



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : EDP et applications

## Thème

---

*Résolution numérique d'un problème inverse non linéaire par des méthodes de type  
extragradient*

---

Présentée par :

*M<sup>elle</sup> BENZIANE* Siham

Soutenu publiquement le : 05/06/2016.

Devant le jury composé de :

**Président** : *M<sup>r</sup> BENABDERRAHMANE* Benyattou

Prof., Université de M'sila

**Encadreur** : *M<sup>r</sup> NOURI* Brahim

M.C.B, Université de M'sila

**Examineur** : *M<sup>r</sup> MIHOUBI* Farid

M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2015/2016

---

# Remerciements

---

Avant tout je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclairé notre vie, renforce notre courage et notre volenté pour finie ce travail.

Je tiens á remercier particulièrement mon directeur de thèse Monsieur **Nouiri brahim**, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et leur patience leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intéret.

Mes remerciements s'adressent á tout les enseignants du département de mathématique pour leurs dévouement et leurs générosité.

Je tiens ici á exprimer mes sentiments respectueux á mes chers parents á qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

un grand merci á ma famille, á mes proches et á mes collègues pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

---

---

# Dédicaces

---

Au nom de Allah le clément et le miséricordieux

Je dédie ce modeste travail

A Mon Père

Tes sacrifices et tes Prières m'ont permis de vivre ce jour. Rien ne saurait exprimer la fierté, la reconnaissance et l'amour que je te porte. Que Dieu le tout puissant te procure, santé et longue vie.

A Ma Mère

Avec tout mon amour pour ton soutien et tes encouragements. J'espère rester à la hauteur de tes espoirs Que Dieu te protège et t'accorde santé et longue vie

A mes chères soeurs :Sabah,Fadila,Fatna,Badra

A mes frères :Lakhdar ,Mouhamed,Abdo, yaakoub

A mes d'autre très chères sœurs et mes amies

---

# Résumé

---

**ملخص:** في هذه المذكرة، قمنا بدراسة مسألة عكسية غير خطية لحساب معامل في مسألة مع شروط حدودية لدريكلي ونيومان. لقد أثبتنا أن المسألة العكسية ليست مستمرة بالنسبة للمعطيات. ولدراسة هذه المسألة العكسية استخدمنا طريقة التربيغات المصغرة على مجموعة من القيود المحدبة والمغلقة والتي وجدناها تمتلك على الأقل حل وباستعمال طريقة العناصر المنتهية آلت المسألة المطلوبة إلى حل متراجحة تغييرية. أخيراً، لحل هذه المتراجحة طبقنا طريقتين من نوع التدرج لكوربولوفيتش وطريقة خوبوتوف.

**كلمات المفتاح:** عناصر منتهية، تربيغات مصغرة، طرق من نوع التدرج، مسألة عكسية.

---

*D*ans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse non linéaire pour l'identification numérique d'un paramètre dans un problème elliptique en dimension un avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Nous avons démontré le problème inverse n'est pas continu par rapport aux données. Donc, ce problème est étudié dans un cadre d'un problème d'optimisation avec contraintes où les contraintes est un ensemble convexe et fermé, et la fonction objective est donnée par la fonction de moindres carrés non linéaires. Ce problème d'optimisation admet au moins une solution. La résolution numérique de ce problème par éléments finis est équivalent à la résolution d'inéquation variationnelle. Enfin, nous avons utilisé deux méthodes de type extragradient : méthode de Korpelevich et méthode Khobotov pour résoudre le problème d'optimisation.

**Mots-Clés :** Éléments finis, Moindres carrés, Méthodes de type extragradient, Problème inverse.

---

*I*n this memoir, we study a nonlinear inverse problem for identification of a parameter in an elliptic problem with boundary conditions Dirichlet-Neumann. We have demonstrated the inverse problem is not continuous with the data. Therefore, this problem is examined as part of an optimization problem with constraints where the constraints is a closed convex set, and the objective function is given by the function of nonlinear least squares. This optimization problem admits at least one solution. The numerical resolution of this problem by finite elements is equivalent to solve variational inequality. Finally, we used two extragradient methods : Korpelevich method and Khobotov method for solving the optimization problem.

**Keywords :** Finite Elements, Least squares, Extragradient methods, inverse problem.

---

# Table des matières

---

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Rappels sur des outils mathématiques</b>              | <b>1</b>  |
| 1.1      | Espaces normés . . . . .                                 | 2         |
| 1.2      | Espaces de Banach . . . . .                              | 2         |
| 1.3      | Espaces de Hilbert . . . . .                             | 3         |
| 1.4      | Opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert . . . . . | 6         |
| 1.5      | Analyse convexe et optimisation . . . . .                | 9         |
| 1.5.1    | Condition d’optimalité . . . . .                         | 11        |
| <b>2</b> | <b>Problème direct</b>                                   | <b>14</b> |
| 2.1      | Position du problème . . . . .                           | 15        |
| 2.2      | Formulation variationnelle . . . . .                     | 15        |
| 2.3      | Approximation par éléments finis . . . . .               | 18        |
| 2.3.1    | Implémentation numérique . . . . .                       | 20        |
| 2.3.2    | Convergence de la méthode . . . . .                      | 22        |
| 2.3.3    | Méthode de Cholesky . . . . .                            | 25        |
| 2.3.4    | Programme Matlab . . . . .                               | 26        |
| 2.3.5    | Exemples numériques . . . . .                            | 27        |
| <b>3</b> | <b>Problème inverse</b>                                  | <b>30</b> |
| 3.1      | Position du problème . . . . .                           | 31        |
| 3.2      | Opérateur de la solution . . . . .                       | 32        |
| 3.3      | Différentiabilité . . . . .                              | 33        |
| 3.4      | Problème aux moindres carrés non linéaires . . . . .     | 34        |
| 3.5      | Discretisation par éléments finis . . . . .              | 35        |
| 3.5.1    | Calcul du gradient . . . . .                             | 36        |
| 3.6      | Méthodes de type extragradient . . . . .                 | 39        |
| 3.6.1    | Méthode de Korpelevich . . . . .                         | 39        |
| 3.6.2    | Méthode de Khobotov . . . . .                            | 42        |

---

---

# Table des figures

---

|     |                            |    |
|-----|----------------------------|----|
| 2.1 | Exemple 1 :Problème direct | 28 |
| 2.2 | Exemple 2 :Problème direct | 28 |
| 2.3 | Exemple 3 :Problème direct | 29 |
| 2.4 | Exemple 4 :Problème direct | 29 |

---

# Introduction générale

---

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations du phénomène. En mathématiques, un problème inverse a la forme d'une équation

$$Ax = y \tag{1}$$

Où  $y$  représente les mesures effectuées,  $x$  représente les valeurs des paramètres du phénomène et  $A$  est un opérateur linéaire ou non linéaire.

Les problèmes inverses généralement sont des problèmes mal posés car si l'on cherche à résoudre l'équation (1); cela nécessite l'inversion de l'opérateur  $A$ . Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique et d'après Hadamard [8] un problème est bien posé s'il vérifie les trois conditions suivantes :

- ☞ La solution existe ;
- ☞ Elle est unique ;
- ☞ Elle dépend continument des données.

Donc, si l'une des trois conditions n'est pas satisfaite, on dit que le problème est mal posé.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par *simulation numérique* ou de façon analytique.

Dans ce mémoire, nous avons centré notre travail sur le problème elliptique en dimension un suivant :

$$- (a(x)u'(x))' = f(x), \tag{2a}$$

$$u(0) = 0, \tag{2b}$$

$$a(1)u'(1) = \lambda. \tag{2c}$$

où (2b) est la condition de Dirichlet homogène et (2c) est la condition de Neumann.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donner un rappel sur les espaces vectoriels normés et de Hilbert et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats indispensables sur les opérateurs linéaires continus dans les espaces de Hilbert et en termine par les propriétés les plus importantes dans l'analyse convexe et l'optimisation.

Dans le second chapitre, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre un problème direct qui consiste à trouver  $u$  avec  $a$ ,  $f$  et  $\lambda$  sont connues. cette méthode est basée sur

trois étapes principales. D'abord, nous obtenons la formulation variationnelle du problème direct. Ensuite, nous discrétisons la formulation variationnelle par éléments finis  $\mathbb{P}_1$  nous dérivons un système d'équations linéaires à matrice symétrique, définie positive et tridiagonale. La méthode de Cholesky nous permet de proposer un algorithme pour résoudre le système linéaire associé. Finalement, nous programmons cette algorithme par Matlab et nous testons cette algorithme par quelques exemples numériques.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude un problème inverse pour identifier le paramètre  $a$  avec  $f$  et  $\lambda$  données et  $z$  une mesure de la solution  $u$ .

On remarque que le problème inverse ne peut pas être résolu directement en manipulant le problème aux limites (2a)-(2c). Nous avons montré que ce problème inverse est mal posé de sorte que n'est pas stable. D'autre part, on considère un opérateur implicite  $\mathcal{F}$  qui associe le paramètre  $a$ , la solution  $\mathcal{F}(a) = u$  du problème direct. Cet opérateur est différentiable.

Une approche étudiée pour résoudre le problème inverse est de poser un problème d'optimisation dont la solution est une approximation du paramètre  $a$ . L'idée est de minimiser la différence entre la solution calculée et la solution mesurée, en utilisant une certaine norme appropriée. Autrement dit, étant donné une mesure  $z$  de la solution  $u$ , donc le paramètre  $a$  est la solution du problème de moindre carrés :

$$\min_{a \in \mathcal{A}} J(a) \quad (3)$$

où  $J$  est une fonction définie par

$$J(a) := \frac{1}{2} \|F(a) - z\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 a(x) \left[ \frac{d}{dx} (F(a(x)) - z) \right]^2 dx.$$

Nous montrons que la fonction  $J$  est différentiable et convexe. Donc, le problème d'optimisation (3) admet au moins une solution. Pour résoudre numériquement le problème (3) il faut et il suffit de résoudre une inéquation variationnelle suivante : trouver  $a^* \in \mathcal{A}$  telle que

$$\langle J'(a^*), a - a^* \rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}. \quad (4)$$

où  $J'$  est la dérivée de  $J$ . Nous employons deux méthodes de type extragradient pour résoudre l'inéquation variationnelle (4). Ces méthodes sont :

- ☞ La méthode de Korpelivoch [13], [17, ch. 12].
- ☞ la méthode de Khobotov [12].

Ce mémoire se termine par une conclusion et quelques perspectives.

# Rappels sur des outils mathématiques

---

*D*ans ce chapitre, nous allons donner un rappel sur les espaces vectoriels normés et de Hilbert et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats indispensables sur les opérateurs linéaires continus dans les espaces de Hilbert et en termine par les propriétés les plus importantes dans l'analyse convexe et l'optimisation.

## 1.1 Espaces normés

**Définition 1.1.** (Norme). Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Une norme sur  $E$ , est une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , pour tout  $x, y \in E$ .

**Remarque 1.1.** L'espace vectoriel  $E$  muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par  $(E, \|\cdot\|)$ .

**Exemple 1.1.** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , les applications suivantes sont des normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \\ \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_p &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geq 1. \end{aligned}$$

**Exemple 1.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

L'application  $\|\cdot\| : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par :

$$\|f\| = \left( \int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme.

**Définition 1.2.** (Semi norme). Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , on dit qu'une norme sur  $E$  est une semi norme si :

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

n'est pas vérifiée

**Remarque 1.2.** L'espace vectoriel  $E$  muni d'une semi norme s'appelle espace semi normé.

## 1.2 Espaces de Banach

**Définition 1.3.** (Suite de Cauchy). Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  est de Cauchy si et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > m \geq N \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

**Définition 1.4.** (Espace complet). Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On dit que  $E$  est complet si toute suite de Cauchy dans  $E$  est convergente dans  $E$ .

**Définition 1.5.** (Espace de Banach). Un espace de Banach est un espace normé complet.

**Définition 1.6.** (Espace dual). Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . On appelle dual de  $E$ , et on notera  $E^*$  (ou  $E'$ ), l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  des formes linéaires et continue de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

**Remarque 1.3.** On appelle bidual de  $E$ , et on notera  $(E^*)^*$ , dual de  $E^*$ .

## 1.3 Espaces de Hilbert

**Définition 1.7.** (Produit scalaire). Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ . Un produit scalaire sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  telle que pour tout  $x, y, x_1, x_2 \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a :

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ,
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
3.  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ ,
4.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .

**Définition 1.8.** (Espace préhilbertien). Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

**Remarque 1.4.** Un produit scalaire sur  $E$  définit une norme sur  $E$  donnée par :

$$\forall x \in E : \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

**Exemple 1.3.** L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (x, y) = \sum_{i=0}^n x_i y_i.$$

est un espace préhilbertien .

**Exemple 1.4.**  $L^2(\Omega)$  est un espace préhilbertien si on le muni d'un produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

**Lemme 1.1.** (Inégalité de Cauchy Schwarz). Soit  $E$  un espace préhilbertien sur le corps  $\mathbb{K}$ . Pour tout  $x, y \in E$  on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

*Démonstration.* L'inégalité (1.1) est trivialement satisfaite si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Supposons donc que  $\langle x, y \rangle \neq 0$ . Alors on pose  $z = x - \lambda y$  telle que  $\langle z, y \rangle = 0$

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle z + \lambda y, y \rangle = \langle z, y \rangle + \lambda \langle y, y \rangle, \\ &= \lambda \langle y, y \rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}.\end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &= \langle z + \lambda y, z + \lambda y \rangle, \\ &= \langle z, z \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle, \\ &\geq |\lambda|^2 \langle y, y \rangle, \\ &= \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle^2} \langle y, y \rangle, \\ |\langle x, y \rangle| &\leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De plus on a l'égalité si  $\langle z, z \rangle = 0$ . □

**Lemme 1.2.** (*Inégalité de Minkowski*). Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $\forall x, y \in E$  alors on a :

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}\langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle, \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle,\end{aligned}$$

On applique l'inégalité (1.1) on obtient :

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \left( \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \right)^2,$$

D'où

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

□

**Lemme 1.3.** (*Loi de parallélogramme*). La norme induite par un produit scalaire satisfait l'égalité

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle, \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle, \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

□

**Définition 1.9.** (Espace de Hilbert). Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K}$  complet pour la norme induite par le produit scalaire.

