N° d'ordre :………………

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université de M'sila

Faculté des Sciences

Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

Zellagui Souria

THEME

Les méthodes de la renormalisation dans la théorie quantique des champs : Application ϕ^4

Soutenue le : 19/06/2014

Devant le jury composé de :

N. Guesmia	M. A. B. Univ. de M'sila	Président
M. Debabi	M. A. A. Univ. de M'sila	Rapporteur
S. Youcef	M. A. A. Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion Juin 2014

بسم الله الرحمن الرحیم

بسم الله الرحمن الرحیم

D'EDUCATION

Je dédie ce mémoire

A ma mère

A mon père

A mesfrères et surtout (Abed Allatif)

A mes sœurs et surtout (Rahma)

A toute ma famille zellagui

A tous mes amis

A tous ceux celles qui m'ont aidé et encouragé de prés comme de loin.

Souria

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout premièrement ALLAH le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Ainsi, nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Mr **Debabi Mourad** pour avoir d'abord proposée ce thème, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessée de nous donner ses conseils.

Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidé à élaborer et réaliser ce mémoire, ainsi à tous ceux qui nous ont aidés de prés ou de loin accomplir ce travail.

Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants et le chef de département de physique aussi tout la famille du département de physique.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres du jury qui Ont bien voulu consacrer de leur temps A lire ce travail.

Également, un remerciement à tout nos collègues de promotion 2014 pour les bons moments qui nous avons passé ensemble.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

1 Introduction générale :

La conception du début la physique du vingtième siècle s’occupe donc de deux types d’objets. Les champs aux ondes qui définissent les forces dans l’espace et les particules qui décrivent des trajectoires soumises à ces forces. Les relations entre ces deux posant un certain nombre de problème. le but est donner le mieux comprendre les causes et les lois qui gouvernent les processus naturels.

La physique théorique est la branche de la physique qui étudie l’aspect théorique des lois physiques et en développe le formalisme mathématique qui essaie de décrire le monde en réalisant des modèles de la réalité, utilisé afin de rationaliser, d'expliquer et de prédire des phénomènes physiques [1].

Pendant le dernier siècle, la physique fondamentale a vécu deux révolutions qui ont changé les concepts et la vision de la mécanique classique newtonienne décrivant les lois de la nature qui est une théorie générale des du mouvement des objets macroscopiques et aussi est un cas limite de la mécanique quantique. la physique classique est complètement incapable d’expliquer le comportement de la matière étant donne ses constituants et les forces entre ces constituants.

La naissance de la physique quantique date d’un siècle et cette description des phénomènes physiques, qui a transformé notre vision du monde, n’est toujours pas remise en cause, ce qui est exceptionnel pour une théorie scientifique. Ses prédictions ont toujours été vérifiées par l’expérience avec une précision impressionnante [2].

Le mécanique quantique se constitue en 1925, avec les contributions de De Broglie, Schrödinger, Heisenberg et Born. encore, Pauli propose son principe d’exclusion et Uhlenbeck et Goudsmit introduisent la notion de spin. il peut être définie comme l’ensemble des lois physiques s’appliquant à l’échelle de l’infiniment petit, le père de la mécanique quantique est le physicien Max Planck qui introduire la célèbre constante $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ cette constante est le fondement de la réalité physique [3].

Introduction générale

Parmi les principes les plus importants en mécanique quantique, le principe d'incertitude d'Heisenberg $\Delta x.\Delta p \approx \hbar$ qui énonce que la position et la vitesse d'une particule ne peuvent pas être mesurées en même temps avec une très grande précision. En fait, ce principe est une conséquence immédiate des relations de commutations canoniques entre les variables x_μ , p_μ Avec $\mu = \overline{1.3}$ qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert $\left(x_\mu \to \hat{x}_\mu\ et\ p_\mu \to \hat{p}_\mu\right)$ et forment une algèbre non-commutative$[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\hbar\delta^{\mu\nu}$ [4].

La combinaison entre la mécanique quantique ordinaire et relativité restreinte a induit la mécanique quantique relativiste où les énergies des systèmes sont haut énergie, mais la mécanique quantique non relativiste trouve une large application dans beaucoup de problèmes de physique atomique où les énergies des systèmes ne sont pas trop élevées. Pour les systèmes non stationnaires en interaction, on s'intéresse essentiellement à la détermination de leurs fonctions d'onde qui caractérisent toute l'information sur leurs états quantiques. Dans un système à n degré de liberté, gouverne par un Hamiltonien H , la détermination de la fonction d'onde $\Psi(x;t)$ relève de la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps [5]

$$i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(x;t) = H\Psi(x;t) \qquad (1.1)$$

Le problème apparait à la frontière de ces domaines. Une interaction entre systèmes quantique ne ressemble pas à ce qui se passe lors d'une mesure, où le système de mesure a un effet drastique sur le système mesuré mais un appareil de mesure n'est présumèrent qu'une agrégation de systèmes quantiques [6].

En 1905 Einstein publie la théorie de la relativité, dans laquelle l'invariance de la vitesse de la lumière.

La relativité générale est la théorie qui décrit L'infiniment grand (les planètes, les galaxies,…….). Ses fondements out été établies par Albert Einstein en 1916. Elle utilise principalement la géométrie Riemannienne comme Formalisme mathématique. Malgré cela, les physiciens théoriciens aspirent vers une théorie unifiée, qui pourra traiter les systèmes physiques microscopiques et macroscopiques sur le même pied d'égalité.

Certains d'entre eux pensent que la voie vers l'unification passe forcément par le développement des outils mathématiques utilisés en physique. C'est dans cet état d'esprit que des théories, comme la supersymétrie (SUSY) et les supercordes (Superstrings) ont vu le jour. Celles-ci ajoutent de nouvelles symétries (symétrie boson---fermion) à la nature. Le bilan final de tout ceci est que les physiciens ont échoué (pour le moment) à unifier les quatre interactions de la nature [7].

Le principe de relativité générale qui est à la base de la théorie de relativité générale postule qu tous les systèmes de références inertiels et non inertiels sont complètements équivalents vis-à-vis des lois physiques de la nature, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que les équations fondamentales de la physique doivent être covariantes sous le groupe des transformations des coordonnées générales.

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x) \tag{1.2}$$

La théorie de la relativité restreinte en 1905 et la théorie de la relativité générale en 1915 sonnent définitivement le glas de la vision classique du temps absolu en mécanique. Non seulement il convient désormais de parler d'espace-temps (le temps devient une variable dépendant du choix du repère au même titre que les coordonnées d'espace) mais on abandonne aussi la notion de gravitation en tant que force. La gravitation ne résulte désormais que de la déformation de l'espace, déformation due à la présence de matière.

Le principe de relativité restreinte postule que tous les systèmes inertiels son complètements équivalents vis-à-vis des lois physiques de la nature, ce qui se traduit mathématiquement par le fait que les équations fondamentales de la physique doivent être covariantes sous le groupe des transformations de Lorentz [3]:

$$x^a \rightarrow x'^a = \Lambda_b^a x^b \tag{1.3}$$

La théorie quantique des champs, qui est la mécanique quantique rendue compatible avec la relativité restreinte.

La théorie quantique des champs est une généralisation relativiste et quantique de la mécanique et de l'électromagnétisme classique. De plus la théorie quantique des champs est l'outil le plus puissant que les physiciens aient à leur disposition pour étudier le comportement de toute une classe de systèmes où des degrés de liberté nombre très grand fluctuent et sont fortement coupés, les fluctuations pouvant être de nature quantique ou statistique [8].

La mécanique quantique et plus généralement, la théorie quantique des champs, mettent fin à la notion de particule ponctuelle de la mécanique classique. La dualité onde-corpuscule, la notion de fonction d'onde et de probabilité de présence ont modifié la perception intuitive des phénomènes physiques, l'exemple le plus célèbre étant vraisemblablement le chat de Schrödinger.

À la fin des années quarante une telles théories de champs quantiques en interaction avait pu être élaborée et appliquée avec un succès surprenant à l'interaction électromagnétique, l'électrodynamique quantique (QED).

En 1948 en effet, Feynman avait reformulé la mécanique quantique au moyen de l'intégrale de chemins, qui est une intégrale fonctionnelle (c'est-à- dire une intégrale sur une infinité de variables d'intégration) sur tous les chemins que peut emprunter virtuellement une particule quantique. Grâce au principe de superposition des amplitudes de probabilité, Feynman interprétait ainsi la fonction d'onde de la mécanique quantique comme une amplitude de champ évaluée à partir du principe de Huygens. Comme il est relativement facile d'y imposer l'invariance relativiste de Lorentz, le formalisme de l'intégrale de chemins est très bien adapté au passage de la mécanique quantique à la théorie quantique des champs [8].

La théorie quantique obtenue en remplaçant les champs classique par des champs d'opérateur dans le lagrangien, le hamiltonien, équation Euler Lagrange, …

En théorie quantique des champs il y a symétrie entre les deux signes de la charge, ceci implique l'existence des particules de même mase, spin,… etc. et de charge opposée : ce sont les antiparticules, l'existence des antiparticules est en fait également nécessaire pour assurer la causalité de la théorie [9.10].

Le titre de mémoire de master en physique théorique option a haut énergie est théorie est les méthodes de la renormalisation de la théorie quantique des champs : application ϕ^4. J'ai devisé mon travail en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les étapes essentielles de la physique moderne.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié les déférentes formules caractérisées de la théorie des champs comme l'action, lagrangienne, la fonction de Green, ..., En suit le problème de la divergence ultra-violet (UV) de la théorie quantique des champs.

Dans le troisième chapitre, dans le partie (I), nous avons étudié la théorie des champs définie sur espace non commutative, dans cette théorie le produit entre les champs est généralisé via le produit star $(\star)$, qui nous allons connaitre ces propriétés et après nous allons étudier la densité lagrangienne de la théorie des champs sur un espace non commutatif. Durant cette étude, nous allons concentrer sur théorie des champs scalaire en utilisant ϕ^4 comme une modèle. Et nous avons étudié la mélange (UV/IR), et on propose l'aidé de renormalisation. Dans la partie (II), nous allons connaitre les propriétés du $\tilde{\star}$-produit, et nous allons étendre le formalisme lagrangien de la théorie des champs sur un espace non commutative avec $\tilde{\star}$-produit, et développer les relations des commutations des champs scalaires dans le cas symétrique (τ) sur un espace non commutative, et nous allons illustrer, par un calcul explicit, la finitude de la théorie proposée, et considérant les vertex propre à deux points et quatre points à l'ordre de boucle.

On termine cette mémoire par une conclusion générale.

CHAPITRE 2

THEORIE DE CHAMP COMMUTATIVE

2−1 Introduction

Dans ce chapitre on a étudié les déférentes formules de la théorie des champs ordinaire et les problèmes qu'apparu.

La notion du champ a commencé d'être modifiée fondamentalement avec l'introduction par Albert Einstein du concept de photon, le contenu physique de la théorie est entièrement déterminé par le choix des champs et des symétries [1].

Dans la théorie quantique des champs Chaque particule est d'écrite par un champ, alors que ce dernier est une distribution à valeurs dans les opérateurs sur un espace de Hilbert et aussi est une fonction de l'espace-temps dans la théorie relativiste des champs [2].

