



جامعة المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي
مكتبة الكلية
MASIMATI/30
رقم الجزء

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Option : Mathématiques appliquées et discrètes

Spécialité : Mathématiques

Par

LAKEHEL Bilal

Sujet

Produit en couronne des semi-groupes
et applications

Soutenu le : 17 / 06 / 2014 devant le jury composé de :

President : AMROUNE Abdelaziz Prof. Univ M'sila

Rapporteur : MIHOUBI Douadi Prof. Univ M'sila

Examineur : LADJELAT Lahcene M.A.A Univ M'sila

Promotion : 2013/2014

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	1
NOTATIONS	2
1 Préliminaires algébriques	3
1.1 Introduction	3
1.2 Produit cartésien	3
1.3 Relation n-aire	4
1.3.1 Relation binaire	4
1.4 Semi-groupe	5
1.5 Monoïde	5
1.6 Groupe	5
1.7 Groupe quotient	6
1.7.1 Sous-groupe distingué	6
1.8 Morphismes de groupes	7
1.9 Isomorphismes et automorphismes de groupes	7
1.10 Groupes symétriques	9
1.11 Action d'un groupe sur un ensemble	10
1.12 Relation de congruence sur les semi-groupes	10

2	Produit direct, Produit semi-direct et produit en couronne	11
2.1	Produit direct	11
2.1.1	Produit direct de semi-groupes	11
2.1.2	Produit direct de groupes	12
2.2	Produit semi-direct	13
2.2.1	Produit semi-direct de semi-groupes	13
2.2.2	Produit semi-direct de groupes	14
2.3	Produit en couronne	16
2.3.1	Produit en couronne de semi-groupes	16
2.3.2	Produit en couronne de groupes	17
3	Décomposition en cascade d'un automate fini	18
3.1	Langage	18
3.2	Définition des automates finis déterministes (AFD)	19
3.3	Prolongement de la fonction de transition	20
3.4	Langage reconnu par un AFD	20
3.5	Définition des automates finis non-déterministes (AFN)	21
3.6	Produit de deux automates	21
3.7	Produit en cascade d'automates	23
3.8	Homomorphisme d'automates	25
3.9	Relation admissible	26
3.10	Recouvrement d'un semi automate	26
3.11	Semi automate quotient	28
3.12	Décomposition en cascade d'un automate fini	29
3.13	Problèmes reliés a la décomposition	32
	CONCLUSION GENERALE	33
	BIBLIOGRAPHIE	33

INTRODUCTION GENERALE

On étudie dans ce mémoire le produit en couronne qui est un cas particulier de produit semi direct, le produit en couronne de semi-groupes et le produit en couronne des groupes des permutations S_n par un groupe G .

Nous utilisons par la suite le produit en cascade d'automates, et son équivalent algébrique, le produit en couronne de semi-groupes, pour la décomposition en cascade d'automate en composantes très simples réalisant le même travail que l'automate initiale de la forme:

$$M \leq N_1 w_1 N_2 w_2 \dots w_{n-1} N_n$$

tels que N_1, N_2, \dots, N_n sont des automates simples, où w_i est le produit en cascade .

Ce mémoire se compose de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, on donne les définitions de bases qui concernent les structures telles que (Semi-groupes, Monoïdes, Groupes...) et quelques des exemples pour comprendre ces notions.

Dans le deuxième chapitre on présente les notions sur le produit direct, Produit semi-direct et produit en couronne.

Dans le troisième chapitre, On donne un aperçu générale sur l'automate fini déterministe (AFD), puis on étudie le produit directe et le produit en cascade d'automates, et dans la fin de ce chapitre, On étudie la décomposition en cascade d'automates en composantes très simples.

CONCLUSION GENERALE

On peut utiliser le produit en cascade, et son équivalent algébrique, le produit en couronne des semi-groupes, pour la décomposition de système complexe en des composantes très simples réalisant le même travail que système initiale.

Comme exemple pour la décomposition de système complexe, dans le troisième chapitre on a étudié la décomposition en cascade d'automates en composantes très simples, nous utilisons pour cette décomposition le produit en cascade et le recouvrement sous la forme:

$$M \leq N_1 w_1 N_2 w_2 \dots w_{n-1} N_n$$

tels que N_1, N_2, \dots, N_n sont des automates simples, où w_i est le produit en cascade.

Bibliographie

- [1] **D. Schaub**, *Eléments de la Théorie des Groupes*, Université d'Angers 1997/1998.
- [2] **W.M.L.HOLCOMBE**, *Algebraic Automata Theory*, Cambridge University Press(1982).
- [3] **A.Ginzburg**, *Algebraic Theory of Automata*, Academic Press, (1968).
- [4] **O. Maler**, *On the Krohn-Rhodes Cascaded Decomposition Theorem*, Cnrs-Verimag, 2 Av. de Vignate 38610 Gières, France.
- [5] **S. Poirier**, *Fonctions Symétriques, Ensemble de Descentes et Classes de Conjugaison dans le Produits en Couronne*, Université de Québec à Montréal, Mai 1995.
- [6] **S. HAMEL**, *Algorithmes Vectoriels et Bioinformatique*, Thèse Présentée comme Exigencep Artielle du Doctorat en Mathématiques, Université du Québec Amontréal, septembre 2002.

ملخص

ندرس في هذه المذكرة حالة خاصة من الجداء الشبه مباشر وتطبيقاته على تفكيك شبه الزمرة إلى مكونات بسيطة تقوم بنفس عمل شبه الزمرة المفككة.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions un cas particulier de produit semi direct et ses applications pour décomposition semi-groupe en composantes très simples réalisant le même travail que semi-groupe initial.

Abstract

In this project, we study a specific case of semi direct product and its applications for semi group components performing the same work as the original semi group.