**Définition 1.10.** (Orthogonalité). Soit  $H$  un espace de Hilbert deux vecteurs  $x, y \in H$  sont orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$  on note par :  $x \perp y$ . L'orthogonal d'un sous espace vectoriel  $A$  est :

$$A^\perp = \{x \in H, \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in A\}.$$

$A^\perp$  s'appelle le complément orthogonal de  $A$ .

**Remarque 1.5.** La relation d'orthogonalité possède les propriétés suivantes :

1.  $\forall x, y \in H, x \perp y \iff y \perp x,$
2.  $\forall x \in H, 0 \perp x,$
3.  $x \perp x \implies x = 0,$
4. Soit  $x \in H$ . Pour tout  $x_i \in H, i = 1, \dots, n$ , on a  $x \perp x_i \implies x \perp \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \forall \lambda_i \in \mathbb{K}.$

**Théorème 1.1.** Soit  $A$  un ensemble non vide d'un espace de Hilbert et soit  $\bar{A}$  la fermeture de  $A$ . Alors, s'il existe  $x \in \bar{A}$  tel que  $x \perp A$  alors  $x = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \bar{A} \implies \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$  tel que  $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ . Donc  $\langle x_n, x \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  
alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = \|x\|^2 = 0 \implies x = 0$ . □

**Théorème 1.2.** Si  $A$  un ensemble non vide de  $H$  alors :

$$A^\perp = \{x \in H / x \perp A\}.$$

est un sous espace fermé de  $H$ .

*Démonstration.* On a  $A^\perp \neq \emptyset$  car  $0 \in A^\perp$ .  $\forall x_1, x_2 \in A^\perp, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall y \in A$  on a :

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle = 0.$$

alors  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^\perp$ . Donc  $A^\perp$  est un sous espace de  $H$ .

D'autre part on a  $\forall x_0 \in \overline{A^\perp} \implies \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^\perp$  tel que  $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ . Alors

$$\langle x_0, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0 \quad \forall y \in A.$$

Donc  $x_0 \in A^\perp$  est un sous espace fermé. □

**Corollaire 1.1.** Soit  $H_1$  espace fermé de  $H$  et soit  $x \in H$  alors il existe un élément  $y_0 \in H_1$  telle que :

$$(x - y_0) \perp H_1 \text{ et } \|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in H_1.$$

On appelle cet élément la projection orthogonale de  $x$  sur  $H_1$  et l'on note par :  $y_0 = P_{H_1}(x)$ .

**Définition 1.11.** (Ensemble convexe). Un ensemble  $S$  est dit convexe si pour tout points  $x$  et  $y$  de  $S$  le segment  $[x, y]$  est inclus dans  $S$  i.e :

$$\forall x, y \in S, \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in S.$$

**Exemple 1.5.** • Les sous ensembles convexes de l'espace  $\mathbb{R}$  sont les intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  
 • Dans un espace vectoriel normé réel toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.

**Théorème 1.3.** (*Décomposition orthogonale*). Si  $H_1$  est un sous espace fermé de  $H$ , alors tout  $x \in H$  s'écrit d'une manière unique :

$$x = y + z \text{ où } z \in H_1^\perp, y \in H_1.$$

*Démonstration.* L'existence d'une telle décomposition vient du fait que

$$x = px + (I - p)x.$$

où  $p$  est la projection orthogonal de  $H$  sur  $H_1$  supposons :  
 $x = y + z, y \in H_1, z \in H_1^\perp$  alors :

$$\begin{aligned} px &= py + pz = y, \\ (I - p)x &= (I - p)y + (I - p)z = z. \end{aligned}$$

cette décomposition est donc unique. □

**Corollaire 1.2.** Soit  $H_1$  un sous espace fermé de  $H$ , alors

$$H_1 \cap H_1^\perp = \{0\} \text{ de plus } H = H_1 \oplus H_1^\perp.$$

c'est à dire  $H$  admet une décomposition orthogonal.

*Démonstration.* Si  $x = px + (I - p)x \in H_1 \cap H_1^\perp$  alors  
 $(x, px) = (x, (I - p)x) = 0$  ce qui entraîne que

$$(x, px + (I - p)x) = (x, x) = \|x\|^2 = 0 \text{ donc } x = 0$$

D'après Théorème 1.3 on a  $H = H_1 \oplus H_1^\perp$ . □

## 1.4 Opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert

**Définition 1.12.** (Opérateur linéaire continu). Soit  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert réels. On appelle opérateur linéaire continu de  $H_1$  dans  $H_2$ , toute application  $T : H_1 \rightarrow H_2$  telle que :

**Linéarité :**  $\forall x, y \in H_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ .

**Continuité :**  $\exists K > 0, \forall x \in H_1 : \|Tx\|_{H_2} \leq K \|x\|_{H_1}$ .

On définit la norme de l'opérateur  $T$  par :

$$\|T\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|Tx\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}.$$

**Définition 1.13.** (Noyau et image de  $T$ ).

– Le noyau de l'opérateur  $T$  est un sous espace de  $H_1$  définie par :

$$\text{Ker}(T) = \{x \in H_1, Tx = 0\};$$

– L'image de  $T$  est le sous espace de  $H_2$  définie par :

$$Im(T) = \{Tx / x \in H_1\}.$$

**Définition 1.14.** (Opérateur adjoint). Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert et soit  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . L'unique application linéaire  $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  tel que

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2, \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

est appelée l'adjoint de l'opérateur  $T$ .

**Proposition 1.1.** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert. Soit  $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , on a :

1.  $(T^*)^* = T$ ,
2.  $(TS)^* = S^*T^*$ ,
3.  $(T + S)^* = T^* + S^*$ ,
4.  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$ ,
5.  $Ker(T^*) = (ImT)^\perp$ .

*Démonstration.* 1.  $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$  on a :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \overline{\langle T^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^*x \rangle} = \langle (T^*)^*x, y \rangle,$$

2.  $\forall x, y \in H : \langle (TS)^*x, y \rangle = \langle x, TS(y) \rangle = \langle T^*(x), S(y) \rangle = \langle S^*T^*(x), y \rangle$ ,
3.  $\langle (T + S)(x), y \rangle = \langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle = \langle x, (T^* + S^*)y \rangle$ ,
4.  $\langle \alpha T(x), y \rangle = \alpha \langle Tx, y \rangle = \alpha \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\alpha}T^*y \rangle$ ,
5. Soit  $y \in KerT^*$  alors, on a :

$$\begin{aligned} T^*y = 0 &\Leftrightarrow \langle x, T^*y \rangle = 0, \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in (ImT)^\perp \end{aligned}$$

donc  $Ker(T^*) = (ImT)^\perp$ .

□

**Théorème 1.4.** (Théorème de représentation de Riesz). Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $L$  une forme linéaire continue sur  $H$  alors  $\exists! a \in H$  tel que :

$$\forall x \in H : L(x) = \langle x, a \rangle \text{ et } \|L\|_{H'} = \|a\|_H.$$

*Démonstration.* 1. Si  $L = 0 \Rightarrow \langle x, a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$ . (le cas triviale)

2. Si  $L \neq 0$  : soit  $F = Ker(L)$  (c'est un sous espace fermé car  $L$  est continue) on a :  $H = F \oplus F^\perp$ .  
Soit  $y_0 \neq 0, y_0 \in F^\perp$  alors  $L(y_0) \neq 0, \forall x \in H$ .

On pose  $u = x - \frac{L(x)}{L(y_0)}y_0 \Rightarrow L(u) = 0$  c'est à dire  $u \in F$  et comme  $y_0 \in F^\perp$  on a :  $\langle u, y_0 \rangle = 0$  cela s'écrit en remplaçant  $u$  par son expression

$$\langle x, y_0 - \|y_0\|^2 L(x)/L(y_0) \rangle = 0.$$

On en déduit que :

$$L(x) = \langle x, y_0 \rangle \frac{L(y_0)}{\|y_0\|^2} \quad \forall x \in E.$$

Et il suffit alors de poser  $a = \|y_0\|^{-2} \overline{L(y_0)} y_0$ .

$a$  est unique car si  $a_1 \neq a_2$  vérifiant  $L(x) = \langle x, a_1 \rangle = \langle x, a_2 \rangle \forall x \in H \Rightarrow \langle x, a_1 - a_2 \rangle = 0$  donc  $a_1 = a_2$ .

$\|L\| = \|a\|$  on a :

$$\|L\|_{H'} = \sup_{x \in H} \frac{|L(x)|}{\|x\|_H} = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|x\|}.$$

Donc  $\|L\|_{H'} = \|a\|_H$ .

□

**Définition 1.15.** Soit  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire. On dit que

- $a$  est continue sur  $H$  s'il existe  $M > 0$  si

$$\forall w, v \in H, |a(w, v)| \leq M \|w\|_H \|v\|_H.$$

- $a$  est coercive (ou elliptique) si

$$\forall u \in H, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

**Théorème 1.5.** (Lax-Milgram, [3, p. 74]). Soit  $H$  un espace de Hilbert réel. On considère  $L(\cdot)$  est une forme linéaire continue sur  $H$  et  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$ . Alors la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ telle que} \\ \forall v \in H, \quad a(u, v) = L(v). \end{cases} \quad (1.2)$$

admet une unique solution. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire  $L$ .

*Démonstration.* On a  $a(w, v)$  est une forme bilinéaire continue sur  $H$  d'après le théorème de Riesz :  $\exists A(w) \in H$  tel que :

$$a(w, v) = \langle A(w), v \rangle \forall v \in H.$$

la bilinéarité de  $a(w, v)$  implique la linéarité de  $w \rightarrow A(w)$  car soit  $w_1, w_2 \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha w_1 + \beta w_2), v \rangle &= a(\alpha w_1 + \beta w_2, v), \\ &= \alpha a(w_1, v) + \beta a(w_2, v), \\ &= \alpha \langle A w_1, v \rangle + \beta \langle A w_2, v \rangle, \\ &= \langle \alpha A w_1 + \beta A w_2, v \rangle. \end{aligned}$$

donc  $w \rightarrow A(w)$  est linéaire.

On pose  $v = A(w)$ . D'après la continuité de  $a(w, v)$ , nous avons :

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M \|w\| \|A(w)\| \Rightarrow \|A(w)\| \leq M \|w\| .$$

donc  $A \rightarrow A(w)$  est continue.

Une autre application de Théorème 1.4, on a :

$$\exists f \in H \text{ tel que } \|f\|_H = \|L\|_{H'} \text{ et } L(v) = \langle f, v \rangle \forall v \in H.$$

Donc le problème variationnelle (1.2) est équivalent à trouver  $u \in H$  tel que  $A(u) = f$ . On va montrer que  $A$  est bijectif (ce qui implique l'existence et l'unicité de  $u$ ).

**A est injectif** : D'après la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  on a :

$$\alpha \|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w \rangle \leq \|Aw\| \|w\|$$

ce qui donne

$$\alpha \|w\| \leq \|Aw\| , w \in H. \quad (1.3)$$

Soit  $w_1, w_2 \in H$  tel que  $A(w_1) = A(w_2)$  alors  $A(w_1 - w_2) = 0$  (car  $A$  est linéaire ). En utilisant (1.3), on obtient :

$$\alpha \|w_1 - w_2\| \leq \|A(w_1 - w_2)\| = 0 \Rightarrow w_1 = w_2.$$

**A est surjectif** : Il suffit de montrer que  $ImA^\perp = \{0\}$ . Soit  $v \in ImA^\perp$ , on a :

$$\forall A(w) \in ImA, \langle A(w), v \rangle = 0 \Rightarrow a(w, v) = 0$$

On pose  $w = v$  et d'après la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  on a :

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

donc  $ImA^\perp = \{0\}$ . D'autre part, on a :

$$H = ImA \oplus ImA^\perp \text{ et } ImA^\perp = \{0\} \implies ImA = H.$$

Alors,  $A$  est surjectif.

**$A^{-1}$  est continue** : En remplaçant dans (1.3), on trouve que  $A^{-1}$  est continue sur  $H$ . Alors, la solution  $u$  dépend continument de  $f$ .

□

## 1.5 Analyse convexe et optimisation

**Définition 1.16.** (Fonction convexe). On dit qu'une fonction  $f$  définie sur un ensemble convexe non vide  $S \in H$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$  est :

1. Convexe sur  $S$  si est seulement si

$$f((1 - \theta)u + \theta v) \leq (1 - \theta)f(u) + \theta f(v) \quad \forall u, v \in S, \forall \theta \in [0, 1].$$

2. Strictement convexe sur  $S$  si est seulement si

$$f((1 - \theta)u + \theta v) < (1 - \theta)f(u) + \theta f(v) \text{ lorsque } u \neq v, \text{ et } \theta \in ]0, 1[.$$

3. Fortement convexe si est seulement si  $\forall \theta \in [0, 1]$

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } f((1 - \theta)u + \theta v) \leq (1 - \theta)f(u) + \theta f(v) - \frac{\alpha}{2}\theta(1 - \theta)\|u - v\|^2.$$

On dit aussi  $f$  est  $\alpha$  convexe si  $\theta = 1/2$ .