La théorie quantique des champs fut élaborée dans le début des années 1970 mais, même maintenant c'est encore un sujet actif de recherches théorique [3].la théorie des champs classique est une étape vers de cette théorie. Le passage de la théorie classique à la théorie quantique des champs est appelée seconde quantification. On quantifie le champ en remplaçant les variables décrivant le champ par des opérateurs.

La théorie quantique des champs est l'application des concepts de la physique quantique aux champs qui est considérée généralement comme la seule façon correcte de combiner les règles de la mécanique quantique avec celles de la relativité restreinte et aussi c'est la base de la description des interactions des particules élémentaires peuvent être formulées à partir d'un principe d'action qui est une simple généralisation de la situation rencontrée en mécanique classique. La théorie quantique des champs est un outil nécessaire qui étudier le comportement de toute systèmes où des degrés de liberté en nombre très grand.

Les équations dynamiques(les équations d'Euler-Lagrange) qui découlent de l'action comme point de départ du formalisme de la théorie des champs. Le formalisme de la théorie quantique des champs permet avant tout d'extraire de l'action, traitée dans le cadre de la mécanique quantique relativiste [4]

2-2 L'action et les formules de lagrangien

L'action dans la théorie c'est l'intégrale de lagrangien sur le temps et fonctionnelle de **q** est donner par [5] :

$$S[q] = \int_{t2}^{t1} dt\ L(q(t),\ \dot{q}(t), t) \tag{2.1}$$

Où L est la fonction de Lagrange qui joue un rôle central en théorie quantique des champs.

En mécanique classique, les équations du mouvement d'un système de particules ponctuelles sont obtenues à partir d'une action, on appelle ces équations par les équations d'Euler –Lagrange, elles déterminent son évolution temporelle :

$$\frac{\partial}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\dot{q}_1(t)} = 0 \tag{2.2}$$

Pour chaque degré de liberté, il existe une équation d'Euler – Lagrange qui d'écrit l'évolution du système.

Mais, l'action n'est pas covariante, pour ce dernier contient la densité lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ qui produit comme suit :

$$L = \int_D d^3x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \tag{2.3}$$

Une théorie des champs en quatre dimensions est donnée par une fonctionnelle d'action.

$$S[\phi] = \int_D d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \tag{2.4}$$

Alors, dans les équations d'Euler –Lagrange qui obtenir selon le principe de moindre action, on remplace les termes $\frac{\partial}{\partial q_i(t)}$, $\frac{\partial L}{\dot{q}_1(t)}$ aussi $\frac{d}{dt}$ par les termes covariante $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}$ et ∂_μ respectivement.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \tag{2.5}$$

2-3 La théorie des champs scalaires

N'importe quel champ quantique est caractérisé par une densité lagrangien, ce qui est représenté comme somme d'une partie de champ libre $\mathcal{L}_0$ et d'une interaction $\mathcal{L}_I$ comme suit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \tag{2.6}$$

Et

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}(\phi)^2 \tag{2.7}$$

Dans cette théorie la densité lagrangienne $\mathcal{L}_I$ est donnée :

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4\,!}\,(\phi)^4 \tag{2.8}$$

Alors, la densité totale est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}(\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\,(\phi)^4 \tag{2.9}$$

m est la masse d'un champ scalaire libre

L'action est donnée par :

$$\mathrm{S}[\phi] = \int_D d^4x \left[\frac{1}{2}\,(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}(\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\,(\phi)^4\right] \tag{2.10}$$

2-4 Les fonctions de Green

Les fonctions de Green sont des valeurs moyennes d'opérateurs dans le vide Ces valeurs moyennes sont définies à partir de l'intégrale de chemin [6].

La fonction de Green est :

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi(x_n)|0\rangle \tag{2.11}$$

T est le produit chronologique

$\langle 0|$ est l'état de vide (où état fondamentale).

$$G_n(x_1,\dots,x_n)=\frac{\int \Pi_{\vec{x}} D\phi(\vec{x},t)\phi(x_1)\dots\phi(x_n)e^{iS[\phi]}}{\int \Pi_{\vec{x}} D\phi(\vec{x},t)e^{iS[\phi]}} \tag{2.12}$$

Toutes les fonctions de Green est nulle pour n impair et les fonctions de Green peuvent s'obtenir comme dérivées fonctionnelles par rapport à la source J

$$G_n(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{i^n Z_0[0]}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)}\Big|\, J=0$$

$$=\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n iw[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)}\Big|\, J=0 \tag{2.13}$$

Où Z[J] et $w[J]$ sont des fonctionnelles génératrices très importantes Pour le champ en interaction.

$$Z[J]=\int(D\phi)e^{\left[s(\phi)+\int d^4x J(x)\phi(x)\right]} \tag{2.14}$$

Et avec

$$iw[J]=\log\frac{Z[J]}{Z[0]} \tag{2.15}$$

J est un élément du dual de l'espace linéaire des champs classiques ϕ

Pour le champ scalaire réel la densité lagrangien est :

$$\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{m^2}{2}(\phi)^2 \tag{2.16}$$

Donc, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green libres donner :

$$Z_0[J]=Z_0[0]e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

$$\frac{Z_0[J]}{Z_0[0]}=e^{iW_0[J]} \tag{2.17}$$

Telle que

$$W_0[J]=-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y) \tag{2.18}$$

$\boldsymbol{\Delta_F(x-y)}$ est le propagateur du champ scalaire

Les fonctions de Green libres est :

$$\mathrm{G}_2^0(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = \mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(\mathrm{x}-\mathrm{y})$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}k(x-y)}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{z}[0]} \frac{\partial^2 \mathrm{Z}[\mathrm{J}]}{\partial \mathrm{J}(\mathrm{x}_1)\, \partial \mathrm{J}(\mathrm{x}_2)} \Big|_{\mathrm{J}=0} \qquad (2.19)$$

2.5 La fonctionnelle $\Gamma[\phi]$

Cette fonctionnelle appelée action effective qui donne par :

$$\Gamma[\phi] = \mathrm{W}[J] - \int d^4x J(x)\phi(x) \qquad (2.17)$$

Avec

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = \frac{\delta \mathrm{W}[J]}{\delta\phi(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y) - J(x)$$

$$= \int d^4y \frac{\delta W[y]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} - J(x)$$

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = -J(x) \qquad (2.18)$$

Son développement en puissance de ϕ se présent comme suit

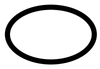
$$\Gamma\,[\phi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \Gamma_n(x_1, \ldots, x_n) \qquad (2.19)$$

Où les coefficients Γ_n sont les valeurs propres

$$\Gamma_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1) \ldots \delta\phi(x_n)} \Big|_{\phi=0} \qquad (2.20)$$

2.6 Les règles de Feynman

Les règles du Feynman sont un ensemble de prescriptions qui nous permettent d'associer à un diagramme de Feynman, Pour la théorie du champ scalaire libre avec l'interaction dans la théorie ϕ^4 on pose ces règles :

- à chaque vertex on associe une constante de couplage $-i\lambda$
- pour chaque ligne x y du diagramme deux points x et y on associe un propagateur $-iG_i(x-y) = \frac{1}{k^2-m^2}$
- Pour une boucle  on associe l'intégrale $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$
- Chaque diagramme est finalement divisé par son facteur de symétrie

$S = \frac{(4!)^p P!}{multiplicite}$ Où P est le nombre de vertex.

2.7 Les diagrammes de Feynman

Les diagrammes de Feynman sont un outil extraordinairement puissant pour organiser les opérations de la théorie quantique des champs.

La fonction de Green à deux points est :

$$
\begin{aligned}
i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) &= i(p^2 - m^2) \\
&+ \frac{1}{2}(-i\lambda)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon} \\
&+ \frac{1}{4}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m^2+i\varepsilon} \\
&+ \frac{1}{6}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k d^2q}{(2\pi)^8}\left[\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\right]\left[\frac{i}{q^2-m^2+i\varepsilon}\right]\left[\frac{i}{(p-k-q)^2-m^2+i\varepsilon}\right] \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Chaque terme de la fonction $i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$ représente par un diagramme

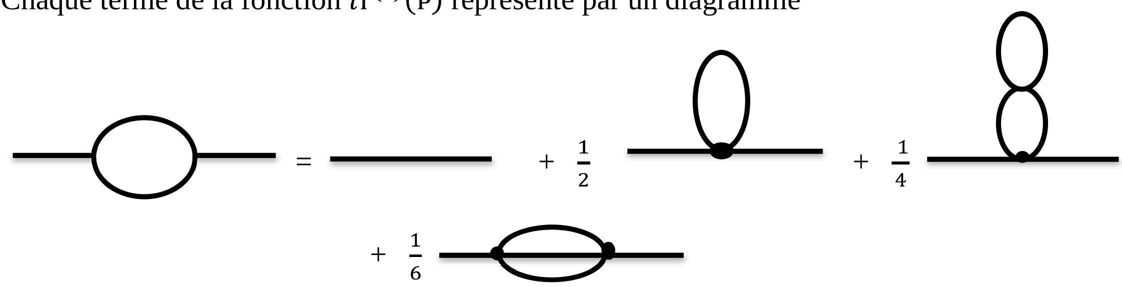


Figure 2.1 : La fonction à deux points

On obtient de même façon, La fonction de vertex à quatre points :

$$i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-i\lambda)$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$+\frac{1}{2}(-i\lambda)^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$+\frac{1}{2}(-i\lambda)^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon} \quad (2.22)$$

Aussi chaque terme de la fonction $i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p)$ représente par un diagramme comme suit :

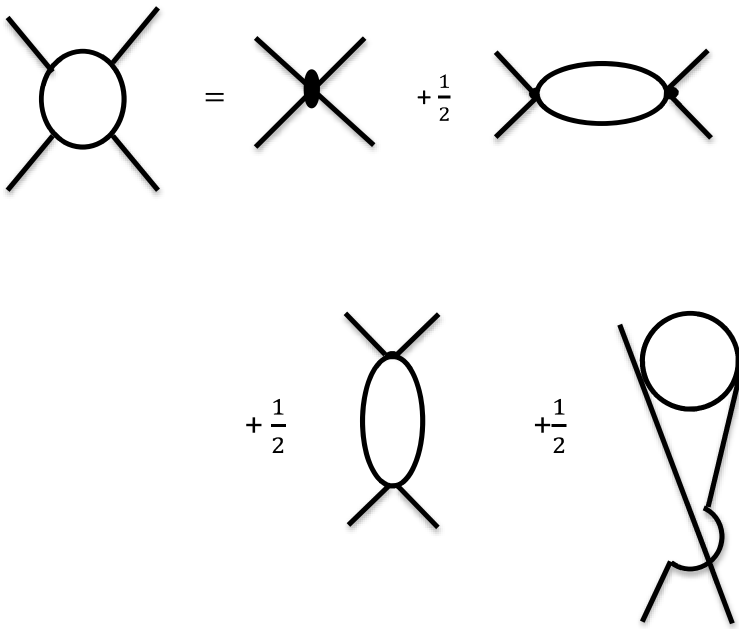
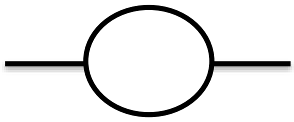


Figure 2.2 : La fonction à quatre points

2.8 Le problème de la divergence

En théorie quantique des champs, les intégrales de Feynman à l'ordre d'une boucle souffrent des divergences qui sont logarithmique, linéaire, quadratique …etc. selon le degré de divergence qui égale 0, 1 ,2 … respectivement.

