m}{d_1}\right) F\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= \sum_{d_1|m} \mu(d_1) F\left(\frac{m}{d_1}\right) \cdot \sum_{d_2|n} \mu(d_2) F\left(\frac{n}{d_2}\right) \\ &= f(m)f(n). \end{aligned}$$

□

Dans l'exercice suivant on montre une relation entre μ , σ .

Exercice 3.2.1. [5] Montrer que:

1. $\mu * \iota_0 = E$ et μ la fonction de Moebius.

2. $\sigma_r = \iota_r * \iota_0$ avec $\sum_{d|n} d^r = \sigma_r(n)$.

Solution :

1. $(\mu * \iota_0)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = E(n)$.

2. $(\iota_r * \iota_0)(n) = \sum_{d|n} d^r = \sigma_r(n)$.

Annexe

Nous mentionnerons certains des personnages que nous avons mentionnés dans les chapitres précédents.

Leonhard Euler : né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort le 7 septembre 1783 (18 septembre 1783 dans le calendrier grégorien) à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que la théorie des graphes et le calcul infinitésimal.



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805, Düren-5 mai 1859, Göttingen) : est un mathématicien prussien qui apporta de profondes contributions à la théorie des nombres, en créant le domaine de la théorie analytique des nombres et à la théorie des séries de Fourier. On lui doit d'autres avancées en analyse mathématique.

Livres : Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, PLUS.



Marin Mersenne (1588 – 1648) : Connu également sous son patronyme latinisé Marinus Mersenius, est un religieux français de l'ordre des Minimes, mathématicien et philosophe, physicien, érudit et philosophe. Ecclésiastique à la culture encyclopédique et aux centres d'intérêt multiples, il fut l'une des figures centrales des érudits de son temps et, selon de Waard, le « secrétaire général de l'Europe savante ». On lui doit les premières lois de l'acoustique (lois de Mersenne) et concomitante avec Galilée, les premières formules de la loi de la chute des corps.



Abu al Hassan Thabit ibn Qurra (836 – 13 février 901) : est un mathématicien, astronome, philosophe, astrologue et théoricien de la musique syrien ayant vécu dans le califat abbasside.

En latin, il était connu sous le nom de Thebit.

La contribution propre de Thabit est importante en théorie des nombres (nombres amicaux et nombres de Thebit), en calcul intégral (aire des secteurs de coniques) et en algèbre (moyenne géométrique)



Euclide : dit parfois Euclide d'Alexandrie, est un mathématicien de la Grèce antique, auteur d'un traité de mathématiques, qui constitue l'un des textes fondateurs de cette discipline en Occident. Son ouvrage le plus célèbre, les *Éléments*, est un des plus anciens traités connus présentant de manière systématique, à partir d'axiomes et de postulats, un large ensemble de théorèmes accompagnés de leurs démonstrations. Aucune information fiable n'est parvenue sur la vie ou la mort d'Euclide ; il est possible qu'il ait vécu vers 300 avant notre ère.

Du nom d'Euclide dérivent en particulier l'algorithme d'Euclide, la géométrie euclidienne, la géométrie non euclidienne et la division euclidienne.



Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié une fameuse fonction arithmétique qui est considérée, à côté d'autres fonctions, comme une fonction très importante et fondamentale dans le domaine de la théorie des nombres. Il s'agit de la fonction somme des diviseurs σ .

Durant ce travail on a étudié la multiplicativité de σ , comment calculer ses valeurs et quelques familles d'entiers définis moyennant σ et qui sont les nombres parfaits, les nombres de Mersenne, les nombres abondants et déficients et les nombres amicaux. La dernière partie a été consacrée au produit de Dirichlet et formule d'inversion de Moebius.

L'étude que nous avons fait n'est qu'un petit début car les questions de recherche impliquant σ sont, au point de vue quantité, gigantesques. Par exemple on trouve beaucoup d'articles parlant sur les nombres parfaits et même sur les nombres de Mersenne, les nombres abondants, Donc en fait nous n'avons qu'ouvert la porte sur cet intéressant sujet.

Bibliographie

- [1] D.Koukoulopoulos, Introduction à la théorie des nombres. Université de Montréal, Dernière mise-à-jour: 10 octobre 2022.
- [2] P.Milan, Cours intitulé «Nombres premiers(pgcd et ppcm)».
- [3] J.Sàndor, Geometric theorems, Diophantine equations, and arithmetic functions. American Research Press. Rehoboth, 2002.
- [4] M.B.Nathanson, Elementray methods in number theory, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [5] J.M. De Koninck and A.Mercier, 1001 problemes in classical number theory. Ellipses Edition Marketing S.A, Paris, 2007.
- [6] Cours intitulé «les nombres parfaits». Histoire des math.
- [7] T.Deray, Somme de diviseurs, lycée Hilaire de Chardonnet à Chalon s/Saône, 2005.
- [8] K.H. Rosen, Elementary Number Theory and Its Applications, Addison-Wesley Pearson, 2011.
- [9] B.Ikenaga, cours intitulés «Divisor Functions», 2019.
- [10] P.-J.Hormière, Fonctions arithmétiques.
- [11] C. Bourlet, Sur les nombres parfaits, Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15(1896), p. 297 – 312.

- [12] J.Sàndor, D.S. Mitrinović and B.Crstici, Handbook of number theory I. Springer Science and Business Media, 2005.
- [13] S.Gaboury, Sur les convolutions de fonctions arithmétiques, Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval dans le cadre du programme de maîtrise en Mathématiques pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.), 2007.
- [14] A.Boudaoud, cour théorie de nombre 1^{er} anné master algèbre et mathématique discret, université Mohamed Boudiaf M'sila, 2021 – 2022.