**Définition 1.17.** (Minimum local). On dit que  $u$  est un minimum local de  $f$  sur  $S$  si est seulement si :

$$u \in S \text{ et } \exists \delta > 0 / \forall v \in S, \|v - u\| < \delta \Rightarrow f(u) \leq f(v).$$

On dit que  $u$  est un minimum global de  $f$  sur  $S$  si est seulement si :

$$u \in S \text{ et } f(u) \leq f(v) \quad \forall v \in S.$$

**Proposition 1.2.** (voir [3, p. 297]). Si  $f$  est une fonction convexe sur un ensemble convexe  $S$ , tout point de minimum local de  $f$  sur  $S$  est un minimum global, si de plus  $f$  est strictement convexe, alors il existe au plus un minimum.

Si  $S$  un convexe fermé et  $f$  est une fonction  $\alpha$  convexe sur  $S$ . Alors, il existe un unique minimum global  $u$  de  $f$  sur  $S$ , et on :

$$\|u - v\|^2 \leq \frac{4}{\alpha} [f(v) - f(u)], \quad \forall v \in S.$$

**Définition 1.18.** (Différentiabilité au sens de Fréchet). On dit que la fonction  $f$  définie sur un voisinage de  $u \in H$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  est différentiable au sens de Fréchet en  $u$  s'il existe une forme linéaire  $L \in H'$  continue sur  $H$  telle que

$$f(u + w) = f(u) + L(w) + O(w), \text{ avec } \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{|O(w)|}{\|w\|} = 0. \quad (1.4)$$

On appelle  $L$  la différentielle de  $f$  en  $u$  et on note  $L = F'(u)$ .

On peut préciser la relation (1.4) en identifiant  $H$  et son dual  $H'$  grâce au théorème de représentation de Riesz. En effet, il existe un unique  $p \in H$  tel que  $\langle p, w \rangle = L(w)$ , donc (1.3) devient

$$f(u + v) = f(u) + \langle p, w \rangle + O(w), \text{ avec } \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\|O(w)\|}{\|w\|} = 0.$$

**Définition 1.19.** (Différentiabilité au sens faible). On dit que  $f$  définie sur un voisinage de  $u \in H$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  est différentiable au sens de Gâteaux en  $u$  s'il existe  $L \in H'$  tel que

$$\forall w \in H, \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{f(u + \delta w) - f(u)}{\delta} = L(w). \quad (1.5)$$

**Proposition 1.3.** (voir [3, p. 305]) Soit  $f$  une fonction différentiable de  $H$  dans  $\mathbb{R}$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

$f$  est convexe sur  $H$ .

$$f(v) \geq f(u) + \langle f'(u), v - u \rangle \quad \forall u, v \in H. \quad (1.6)$$

$$\langle f'(u) - f'(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in H.$$

Et pour  $\alpha > 0$  les assertions suivantes sont équivalentes :

$f$  est  $\alpha$  convexe sur  $H$ .

$$f(v) \geq f(u) + \langle f'(u), v - u \rangle + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

$$\langle f'(u) - f'(v), u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

**Définition 1.20.** (Dérivée seconde). Soit  $f$  une fonction de  $H$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est deux fois différentiable en  $u \in H$  si  $f$  est différentiable dans un voisinage de  $u$  et sa différentielle  $f'$  est différentiable en  $u$ . On note  $f''$  la différentielle de  $f'$  en  $u$  qui vérifie

$$f'(u + w) = f' + f''(u)v + O(w), \text{ avec } \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|O(w)|}{\|w\|} = 0.$$

**Définition 1.21.** (Problème de minimisation). Soient  $H$  un espace de Hilbert réel,  $S$  un sous ensemble de  $H$  et  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Un problème de minimisation du type suivant : "Trouver  $u \in H$  ou  $S$ , un minimum de la fonction  $f$ ". Ce problème est formulé de la façon suivante :

**Problème de minimisation sans contrainte :**

$$\min_{v \in H} f(x).$$

**Problème de minimisation avec contrainte :**

$$\min_{v \in S} f(x).$$

### 1.5.1 Condition d'optimalité

**Théorème 1.6.** (Inéquation d'Euler, cas convexe, voir [3, p. 307]). Soient  $H$  un espace de Hilbert réel et  $S$  un ensemble convexe de  $H$ . On considère  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable en  $u \in S$ . Alors,

1. Si  $u$  est un point de minimum local de  $f$  sur  $S$  on a :

$$\langle f'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in S. \quad (1.7)$$

2. De plus si  $f$  est convexe, alors  $u$  est un minimum global de  $f$  sur  $S$ .

*Démonstration.* On suppose que  $u \in S$  est un minimum local de  $f$ . Alors, pour tout  $v \in S$  et  $h \in ]0, 1]$  on a  $u + h(v - u) \in S$ , donc

$$\frac{f(u + h(v - u)) - f(u)}{h} \geq 0.$$

On en déduit(1.7) en faisant tendre  $h$  vers 0.

La deuxième assertion du Théorème 1.6 découle immédiatement de (1.6) et (1.7).  $\square$

**Remarque 1.6.** L'inéquation d'Euler(1.7) il s'agit d'une condition nécessaire d'optimalité qui devient nécessaire et suffisante si  $f$  est convexe. Dans deux cas importants, (1.7) se réduit simplement à l'équation d'Euler  $f'(u) = 0$ .

1. Si  $S = H$  alors  $v - u$  décrit tout  $H$  lorsque  $v$  décrit  $H$  et donc (1.7) entraîne  $f'(u) = 0$ .
2. Si  $u$  est intérieur à  $S$ , la même conclusion s'impose.

**Proposition 1.4.** (voir [3, p. 310]). On suppose que  $S = H$  et que  $f$  est deux fois différentiable en  $u$ . Si  $u$  est un point de minimum local de  $f$ , alors

$$f'(u) = 0 \text{ et } f''(u)(w, w) \geq 0 \quad \forall w \in H.$$

Réciproquement, si pour tout  $v$  dans un voisinage de  $u$

$$f'(u) = 0 \text{ et } f''(v)(w, w) > 0 \quad \forall w \in H.$$

alors  $u$  est un minimum local de  $f$ .

**Théorème 1.7.** (Projection sur un ensemble convexe fermé).

Soit  $S \subset H$  un convexe fermé non vide, alors  $\forall f \in H, \exists ! u \in S$  tel que

$$\|f - u\| = \min_{v \in S} \|f - v\|. \quad (1.8)$$

De plus  $u$  est caractérisé par la propriété :

$$u \in S \quad (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in S. \quad (1.9)$$

on note  $u = P_S f$  la projection de  $f$  sur  $S$ .

*Démonstration.* 1. **Existence** : soit  $(v_n) \in S$  et  $d_n = \|f - v_n\| \rightarrow d = \inf_{v \in S} \|f - v\|$ , montrons que  $(v_n)$  est de Cauchy. Appliquant Lemme1.3 avec  $x = f - v_n, y = f - v_m$ , on obtient :

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2).$$

Or  $\frac{v_n + v_m}{2} \in S$  et donc  $\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d$ . Par conséquent :

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2) - d^2.$$

et  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|v_n - v_m\| = 0$ , donc  $v_n \rightarrow u \in S$  et l'on a  $d = \|f - u\|$ .

2. **Équivalence** entre (1.8) et (1.9). Soit  $u \in S$  vérifiant (1.8) et soit  $w \in S$ . On a  $v = (1-t)u + tw \in S$  pour  $t \in ]0, 1]$  et donc

$$\|f - u\| \leq \|f - [(1-t)u + tw]\| = \|(f - u) - t(w - u)\|.$$

par suite

$$\|f - u\|^2 \leq \|f - u\|^2 - 2t(f - u, w - u) + t^2 \|w - u\|^2.$$

i.e :

$$2(f - u, w - u) \leq t \|w - u\|^2 \text{ quand } t \rightarrow 0 \text{ on obtient (1.9).}$$

Inversement, soit  $u$  vérifiant (1.9), alors on a

$$\|f - u\|^2 - \|v - f\|^2 = 2(f - u, v - u) - \|u - v\|^2 \leq 0 \quad \forall v \in S \text{ d'où (1.8).}$$

3. **Unicité** : soient  $u_1$  et  $u_2$  vérifiant (1.9), alors on

$$(f - u_1, v - u_1) \leq 0 \quad \forall v \in S. \quad (1.10)$$

$$(f - u_2, v - u_2) \leq 0 \quad \forall v \in S. \quad (1.11)$$

Reportant  $v = u_2$  dans (1.10) et  $v = u_1$  dans (1.11), après addition on trouve  $|u_1 - u_2|^2 \leq 0$ , d'où  $u_1 = u_2$ . □

**Lemme 1.4.** *L'opérateur de projection sur un ensemble convexe satisfait les propriétés suivantes :*

1.  $\|P_S x - P_S y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$
2.  $\langle x - P_S x, P_S x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H, \forall y \in S.$
3.  $\|x - y\|^2 \geq \|x - P_S x\|^2 + \|y - P_S x\|^2 \quad \forall x \in H, y \in S.$

---

# Problème direct

---

*D*ans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre le problème direct avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. La méthode des éléments finis est basé sur trois idées principales. D'abord, nous obtenons la formulation variationnelle du problème direct. Ensuite, nous discrétisons la formulation variationnelle par éléments finis  $\mathbb{P}_1$  et nous dérivons un système d'équations linéaires à matrice symétrique, définie positive et tridiagonale. Avec la méthode de Cholesky nous avons proposé une algorithme pour résoudre ce système. Finalement, nous avons programmé cette algorithme par Matlab et nous testons cette algorithme par quelques exemples numériques.

## 2.1 Position du problème

On considère le problème elliptique en dimension un avec conditions mixtes suivant :

Trouver  $u : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$-(a(x)u'(x))' = f(x), \quad (2.1a)$$

$$u(0) = 0, \quad (2.1b)$$

$$a(1)u'(1) = \lambda. \quad (2.1c)$$

Où  $f \in L^2(0, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $a : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est une fonction dérivable et bornée c'est à dire :

$$\exists a_1, a_2 > 0, \quad a_1 \leq a(x) \leq a_2, \quad \text{pour tout } x \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

**Remarque 2.1.** L'équation (2.1a) correspond à une solution à l'état stable de l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (au')' + f. \quad (2.3)$$

Où  $u$  est la température,  $f$  est un terme source,  $a$  est la conductivité thermique et  $\lambda$  est le flux de chaleur (entrant ou sortant). On peut utiliser la même équation pour modéliser un écoulement monophasique (comme du pétrole) :  $u$  est la pression,  $f$  représente les puits de pompage,  $a$  est la perméabilité du milieu et  $\lambda = 0$  pour un milieu fermé. Une discussion détaillée de l'équation (2.3) peut être trouvée dans [4].

## 2.2 Formulation variationnelle

On définit l'espace de Sobolev  $H^1(0, 1)$  par :

$$H^1(0, 1) := \left\{ v \in L^2(0, 1) \text{ tel que } v' \in L^2(0, 1) \right\}.$$

Nous avons le lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *On a l'inclusion  $H^1(0, 1) \subset \mathcal{C}(0, 1)$  et*

$$\|u\|_{\mathcal{C}(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)} + \|u'\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.4)$$

*Démonstration.* Soit  $u \in H^1(0, 1)$ . Alors, on a :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad u(y) = u(x) + \int_x^y u'(t) dt$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{|x - y|} \|u'\|_{L^2(0,1)} \quad (2.5)$$

Donc  $u$  est continue sur  $[0, 1]$ . De (2.5), nous avons :

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \|u'\|_{L^2(0,1)} \quad \text{pour tout } x, y \in [0, 1].$$

En intégrant en  $y$  sur  $[0, 1]$ , on obtient :

$$|u(x)| \leq \int_0^1 |u(y)| dy + \|u'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)} + \|u'\|_{L^2(0,1)} \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

On en déduit l'estimation (2.4). □

On munit  $H^1(0, 1)$  de la norme suivante :

$$\|u\|_{H^1(0,1)} := \left( \|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{1/2}$$

et du produit scalaire associé

$$\langle u, v \rangle_{H^1(0,1)} := \int_0^1 (u(x)v(x) + u'(x)v'(x)) dx.$$

**Lemme 2.2.**  $H^1(0, 1)$  est un espace de Hilbert.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que  $H^1(0, 1)$  est complet. Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy dans  $H^1(0, 1)$ .

Les deux suites  $(u_n)$  et  $(u'_n)$  sont des suites de Cauchy dans  $L^2(0, 1)$  qui est complet. Donc, il existe  $u, v \in L^2(0, 1)$  tels que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u \quad \text{et} \quad u'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v.$$

De (2.4), on déduit que la suite  $(u_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  et par passage à la limite dans l'égalité

$$u_n(x) = u_n(y) + \int_x^y u'_n(t) dt$$

on obtient

$$u(x) = u(y) + \int_x^y v(t) dt.$$

,alors Donc,  $u \in H^1(0, 1)$ . □

On introduit l'espace  $V$  défini par :

$$V := \left\{ v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0 \right\}.$$

**Lemme 2.3.** L'espace  $V$  est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert  $H^1(0, 1)$ . De plus, l'application suivante :

$$u \longmapsto \|u'\|_{L^2(0,1)}$$

est une norme sur  $V$  équivalente à la norme  $\|u\|_{H^1(0,1)}$ .