Par exemple, l'intégrale de Feynman d'une boucle est :



$$=\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+m^2}\frac{1}{(p+k)^2+m^2}$$

Figure 2.3 : diagramme d'une boucle

Cette intégrale ne satisfait pas la condition de convergence, Lorsque le résultat devient infini quand k tend vers zéro on dit que le diagramme est divergent infrarouge. De même lorsqu'il devient infini pour k tendant vers l'infini, on dit que le diagramme est divergent ultraviolet [3].

Pour éliminer cette divergence on utilise la technique de la renormalisation.

Et aussi il y a autre technique appelé la régularisation.

- régularisation de coupure.
- régularisation de Pauli – Villars.
- régularisation analytique.
- régularisation dimensionnelle.

Chapitre *II*

Théorie des champs

CHAPITRE 3

THEORIE DES CHAMPS NON COMMUTATIVE

Partie

Théorie des champs de Non commutative

-1 Généralités

Dans ce chapitre nous étudions une théorie ϕ . Il s'agit d'une théorie scalaire réelle. Elle est écrite sur l'espace de Moyel quadridimensionnel $\mathcal{R}$.

La théorie de la géométrie non commutative a été développée dans les années 90 par les mathématiciennes comme Alain conne, Michel Dubois-violette, et les physiciennes comme plan de Moyel, Heisenberg et Dirac. Mais le premier article concernent une algèbre non commutative représentation l'espace-temps est dû à Snyder [1, 2, 3].

La géométrie non commutative est une adaptation du dictionnaire qui permet de passer d'algèbre commutative à espace remplace, pour tout où il y a lieu, le mot commutatif par non commutatif [4].

La géométrie non commutative est une reformulation et une généralisation de la géométrie ordinaire en des termes algébriques et d'analyse fonctionnelle. Elle utilise les mêmes outils que la quantique (les opérateurs sur un espace de Hilbert) et contient tout la géométrie classique.

La théorie non commutative des champs est une théorie définie sur un espace-temps menu d'une géométrie non commutative comme dans la quantification de l'espace de phase classique. L'espace-temps pente être quantifier en remplaçant les coordonnées par des opérateurs hermétique .

La motivation principale concernait les divergences ultraviolettes de la théorie des champs.

L'espace où le plan de Moyle est un le plus simple et le plus étudie (du point de vue de la théorie des champs), et cet espace peut être définie en n'importe quelle dimension.il s'agit-il d'une déformation de l'espace plat $\mathbb{R}$ [5,6].

L’espace non commutative on base sur l’algèbre de Seiberg-witten. Cette propriété appliquée par le produit (étoile). L’espace ordinaire est caractérisé par la structure canonique suivante :

$$[\ ,\ ] = 0 \qquad (\ .1)$$

$$[\ ,\hat{}\ ] = \hbar \qquad (\ .2)$$

$$[\ ,\hat{}\ ] = 0 \qquad (\ .3)$$

L’idée de l’étude non commutatif est un très ancienne(dans la mécanique quantique), la théorie de jauge peut être formulé dans l’espace non commutatif la structure canonique devient ce la forme [6,7] :

$$[\ ,\ ] = \quad , \quad = \quad = \overline{0,3} \qquad (\ .4)$$

Où est une constante antisymétrique $\times$, où c’est la dimension

$$= 4 \qquad = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ - & 0 & & 0 \\ 0 & - & 0 & \\ 0 & 0 & - & 0 \end{pmatrix} \qquad (\ .5)$$

Une fois que les produits des champs sont remplacés par des $\star$-produits, les nombres infinis des dérivés des champs peuvent maintenant être évident dans une action, impliquant que toutes telles théories sont non-locales. Ce n'est pas étonnant puisque, dans l'analogie avec la mécanique quantique Ordinaire, on a maintenant une relation d'incertitude d'espace-temps [8] :

$$\Delta \quad \Delta \quad \geq - | \quad | \qquad (\ .6)$$

Le but de la géométrie non-commutative est de généraliser la dualité entre espace géométrique et algèbre au cas plus général où l’algèbre n’est plus commutative. Cela conduit à modifier deux concepts fondamentaux des mathématiques, ceux d’espace et de symétrie et à adapter l’ensemble des outils mathématiques.

-2 Le produit de Moyel (produit star)

-2-1 L'opérateur de Weyl :

Le symbole de Weyl est une technique utilise pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique (pour associer un opérateur quantique à une fonction classique) [9,10].

Soit ( ) est fonction quelconque définie sur espace vectoriel (euclidien) à dimension $\mathcal{R}$.

On définit la transformation ( ) de ( ) par la relation :

$$(\ ) = \qquad (\ ) \qquad (.7)$$

( ) est une fonction réelle

( ) est la transformation de Fourier de ( )

L'opérateur de Weyl [ ] consiste par la forme de transformation de Fourier qui contient l'opérateur et la transformation de Fourier ordinaire ( )

$$[\ ] = \frac{}{(2 \ )} (\ ) \qquad (.8)$$

-2-2 Définition du produit star (⋆) :

On définit le produit star (⋆) dans l'espace Minkowski pour des fonctions ordinaire, c'est une produit de deux opérateurs de Weyl et de deux fonctions ( ) et ( ) associé au produit star de deux fonctions[9,10] :

$$(\ ) \ (\ ) = \ (\ \star \ ) = \ . \qquad (.9)$$

Où

$$(\ \star \ ) = \frac{}{(2 \ )} \frac{}{(2 \ )} (\ ) (\ ) \qquad (.10)$$

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$= \quad -[\ ,\ ]\ -[\ ,\ ], \qquad (\ .11)$$

On trouve :

$$(\ \star\ )(\ ) = \frac{1}{(2\ )} \quad - \quad (\ )\ (\ ) \qquad (\ .12)$$

C'est –à-dire qu'on vient d'établir la correspondance suivante :

$$(\ \star\ ) \leftrightarrow (\ \star\ )(\ ) \qquad (\ .13)$$

Une autre écriture de produit star ($\star$) par la définition de Moyel-Weyl :

$$(\ )\star\ (\ ) = \ (\ ) \quad -\overleftarrow{\ } \quad \overrightarrow{\ } \quad (\ ) \qquad (\ .14)$$

On peut développer le produit star comme suit :

$$\star\ = \quad + \frac{\ }{2} \quad + \ (\ )$$

$$(\ )\star\ (\ ) = \ (\ )\ (\ ) + \quad \frac{i}{2}\ \frac{1}{\ !} \quad \ldots \quad \ldots \quad (\ ) \quad \ldots \quad (\ )$$

$$(\ .15)$$

On peut écrire :

$$(\ \star\ )(\ ) = \ ^{-} \quad (\ )\ (\ ) \qquad (\ .16)$$

Pour $\ = 0$ on trouve :

$$(\ )\star\ (\ ) = \ (\ )\ (\ ) \qquad (\ .17)$$

On retrouve donc le cas commutatif (produit ordinaire).

-2-3 Propriétés du produit star $(\star)$

) Le produit star entre deux exponentiels

$$e \quad \star e \quad = e^{-} \qquad e \quad e$$

$$= (1 + \quad -\theta \quad \partial \ \partial \quad + \ -\theta \quad \partial \ \partial \quad + \cdots) \ e \quad e$$

$$= (1+(--\quad) + \cdots)e \quad e$$

$$= \ ^{(\quad)} \quad ^{-(\quad)} \qquad (\ .18)$$

Avec la notation $k\theta q \equiv$

) La représentation dans l'espace des moments

En utilisant $(\ .18)$ nous obtenons

$$(\ )\star \ (\ ) = \int \frac{}{(\ )} \frac{}{(\ )} \ (\ ) \ (\ ) \exp \ -- \qquad [\ (\ + \ )\ ] \qquad (\ .19)$$

) Associativité

$$[(\ \star \ )\star h](\ ) = [\ \star(\ \star h)](\ ) \qquad (\ .20)$$

En effet, dans l'espace des moments

$$((f\star g)\star h)(x) = \int \frac{}{(\ )} \frac{}{(\ )} \ (k)g(q)e^{\ -} \quad e^{(\quad)} \ \star h(x)$$

$$= \int \frac{}{(\ )} \frac{}{(\ )} \frac{}{(\ )} \ (k)g(q)h(p)\, e^{\ -} \quad e^{(\quad)} \ e^{(\quad)} \qquad (\ .21)$$

$$f\star(g\star h)\ (x) = \frac{d\ k}{(2\pi)} \frac{d\ p}{(2\pi)} \ (x)\star \ g(q)h(p) \ e^{\ -} \quad e^{(\quad)}$$

$$= \frac{d\ k}{(2\pi)} \frac{d\ q}{(2\pi)} \frac{d\ p}{(2\pi)} (k)g(q)h(p)\, e^{\ -} \quad e^{(\quad)} \ e^{(\quad)} \qquad (\ .22)$$

) **Le produit star sous le signe intégral**

$$(\star)( ) = (\star)( ) \qquad (.23)$$

qui se démontre de la manière suivante

$$(\star)( ) = \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )} ( )\ ( )\exp -\frac{}{2} \quad [\,(+)\,] \qquad (.24\ )$$

$$(\star)( ) = \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )} ( )\ ( )\exp -\frac{}{2} \quad [\,(+)\,] \qquad (.24\ )$$

On peut démontrer que :

$$(\star)( ) = (.)( )$$

$$(\star)( ) = \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )} ( )\ ( )\ ^{-( )\ ( )}$$

En utilisant la formule de Dirac :

$$\int ((+ \cdots +)) = (2\ ) (+ \cdots +) \qquad (.25)$$

Donc :

$$(\star)( ) = (2\ ) \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )} ( )\ ( )\ ^{-( )}\delta(+) \qquad (.26)$$

Et

$$( ) = ( )\ (-) \qquad (.27)$$

Donc :

$$(\star)( ) = \frac{}{(2\ )} ( )\ (-) = (.)( ) \qquad (.28)$$

De l'équation(.23), Nous pouvons déduire la propriété cyclique

$$(\ \star\ \ \star \dots \star\ )(\ ) = \ (\ \star\ \ \star\ \ \star \dots \star\ \ ) \qquad (\ .29)$$

) **La conjugaison complexe**

$$(\ \star\ )^{\star} = {}^{\star} \star\ {}^{\star} \qquad (\ .30)$$

) **Le produit star est non commutatif**

$$\star\ \neq\ \star \qquad (\ .31)$$

Par contre(.30) : $\star\ =\ \star\ |_{\rightarrow}$

) **La règle Leibniz**

Il est facile vérifier que la dérivée de produit star satisfait à la règle de Leibniz

$$(\ \star\ )(\ ) = \ \star\ +\ \star \qquad (\ .32)$$

-4 Densité Lagrangienne et action

Pour étudier le formalisme Lagrangienne de la théorie des champs classique sur l'espace Minkowski à la théorie des champs sur l'espace non commutative. On remplaçant dans la densité Lagrangienne le produit simple (point) par le produit star (étiole).