*Démonstration.* On considère l'application linéaire  $\varphi : H^1(0, 1) \rightarrow H^1(0, 1)$  définie par

$$\varphi(v) = v(0).$$

De (2.5), l'application  $\varphi$  est continue sur  $H^1(0, 1)$ , donc  $\ker(\varphi) = V$  est un sous espace fermé de  $H^1(0, 1)$ . De plus, si  $u \in V$  et pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on a :

$$|u(x)| \leq \int_0^x |u'(t)| dt.$$

il en résulte

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}.$$

Ainsi, nous avons :

$$\|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2 \|u'\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Alors, on a :

$$\|u'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)} \leq \sqrt{2} \|u'\|_{L^2(0,1)}$$

d'où l'équivalence des normes. □

**Lemme 2.4.** *Le sous ensemble  $\mathcal{A}$  défini par :*

$$\mathcal{A} := \{a \in \mathcal{C}(0,1) \mid a_1 \leq a(x) \leq a_2, a_1, a_2 > 0\}$$

*est un convexe et fermé.*

En multipliant l'équation (2.1a) par une fonction arbitraire  $v \in V$  et en intégrant sur  $[0, 1]$ , on obtient :

$$-\int_0^1 (a(x) u'(x))' v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \quad (2.6)$$

Par intégration par parties, le membre gauche de (2.6) devient :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 (a(x) u'(x))' v(x) dx &= -a(x) u'(x) v(x)|_0^1 + \int_0^1 a(x) u'(x) v'(x) dx \\ &\quad - \lambda v(1) + \int_0^1 a(x) u'(x) v'(x) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, la formulation variationnelle du problème (2.1a)-(2.1c) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ T(a, u, v) = \ell(v) \text{ pour tout } v \in V. \end{cases} \quad (2.7)$$

Où  $T : \mathcal{A} \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme trilinéaire donnée par :

$$T(a, u, v) = \int_0^1 a(x) u'(x) v'(x) dx \text{ pour tout } u, v \in V \quad (2.8)$$

et  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire donnée par :

$$\ell(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx + \lambda v(1) \text{ pour tout } v \in V. \quad (2.9)$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.7), nous avons la proposition suivante :

**Proposition 2.1.** *Pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et  $f \in L^2(0,1)$ , le problème variationnel (2.7) admet une solution unique  $u \in V$ .*

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et lemme 2.3 nous avons :

$$\begin{aligned} \forall v \in V, |\ell(v)| &\leq \int_0^1 |f(x)| |v(x)| dx + |\lambda| |v(1)| \\ &\leq \left( \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_0^1 v^2(x) dx \right)^{1/2} + |\lambda| \left( \int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq M \|v\|_V \quad \text{où } M = \|f\|_{L^2(0,1)} + |\lambda|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Alors, la forme linéaire  $\ell$  est continue sur  $V$ .

De même  $T$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V, |T(a, u, v)| &\leq \sup_{x \in [0,1]} |a(x)| \int_0^1 |u'(x)| |v'(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |a(x)| \left( \int_0^1 (u')^2(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_0^1 (v')^2(x) dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|a\|_{C(0,1)} \|u\|_V \|v\|_V. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donc, la forme trilinéaire  $T$  est continue sur  $V \times V$ .

Pour la coercivité de  $T$ , on a :

$$\forall v \in V, T(a, v, v) = \int_0^1 a(x) (v'(x))^2 dx \geq \inf_{x \in [0,1]} a(x) \int_0^1 (v'(x))^2 dx \geq \alpha \|v\|_V^2. \quad (2.12)$$

Où  $\alpha = \inf_{x \in [0,1]} a(x) / \sqrt{2}$ .

Enfin, les hypothèses de Théorème 1.5 de Lax-Milgram sont vérifiées, donc le problème (2.7) admet une solution unique  $u \in V$ .  $\square$

**Remarque 2.2.** Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , l'application définie par :

$$v \longmapsto \sqrt{T(a, v, v)}$$

est une norme sur  $V$ .

## 2.3 Approximation par éléments finis

Nous construisons un sous espace  $V_h$  de  $V$  de dimension finie et constitué de fonctions linéaires par morceaux. On se donne un entier naturel  $N$  et on pose  $h = 1/(N+1)$ ,  $x_i = ih$  pour  $i = 0, \dots, N+1$  (avec  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ ) et  $I_i := [x_i, x_{i+1}]$  pour  $i = 0, \dots, N$ .

On définit l'espace vectoriel  $V_h$  par :

$$V_h := \left\{ v_h \in \mathcal{C}([0, 1]) : v_h|_{I_i} \in \mathbb{P}_1, v_h(0) = 0 \right\}. \quad (2.13)$$

où  $\mathbb{P}_1$  désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 1.

On définit, pour  $j = 1, \dots, N + 1$ , les fonctions  $\phi_j$  par :

$$\phi_j(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{si } x \leq x_{j-1} \text{ ou si } x \geq x_{j+1}. \end{cases} \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N \quad (2.14)$$

$$\phi_{N+1}(x) := \begin{cases} \frac{x-x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, x_{N+1}], \\ 0 & \text{si } x \leq x_N. \end{cases} \quad (2.15)$$

Les fonctions  $\phi_j$ ,  $j = 1, \dots, N + 1$ , sont des fonctions "chapeau" (voir figure 2.1), elles vérifient

$$\phi_j \in V_h \text{ et } \phi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

**Proposition 2.2.** *L'espace vectoriel  $V_h$  défini par (2.13) est un sous espace de  $V$  de dimension  $N + 1$  et la famille  $\{\phi_1, \dots, \phi_{N+1}\}$  est une base de  $V_h$ . En particulier, pour tout  $v \in V_h$  on a :*

$$\forall x \in [0, 1], v(x) = \sum_{j=1}^{N+1} v(x_j) \phi_j(x). \quad (2.16)$$

*Démonstration.* On montre d'abord que  $V_h$  est un sous-espace de  $V$ . Si  $v \in V_h$  alors  $v \in \mathcal{C}(0, 1) \subset L^2(0, 1)$ , il suffit donc de montrer que  $v' \in L^2(0, 1)$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0, 1)$ , on a :

$$\langle v', \varphi \rangle = - \int_0^1 v \varphi' dx = - \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v|_{[x_j, x_{j+1}]} \varphi' dx.$$

Or  $v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \subset \mathcal{C}(0, 1)$ . Donc, d'après intégration par parties, on obtient

$$\langle v', \varphi \rangle = \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'|_{[x_j, x_{j+1}]} \varphi dx + \sum_{j=0}^N [v(x_j) \varphi(x_j) - v(x_{j+1}) \varphi(x_{j+1})].$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N [v(x_j) \varphi(x_j) - v(x_{j+1}) \varphi(x_{j+1})] &= \sum_{j=0}^N v(x_j) \varphi(x_j) - \sum_{j=0}^N v(x_{j+1}) \varphi(x_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^N v(x_j) \varphi(x_j) - \sum_{j=1}^{N+1} v(x_j) \varphi(x_j) \\ &= v(x_0) \varphi(x_0) - v(x_{N+1}) \varphi(x_{N+1}) = 0. \end{aligned}$$

car  $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$ . On en déduit

$$\langle v', \varphi \rangle = \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'|_{[x_j, x_{j+1}]} \varphi dx$$

donc, on a :

$$v' = \sum_{j=0}^N v'_{|[x_j, x_{j+1}]} \chi_{|[x_j, x_{j+1}]} dx.$$

Où  $\chi$  est la fonction caractéristique de  $[x_j, x_{j+1}]$ . D'où  $v' \in L^2(0, 1)$ .

Il reste à montrer que  $\{\phi_1, \dots, \phi_{N+1}\}$  est une base de  $V_h$  et l'égalité (2.16). Soit  $j = 1, \dots, N+1$ , alors  $\text{supp}(\phi_j) \cap \text{supp}(\phi_{j+1}) = [x_j, x_{j+1}]$ . De plus,  $\{\phi_j, \phi_{j+1}\}$  est une base de  $\mathbb{P}_1$  sur  $[x_j, x_{j+1}]$ .

En effet,  $\mathbb{P}_1$  est de dimension 2 et si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vérifient  $\alpha\phi_j(x) + \beta\phi_{j+1}(x) = 0$  pour tout  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ , en prenant  $x = x_j$  on obtient  $\alpha = 0$  et avec  $x = x_{j+1}$  on obtient  $\beta = 0$ .

Soit  $v \in V_h$ , alors pour tout  $j = 1, \dots, N+1$ ,  $v_{|[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1$ . Donc,  $v_{|[x_j, x_{j+1}]} = \alpha\phi_j(x) + \beta\phi_{j+1}(x)$ . En prenant  $x = x_j$  puis  $x = x_{j+1}$  on obtient  $v_{|[x_j, x_{j+1}]} = v(x_j)\phi_j(x) + v(x_{j+1})\phi_{j+1}(x)$ .

D'autre part, pour  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ ,  $\phi_i(x)$  si  $i \neq j$  et  $i \neq j+1$ , donc

$$\forall x \in [x_j, x_{j+1}], \sum_{i=1}^{N+1} v(x_i)\phi_i(x) = v(x_j)\phi_j(x) + v(x_{j+1})\phi_{j+1}(x) = v_{|[x_j, x_{j+1}]},$$

d'où le résultat.  $\square$

L'approximation par éléments finis de la formulation variationnelle (2.7) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ T(a, u_h, v_h) = \ell(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.17)$$

D'après (2.10)-(2.12) et avec théorème 1.5 de Lax-Milgram, le problème (2.17) admet une solution unique  $u_h \in V_h$ .

La solution  $u_h$  du problème variationnel (2.17) s'écrit

$$u_h = \sum_{j=1}^{N+1} u_j \phi_j \quad \text{où } u_j = u_h(x_j).$$

Et par la substitution  $v_h = \phi_i$  pour  $1 \leq i \leq N+1$ , le problème (2.17) est équivalent le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } U = (u_1, \dots, u_{N+1})^T \text{ solution de} \\ KU = R \end{cases} \quad (2.18)$$

Où  $K = (k_{ij})$  est une matrice symétrique appelée matrice de rigidité donnée par :

$$k_{ij} = T(a, \phi_j, \phi_i) \quad \forall 1 \leq i, j \leq N+1,$$

et  $R = (r_i)$  le vecteur de charge donné par :

$$r_i = \ell(\phi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N+1.$$

### 2.3.1 Implémentation numérique

Pour calculer les composantes du vecteur de charge et les éléments de matrice de rigidité, nous utilisons la règle de Simpson suivante :

$$\int_a^b g(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right].$$

### Vecteur de charge

Pour  $i = 1, \dots, N$  nous avons :

$$\begin{aligned} r_i &= \ell(\varphi_i) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x) dx - \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1}) f(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{6} \left[ (x_{i-1} - x_{i-1}) f(x_{i-1}) + 4 \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} - x_{i-1} \right) f \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \right] \\ &\quad - \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{6} \left[ (x_i - x_{i+1}) f(x_i) + 4 \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_{i+1} \right) f \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + (x_{i+1} - x_{i+1}) f(x_{i+1}) \right] \\ &= \frac{h}{3} \left[ f \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + f(x_i) + f \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

et

$$r_{N+1} = \ell(\varphi_{N+1}) = \frac{h}{6} \left[ 2f \left( \frac{x_N + x_{N+1}}{2} \right) + f(x_{N+1}) \right] + \lambda.$$

### Matrice de rigidité

Si  $|i - j| > 1$ ,  $\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$ , donc  $k_{ij} = 0$  alors la matrice  $K$  est creuse.

Pour les éléments de diagonale principale, nous avons pour  $i = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned} b_i &= K_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x) (\varphi'_i)^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x) dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) dx \\ &= \frac{1}{6h} \left[ a(x_{i-1}) + 4a \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + 2a(x_i) + 4a \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + a(x_{i+1}) \right]. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{N+1} &= K_{N+1,N+1} = \int_{x_N}^{x_{N+1}} a(x) (\varphi'_{N+1}(x))^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} a(x) dx \\ &= \frac{1}{6h} \left[ a(x_N) + 4a \left( \frac{x_N + x_{N+1}}{2} \right) + a(x_{N+1}) \right]. \end{aligned}$$

Pour tout  $i = 1, \dots, N$ , nous avons :

$$\begin{aligned} c_i &= K_{i+1,i} = K_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) \varphi'_{i+1}(x) \varphi'_i(x) dx = -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) dx \\ &= -\frac{1}{6h} \left[ a(x_i) + 4a \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + a(x_{i+1}) \right]. \end{aligned}$$

Enfin, la matrice  $K$  est tridiagonale.

**Proposition 2.3.** *Le système linéaire (2.18) admet une solution unique  $U \in \mathbb{R}^{N+1}$ .*

*Démonstration.* Pour tout vecteur  $U \in \mathbb{R}^{N+1}$  et d'après (2.12), on a :

$$KU \cdot U = \sum_{i,j=1}^{N+1} T(a, \phi_i, \phi_j) u_i u_j = \sum_{i,j=1}^{N+1} T(a, u_i \phi_i, u_j \phi_j) = T(a, u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|^2 > 0$$

donc,  $K$  est définie positive. d'où le résultat. □

### 2.3.2 Convergence de la méthode

Nous allons étudier l'erreur  $\|u - u_h\|_V$ , où  $u$  est la solution de (2.7) et  $u_h$  est la solution du problème approché (2.17).