La densité Lagrangienne réelle pour la théorie des champs scalaire non commutative est comme suit :

$$\mathcal{L}\ \phi,\ \ \phi\ = \frac{1}{2}\ \ \phi(\ ) \star\ \ \phi(\ ) - \frac{}{2} \phi(\ ) \star \phi(\ ) - {}_{\star}(\phi) \qquad (\ .33)$$

Avec :

$${}_{\star}(\phi) = \sum \frac{}{!} \phi \star \phi \dots \phi \star \phi \qquad ,\ \ > 2 \qquad (\ .34)$$

Nous définition l'action S sur un endroit artificielle R du temps-espace par :

$$[\phi] = \int \mathcal{L}\ \phi, \quad \phi \qquad (\ .35)$$

$$= \qquad \frac{1}{2}\ \phi(\ )\star\ \ \phi(\ ) - \frac{}{2}\phi(\ )\star\phi(\ ) - \ _{\star}(\phi) \qquad (\ .36)$$

-5 Théorie des champs scalaire non commutative

Pour étudier la théorie des champs non commutative en remplacer dans la théorie des champs commutative le produit simple par le produit étoile ($\star$ -produit star). Donc l'action dans la théorie scalaire et donner par [10] :

$$[\phi] = \int \qquad [-\ \ \phi\star\ \ \phi - \frac{}{}\phi\star\phi - \frac{}{!}\phi\star\phi\star\phi\star\phi\ ]$$

$$= \qquad [\frac{1}{2}\ \ \phi\ \ - \frac{}{2}(\phi)\ - \frac{}{4!}\phi\star\phi\star\phi\star\phi] \qquad (\ .37)$$

D la dimension de l'espace tempe, ϕ est un champ scalaire réel.

La coïncidence entre les théories commutative et non commutative dans le même propagateur (réglé de Feynman) et même divergence. Mais il y a une seul différence dans nous oblige à travailler dans l'espace moments qui est resté commutatif. Ce qui en langage mathématique signifie l'existence d'un ensemble complet de fonction de base.

-5-1 L'équation de mouvement :

Les équations classiques de mouvement, similaire au cas commutatif, sont obtenues en minimisant l'action, c'est-à-dire :

$$\frac{}{\phi} = 0 \qquad (\ .38)$$

Alors on peut écrire l'équation de mouvement de la théorie du champ scalaire avec l'interaction ϕ :

$$(\square + \quad)\phi = -\frac{}{3!}(\phi \star \phi \star \phi)(\quad) \qquad (\ .39)$$

Pour trouver le moment conjugué, on distingue deux cas différence :

- $= 0$

- $\neq 0$

$= 0$

Dans ce cas, on rencontre les dérivées par rapport au temps seulement dans le terme cinétique donc le moment conjugué est le même dans le cas commutatif.

$\neq 0$

Dans ce cas on a un grand nombre de dérivés par rapport au temps dans le terme d'interaction il est clair de début qu'il y a quelque chose non triviale. Le moment conjugué dépend de termes d'interaction.

-5-2 Le tenseur

On définit l'action dans la géométrie non commutative par la forme [12] :

$$= \int \quad \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \qquad (\ .40)$$

Où

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \quad \phi \star \quad \phi - \frac{}{2}\phi \star \phi \quad + \quad {}_{\star}(\phi) \qquad (\ .41)$$

On trouve :

$$| \qquad = \qquad \frac{1}{2} \quad (\quad \phi \star \quad \phi \quad + \quad \phi \star \quad \phi) - \quad (\quad \mathcal{L}) \qquad (\ .42)$$

En utilisant le principe de moindre action, dans le cas classique $= 0$ on trouve :

$$= \frac{1}{2} \quad \phi \star \quad \phi + \quad \phi \star \quad \phi \; - \quad \mathcal{L} \qquad (\,.43)$$

Comme, il faut rappeler que la divergence de n'est pas zéro, par exemple pour le cas particulaire de $_{\star}(\phi) = \frac{}{!}\phi^{\star}$ on peut écrire :

$$= \frac{1}{2} \; \phi \star \quad \phi + \quad \phi \star \qquad \phi + \qquad \phi \star \quad \phi + \star \quad \phi \star \phi$$

$$- \frac{1}{2} \qquad \phi \star \quad \phi + \quad \phi \star \qquad \phi \; + \frac{}{2} [\quad \phi \star \phi - \phi \star \quad \phi]$$

$$+ \frac{}{4!} [\quad \phi \star \phi^{\star} \; + \phi \star \quad \phi \star \phi^{\star} \; + \phi^{\star} \; \star \quad \phi \star \phi + \phi^{\star} \; \star \quad \phi]$$

En utilisant les équations de mouvement pour le cas ϕ eq. $(\,.39)$:

$$\phi + \quad \phi + \frac{}{3!} \phi^{\star} \; = 0$$

Donc en peut écrire :

$$= - \frac{}{2.3!} [\phi^{\star} \; \star \quad \phi + \quad \phi \star \phi^{\star} \;]$$

$$+ \frac{}{4!} [\quad \phi \star \phi^{\star} \; + \phi \star \quad \phi \star \phi^{\star} \; + \phi^{\star} \; \star \quad \phi \star \phi + \phi^{\star} \; \star \quad \phi]$$

$$= \frac{}{4!} [- \quad \phi \star \phi^{\star} \; + \phi \star \quad \phi \star \phi^{\star} \; + \phi^{\star} \; \star \quad \phi \star \phi - \phi^{\star} \; \star \quad \phi]$$

$$= \frac{}{4!} [[\phi, \quad \phi] \quad \star \phi^{\star} \; - \phi^{\star} \; \star [\phi, \quad \phi] \quad]$$

$$= \frac{}{4!} [[\phi, \quad \phi] \quad , \phi^{\star} \;] \qquad (\,.44)$$

Avec : $\int (\quad \star \quad)(\quad) \qquad = \int (\quad \star \quad)(\quad)$

$$[\;,\;] \qquad = 0 \qquad (\,.45)$$

La conservation d'énergie imputation pour le cas $= 0$, ne va pas détruire.

-6 Quantification canonique de théorie des champs non commutative

-6 -1 La théorie scalaire réelle :

On considère la théorie scalaire avec l'interaction artificielle $_\star(\phi)$. L'étiole veut dire que le l'interaction contient des termes avec les produits star. Encore que cette forme définit n'pas important pour la altercation générale. Prenant S comme l'action de notre théorie :

$$[\phi] = \frac{1}{2} \phi \star \phi - \frac{}{2} \phi \star \phi - {}_\star(\phi) \qquad (.46)$$

Depuis la parité libre de l'action est identique à celui dans le cas commutatif, c'est commode choisir l'espace de Fock et en particulier l'état à vide être exactement le même comme dans le correspondre ainsi théorie commutative, les champs peuvent être étendus quant au même (comparé au cas commutatif) création et opérateurs de l'annihilation, où $- - \; = 0$, $^{-} \; = 1$ car est un matrice antisymétrique $= -$ on a :

$$\phi( ) = \int \frac{}{( )} \; ( ) \; + \; ( ) \qquad (.47)$$

Où $= \sqrt{\quad + \quad}$

Pour appliquer la méthode de la quantification canonique nous devrions en premier le moment conjugué $\Pi( )$ puis impose les conditions de la quantification

$$[\phi(,), \Pi(,)] = \; (-) \qquad (.48)$$

Nous avons que le moment de ϕ est donné par :

$$\Pi( ) = \frac{\mathcal{L}}{(\ \phi)} = \phi( ) \qquad (.49)$$

Dans la théorie non commutative, il y a une ambiguïté, qu'on applique des conditions de quantification dans la position de l'espace. Généralement nus savons que pour traiter l'espace non commutatif il nous faut travailler dans un espace ordinaire et remplacer les produits enter les fonctions par les produits étoile. Mais, les conditions de la quantification

$(\ .48)$ Sont définies pour ϕ et Π qui on a comptées dans des points différentes, tandis le produits étoile a un sens seulement enter les fonctions comptées dans le même point.

$$\phi(\ ), \Pi(\ ) \ = \ \ (\ - \ ) \qquad (\ .50)$$

Cela est possible parce que dans l'espace de moment la différence entre le commutateur ordinaire et de Moyal est seulement un facteur de phase

-6-2 Interaction

Pour simplicité nous nous restreindra à la théorie scalaire avec l'interaction ϕ , les discussions peuvent être appliquées de la même façon pour d'autres théories.

Alors, soit $\phi(\ )$ la transformée de Fourier de $\phi(\ )$

$$\phi(\ ) = \frac{}{(2 \ )} \ \phi(\ ) \qquad (\ .51)$$

Donc

$$= \frac{}{4!} \ \phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

$$= \frac{}{4!} \ (\phi \star \phi).(\phi \star \phi) \qquad (\ .52)$$

$$= \frac{}{4!} \ \frac{}{(2 \ )} \cdots \frac{}{(2 \ )} \ ^{-(\ \ ) \ -(\ \ ) \ (\ \ )}$$

$$\times \phi(\ )\phi(\ )\phi(\ )\phi(\ )$$

$$= \frac{}{4!} \ \frac{}{(2 \ )} \cdots \frac{}{(2 \ )} \ ^{-(\ \ ) \ -(\ \ )}\phi(\ )\phi(\ )\phi(\ )\phi(\ )$$

$$= \frac{}{4!} \frac{}{(2\ )} \cdots \frac{}{(2\ )} \quad ^{-(\quad)} \quad ^{-(\quad)} \phi(\quad)\phi(\quad)\phi(\quad)\phi(\quad)$$

$$\times (2\ ) \quad (\quad + \quad + \quad + \quad)$$

$$= \frac{}{3.4!} \frac{}{(2\ )} \cdots \frac{}{(2\ )} \phi(\quad)\phi(\quad)\phi(\quad)\phi(\quad) \times (2\ ) \quad (\quad + \quad + \quad + \quad)$$

$$\times \cos\frac{}{2}\cos\frac{}{2} + \cos\frac{}{2}\cos\frac{}{2} + \cos\frac{}{2}\cos\frac{}{2} \qquad (\ .53)$$

Où les termes qui contiennent les sinus, dû à l'antisymétrie de , s'annulent,

$$\sin \quad + \sin \quad = \sin \quad + \sin -$$

$$= \sin \quad - \sin$$

$$= 0 \qquad (\ .54)$$

Par conséquent la seule différence qui parait dans la théorie non commutative, comparée au commutatif, est que pour chaque vertex dans la théorie ϕ non commutatif nous devrions multiplier par un facteur supplémentaire.

$$(\quad,\quad,\quad,\quad) = \frac{1}{3} \cos\frac{}{2}\cos\frac{}{2} + \cos\frac{}{2}\cos\frac{}{2} + \cos\frac{}{2}\cos\frac{}{2}$$

On peut aussi écrire le facteur précédemment comme :

$$(\quad,\quad,\quad,\quad) = \quad -\frac{}{2} \qquad (\ .55)$$

Ce vertex contient un vecteur de phase dépondant des moments. Il est donc non local.

-7 Le mélange UV/IR

Ce mélange d'UV/IR est l'un des aspects les plus attachants de la théorie des champs non commutative de quantum**.** En cette sous-section nous illustrerons certains des points ci-dessus avec un calcul explicite, qui indiquera également une autre propriété exotique des théories des champs non commutatives. L'exemple que nous considérerons est renormalisation de masse dans la théorie φ4 non commutative (.37) dans quatre dimensions. Pour ceci, nous évaluerons la fonction irréductible de deux points d'un-particule [10, 11].

$$\Gamma(\ ) = < \phi(\ ), \phi(-\ ) > = \qquad (\ ) \qquad\qquad (\ .56)$$

Au plus bas la fonction à deux points est donnée par $\Gamma^{(\ )} = \quad + \quad$.La contribution d’une boucle se divise en deux parties, diagramme planaire et non planaire.

$$\Gamma^{(\ )} \quad (\ ) = \frac{}{3(2\ \ )} \quad \frac{}{\quad + \quad} \qquad\qquad (\ .57)$$

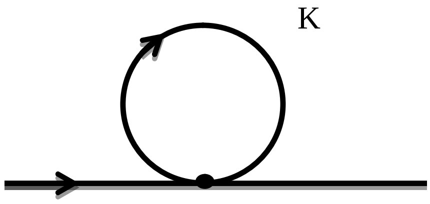


Figure 1 : Diagramme planaire de deux points de contribution de boucle

$$\Gamma^{(\ )} \quad (\ ) = \frac{}{6(2\ \ )} \quad \frac{}{\quad + \quad} \qquad\qquad (\ .58)$$

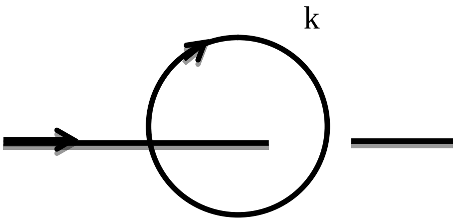


Figure 2 : Diagramme non planaire de deux points de contribution de boucle

Où P est un moment externe.

La contribution $(\ .57)$ des diagrammes planaire de la théorie ϕ non commutative est proportionnelle à celle de la théorie commutative, qui est quadratiquement divergents dans le secteur ultraviolet. Cette divergence pourrait être éliminé par l'introduction d'un cut-off.

Mais dans le cas des diagrammes non planaire $(\ .58)$ la situation est différente à cause du facteur de phase qui oscille rapidement ce qui assure la convergence. On utilise le paramètre de Schwinger :

$$\frac{1}{\ +\ } = \qquad (\ .59)$$

Alors on obtient :

$$\Gamma^{(\ )}\ (\ ) = \frac{}{3(2\ )}$$

$$= \frac{}{48}\ \frac{}{}$$

$$\Gamma^{(\ )}\ (\ ) = \frac{}{6(2\ )}\ +$$

$$= \frac{}{96}\ \frac{}{}\ \frac{}{}$$

Après l'introduction d'un cut-off donne

$$\Gamma^{(\ )} = \frac{}{48}\ \frac{}{}\ \frac{}{}$$

$$= \frac{}{48}\ -\ \ln \frac{}{} + \cdots \qquad (\ .60)$$

$$\Gamma^{(\ )} = \frac{}{96}\ \frac{}{}\ \frac{\frac{}{}}{}$$

$$= \frac{\quad}{96} \qquad - \quad \ln \frac{\quad}{\quad} \quad + \cdots \qquad (\ .61)$$

Avec

$$= \frac{1}{1/ \quad + \quad} \ , \qquad = - \qquad (\ .62)$$

On remarque que :

$\Gamma^{(\ )}$ est fini puisque $1/ \quad = 0 \Leftrightarrow (\quad \longrightarrow \infty)$

$\Gamma^{(\ )}$ est infini pour $1/ \quad + \quad = 0$ c.-à-d.

$1/ \quad = 0 \Leftrightarrow \quad \longrightarrow \infty$ (divergence UV)

Et $\quad \longrightarrow 0 \qquad \longrightarrow 0$ (divergence IR)

Dans le chapitre 2 (2.10) modèle (l'action) $[\phi]$ présente un nouveau type des divergences qui le rendent non renormalisable, il est démontré par la non localité du produit star. Dans l'article [11], Filk a calculé les règles relatives au modèle président. Il a montré que les amplitudes planaires donnent lieu des à oscillations qui couplent les pattes internes et externes.

-8 Quelques problèmes de la théorie des champs non commutative

Le problème de la divergence n'est pas accomplir élimination en l'étude de la théorie scalaire non commutative mais aggravation le problème de divergence UV, et devient un mélange de UV/IR. Donc pour résoudre le problème il faut changer la matrice antisymétrique par une matrice symétrique utilisant la méthode de la renormalisation de la théorie.

Le mélange UV/IR est un problème fondamental des théories des non commutatives, toute théorie des champs réels va souffrir de ces divergences malgré de nombreux efforts afin de surmonter ce problème on n’a pas trouvé de solution satisfaisante pendant quelque années, entre temps la théorie des champs non commutatives ont été communauté des cordes [13].

La non localité de la théorie pout affecté le théorème CPT, l’unitarité et la causalité. Ceux-ci nous imposent contraintes sur le tenseur libre . Il a été montré que le non commutativité d’espace-temps $\neq 0$ conduit à une théorie non unitaire, dans les travaux de [14,15]

-9 Renormalisation :

La technique de renormalisation en théorie des champs ont prouvé leur efficacité depuis plus d’un demi-siècle. Elles ont donné lieu à une formulation mathématique qui en retour s’applique à d’autres domaines comme la théorie des nombres [16].

La renormalisation est un cas particulier d’un procédé général. D’extraction de partie finie. Pour résoudre les problèmes précédents on utilisant les développements ci-dessous sont essentiellement basés sur les articles Moffat [17, 18, 19, 20].

Clairement, dans la théorie des champs non anticommutative W.Moffat remplace la matrice antisymétrique par une matrice symétrique , le produit star($\star$) par « diamant » nous appelons $\star$-produit comme suit :

$$(\ \star\ )(\ ) = {}^{-}\ (\ )\ (\ ) \qquad (.63)$$

Remplacé par

$$(\ \star\ )(\ ) = {}^{-}\ \overline{\qquad}\ (\ )\ (\ ) \qquad (.64)$$

En considère dans les coordonnées du super espace données par:

$$= \ + \ , \quad = 0 \ldots 3 \qquad (.65)$$

Et sont les coordonnées dans l’espace-temps vérifiant la relation :

$$[\quad ,\quad] = \quad - \quad = \qquad (\ .66)$$

Et les coordonnées dans l'algèbre associative de Grassman vérifiant

$$\{\quad ,\quad \} = \quad + \quad = 0 \qquad (\ .67)$$

Dans le super espace non commutative le produit de deux champs ϕ et ϕ est donné par le $\star$-produit

$$(\phi \star \phi)(\ ) = \quad -\frac{1}{2} \quad \phi(\ )\phi(\ )$$

$$= [\phi(\ )\phi(\ ) - \frac{1}{2} \quad \phi(\ ) \quad \phi(\ ) + \cdots] \qquad (\ .68)$$

Où est un tenseur non symétrique

$$= - \quad + \qquad (\ .69)$$

Avec

$$= \quad , \quad = - \qquad (\ .70)$$

$$(\quad) = \qquad (\ .71)$$

On note + la conjugaison hermitienne. Définissions Maintenant les notations suivantes

$$\begin{aligned} [\phi(\ ),\phi(\ )]_\star &\equiv \phi(\ )\star\phi(\ ) - \phi(\ )\star\phi(\ ) \\ \{\phi(\ ),\phi(\ )\}_\star &\equiv \phi(\ )\star\phi(\ ) - \phi(\ )\star\phi(\ ) \end{aligned} \qquad (\ .72)$$

L'opérateur dans le super espace et utilisons les relations$(\ .73), (\ .74), (\ .75)$.

On trouve

$$[\quad .\quad]_\star = \quad \star \quad - \quad \star$$

$$= (\quad + \quad) \star (\quad + \quad) - (\quad + \quad) \star (\quad + \quad)$$

$$= \quad + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$= \quad + 2 \quad + 0(\quad) \qquad (.73)$$

De même

$$\{ \quad . \quad \}_\star = \quad \star \quad + \quad \star$$

$$= \{ \quad , \quad \} + 2(\quad + \quad) - \quad + 0(\quad)$$

$$= 2 \quad + 2(\quad + \quad) - \quad + 0(\quad) \qquad (.74)$$

On choisit la limite $\rightarrow 0$ et $\rightarrow 0$, alors nous obtenons à partir de $(.73)$ et $(.74)$

$$[\quad , \quad]_\star \rightarrow [\quad . \quad] = \qquad (.75)$$

$$\{ \quad . \quad \}_\star \rightarrow \{ \quad . \quad \} = 2 \quad + \qquad (.76)$$

On observe les mêmes résultats du cas non commutatif dans les expressions $(.75)$ et $(.76)$.à la limite $\rightarrow 0$, ce qui implique $\rightarrow 0$. Nous obtenons de $(.73)$ et de $(.74)$ du commutateur et l'anti commutateur suivants :

$$[\quad , \quad]_\star \rightarrow [\quad , \quad] = 2 \qquad (.77)$$

$$\{ \quad . \quad \}_\star \rightarrow \quad , \quad = - \qquad (.78)$$

Partie

Théorie des champs avec le produit $(\star)$

Notre formulation d'espace non commutative est une description unifiée de non commutatif et algèbres non-anticommutative d'opérateur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous pourrions formuler une théorie des champs générale utilise le $\star$-produit des champs, qui contiendraient des facteurs de phase exponentiels complexes des contributions s'est associée au θ antisymétrique de τ de tenseur. Cependant, dans le suivant, nous nous limiterons au cas plus simple quand de $\theta = 0$ [17, 20 , 21, 22] .

-1 Propriétés du $\star$ produit

) Le $\star$ produit entre deux exponentiels

$$e \quad \star e \quad = e^{-} \qquad e \quad e$$

$$= (1 + \quad -\tau \quad \partial \ \partial \quad + \ -\tau \quad \partial \ \partial \quad + \cdots) \ e \quad e$$

$$= (1+(- - \quad) + \cdots)e \quad e$$

$$= \quad (\quad) \quad -(\quad) \qquad (\ .1)$$

Avec la notation $k\tau q \equiv$

La distribution de Dirac il est très import relation de l'équation précédent, il intègre sur .

$$\exp(\quad) \star \quad (\quad) = \quad \frac{1}{2} \qquad [\ (\quad + \quad) \ ]$$

$$= \quad - \quad (2\ ) \quad ^{(\ )}(\quad + \quad) \qquad (\quad .2)$$

On écrivant l'expression de la distribution de Dirac sur un espace non commutatif avec le $\star$-produit

$$\delta\ (\ ) = \ ^{-} \quad ^{(\ )}(\ ) \qquad (\quad .3\ )$$

Donc, ce résultat conduire dans la généraliser certaines relation de la théorie des champs ordinaires sur la quantification canonique, comme la relation de commutation entre les opérateurs de création et d'annihilation.