**Théorème 2.1.** *Si  $u$  et  $u_h$  sont les solutions respectives de (2.7) et (2.17), on a l'estimation suivante :*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|_{\mathcal{C}(0,1)}}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.19)$$

*Démonstration.* Puisque  $V_h \subset V$ , on déduit par soustraction des formulations variationnelles (2.7) et (2.17), que

$$T(a, u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h.$$

En choisissant  $w_h = v_h - u_h$  et avec (2.11) et (2.12), on obtient :

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq T(a, u - u_h, u - u_h) = T(a, u - u_h, u - v_h) \leq \|a\|_{\mathcal{C}(0,1)} \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$$

pour tout  $v_h \in V_h$ . L'estimation (2.19) s'en déduit immédiatement.  $\square$

**Définition 2.1.** L'opérateur d'interpolation  $\mathbb{P}_1$  est l'application  $r_h : V \rightarrow V_h$  définie par :

$$\forall v \in V, \quad r_h v(x) := \sum_{j=1}^{N+1} v(x_j) \phi_j(x).$$

où les fonctions  $\phi_j$  sont données par (2.14) et (2.15).

**Lemme 2.5.** 1. *Pour toute  $v \in H^2(0,1)$ , il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq ch \|v''\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.20)$$

2. *Pour toute  $v \in H^1(0,1)$ , on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} = 0. \quad (2.21)$$

*Démonstration.* 1. On montre (2.20) pour  $v \in \mathcal{C}^2([0,1])$  et par densité on en déduit (2.21) pour  $v \in H^2(0,1)$ . Il faut estimer  $\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)}$  et  $\|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)}$  en fonction de  $h$ .

Soit  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ . Comme  $r_h v \in V_h$ , on a  $r_h v(x) = \alpha x + \beta$ . De plus,  $r_h v(x_j) = v(x_j)$  et  $r_h v(x_{j+1}) = v(x_{j+1})$  donc

$$r_h v(x) = v(x_j) + \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} (x - x_j).$$

On obtient

$$\begin{aligned} v(x) - r_h v(x) &= v(x) - v(x_j) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} (x - x_j) \\ &= \int_{x_j}^x v'(t) dt - \frac{x - x_j}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $y \in ]x_j, x[$  et  $z \in ]x_j, x_{j+1}[$  tels que

$$v(x) - r_h v(x) = (x - x_j) v'(y) - (x - x_j) v'(z) = (x - x_j) \int_z^y v''(t) dt.$$

Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |v(x) - r_h v(x)|^2 &\leq h^2 \left( \int_z^y v''(t) dt \right)^2 \leq h^2 \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} v''(t) dt \right)^2 \\ &\leq h^2 \left[ \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} dt \right)^{1/2} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right]^2 \\ &\leq h^3 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

On intègre par rapport à  $x$  sur  $[x_j, x_{j+1}]$ , on obtient :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - r_h v(x)|^2 dx \leq h^4 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt.$$

En sommant sur  $j = 0, \dots, N$ , on obtient

$$\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}.$$

Il reste à obtenir une estimation sur les dérivées. Pour  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ , on a :

$$\begin{aligned} v'(x) - (r_h v)'(x) &= v'(x) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} \\ &= v'(x) - \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (v'(x) - v'(t)) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_t^x v''(y) dy dt. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} |v'(x) - (r_h v)'(x)|^2 &\leq \frac{1}{h^2} \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_t^x v''(y) dy dt \right]^2 \leq \frac{1}{h^2} \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v''(y) dy dt \right]^2 \\ &\leq h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à  $x$  sur  $[x_j, x_{j+1}]$ , on a :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(x) - (r_h v)'(x)|^2 dx \leq h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(y)|^2 dy.$$

On en déduit

$$\|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \leq h \|v''\|_{L^2(0,1)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \|v - r_h v\|_{H^1(0,1)}^2 &= \|v - r_h v\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq h^4 \|v''\|_{L^2(0,1)}^2 + h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq 2h^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

pour  $h < 1$ , ce qui donne (2.20).

2. On montre (2.21) pour  $v \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ . On montre tout d'abord que  $\|v - r_h v\|_{L^2([0,1])}$  converge vers 0. Soit  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ , on a :

$$v(x) - r_h v(x) = \int_{x_j}^x v'(t) dt - \frac{x - x_j}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt,$$

d'où

$$|v(x) - r_h v(x)| \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)| dt + \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)| dt = 2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)| dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'intégrale par rapport à  $x$  sur  $[x_j, x_{j+1}]$ , on obtient :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - r_h v(x)|^2 dx \leq 2h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)|^2 dt.$$

Donc, on a :

$$\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq \sqrt{2h} \|v'\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Il reste à montrer que  $\|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque  $\mathcal{C}^2([0, 1])$  est dense dans  $\mathcal{C}^1([0, 1])$ , il existe  $\phi \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  telle que

$$\|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} \leq \epsilon.$$

Pour  $u \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |(r_h u)'(x)|^2 dx &= \frac{1}{h} (u(x_{j+1}) - u(x_j))^2 \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(t) dt \right)^2 \\ &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u'(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

donc  $\|(r_h u)'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}$ . Alors, on en déduit

$$\|(r_h v)' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} = \|(r_h(v - \phi))'\|_{L^2(0,1)} \leq \|v' - \phi'\| \leq \epsilon.$$

En appliquant l'inégalité (2.20) à  $\phi$ , on obtient :

$$\|\phi' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} \leq ch \|\phi''\|_{L^2(0,1)} \leq \epsilon,$$

pour  $h$  suffisamment petit, d'où

$$\begin{aligned} \|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} &\leq \|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} + \|\phi' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} + \|(r_h \phi)' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq c\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

**Théorème 2.2.** Soient  $u \in V$  la solution de (2.7) et  $u_h \in V_h$  la solution de (2.17). Alors, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0. \quad (2.22)$$

Autrement dit, la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  converge. De plus, si  $u \in H^2(0,1)$  alors il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq ch \|f\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.23)$$

On dit que la convergence est linéaire.

### 2.3.3 Méthode de Cholesky

L'algorithme de Cholesky peut être utilisé pour obtenir la solution d'un système linéaire à matrice symétrique, définie positive et tridiagonale comme suit :

**Initiation :** Soient  $a$  et  $f$  deux fonctions données,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $h = 1/(N+1)$  et  $x_i = ih$ .

Pour  $i = 1, \dots, N$ , on a :

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{h}{3} \left[ f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right] \\ r_{N+1} &= \frac{h}{6} \left[ 2f\left(\frac{x_N + x_{N+1}}{2}\right) + f(x_{N+1}) \right] + \lambda. \end{aligned}$$

et pour  $i = 1, \dots, N$ , on a :

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{1}{6h} \left[ a(x_{i-1}) + 4a\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2a(x_i) + 4a\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + a(x_{i+1}) \right] \\ b_{N+1} &= \frac{1}{6h} \left[ a(x_N) + 4a\left(\frac{x_N + x_{N+1}}{2}\right) + a(x_{N+1}) \right] \\ c_i &= -\frac{1}{6h} \left[ a(x_i) + 4a\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + a(x_{i+1}) \right]. \end{aligned}$$

**Factorisation :**

$$d_1 = \sqrt{b_1}$$

Pour tout  $i = 2, \dots, N$

$$\begin{cases} \ell_i = c_{i-1}/d_{i-1}, \\ d_i = \sqrt{b_i - \ell_i^2}. \end{cases}$$

Résolution :

$$Ly = r \iff \begin{cases} y_1 = r_1/d_1 \text{ et} \\ y_i = (r_i - \ell_i y_{i-1})/d_i, \text{ pour tout } i = 2, \dots, N+1. \end{cases}$$

$$L^T u = y \iff \begin{cases} u_{N+1} = y_{N+1}/d_{N+1} \text{ et} \\ u_i = (y_i - \ell_{i+1} u_{i+1})/d_i, \text{ pour tout } i = N, \dots, 1. \end{cases}$$

### 2.3.4 Programme Matlab

```
clear all
N=39;
lamda=-5;
%lamda=0;
%lamda=8*pi;
%lamda=-0.5.*log(2);
h=1/(N+1);
-----fonction paramètre-----
a=inline('1+4*x', 'x');
%a=inline('10*exp(-5*(x-x.^2)*(x-x.^2))', 'x');
%a=inline('cos(2*pi*x)+1', 'x');
%a=inline('log(1+x)', 'x');
-----fonction deuxième membre-----
f=inline('16*x-2', 'x');
%f=inline('100.*(-6.*x.^2+6.*x-1)', 'x');
%f=inline('(8*pi^2*sin(2*pi*x))*(1+2*cos(2*pi*x))', 'x');
%f=inline('(12*x.^2-9*x+1).*log(1+x)+x*(4*x.^2-(9/2)*x+1)/(1+x)', 'x');
-----Eléments de matrice-----
for(i=1:N)
    b(i)=(a((i-1)*h)+4*a((2*i-1)*(h/2))+2*a(i*h)+4*a((2*i+1)*(h/2))
            +a((i+1)*h))/(6*h);
end
    b(N+1)=(a(N*h)+4*a((2*N+1)*(h/2))+a((N+1)*h))/(6*h);
for(i=2:N+1)
    c(i)=- (a(i*h)+4*a((2*i+1)*(h/2))+a((i+1)*h))/(6*h);
end
-----Element de 2eme membre-----
for(i=1:N)
    r(i)=(f((2*i-1)*(h/2))+f(i*h)+f((2*i+1)*(h/2)))*(h/3);
end
r(N+1)=(2*f((2*N+1)*(h/2))+f((N+1)*h))*(h/6)+lamda;
-----Factorisation-----
d=zeros(N+1,1);
l=zeros(N,1);
```

```

d(1)=sqrt(b(1));
for(i=2:N+1)
    l(i)=c(i-1)/d(i-1);
    d(i)=sqrt(b(i)-l(i)^2);
end
-----Résolution-----
y=zeros(N+1,1);
y(1)=r(1)/d(1);
for(i=2:N+1)
    y(i)=(r(i)-l(i)*y(i-1))/d(i);
end
u=zeros(N+1,1);
u(N+1)=y(N+1)/d(N+1);
for(i=N:-1:1)
    u(i)=(y(i)-l(i+1)*u(i+1))/d(i);
end
-----
x=[h:h:1];
t=[0:h:1];
ex=((lamda+5)/4)*log(4*t+1)+t-t.^2;
%ex=exp(5.*(t-t.^2).^2)-1;
%ex=2*sin(2*pi*t);
%ex=-(t-0.5).*(t-1).*t.^2;
plot(t,ex,'black',x,u,'--');
axis([0,1,0,.367])
%axis([0,1,-2,2])

```

### 2.3.5 Exemples numériques

**Exemple 2.1.**

$$\begin{aligned}
 a(x) &= 4x + 1 \\
 f(x) &= 16x - 2 \\
 \lambda &= -5 \\
 h &= 10^{-3} \\
 u(x) &= x - x^2
 \end{aligned}$$

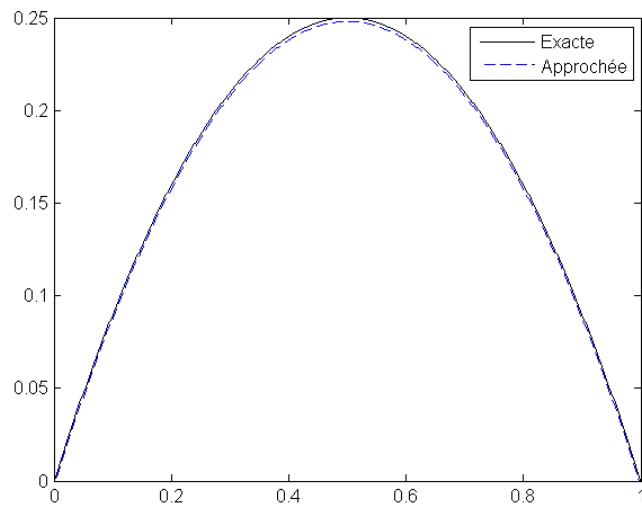


FIGURE 2.1 – Exemple 1 :Problème direct

**Exemple 2.2.**

$$\begin{aligned}
 a(x) &= e^{-5(x-x^2)^2} \\
 f(x) &= 10(6x^2 - 6x + 1) \\
 \lambda &= 0 \\
 h &= 10^{-2} \\
 u(x) &= e^{5(x-x^2)^2} - 1
 \end{aligned}$$