) **La représentation dans l'espace des moments**

En utilisant (. 1) nous obtenons

$$(\ ) \star \quad (\ ) = \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )} \ (\ )\ (\ ) \exp\ -\frac{}{2} \qquad [\ (\quad + \quad)\ ] \qquad (\quad .4)$$

) **Associativité**

$$[(\quad \star \quad) \star h](\ ) = [\quad \star (\quad \star h)](\ ) \qquad (\quad .5)$$

En effet, dans l'espace des moments

$$((\star fg) \star h)(x) = \int \frac{}{(\ )}\frac{}{(\ )} \ (k)g(q)e^{\ -} \quad e^{(\quad)} \star h(x)$$

$$= \int \frac{}{(\ )}\frac{}{(\ )}\frac{}{(\ )} \ (k)g(q)h(p)\, e^{\ -} \quad e^{(\quad)} \ e^{(\quad)} \qquad (\quad .6)$$

$$f \star (g \star h)\ (x) = \int \frac{}{(\ )}\frac{}{(\ )} \ (x) \star \ g(q)h(p) \ e^{\ -} \quad e^{(\quad)}$$

$$= \frac{d\ k}{(2\pi)}\frac{d\ q}{(2\pi)}\frac{d\ p}{(2\pi)}(k)g(q)h(p)\, e^{\ -} \quad e^{(\quad)} \ e^{(\quad)} \qquad (\quad .7)$$

) **Le produit ⋆ sous le signe intégral**

$$(\ \star\ )(\ )\ =\ (\ \star\ )(\ ) \qquad (\ .8)$$

qui se démontre de la manière suivante

$$(\ \star\ )(\ ) = \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )}\ (\ )\ (\ )\exp\ -\frac{}{2}\ [\ (\ +\ )\ ] \qquad (\ .9)$$

$$(\ \star\ )(\ ) = \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )}\ (\ )\ (\ )\exp\ -\frac{}{2}\ [\ (\ +\ )\ ] \qquad (\ .10)$$

On peut démontrer que :

$$(\ \star\ )(\ ) = \quad (\ .\ )(\ )$$

$$(\ \star\ )(\ ) = \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )}\ (\ )\ (\ )\ ^{-(\ )\ (\ )}$$

En utilisant la formule de Dirac :

$$\int \quad (\ (\ + \cdots +\ )\ ) = (2\ )\quad (\ + \cdots +\ ) \qquad (\ .11)$$

Donc :

$$(\ \star\ )(\ ) = (2\ )\ \frac{}{(2\ )}\frac{}{(2\ )}\ (\ )\ (\ )\ ^{-(\ )}\delta(\ +\ ) \qquad (\ .12)$$

Et

$$(\ ) = \quad (\ )\ (\ -\ ) \qquad (\ .13)$$

Donc :

$$(\ \star\ )(\ ) = \frac{}{(2\ )}\ (\ )\ (-\ ) = \quad (\ .\ )(\ ) \qquad (\ .14)$$

De l'équation (3.) Nous pouvons déduire la propriété cyclique

$$(\quad \star \quad \star \ldots \star \quad)(\ ) = \quad (\quad \star \quad \star \quad \star \ldots \star \quad) \qquad (\ .15)$$

) **La conjugaison complexe**

$$(\ \star \ )^{\star} = \ {}^{\star} \star \ {}^{\star} \qquad (\ .16)$$

) **Le produit star est non commutatif**

$$\star \quad \neq \quad \star \qquad (\ .17)$$

Par contre (.16) : $\star \quad = \quad \star \ |_{\rightarrow}$

) **La règle Leibniz**

Il est facile vérifier que la dérivée de produit star satisfait à la règle de Leibniz

$$(\ \star \ )(\ ) = \quad \star \ + \ \star \qquad (\ .18)$$

-2 Formulation Lagrangienne

II-2-1 Densité Lagrangienne et action

Pour étudier le formalisme Lagrangienne de la théorie des champs classique sur l'espace Minkowski à la théorie des champs sur l'espace non commutative. On remplaçant dans la densité Lagrangienne le produit star (étiole) par le produit ($\star$).

La densité Lagrangienne réelle pour la théorie des champs scalaire non commutative est comme suit :

$$\mathcal{L}^{\star} \ \phi, \quad \phi \ = \frac{1}{2} \quad \phi(\ ) \star \quad \phi(\ ) - \frac{}{2} \phi \star \phi(\ ) - \ {}_{\star} \qquad (\ .19)$$

Avec :

$${}_{\star}(\phi) = \sum \ \frac{}{!} \ \phi \star \phi \ldots \phi \star \phi \qquad , \quad > 2 \qquad (\ .20)$$

Nous définition l'action S sur un endroit artificielle R du temps-espace par :

$$[\phi] = \int \mathcal{L}^{\star} \ \phi, \quad \phi \qquad (\ .21)$$

$$= \int \qquad - \quad \phi(\ ) \star \quad \phi(\ ) - — \phi(\ ) \star \phi(\ ) - \ _{\star}(\phi) \qquad (\ .22)$$

-2-2 l'équation de mouvement

L'étude de l'équation de mouvement dans le cas non anticommutative comme le cas commutative, en utilisée le principe de moindre action $[\phi]$:

$$\frac{}{\phi} = 0 \qquad (\ .23)$$

En définie la dérivée fonctionnelle pour l'équation précédent comme :

$$\Delta \ = \ (\phi + \delta\phi) - \ (\phi) = \qquad \frac{}{\phi(\ )} \star \ \phi(\ ) \qquad (\ .24)$$

- **Le champ libre :**

La théorie de champ libre dans des théories des champs non commutatives est identique que les théories des champs commutatives, ainsi seulement les interactions contiennent la nouvelle information [16]. Et l'action libre on peut écrire comme suit :

$$\Delta \ = \ (\phi + \delta\phi) - \ (\phi) = \qquad \frac{}{\phi(\ )} \star \ \phi(\ ) \qquad (\ .25)$$

D'autre part, la densité lagrangienne libre est :

$$\mathcal{L} \ = \frac{1}{2} \quad \phi(\ ) \star \quad \phi(\ ) - \frac{1}{2} \quad \phi(\ ) \star \phi(\ ) \qquad (\ .26)$$

On calcule Δ

$$\Delta \ = \ (\phi + \delta\phi) - \ (\phi)$$

$$= -\int \quad (\phi + \delta\phi) \star \quad (\phi + \delta\phi) - \quad (\phi + \delta\phi) \star (\phi + \delta\phi)$$

$$- \quad \phi(\ )\phi(\ ) - \quad \phi(\ ) \star \phi(\ )$$

$$= -\int \quad \phi \star \quad \phi + \quad \phi \star \quad \delta\phi + \quad \delta\phi \star \quad \phi + \quad \delta\phi \star \quad \delta\phi - \quad \phi \star \phi -$$

$$- \quad 2\phi\star\delta\phi - \quad 2\delta\phi\star\phi - \quad 2\delta\phi\star\delta\phi - \quad \phi \star \quad \phi \quad 2\phi \star\phi \;]\; 4$$

En supposons que la variation du champ est petit l'expression précédente se réduit à

$$\Delta \quad = -\int \quad \phi \star \quad \delta\phi + \quad \delta\phi \star \quad \phi - \quad \phi \star \delta\phi - \quad \delta\phi \star \phi] \qquad (\quad .27)$$

On observé que

$$\delta\phi \star \quad \phi = \quad (\delta\phi \star \quad \phi) - \delta\phi \star \quad \phi$$

$$(\quad .28)$$

$$\delta\phi \star \quad \delta\phi = \quad \delta\phi \star \delta\phi \; - \quad \phi \star \delta\phi$$

En trouvé

$$\Delta \quad = \frac{1}{2} \quad (\delta\phi \star \quad \phi) - \delta\phi \star \Box\phi + \quad \phi \star \delta\phi \; - \Box\phi \star \delta\phi - \quad \phi \star \delta\phi -$$

$$- \quad \delta\phi \star \phi] \qquad (\quad .29)$$

En utilisant le théorème de Gauss :

$$= \quad . \qquad (\quad .30)$$

On obtient

$$\Delta \quad = -\frac{1}{2} \quad (\delta\phi \star \Box\phi + \quad \phi \star \delta\phi \; + \phi \star \delta\phi + \quad \phi \star \delta\phi + \quad \delta\phi \star \phi)$$

$$+ -\int \quad (\delta\phi \star \quad \phi + \quad \phi \star \delta\phi)$$

Comme la variation de ϕ sur les bords de R s'annule, c.-à-d.

$$\delta\phi = 0, \quad \text{sur} \qquad (\quad .31)$$

Finalement on trouve l'action libre :

$$\Delta \quad = - \quad (\Box \quad + \quad) \, \phi \star \delta\phi \qquad (\quad .32)$$

Et on définit la transformation de Fourier modifié

$$\phi(x) = \frac{}{(2 \quad)} \; - \qquad (\;) \qquad (\quad .33)$$

- **Le champ en interaction**

La densité lagrangienne est un la somme de deux termes, terme déjà présent dans le paragraphe précédent et terme d'interaction. Etudions la densité lagrangienne d'interaction en théorie ϕ c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}^{\star} = -\frac{}{4!}\phi\star\phi\star\phi\star\phi \qquad (\ .34)$$

Et

$$[\phi] = -\frac{}{!}\int \phi\star\phi\star\phi\star\phi \qquad (\ .35)$$

On calcule d'abord la variation de comme

$$[\phi+\delta\phi] - [\phi]$$

$$= -\frac{}{4!} [(\phi+\delta\phi)\star(\phi+\delta\phi)\star(\phi+\delta\phi)\star(\phi+\delta\phi) - (\phi\star\phi\star\phi\star\phi)]$$

$$= -\frac{}{4!}\{ (\phi+\delta\phi)\star\phi\star\phi\star\phi\star\phi\ (\ ) - (\phi\star(\phi+\delta\phi)\star\phi\star\phi)(\ )$$

$$+(\phi\star\phi\star(\phi+\delta\phi)\star\phi)(\ ) + \phi\star\phi\star\phi\star(\phi+\delta\phi)\ (\ )]$$

$$- (\phi\star\phi\star\phi\star\phi)(\ )\}$$

$$= -\frac{}{4!}\{ {}^{4} (\delta\phi\star\phi\star\phi\star\phi)(\ ) + {}^{4} (\phi\star\delta\phi\star\phi\star\phi)(\ )$$

$$+ {}^{4} (\phi\star\phi\star\delta\phi\star\phi)(\ ) + {}^{4} (\phi\star\phi\star\phi\star\delta\phi)(\ )\}$$

Donc on obtient

$$[\phi+\delta\phi] - [\phi] = -\frac{}{3!} (\phi\star\phi\star\phi)(\ )\delta\phi)(\ ) \qquad (\ .36)$$

Ou

$$\frac{[\phi]}{\delta\phi(\ )}\star\delta\phi(\ ) = -\frac{}{3!} (\phi\star\phi\star\phi)(\ )\delta\phi)(\ ) \qquad (\ .37)$$

Il donnée l'équation de mouvement s'obtient en minimisant l'action :

$$\frac{[\ ]}{(\ )} = \frac{[\ ]}{(\ )} + \frac{[\ ]}{(\ )} = 0 \qquad (\ .38)$$

Finalement l'équation de mouvement pour des champs en interaction

$$\square + \quad - \ {}_{\star}(\ )\ \phi = 0 \qquad (\ .39)$$

Où

$${}_{\star}(\ ) = -\frac{}{3!}(\phi \star \phi \star \phi)(\ ) \qquad (\ .40)$$

- **Le champ conjugué**

Par analogie avec la théorie des champs commutative, nous définissons le champ canoniquement conjugué ( ) dans la théorie des champs non commutative avec $\star$-produit par

$$(\ ) = \frac{\mathcal{L}^{\star}}{\dot{\phi}(\ )} \qquad (\ .41)$$

La densité lagrangienne libre est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\ \phi(\ )\star\ \phi(\ ) - \frac{1}{2}\ \phi(\ )\star\phi(\ )$$

$$= \frac{1}{2}\ - \ \phi(\ )\ \phi(\ ) - \frac{}{2}\ - \ \phi(\ )\phi(\ )$$

$$= -\ \phi\ \phi - -\ \phi\ \phi - -\ \phi\phi + -\ \phi\ \phi + (\ ) \qquad (\ .42)$$