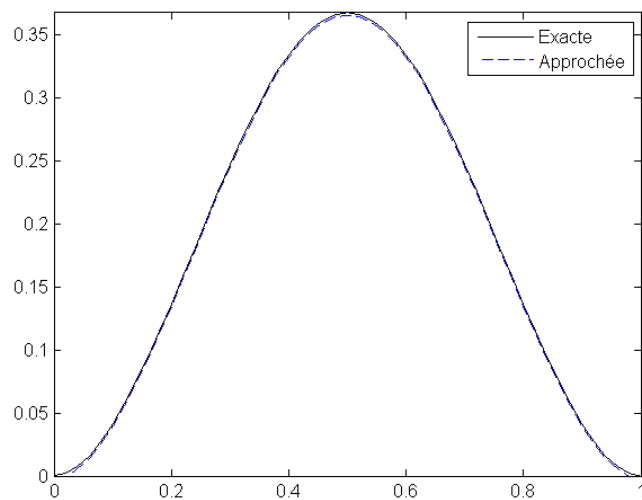


FIGURE 2.2 – Exemple 2 :Problème direct

**Exemple 2.3.**

$$a(x) = \cos(2\pi x) + 1$$

$$f(x) = 8\pi^2 \sin(2\pi x)(1 + 2 \cos(2\pi x))$$

$$\lambda = 8\pi$$

$$h = 10^{-3}$$

$$u(x) = 2 \sin(2\pi x)$$

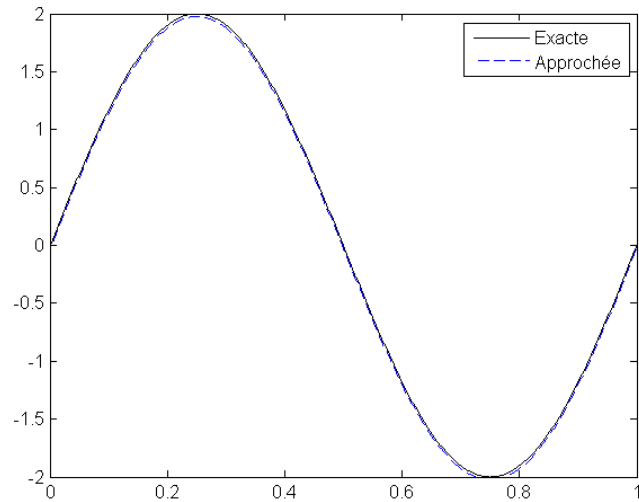


FIGURE 2.3 – Exemple 3 :Problème direct

**Exemple 2.4.**

$$a(x) = \ln(1 + x)$$

$$f(x) = (12x^2 - 9x + 1) \ln(1 + x) + \frac{4x^3 - \frac{9}{2}x^2 + x}{1 + x}$$

$$\lambda = 8\pi$$

$$h = 10^{-2}$$

$$u(x) = x^2(x - 1/2)(1 - x)$$

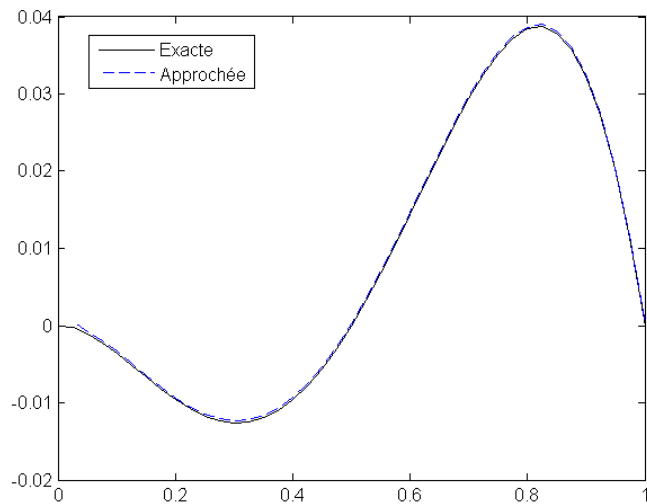


FIGURE 2.4 – Exemple 4 :Problème direct

---

# Problème inverse

---

**D**ans ce chapitre, nous avons étudié un problème inverse pour l'identification numérique d'un paramètre dans un problème elliptique en dimension un avec des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Nous démontrons que ce problème inverse n'est pas continu par rapport aux données. Notre problème inverse se ramène à une équation  $F(a) = u$  où  $u$  est l'unique solution du problème direct et  $F$  est une application implicite non linéaire bornée, continue. Donc, nous avons étudié notre problème dans un cadre d'un problème d'optimisation avec contraintes où les contraintes est un ensemble convexe et fermé, et la fonction objective est donnée par la fonction de moindre carrés. Ce problème d'optimisation admet au moins une solution. La résolution numérique par éléments finis de ce problème est équivalent à la résolution d'inéquation d'Euler. Enfin, nous avons utilisé des méthodes de type extragradient : méthode de *Korpelevich* et méthode de *Khobotov* pour résoudre ce problème.

### 3.1 Position du problème

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème qui consiste à trouver le paramètre  $a \in \mathcal{A}$  :

$$-(a(x)u'(x))' = f(x), \quad (3.1a)$$

$$u(0) = 0, \quad (3.1b)$$

$$a(1)u'(1) = \lambda. \quad (3.1c)$$

Où  $f \in L^2(0,1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  sont connues et  $u \in V$  une solution mesurée du problème direct (2.1a)-(2.1c).

**Lemme 3.1.** *Le problème (3.1a)-(3.1c) est mal posé de sorte la solution a n'est pas continue par rapport la donnée  $u$ .*

*Démonstration.* Pour montrer le problème (3.1a)-(3.1c) est n'est pas continu, nous considérons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} a(x) = \frac{1}{2}, \\ u(x) = x^2, \\ f(x) = -1, \\ \lambda = 1. \end{cases}$$

Soient  $(a_n)$  et  $(u_n)$  deux suites définies par :

$$a_n(x) = \frac{1}{2 + \cos(n\pi x)} \quad \text{et} \quad u_n(x) = x^2 + \frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{[\cos(n\pi x) - 1]}{n^2\pi^2}.$$

On remarque que

$$-(a_n(x)u_n'(x))' = -1 \quad \text{et} \quad a_n(1)u_n'(1) = 1.$$

Nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n(x) - u(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2} \right) = 0.$$

D'autre part, on a :

$$\sup_{x \in [0,1]} |a_n(x) - a(x)| = \frac{1}{2 + (-1)^n} - \frac{1}{2} \neq 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} |a_n(x) - a(x)| \neq 0.$$

Alors, le problème (3.1a)- (3.1c) est n'est pas continu par rapport au donnée, donc est mal posé.  $\square$

## 3.2 Opérateur de la solution

On définit l'opérateur  $F : \mathcal{A} \rightarrow V$  par :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad F(a) = u$$

est l'unique solution du problème variationnel (2.7).

**Proposition 3.1.** 1. L'opérateur  $F$  est borné c'est à dire

$$\|u\|_V = \|F(a)\|_V \leq \frac{M}{\alpha}, \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}. \quad (3.2)$$

2. L'opérateur  $F$  est lipshitzienne c'est à dire

$$\|F(a) - F(b)\|_V \leq \frac{M}{\alpha^2} \|a - b\|_{\mathcal{C}(0,1)}, \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{C}(0,1). \quad (3.3)$$

*Démonstration.* 1. En remplaçant dans (2.7)  $v = u$  et avec (2.10) et (2.12), on obtient :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq T(a, u, u) \leq |\ell(u)| \leq M \|u\|_V.$$

D'où

$$\|u\|_V \leq \frac{M}{\alpha}.$$

2. En remplaçant (2.7),  $u = F(a)$  et puis  $u = F(b)$ , on obtient :

$$T(a, F(a), v) = \ell(v) = T(b, F(b), v), \quad \text{pour tout } v \in V. \quad (3.4)$$

On pose dans (3.4),  $v = F(a) - F(b)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} T(a, F(a), F(a) - F(b)) &= T(b, F(b), F(a) - F(b)) \\ &= T(b - a, F(b), F(a) - F(b)) + T(a, F(b), F(a) - F(b)). \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$T(a, F(a) - F(b), F(a) - F(b)) = -T(a - b, F(b), F(a) - F(b)).$$

En utilisant (2.11) et (2.12), on obtient :

$$\alpha \|F(a) - F(b)\|_V^2 \leq \|a - b\|_{\mathcal{C}(0,1)} \|F(b)\|_V \|F(a) - F(b)\|_V.$$

De (3.2), on obtient (3.3). □

### 3.3 Différentiabilité

Soit  $a$  un élément de l'intérieur de  $\mathcal{A}$  et pour tout  $\delta a \in \mathcal{A}$  tel que  $a + \delta a \in \mathcal{A}$ , on pose :

$$\delta w = F(a + \delta a) - F(a).$$

De (2.7) avec  $u = F(a)$ , on a :

$$T(a, F(a), v) = \ell(v) \quad \forall v \in V. \quad (3.5)$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} \ell(v) &= T(a + \delta a, F(a + \delta a), v) = T(a + \delta a, u + F(a + \delta a) - F(a), v) \\ &= T(a + \delta a, u + \delta w, v), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.6)$$

De (3.5) et (3.6), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= T(a + \delta a, u + \delta w, v) - T(a, u, v) \\ &= T(a + \delta a, u, v) + T(a + \delta a, \delta w, v) - T(a, u, v) \\ &= T(a, u, v) + T(\delta a, u, v) + T(a + \delta a, \delta w, v) - T(a, u, v) \\ &= T(\delta a, u, v) + T(a + \delta a, \delta w, v). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$T(a + \delta a, \delta w, v) = -T(\delta a, u, v). \quad (3.7)$$

Pour la différentiabilité de l'application  $F$ , nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** (voir [6, p. 262]). *Pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $F$  est différentiable en  $a$ , et  $\delta u = DF(a)\delta a$  est l'unique solution de l'équation variationnelle*

$$T(a, \delta u, v) = -T(\delta a, u, v) \quad \forall v \in V. \quad (3.8)$$

où  $u = F(a)$  donc

$$\|DF(a)\delta a\|_V \leq \frac{M}{\alpha^2} \|\delta a\|_{C(0,1)}. \quad (3.9)$$

*Démonstration.* De (2.10), (2.11) et (2.12) et avec Théorème 1.5, l'équation variationnelle(3.8) admet une unique solution. En utilisant (3.7) et (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= T(a + \delta a, \delta w, v) - T(a, \delta u, v) = T(a, \delta w, v) + T(\delta a, \delta w, v) - T(a, \delta u, v) \\ &= T(a, \delta w - \delta u, v) + T(\delta a, \delta w, v). \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$T(a, \delta w - \delta u, v) = -T(\delta a, \delta w, v) \quad \text{pour tout } v \in V. \quad (3.10)$$

On pose dans (3.10)  $v = \delta w - \delta u$ , nous obtenons :

$$T(a, \delta w - \delta u, \delta w - \delta u) = -T(\delta a, \delta w, \delta w - \delta u).$$

En utilisant (2.11) et (2.12), nous obtenons :

$$\alpha \|\delta w - \delta u\|_V^2 \leq \|\delta a\|_{C(0,1)} \|\delta w\|_V \|\delta w - \delta u\|_V.$$

Avec (3.3), on obtient :

$$\|\delta w - \delta u\|_V \leq \frac{M}{\alpha^3} \|\delta a\|_{C(0,1)}^2.$$

Nous avons :

$$\frac{\|F(a + \delta a) - F(a) - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{C(0,1)}} = \frac{\|\delta w - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{C(0,1)}} \leq \frac{M}{\alpha^3} \|\delta a\|_{C(0,1)}.$$

Donc,

$$\frac{\|F(a + \delta a) - F(a) - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{C(0,1)}} \xrightarrow{\|\delta a\|_{C(0,1)} \rightarrow 0} 0.$$

D'où  $F$  est différentiable en  $a$ .

Il reste à montrer l'inégalité (3.9). On pose  $v = \delta u$  dans (3.8), et en utilisant (2.11) et (2.12), nous obtenons

$$\alpha \|\delta u\|_V^2 \leq T(a, \delta u, \delta u) = -T(\delta a, F(a), \delta u) \leq \|\delta a\|_{C(0,1)} \|F(a)\|_V \|\delta u\|_V.$$

En appliquant Proposition 3.1, on obtient :

$$\|DF(a)\delta a\|_V \leq \frac{M}{\alpha^2} \|\delta a\|_{C(0,1)}.$$

□

### 3.4 Problème aux moindres carrés non linéaires

Étant donné  $z \in V$  une mesure de  $u$ , nous cherchons  $a \in \mathcal{A}$  solution de

$$F(a) = z. \tag{3.11}$$

Où l'application  $F$  est définie implicitement. Elle est non linéaire. Nous cherchons une autre formulation du problème (3.11), nous proposons une formulation comme un problème aux moindres carrés non linéaire, nous remplaçons (3.11) par le problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$\begin{cases} \min J(a) \\ a \in \mathcal{A} \end{cases} \tag{3.12}$$

où  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle donnée par :

$$J(a) = \frac{1}{2} \|F(a) - z\|_V^2 = \frac{1}{2} T(a, F(a) - z, F(a) - z). \quad (3.13)$$

Pour l'existence de la solution du problème de minimisation avec contrainte (3.12), nous avons la proposition suivante :

**Proposition 3.2.** *Le problème de minimisation avec contrainte (3.12) admet au moins une solution.*

*Démonstration.* La fonctionnelle  $J$  est deux fois différentiable. Soit  $a$  un élément de l'intérieur de  $\mathcal{A}$ , donc pour tout  $\delta a \in \mathcal{A}$ , nous avons :

$$DJ(a) \delta a = \frac{1}{2} T(\delta a, F(a) - z, F(a) - z) + T(a, DF(a) \delta a, F(a) - z).$$

D'après (3.8), on a

$$T(a, DF(a) \delta a, F(a) - z) = -T(\delta a, F(a), F(a) - z),$$

donc

$$\begin{aligned} DJ(a) \delta a &= \frac{1}{2} T(\delta a, F(a) - z, F(a) - z) - T(\delta a, F(a), F(a) - z), \\ &= -\frac{1}{2} T(\delta a, F(a) + z, F(a) - z). \end{aligned}$$

La dérivée seconde de  $J$  est donnée par :

$$\begin{aligned} D^2 J(a) (\delta a, \delta a) &= -\frac{1}{2} T(\delta a, DF(a) \delta a, F(a) - z) - \frac{1}{2} T(\delta a, F(a) + z, DF(a) \delta a) \\ &= -T(\delta a, F(a), DF(a) \delta a) \quad \text{en utilisant (3.8)} \\ &= T(a, DF(a) \delta a, DF(a) \delta a) \quad \text{en utilisant (2.12)} \\ &\geq \alpha \|DF(a) \delta a\|_V^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Alors,  $J$  est convexe. D'après Proposition 1.4, le problème (3.12) admet au moins une solution.  $\square$

## 3.5 Discrétisation par éléments finis

Soit  $\mathcal{A}_h$  une discrétisation de  $\mathcal{A}$  telle que

$$\mathcal{A}_h = \mathcal{A} \cap V_h.$$

Le problème discret est défini par :

$$\begin{cases} \min J(a) \\ a \in \mathcal{A}_h \end{cases} \quad (3.14)$$

Où  $J$  est donnée par (3.13).

Soit  $(\phi_i)_{0 \leq i \leq N+1}$  une base tel que  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N+1}$  est donnée par (2.14) et (2.15) et  $\phi_0(x)$  est définie par :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{h-x}{h} & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour discrétiser le problème (3.14), on pose :

$$U(x) = \sum_{j=1}^{N+1} U_j \phi_j, \quad Z(x) = \sum_{k=1}^{N+1} Z_k \phi_k \quad \text{et} \quad a(x) = \sum_{i=0}^{N+1} A_i \phi_i.$$

Alors, on a :

$$J(a) = \frac{1}{2} T(a, U - Z, U - Z). \quad (3.15)$$

Par la substitution  $U(x)$  et  $Z(x)$  dans (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} J(a) &= \frac{1}{2} T \left( a, \sum_{i=1}^{N+1} U_i \phi_i - \sum_{i=1}^{N+1} Z_i \phi_i, \sum_{j=1}^{N+1} U_j \phi_j - \sum_{j=1}^{N+1} Z_j \phi_j \right), \\ &= \frac{1}{2} T \left( a, \sum_{i=1}^{N+1} (U_i - Z_i) \phi_i, \sum_{j=1}^{N+1} (U_j - Z_j) \phi_j \right), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} (U_i - Z_i) (U_j - Z_j) T(a, \phi_i, \phi_j), \end{aligned}$$

qui est la forme matricielle suivant :

$$J(a) = \frac{1}{2} (U - Z)^T K(a) (U - Z).$$

Où

$$U - Z = (U_1 - Z_1, U_2 - Z_2, \dots, U_{N+1} - Z_{N+1})^T,$$

et

$$K(A)_{ij} = T(a, \phi_i, \phi_j) = \int_0^1 a(x) \phi'_i(x) \phi'_j(x).$$

### 3.5.1 Calcul du gradient

Pour calculer le gradient de la fonctionnelle  $J$ , nous avons le lemme suivant :

**Lemme 3.2.** *Pour tout  $p_h \in \mathcal{A}_h$ , la dérivée de  $J$  est donné par*

$$DJ(a) p_h = J'(a) p_h = -\frac{1}{2} T(p_h, F(a), F(a)) + \frac{1}{2} T(p_h, z, z).$$

*Démonstration.* On a

$$J(a) = \frac{1}{2}T(a, F(a) - z, F(a) - z),$$

alors

$$\begin{aligned} DJ(a)p_h &= \frac{1}{2} [T(p_h, F(a) - z, F(a) - z) + T(a, DF(a)p_h, F(a) - z) \\ &\quad + T(a, F(a) - z, DF(a)p_h)], \\ &= \frac{1}{2}T(p_h, F(a) - z, F(a) - z) + T(a, DF(a)p_h, F(a) - z), \end{aligned}$$

par l'équation (3.8), on a

$$T(a, DF(a)p_h, F(a) - z) = -T(p_h, F(a), F(a) - z),$$

donc

$$\begin{aligned} DJ(a)p_h &= \frac{1}{2}T(p_h, F(a) - z, F(a) - z) - T(p_h, F(a), F(a) - z) \\ &= -\frac{1}{2}T(p_h, F(a) + z, F(a) - z) \\ &= -\frac{1}{2} [T(p_h, F(a), F(a)) - T(p_h, F(a), z) + T(p_h, z, F(a)) - T(p_h, z, z)] \\ &= -\frac{1}{2} [T(p_h, F(a), F(a)) - T(p_h, z, z)]. \end{aligned}$$

□

Puisque  $a \in \mathcal{A}_h$ , donc on peut écrire

$$a = \sum_{i=0}^{N+1} a_i \phi_i,$$

alors

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = DJ(a) \phi_i. \quad (3.16)$$

et donc obtenir le gradient  $\nabla J(a)$  pour tout  $a \in \mathcal{A}_h$ . De l'équation(3.13) on a

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = DJ(a) \phi_i,$$

en utilisant le lemme 3.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a_i} &= -\frac{1}{2}T(\phi_i, F(a), F(a)) + \frac{1}{2}T(\phi_i, z, z), \\
&= -\frac{1}{2}T\left(\phi_i, \sum_{k=1}^{N+1} U_k \phi_k, \sum_{l=1}^{N+1} U_l \phi_l\right) + \frac{1}{2}T\left(\phi_i, \sum_{k=1}^{N+1} Z_k \phi_k, \sum_{l=1}^{N+1} Z_l \phi_l\right), \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{N+1} U_k U_l T(\phi_i, \phi_k, \phi_l) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{N+1} T(\phi_i, \phi_k, \phi_l), \\
&= -\frac{1}{2}U^T K_i U + \frac{1}{2}Z^T K_i Z.
\end{aligned}$$

avec

$$(K_i)_{k,l} = T(\phi_i, \phi_k, \phi_l) \quad \text{pour } k, l = 1, \dots, N+1.$$

et

$$\nabla J(a) = \left( \frac{\partial J(a)}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial J(a)}{\partial a_{N+1}} \right)^T$$

**Proposition 3.3.** *La fonctionnelle  $\nabla J : \mathcal{A}_h \rightarrow V_h$  est lipschitzienne :*

*Démonstration.* En utilisant le théorème des accroissements finis sur  $\nabla J$  sur  $[a, b]$ , on obtient :

$$\langle \nabla J(a) - \nabla J(b), a - b \rangle = \langle (a - b) \nabla^2 J(c), a - b \rangle,$$

et on a

$$\nabla^2 J(c)(\delta a, \delta a) = T(c, DF(c) \delta a, DF(c) \delta a),$$

on pose  $\delta a = a - b$ , donc

$$\begin{aligned}
\langle \nabla J(a) - \nabla J(b), a - b \rangle &= \nabla^2 J(c)(a - b, a - b), \\
&= T(c, DF(c)(a - b), DF(c)(a - b)),
\end{aligned}$$

en utilisant (2.11) et (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
|\langle \nabla J(a) - \nabla J(b), a - b \rangle| &\leq \|c\|_{L^\infty(0,1)} \|DF(c)(a - b)\|^2, \\
&\leq \frac{M^2 \|c\|_{C(0,1)}}{\alpha^4} \|a - b\|_{C(0,1)}^2,
\end{aligned}$$

on devise par  $\|a - b\|$ , on obtient :

$$\frac{|\langle \nabla J(a) - \nabla J(b), a - b \rangle|}{\|a - b\|_{C(0,1)}} \leq L_1 \|a - b\|_{C(0,1)}, \quad L_1 = \frac{M^2 \|c\|_{C(0,1)}}{\alpha^4}.$$

Donc,  $\nabla J$  est lipschitzienne.

$$\|\nabla J(a) - \nabla J(b)\| \leq L \|a - b\|_{C(0,1)}, \quad L > 0. \quad (3.17)$$

□

## 3.6 Méthodes de type extragradient

### 3.6.1 Méthode de Korpelevich

Soit  $\mathcal{A}_h$  un sous ensemble compact et convexe de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que l'ensemble des solutions  $\mathcal{A}_h^*$  du problème d'optimisation (3.14) est non vide et soit  $\nabla J : \mathcal{A}_h \rightarrow V_h$  une fonction continue et monotone c'est à dire :

$$\langle \nabla J(x) - \nabla J(y), x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in \mathcal{A}_h. \quad (3.18)$$

On considère la suite  $(x^k)$  définie par les deux projections à chaque itération :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathcal{A}_h, \\ y^k = P_{\mathcal{A}_h} (x^k - \alpha \nabla J(x^k)), \\ x^{k+1} = P_{\mathcal{A}_h} (x^k - \alpha \nabla J(y^k)). \end{cases} \quad (3.19)$$

Où  $\alpha > 0$  est une constante.

**Lemme 3.3.** *Soient  $\mathcal{A}_h$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $\nabla J : \mathcal{A}_h \rightarrow V_h$  une fonction continue, satisfaisant la condition de monotone (3.18) et la condition de Lipschitz (3.17) Soit  $x^* \in \mathcal{A}_h^*$  une solution du problème d'optimisation (3.14) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous avons :*

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - (1 - \alpha^2 L^2) \|y^k - x^k\|^2. \quad (3.20)$$

*Démonstration.* En remplaçant dans (3.18)  $x = x^*$  et  $y = y^k$  on obtient

$$\langle \nabla J(y^k), y^k - x^* \rangle \geq \langle \nabla J(x^*), y^k - x^* \rangle \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc, on a :

$$\langle \nabla J(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \leq \langle \nabla J(y^k), y^k - x^{k+1} \rangle. \quad (3.21)$$

De (3.19) et théorème (1.7) , nous avons :

$$\begin{aligned} \langle x^{k+1} - y^k, x^k - \alpha \nabla J(y^k) - y^k \rangle &= \langle x^{k+1} - y^k, x^k - \alpha \nabla J(x^k) - y^k \rangle + \langle x^{k+1} - y^k, \nabla J(x^k) - \nabla J(y^k) \rangle. \\ &= \langle x^{k+1} - P_{\mathcal{A}_h} (x^k - \alpha \nabla J(x^k)), x^k - \alpha \nabla J(x^k) - P_{\mathcal{A}_h} (x^k - \alpha \nabla J(x^k)) \rangle \\ &\quad + \langle x^{k+1} - y^k, \nabla J(x^k) - \nabla J(y^k) \rangle, \\ &\leq \langle x^{k+1} - y^k, \nabla J(x^k) - \nabla J(y^k) \rangle. \end{aligned} \quad (3.22)$$

On pose  $z^k = x^k - \alpha \nabla J(y^k)$ . En utilisant théorème (1.7), (3.20) et (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|P_{\mathcal{A}}(z^k) - x^*\|^2 = \|P_{\mathcal{A}}(z^k) - z^k + z^k - x^*\|^2, \\
&= \|z^k - x^*\|^2 + \|P_{\mathcal{A}}(z^k) - z^k\|^2 + 2\langle P_{\mathcal{A}}(z^k) - z^k, z^k - x^* \rangle, \\
&= \|z^k - x^*\|^2 - \|P_{\mathcal{A}}(z^k) - z^k\|^2 + 2\langle P_{\mathcal{A}}(z^k) - z^k, P_{\mathcal{A}}(z^k) - x^* \rangle, \\
&\leq \|z^k - x^*\|^2 - \|P_{\mathcal{A}}(z^k) - z^k\|^2, \\
&= \|x^k - x^* - \alpha \nabla J(y^k)\|^2 - \|x^k - x^{k+1} - \alpha \nabla J(y^k)\|^2, \\
&= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^{k+1}\|^2 + 2\alpha \langle x^* - x^{k+1}, \nabla J(y^k) \rangle, \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^{k+1}\|^2 + 2\alpha \langle y^k - x^{k+1}, \nabla J(y^k) \rangle, \\
&= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|y^k - x^{k+1}\|^2, \\
&\quad + 2\alpha \langle x^{k+1} - y^k, x^k - \nabla J(y^k) - y^k \rangle, \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|y^k - x^{k+1}\|^2, \\
&\quad + 2\alpha \langle x^{k+1} - y^k, \nabla J(x^k) - \nabla J(y^k) \rangle \text{ (d'après (3.22))}, \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|y^k - x^{k+1}\|^2, \\
&\quad + 2\mu L \|x^{k+1} - y^k\|^2 \|x^k - y^k\|^2, \text{ ( d'après inégalité de Cauchy-Schwarz et (3.17))} \\
&= \|x^k - x^*\|^2 - (1 - \alpha^2 L^2) \|x^k - y^k\|^2, \text{ ( d'après l'inégalité de Young )}.
\end{aligned}$$

D'où la preuve de lemme (3.3). □

Pour la convergence de la suite (3.19) , nous avons le théorème suivant

**Théorème 3.2.** (Korpelevich). Soient  $\mathcal{A}_h$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $\nabla J : \mathcal{A}_h \rightarrow V_h$  une fonction continue, satisfaisant la condition de monotonie (3.18) et la condition de Lipschitz (3.17) . Si  $0 < \alpha < 1/L$ , la suite définie par (3.19) est convergente vers une solution  $x^* \in \mathcal{A}_h^*$ .