Où , $= 0, \ldots, 3$, ce qui implique

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\ \phi\ \phi + \ \phi\ \phi - \frac{1}{2}\ \phi\ \phi - \frac{1}{2}\ \phi\ \phi - \frac{1}{2}\ \phi\ \phi$$

$$-\frac{1}{2}\ \phi\ \phi - \frac{1}{2}\ \phi\ \phi - \frac{1}{2}\ \phi\ \phi - \frac{1}{2}\ \phi\ \phi -$$

$$-\frac{1}{2}\ \phi\ \phi - \ \phi\phi + \frac{1}{2}\ \phi\ \phi + \frac{1}{2}\ \phi\ \phi$$

$$+\frac{1}{2}\ \phi\ \phi + \frac{1}{2}\ \phi\ \phi] \qquad (\ .43)$$

Donc le moment conjugué est

$$(\ ) = \frac{\mathcal{L}^{\star}}{\dot{\emptyset}(\ )} = \dot{\emptyset} + \frac{1}{2} \qquad \dot{\emptyset} + \frac{1}{2} \qquad \phi \qquad (\ .44)$$

Finalement, le résultat de compressassions la théorie des champs commutative avec la théorie des champs non commutative avec $\star$-produit est une théorie de champ non locale et est par certains aspects très différente. La non localité peut avoir des conséquences sur le théorème CPT aussi bien que sur l'unitariré et la causalité. Les amplitudes ont un comportement régulier à l'infini quand $\neq 0$ et $= 0$ et c'est dans ce cas seulement que nous pouvons définir l'operateur du moment conjugué pour éviter les problèmes d'unitarité et de causalité, il a été prouvé par Moffat [18].

Donc le champ $(\ )$ canoniquement conjugué de ϕ est le même que dans le cas commutatif, c'est-à-dire

$$(\ ) = \dot{\phi}(\ ) \qquad (\ .45)$$

-3 Les relations des commutations dans le cas symétrique( )

Dans la théorie scalaire nous conduit à ignorer manipulation des variables fermioniques, puisqu'elles ne génèrent que des facteurs globaux sans conséquences sur les résultats finaux.

En la théorie des champs, les variables dont dépend l'Hamiltonien sont les champs Π et ϕ. Plaçonnons à un certain temps et introduisons les opérateurs de champ $\phi(\ , \ )$ et $\Pi(\ , \ )$ auxquels on impose les relations de commutation au temps :

$$[\phi(\ , \ ) \quad \Pi(\ , \ )] = {}^{(\ )}(\ - \ ) \qquad (\ .46)$$

$$[\phi(\ , \ ), \phi(\ , \ )] = [\Pi(\ , \ ), \Pi(\ , \ )] = 0 \qquad (\ .47)$$

Il y a déjà le champ conjugué de ϕ est donné par

$$\Pi(\ ) = \frac{\mathcal{L}}{(\ \phi)} = \dot{\phi}(\ ) \qquad (\ .48)$$

Pour aller plus loin dans la quantification canonique, nous résolvons d'abord l'équation de mouvement pour le champ libre. En effet on a

$$(\square \;+\; \;)\phi(\;) = 0 \qquad (\;.49)$$

ϕ est le champ de Klein-Gordon sur un espace-temps classique.

La solution de $(\;.49)$ comme dans la théorie des champs commutative est donnée par transformation de Fourier

$$\phi(\;) = \int \frac{}{(\;)} \;^{-}\; (\;(\;) \;\; + \;\; (\;) \;\;) \qquad (\;.50)$$

Où $\; = \sqrt{\;\;+\;\;}$

Il est facile permuter la relation de commutation pour le champ libre. Car la dépendance de temps permet à on d'exprimer le champ comme combinaison linéaire des opérateurs de création et d'annihilation.

On pose les relations de commutations entre les opérateurs de création et d'annihilation s'écrivent comme suit :

$$[\;(\;),\;\;(\;)] = (2\;)\;(2\;\;)\;^{-}\;\;^{(\;)}(\;\;-\;\;) \qquad (\;.51)$$

$$[\;(\;),\;(\;)] = [\;\;(\;)\,,\;\;(\;)] = 0 \qquad (\;.52)$$

Les fonctions $\;(\;)$ définis par :

$$(\;) = \frac{\;^{-}\;}{(2\;)\;2\;} \qquad (\;.53)$$

qui sont l'équivalent des ondes planes de quantité de mouvement et l'énergie de la théorie conventionnelle. Ces fonctions vérifient sur l'espace quantifié

$$\;^{*}(\;)\overset{\leftrightarrow}{\;}\;(\;)_{\star} = \;^{(\;)}(\;\;-\;\;) \qquad (\;.54)$$

Où le terme $\;^{*}(\;)\overset{\leftrightarrow}{\;}\;(\;)_{\star}$ est donné par

$$(\;)\overset{\leftrightarrow}{\;}\;(\;)_{\star} \equiv (\;)\star\;\;(\;) - \;\;(\;)\star\;(\;) \qquad (\;.55)$$

Et

$$\int \quad {}^{*}(\ ) \overleftrightarrow{} \quad (\ )_{\star} = \int \frac{}{(\ )\ (\ )} \quad {}^{*} \star - - - {}^{*} \star$$

$$= \frac{- \quad -}{2(2\ )} (- \quad) \quad \star \quad - \quad \star$$

$$= \frac{- \quad - \quad -}{2(2\ )} \quad (\quad + \quad)$$

$$= {}^{(\ )}(\ - \ ) \qquad (\ .56)$$

De la même on monter que :

$$(\ ) \overleftrightarrow{} \quad (\ )_{\star} = \quad {}^{*}(\ ) \overleftrightarrow{} \ {}^{*}(\ )_{\star} = 0 \qquad (\ .57)$$

La décrémentation de les $(\ )$ il trouve dans la propriété $(\ .54)$ forment un ensemble orthogonal comme dans le cas commutatif. Maintenant, une redéfinition du champ sur l'espace non commutatif et on obtenir les mêmes résultats que la théorie commutative. Les relations $(\ .56)$ et $(\ .57)$ permettent d'inverser l'expansion de $\phi(\ )$ et d'obtenir une expression pour $(\ )$ et son conjugué.

En portée, des relations $(\ .50)$ et $(\ .53)$ on a :

$$ {}^{*}(\ ) \overleftrightarrow{} \phi(\ )_{\star} = \frac{}{(2\ )\ 2} \left({}^{*}(\ ) \overleftrightarrow{} \quad (\ )_{\star} \ (\ ) \right.$$

$$\left. + \ {}^{*}(\ ) \overleftrightarrow{} \ {}^{*}(\ )_{\star} \quad (\ ) \right)$$

$$= \frac{}{(2\ )\ 2} \ {}^{(\ )}(\ - \ )\ (\ )$$

$$= \frac{1}{(2\ )\ 2} \ (\ ) \qquad (\ .58)$$

Et donne

$$(\ ) = \frac{}{(2\ )\ 2}\ \phi(\ )\ \overset{\leftrightarrow}{}\ (\ )_{\star} \qquad (\ .59)$$

On monter de même

$$(\ ) = \int \frac{}{(2\ )\ 2}\ \phi(\ )\ \overset{\leftrightarrow}{}\ (\ )_{\star} \qquad (\ .60)$$

Passe maintenant au calcul du commutateur $[\phi(\ ), \Pi(\ )]_{\Delta}$ à temps égaux

Le champ conjugué est donné par la relation $(\ .48)$.

$$(\ ) = \dot{\phi}(\ )$$

$$= \frac{}{(2\ )\ 2}\ ^{-}\ (\ ) + (\ ) \qquad (\ .61)$$

Alors

$$[\phi(\ ), \Pi(\ )]_{\Delta} = \iint \frac{-\ \ -}{(\ )}\ (\ ) + (\ )\ ,\ (\ )\ -$$

$$- + +]\Delta$$

$$= \frac{-\ \ -}{(2\ )\ 2}\ -\ \Delta\ (2\ )\ 2\ ^{-}\ (\ -\ ) -$$

$$-\ \Delta\ (2\ )\ 2\ ^{-}\ (\ -\ )$$

$$= \frac{}{2(2\ )}\ ^{-}\ ^{(\ )} + \ ^{(\ )}$$

$$= \frac{1}{(2\ )}\ \frac{}{\det}\ ^{-}\ \frac{(\ )}{} \qquad (\ .62)$$

Pour le commutateur $[\phi(\ ), \phi(\ )]_{\Delta}$ à temps égaux, nous avons :

$$[\phi(\ ),\phi(\ )]_{\Delta} = \iint \frac{-\quad -}{(\ )} \quad (\ ) \quad + \quad (\ ) \quad , \ (\ ) \quad +$$

$$+ \quad + \quad + \quad]\Delta$$

$$= \frac{-\quad -}{4(2\ )}(\quad \Delta \quad - \quad \Delta \quad)[\ (\ ),\quad (\ )]$$

$$= \frac{}{2(2\ )} - \quad ^{(\ )} \sin \ (\ - \ )$$

$$= 0. \qquad (\ .63)$$

Donc, la quantification canonique du champ scalaire réel sur un espace non commutatif avec le ⋆-produit par les relations de commutations à temps égaux suivantes :

$$[\phi(\ ),\phi(\ )]_{\Delta} = 0 \qquad (\ .64)$$

$$[\phi(\ ),\Pi(\ )]_{\Delta} = \frac{1}{(2\ )}\frac{}{\det} - \ \frac{(\ )}{} \qquad (\ .65)$$

$$[\phi(\ ),\phi(\ )]_{\Delta} = \iint \frac{-\quad -}{(\ )} \quad (\ ) \quad + \quad (\ ) \quad , \ (\ ) \quad +$$

$$+ \quad + \quad + \quad]\Delta$$

$$= \frac{-\quad -}{4(2\ )}(\quad \Delta \quad - \quad \Delta \quad)[\ (\ ),\quad (\ )]$$

$$= \frac{}{(2\ )} - \quad ^{(\ )} - \quad ^{(\ )}$$

$$= \Delta \ (\ - \ ) \qquad (\ .66)$$

En finie, la quantification canonique de théorie des champs scalaires a été basée sur les relations de commutation entre les champs dans l'espace non commutatif avec le ⋆-produit on deux points différents, mais à temps égaux.

-4 Vertex propre

Pour résoudre le problème de la théorie proposée en calculs les vertex propres à deux points et quatre points à l'ordre d'une boucle. Nous allons accomplir les calculs ignorant les contraintes sur le tenseur . Donc la théorie précèdent est unitaire [19, 20, 21, 22].

-4-1 Calcul de

Le vertex propre à deux points à l'ordre d'une boucle est donné par :

$$\Gamma\,(\ )=\frac{-}{-}+\frac{}{2!}\quad\frac{}{(2\ )}\frac{-}{-}\qquad(\ .67)$$

Avec (en passant à l'espace Euclidien)

$$\int\frac{}{(\ )}\frac{-}{}=\int\qquad\int\frac{}{(\ )}\ ^{-}$$

$$=\ ^{-}\quad\int_{-}\quad\int\frac{}{(\ )}$$

$$=\frac{-}{16}\ 2\ ^{-}\quad-\quad 1,\frac{}{2}$$

$$=\frac{1}{16}\ 2-\quad ^{-}\quad 1,\frac{}{2}\qquad(\ .68)$$

Ce qui est un résultat, tant que demeure défirent de zéro. Ainsi, on a obtenu du résultat fini.

-4-2 Calcul de

Le vertex propre à quatre points à l'ordre d'une boucle est donnée par :

$$\Gamma\,(\ )=-\quad-\frac{}{2}\qquad\frac{}{(2\ )}\frac{-}{-}\ _{(\ )}\ \frac{-(\ \ )\ (\ \ )}{(\ -\ )\ -}\ +\qquad(\ .69)$$

En utilisant la méthode de Schwinger [12], on obtient

$$(\ ) = \int \quad \int \quad \int \frac{}{(\ )} \quad - \quad -(\ ) \ (\ ) \quad (\ )$$

$$= \quad - \quad - \quad \frac{}{(2 \ )} \quad (\ )$$

$$= \frac{-}{16} \quad - \quad - \quad (\ ) \quad \frac{- \quad \overline{\quad + \quad}}{(\ + \ )} \qquad (\ .70)$$

Soit maintenant le changement de variables suivant :

$$= (1 - \ ) \quad , \qquad = \qquad (\ .71)$$

Alors

$$(\ ) = \frac{-}{} \int \quad \int_{(\quad (\ ) \ )} \frac{}{}$$

$$= -\frac{-}{16} \quad (- \ (\quad + \ (1 - \ ) \ )) \qquad (\ .72)$$

Si on considère le développement de la fonction exponentielle au premier ordre en

$$(- \ (\quad + \ (1 - \ ) \ )) = \ + \ln \ - \ (\quad + \ (1 - \ ) \ ) \qquad (\ .73)$$

On obtient

$$(\ ) = -\frac{-}{16} (\ + \ln \ - \ (\quad + \ (1 - \ ) \ )) \qquad (\ .74)$$

On remarque encore que cette expression est finie.

Finalement, le problème de la divergence elle est (fini) résoudre.

CONCLUSION

But de cette mémoire elle est étude on détaillée de la théorie des champs non commutative et la théorie de la renormalisation sur l'espace non commutative en appliquer sur la théorie ϕ^4 comme exemple.

Dans le premier chapitre, nous avons donne une introduction générale sur le développement de la physique : physique classique, quantique, la relativité restartant et générale et la théorie des champs.

Dans la deuxième chapitre, nous avons définie sur l'espace ordinaire la théorie des champs, souffre d'un problème de la divergence qu'on trouve dans les diagrammes Feynman. Pour éliminer ce problème.

Dans le troisième, en utilisé un nouvelle espace non commutatif dans lequel, et remplacé le produit ordinaire par le produit étoile. Mais, nous avons trouvé que le problème de la divergence UV dans la théorie définie sur l'espace commutatif, ne trouve pas solution mais il s'est augmenté et il a devenu un mélange entre la divergence ultraviolet et infrarouge (UV/IR). Nous essayant de régler ce problème, on utilise la proposition de W. Moffat, on remplace le $\star$-produit de deux champs par le $\tilde{\star}$-produit et la matrice antisymétrique $\theta^{\mu\nu}$ par la matrice symétrique $\tau^{\mu\nu}$, et donne autre formulation de Lagrangien de la théorie des champs classique sur espace-temps à la théorie des champs sur un espace non commutative avec le $\tilde{\star}$-produit, en conclus qu'on peut observer de nos résultats est que les équations d'Euler-Lagrange et les équations de mouvements sont similaires à la différence que la transformée de Fourier du champs $\Phi(x)$ est modifiée par facteur de phase. Et observe que le champ conjugué $\Pi(x)$ identique à la théorie des champs ordinaire.

En développé les relations de commutations dans le cas symétrique avec le $\tilde{\star}$-produit est trouvé la solution générale des équations de mouvement, donnée en fonction des opérateurs de création et d'annihilation, est modifiée par un facteur de phase. Il est évident qu'il résulte une modification du propagateur de Feynman elle est régularisé dans la théorie non commutative. Nous avons finitude des diagrammes par un calcul des vertex propres à deux points et quatre points. Donc, la théorie est renormalisable.

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE 01

[1] Source : http:// histoire. Inf. online.fr/ univac. Html

[2] Michel le Bellac, Physique quantique, 2^E Edition, EDP Sciences /CNRS EDITION (2007).

[3] Khelili Farid, Aspects Mathématiques et physiques de la Géométrie non commutative (2007).

[4] P. Marage, eléments d'histoire du développement de la physique nucléaire et des particules élémentaires en Belgique.

[5] Alaine Idir, résolution de l'équation de Dirac à (1+1)-dimensions pour quelques modèles de potentiels PT-symétriques et de masse dépendantes de l'espace, Mémoire Magister, Université Mentouri-Constantine.

[6] Alexandre Guay, Philosophie de la physique (2005).

[7] Nawel Rezaki, L'Atome d'Hydrogène dans le formalisme de la Géométrie Non Commutative, mémoire de Magister, Université de Montouri Constantine.

[8] Gilles Cohen-Tamoudji, Le fondamental, l'effectif et l'émergent.

[9] Bertrand Delamotte, Introduction à la théorie quantique des champs, novembre 2005.

[10] Matthieu Lefrançois, Théorie des champs topologiques et mécanique quantique en espace non-commutatif, Diplôme de Doctorat, LYCEN – T 2005-42.

CHAPITRE 02

[1] Ferahtia Souad, Théorie non commutative des champs et renormalisation, Mémoire de master, université de m'sila (2012).

[2] Alessandra Frabetti, Groupes des séries et renormalisation des champs quantiques, Université de Lyon 1.

[3] Alexandre Depire, la théorie des cordes (2004), http://depire.free.fr

[4] Jean-Pierre Derendinger, Théorie quantique des champs, Presses polytechniques et universitaires romandes (2001).

[5] Christiane Schomblond, Théorie quantique des champs QED, QCD, Université libre de Bruxelles.

[6] Vladimir A. Smirnov, Feynman integrale calculus (2006)

CHAPITRE 03

[1] Thierry Masson, Géométrie non commutative et applications à la théorie des champs, Vienna, Preprint ESI 296 (1996).

[2] S.Snyder, Quantized Space time. Phys.Rev. 71, 38 (1947).

[3] A. Connes, M.R.Douglas, and A. Schwarz, non commutative Geometry and Matrix Theory : Compactification on Tori, JHEP 02, 003 (1998), **hep-th/9711162**.

[4] M.R.Douglas, N.A.Nekrasov, Non commutative field theory, **hep-th/010604**.

[5] Fabien Vignes-Tourneret, Renormalisation des théories de champs non commutatives, mémiore de Doctorat de l'université Paris11(2006) **0612014** .

[6] X.Calmet, B.Jurco,P.Schupp, J.Wess and M.Wohlgenannt, the standard model on non-commutative space-time, Eur. Phys.J.C21,23363 (2002), **arXiv:hep-ph/0111115**.

[7] J .Madore, S. Schraml, P. Scupp and J. Wess, Gauge theory on non commutative space, Eur. Phys.J.C. 16,161(2000) [**hep-th/0001203**].

[8] JoAnne L. Hewett, Frank J. Petriello, and Thomas G. Rizzo, Signals for Non-commutative Interaction at linear colliders, FERMILAB-PUB-00/286-T, **0010354**.

[9] Nawel Rezaki, L'Atome d'Hydrogène dans le formalisme de la Géométrie Non Commutative, mémoire de Magister, Université de Montouri Constantine.

[10] Frank Hofheinz, Field theory on a non commutative plane: a Non Perturbative Study, **arXiv: hep-th/0403117**.

[11] T. Filk, Divergences in a field theory on quantum space. Phys. Lett. B376, 53 (1996).

[12] Andrei Micn, M.Sheikh-Jabbari, non commutative ϕ^4theory at Two Loops, JHEP 0101 (2001) 025, **hep-th/000857**.

[13] Razvan-Gheorghe Gurau, La renormalisation dans la théorie Non commutative des champs. Mémoire de Doctorat, Université de Paris 11(2007) (0802.0940v1).

[14] N,Seiberg, L, Susskind, N. Toumbas, Space/time non-commutativity and causality, High Energy. Phys. 06 (2000) 044, **hep-th/0005015**.

[15] J. Gomis, T. Mehen, Space-time non commutative field theories and unitaruty, Nucl. Phys. B 591. (2000), 265 **hep-th/0005129**.

[16] Dominique manchon, Quelques aspects combinatoires de la renormalisation.
Smf-gazette-119-5-15.

[17] J.W. Moffat, Non commutative and Non-Anti commutative Quantum Field theory, phys. Let. B506, (2001) 193-199, **hep-th/0011035.**

[18] J. Moffat, Unitarity and Asymptotic Behaior of Amplitudes in NonAnticommutative Quantum Field Theory, **hep-th/0011229**.

[19] Nouicer, KH; Debabi, M, Canonical quantization of non-ant commutative scalar field theory, Physics Lettres A, 361 (2007) 305.

[20] Debabi Mourad, Théorie des champs scalaires non-anticommutative, mémoire de magister, université de jijel (2004).

[21] Boudraa Houssem, Quantification de la théorie des champs non-commutative avec le $\tilde{\star}$-produit, mémoire de master, université de m'sila (2013).

[22] Ferahtia Souad, Théorie non commutative des champs et renormalisation, mémoire de master, université de m'sila (2012).

Abstract:

In This memory we talked about the study theory fields scalar in the space non commutative with $\star$-product and the method the renormalization, we found that the difference between her and the fields theory in a commutative space in this apparition of phase factor, also the problem of the ultraviolet divergence UV and the mixing UV/IR between the two divergences ultraviolet and infrared whose be existing before does not exist.

Key Word:

Field theory, non commutative field theory, product ($\star$) and ($\star$), divergence UV, mixing UV/IR.

……………………………………………………………………………………………….....

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons procédé à l'étude de la théorie des champs scalaire dans l'espace non commutative on utilise le $\star$-produit et les méthodes de renormalisation, Nous avons trouvé que la différence entre notre cas de la théorie des champs sur l'espace commutatif c'est parution du facteur de phase, et le problème de la divergence ultraviolet UV et le mélange UV/IR entre les divergences ultraviolet et infrarouge n'est pas.

Mots-clés :

Théorie de champ, théorie des champs non commutative, produit star, divergence UV, mélange UV/IR.

……………………………………………………………………………………………….....

الملخص :

في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة نظرية الحقول السلمية في الفضاء غير تبديلي باستخدام الجداء ($\star$) حيث وجدنا بان الفرق بينها وبين نظرية الحقول في الفضاء التبديلي هو ظهور معامل الطور كذلك مشكل التباعد الفوق بنفسجي و المزيج بين التباعدين الفوق بنفسجي وتحت الاحمر الذي كان مطروحا لم يعد موجودا .

الكلمات المفتاحية

نظرية الحقول السلمية، نظرية الحقول الغير تبديلية ،الجداء ($\star$) ، التباعد UV ،المزيج (UV/IR).

تم بحمد الله