*Démonstration.* On pose  $\rho = 1 - \alpha^2 L^2$ . Donc,  $0 < \mu < 1/L$  implique que  $0 < \rho < 1$ . D'après (3.20), on obtient :

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|,$$

par sommation, on a :

$$\sum_{n=1}^{k=0} (\|x^{k+1} - x^*\| - \|x^k - x^*\|) \leq 0,$$

après calcul on trouve :

$$\|x^n - x^*\| \leq \|x^0 - x^*\|.$$

Alors, on a :

$$\|x^n\| \leq \|x^n - x^*\| + \|x^*\| \leq \|x^0 - x^*\| + \|x^*\|.$$

D'où  $(x^k)$  est bornée. Donc, il existe une sous suite notée par  $(x^{\varphi(n)})$  converge vers  $\bar{x}$ . D'autre part, de (3.20) nous avons :

$$\rho \sum_{+\infty}^{k=0} \|x^k - y^k\| \leq \|x^0 - x^*\|.$$

Alors, implique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^k - y^k\| = 0,$$

donc, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y^{\varphi(k)} = \bar{x},$$

de (3.19) et d'après la continuité de  $\nabla J$  et  $P_{\mathcal{A}_h}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} y^{\varphi(k)}, \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} P_{\mathcal{A}_h} \left( x^{\varphi(k)} - \alpha \nabla J(x^{\varphi(k)}) \right), \\ &= P_{\mathcal{A}_h} (\bar{x} - \alpha \nabla J(\bar{x})). \end{aligned}$$

D'où  $\bar{x} \in \mathcal{A}_h^*$ . En remplaçant dans (3.20),  $x^* = \bar{x}$ , on trouve que la suite  $(\|x^k - \bar{x}\|)$  est décroissante, donc converge. Alors, nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^k - \bar{x}\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{\varphi(k)} - \bar{x}\| = 0,$$

d'où  $(x^k)$  converge vers  $\bar{x}$ . □

### l'algorithme de Khorpelevich

**Etape 1** : choisissez point initiales  $x^0 \in \mathcal{A}_h$  et  $\alpha > 0$  et définir  $k = 0$

**Etape 2** : calculer

$$\begin{cases} y^{k+1} &= P_{\mathcal{A}_h} \left( x^k - \alpha \nabla J(x^k) \right) \\ x^{k+1} &= P_{\mathcal{A}_h} \left( x^k - \alpha \nabla J(\bar{x}^k) \right) \end{cases}$$

**Etape 3** : si  $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$  puis arrêt sinon  $k = k + 1$  et passe l'étape 2.

### 3.6.2 Méthode de Khobotov

**Théorème 3.3.** (*Khobotov*) Soit  $\mathcal{A}_h$  un sous ensemble convexe fermé de et  $\mathcal{A}_h^*$  un ensemble non vide des solution. la où  $\nabla J$  est un opérateur monotone continue dans  $\mathcal{A}_h$ ,  $x^0 \in \mathcal{A}_h$  et  $x_k$  est l'ordre qu'à obtenue près (3.19) puis le suivant prises d'inégalité pour non négatif  $x_k$  et  $x^* \in \mathcal{A}^*$  :

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - \bar{x}^k\|^2 \left\{ 1 - \alpha_k^2 \frac{\|\nabla J(x^k) - \nabla J(\bar{x}^k)\|^2}{\|x^k - \bar{x}^k\|^2} \right\} \quad (3.23)$$

*Démonstration.* soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs quelconques de  $\mathbb{R}^n$ , On a :

$$\langle u - P_{\mathcal{A}_h}(u), v - P_{\mathcal{A}_h}(u) \rangle \leq 0,$$

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \|u - P_{\mathcal{A}_h}(u) + P_{\mathcal{A}_h}(u) - v\|^2, \\ &= \|u - P_{\mathcal{A}_h}(u)\|^2 - 2 \langle u - P_{\mathcal{A}_h}(u), v - P_{\mathcal{A}_h}(u) \rangle + \|v - P_{\mathcal{A}_h}(u)\|^2, \\ &\geq \|u - P_{\mathcal{A}_h}(u)\|^2 + \|v - P_{\mathcal{A}_h}(u)\|^2. \end{aligned}$$

ou de façon équivalente

$$\|P_{\mathcal{A}}(u) - v\|^2 \leq \|u - v\|^2 - \|u - P_{\mathcal{A}}(u)\|^2$$

Je pose  $u = x^k - \alpha_k \nabla J(\bar{x}^k)$ ,  $v = x^*$  et  $x^{k+1} = P_{\mathcal{A}_h}(u)$  dans l'inégalité précédente et je réarranges les termes :

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - \alpha_k \nabla J(\bar{x}^k) - x^*\|^2 - \|x^k - \alpha_k \nabla J(\bar{x}^k) - x^{k+1}\|^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - 2\alpha_k \langle x^k - x^*, \nabla J(\bar{x}^k) \rangle + \|\alpha_k \nabla J(\bar{x}^k)\|^2 \\ &\quad - \|x^k - x^{k+1}\|^2 + 2\alpha_k \langle x^k - x^{k+1}, \nabla J(\bar{x}^k) \rangle - \|\alpha_k \nabla J(\bar{x}^k)\|^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^{k+1}\|^2 + 2\alpha_k \langle x^* - x^{k+1}, \nabla J(\bar{x}^k) \rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \langle x^* - x^{k+1}, \nabla J(\bar{x}^k) \rangle &= \langle x^* - \bar{x}^k, \nabla J(\bar{x}^k) \rangle + \langle \bar{x}^k - x^{k+1}, \nabla J(\bar{x}^k) \rangle \\ &\leq \langle \bar{x}^k - x^{k+1}, \nabla J(\bar{x}^k) \rangle \end{aligned} \quad (3.25)$$

puisque  $x^*$  est solution de l'inégalité variationnelle et  $\nabla J$  est monotone il s'ensuit, en substituant (3.25) dans (3.24)

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - \bar{x}^k\|^2 - \|\bar{x}^k - x^k\|^2 - 2 \langle x^k - \bar{x}^k, \bar{x}^k - x^{k+1} \rangle \\ &\quad + 2\alpha_k \langle \bar{x}^k - x^{k+1}, \nabla J(\bar{x}^k) \rangle \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - \bar{x}^k\|^2 - \|\bar{x}^k - x^k\|^2 + 2 \langle x^k - \alpha_k \nabla J(\bar{x}^k) - \bar{x}^k, x^{k+1} - \bar{x}^k \rangle \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - \bar{x}^k\|^2 - \|\bar{x}^k - x^k\|^2 + 2 \langle x^k - \alpha_k \nabla J(x^k) - \bar{x}^k, x^{k+1} - \bar{x}^k \rangle \\ &\quad + \alpha_k \langle \nabla J(x^k) - \nabla J(\bar{x}^k), x^{k+1} - \bar{x}^k \rangle \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - \bar{x}^k\|^2 - \|\bar{x}^k - x^k\|^2 + 2\alpha_k \|\nabla J(x^k) - \nabla J(\bar{x}^k)\| \|x^{k+1} - \bar{x}^k\| \end{aligned}$$

puisque  $\langle u - P_{\mathcal{A}_h}(u), v - P_{\mathcal{A}_h}(u) \rangle \leq 0$  si  $v \in \mathcal{A}_h$ , en utilisant l'inégalité tel que  $v = x^{k+1}$  et  $u = x^k - \alpha_k \nabla J(x^k)$  et  $P_{\mathcal{A}_h}(u) = \bar{x}^k$

$$\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 + \alpha_k^2 \|\nabla J(x^k) - J'(\bar{x}^k)\|^2 \geq 2\alpha_k \|\nabla J(x^k) - \nabla J(\bar{x}^k)\| \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|$$

dans il vient :

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - \bar{x}^k\|^2 - \|\bar{x}^k - x^{k+1}\|^2 + \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 + \alpha_k^2 \|\nabla J(x^k) - \nabla J(\bar{x}^k)\|^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - \bar{x}^k\|^2 \left\{ 1 - \alpha_k^2 \frac{\|\nabla J(x^k) - \nabla J(\bar{x}^k)\|^2}{\|x^k - \bar{x}^k\|^2} \right\} \end{aligned}$$

□

Nous allons mettre en application de longueur d'étape adaptative d'abord présenté dans [17] pour enlever la contrainte ce  $\nabla J$  doit être Lipschitz continu. L'adaptatif l'algorithme est de la forme :

$$\bar{x}^k = P_{\mathcal{A}_h} \left( x^k - \alpha \nabla J(x^k) \right). \quad (3.26)$$

$$x^{k+1} = P_{\mathcal{A}_h} \left( x^k - \alpha \nabla J(\bar{x}^k) \right). \quad (3.27)$$

Intuitivement, nous obtenons une meilleure convergence quand  $\alpha$  devient plus petit entre les itérations, cependant, il est évident que nous devons également commander de comment l'ordre  $\alpha_k$  va à zéro.

Nous employons la règle suivante de réduction pour  $\alpha_k$

$$\alpha_k > \beta \frac{\|x^k - \bar{x}^k\|}{\|\nabla J(x^k) - \nabla J(\bar{x}^k)\|}. \quad (3.28)$$

Où  $\beta \in (0, 1)$ . Les résultats prouvent que le  $\beta$  est habituellement 0.8 ou 0.9 ce que nos résultats soutiennent. L'algorithme extragradient de Khobotov a après algorithme général

### l'algorithme de Khopotov

**Etape 1** : choisissez initiales  $x^0 \in \mathcal{A}_h, \beta$  et définir  $k = 0$

**Etape 2** : calculer  $\nabla J(x^k)$

**Etape 3** : calculer  $\bar{x}^k = P_{\mathcal{A}_h} \left( x^k - \alpha \nabla J(x^k) \right)$  et calculer  $\nabla J(\bar{x}^k)$ .

**Etape 4** : calculer  $\nabla J(\bar{x}^k)$ .

si  $\nabla J(\bar{x}^k) = 0$  alors  $\bar{x}^k$  est une solution du problème.

**Etape 5** : si  $\alpha > \beta \frac{\|x^k - \bar{x}^k\|}{\|\nabla J(x^k) - \nabla J(\bar{x}^k)\|}$

alors réduire  $\alpha_k$  et passer l'étape 5 .

**Etape 6** : calculer  $x^{k+1} = P_{\mathcal{A}_h} \left( x^k - \alpha \nabla J(\bar{x}^k) \right)$  et calculer  $\nabla J(\bar{x}^k)$ .

**Etape 7** : si  $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$  puis arrêter sinon passer l'étape 2.

---

# Conclusion générale

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse non linéaire pour l'identification numérique d'un paramètre dans un problème elliptique en dimension un avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Problème direct** : nous avons utilisé la méthode des éléments finis et en terminée par la méthode de Cholesky pour quelques exemples numériques avec programme sous Matlab.
- ✓ **Problème inverse non linéaire** : nous avons étudié notre problème dans un cadre d'un problème d'optimisation avec contraintes où les contraintes est un ensemble convexe et fermé, et la fonction objective est donnée par la fonction de moindres carrés non linéaires. Ce problème d'optimisation admet au moins une solution. La résolution numérique par éléments finis de ce problème est équivalent à la résolution d'inéquation variationnelle. Enfin, nous avons utilisé des méthodes de type extragradient : méthode de Korpelevich et méthode de Khobotov pour résoudre ce problème.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Identification numérique le paramètre  $a$  pour un problème parabolique suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) &= f(x, t), \quad 0 < x \leq 1, \quad t > 0. \\ u(0, t) &= 0, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 < x \leq 1.\end{aligned}$$

- ☞ Identification numérique le paramètre  $a$  pour un problème hyperbolique suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) &= f(x, t), \quad 0 < x \leq 1, \quad t > 0. \\ u(0, t) &= 0, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 < x \leq 1.\end{aligned}$$

---

# Bibliographie

---

- [1] H. Abdelouaheb. Résolution numérique d'un problème inverse non linéaire en dimension un. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2015.
- [2] T. Ahmed. Méthodes itératives pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2013.
- [3] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [4] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. American Elsevier, New York, 1972.
- [5] L. F. Demkowicz and J. T. Oden. *Applied Functional Analysis*. CRC Press, 1996.
- [6] M.S. Gockenbach and A.A. Khan. An abstract framework for elliptic inverse problems. part 1 : an output least squares approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 12 :259–276, 2007.
- [7] M. Hanke H. Engl and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [8] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, 1923.
- [9] A.N. Iusem J. Y. Cruz, J.Y. Bello. *Full convergence of an approximate projection method for nonsmooth variational inequalities*. Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, 2010.
- [10] Z. Nashed K. M. Furati and A. H. Siddiqi. *Mathematical Models and Methods for Real World Systems*. Taylor & Francis Group, LLC, 2006.
- [11] C. T. Kelly. *Iterative Methods for Optimization*. SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 1999.
- [12] E. N. Khobotov. A modification of the extragradient method for solving variational inequalities and some optimization problems. (*Russian*) *Zh. Vychisl.Mat. iMat. Fiz.*, (10) :14620–1473, 1987.
- [13] G. M. Korpelevich. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. (*Russian*) *Ekonom. i Mat. Metody*, 12 :747–756, 1976.
- [14] M. Mogé. Méthodes numériques pour un problème inverse. Master's thesis, EPFL, Suisse, 2011.
- [15] S. Nafissa. Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2013.
- [16] J. Oleksyn. Extragradient methods for elliptic inverse problems and image denoising. Master's thesis, Rochester Institute of Technology, England, 2011.

- 
- [17] F. Facchinei J-S. Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems :Volume II*. Springer-Verlag, 2003.
- [18] B. Brian R. C. Aster and H.T. Clifford. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier Academic Press, 2005.
- [19] E. Ramirez. *Finite element methods for parameter identification problem of linear and nonlinear steady-state diffusion equations*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
- [20] Y. Z. Said. Méthodes de factorisation pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2014.
- [21] S. Sariaydin. Numerical identification of a variable parameter in 2d elliptic boundary value problem by extragradient methods. Master's thesis, Rochester Institute of Technology, Rochester, England, 2013.
- [22] J. Zou. Numerical methods for elliptic inverse problems. *Intern. J. Computer Math*, 70 :211–232, 1998.