UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Licence**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Fondamentale

Par

1-HADJ ALI MED ELAMINE 2-HOUICHI RIDHA

3-FELGOUMA DJAMEL EDINE

Sujet

Transformation de Fourier des fonctions et distributions

Dirigé par :

Mr. HERAIZ RABEH

Promotion: 2012/2013

Table des matiéres

Introduction

CHAPITRE 01 : Distributions

1. L'espace des fonctions de tests **1**
1.1. Définition 1
1.2. Définition 1
1.3. Quelques propriétés 2
1.4. Définition 2
1.5. Théorème 3
2. L'espace $\mathcal{D}'$ des distributions **3**
2.1. Définition 3
2.2. Propriétés 3
2.3. Théorème 4
2.4. Proposition 4
2.5. Définition 4
2.6. Définition 4
3. Quelques distributions régulières usuelles **4**
3.1. Valeur principale de Cauchy 4
3.2. Distribution de Heaviside 5
4. Exemples sur les distributions singuliéres **5**
5. Support d'une distribution **5**
5.1. Définition 5
5.2. Définition 6
5.3. Définition 6
6. Les opérations sur les distribution **6**
6.1. Translation d'une distribution 6
6.2. Transposition d'une distribution 7
6.3. Changement d'échelle 7
6.4. Multiplication des distribution 8
7. Dérivation d'une distribution **9**
7.1. Proposition 9
7.2. Définition 9
8. Dérivation d'une fonction discontinue **10**
9. Primitivité d'une distribution **11**
10. Produit tensoriel **11**
10.1. Produit tensoriel de deux fonctions 11
10.1.1. Produit tensoriel de deux fonctions 11
10.2. Produit tensoriel de deux distributions 12
10.2.1. Définition 12
10.2.2. proposition 13
11. Poduit de convolution **13**
11.1. Convolution de deux fonctions 13
11.1.1. Définition 13
11.1.2. Théorème 13

11.2. Le produit de convolution de deux distributions 13
11.2.1. Définition 14
11.3. Propriétés de produit de convolution de deux distribution 14
11.3.1. Commutativité et associativité 14
11.3.2. Le support de Poduit de convolution 15
11.4. Convolution et Dirac δ 15
11.4.1. Convolution par δ 15
11.4.2. Convolution par δ' 16
11.5. La dérivée de produit de convolution 16
12. Convergence faible dans l'espace $\mathcal{D}$ 16
12.1. Convergence d'une distribution 16
12.1.1. Définition 17
12.2. Convergence vers δ 17

CHAPITRE 02 : Transformée de Fourier des fonctions

1. Transformée de Fourier 18
1.1. Définition 18
1.2. Théorème 19
1.3. Lemme de Riemann 19
1.4. Théorème 19
2. Propriétés de transformée de Fourier 21
3. Dérivation 21
3.1. Trasformée de la dérivée 21
3.2. La dérivée de la transformée par rapport à ξ 22
4. Formule de parsevale-plancherale 22
4.1. Théorème 22
5. Transformée sinus et cosinus de Fourier 22
5.1. Définition 22
6. Transformée de Fourier finies 23
6.1. Propositions 23
6.2. Equation aux dérivées partielles. Solution a l'aide des transformée de Fourier 23

CHAPITRE 03 : Transformée de Fourier des distributions tempérées

1. L'espace $\mathcal{S}$ 25
1.1. Définition 25
1.2. Théorème 26
1.3. Théorème 26
1.4. Proposition 26
1.5. Définition 26
2. L'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées et transformée de Fourier 26
2.1. Définition 26
2.2. Théorème 26
2.3. Proposition 27

2.4. Théorème et définition 27
2.5. Définition 27
2.6. Théorème 27
2.7. Proposition 27
3. Propriétés de transformée de Fourier des distributions tempérées 27
4. Exemples sur la transformée de Fourier des distributions tempérées 28

Introduction

Le but de ce mémoire et l'étude de transformation de Fourier des fonctions et distributions, cette étude se présente un bel exemple d'outil mathématique crée pour les besoins des physiciens.

Bien qu'il y ait eu de nombreux précurseurs (Heaviside en 1893, Wiener en

1925, Dirac en 1926-27, Hadamard en 1932, Bochner en 1932, Leray en 1934, Sobolev en 1936, Carleman en 1944), la première étude systématique et complète de la théorie des distributions est due à Laurent Schwartz en 1945, et lui a valu en 1950 la médaille Fields (le « prix Nobel » des mathématiciens). La notion de distribution est une généralisation de la notion de fonction qui s'est révélée être une nécessité pour le progrès de plusieurs théories physiques. La théorie assure un certain nombre d'opérations indispensables auxquelles les fonctions ne se prêtent pas toujours. L'exemple le plus connu de distribution est l'impulsion de Dirac, indispensable aussi bien pour la formulation de la mécanique quantique qu'en analyse harmonique et en traitement du signal.

La théorie des distributions a apporté les outils mathématiques dont les ingénieurs avaient désespérément besoin. Elle s'est révélée en particulier être un moyen exceptionnel pour comprendre le produit de convolution et la transformée de Fourier, instruments puissants de calcul en traitement du signal. Il est d'ailleurs symptomatique qu'un des premiers articles de Schwartz sur les distributions ait été publié dans les Annales des Télécommunications

La richesse supplémentaire qu'apporte la théorie des distributions sur celle des fonctions ou des mesures provient fondamentalement de ce que les distributions sont destinées à être dérivées. La difficulté initiale (une fonction, même continue, n'est pas toujours dérivable) est complètement éliminée : considérée comme distribution, toute fonction continue est dérivable ; la dérivabilité s'étend même à des fonctions discontinues, qui sont dérivables autant de fois que l'on veut.

BIBLIOGRAPHIE

L.Schwartz. Théorie des distributions (2^e éd.), Hermann, 1966.

François RODDIER. Distributions et transformation de Fourier, Louis jean, 1978.

François BAYEN et Christian MARGARIA. Distributions analyse de Fourier transformation de la place, Ellipses, 1988.

N.Boccara. Distributions, Ellipses, 1997.

Olivier RIOUL. Théorie des distributions transformée de Fourier convolution, Telecom paris Tech, 2008.

Philippe GOLDNER. Transformation de Fourier espace de Hilbert équation aux dérivées partielle, Ellipses, 2009.

Résumé

Dans ce modeste travail on ait étudié l'espace des fonctions de test $\mathcal{D}$ et on ait vu autres espaces comme l'espace $\mathcal{D}'$ des forme linaires continues (les distributions) et leurs propriétés et les opérations sur eux, un sous espace de $\mathcal{D}'$ est l'espace des distributions à support compact ($\mathcal{E}'$). Le plus intéressant sous espace de $\mathcal{D}'$ est $\mathcal{S}'$ les espace des distributions tempérés ou sur le quel en peut appliquer la transformation de Fourier (on ait vu d'abord la transformation de Fourier des fonctions sur l'espace l^1).

L'espace $\mathcal{S}'$' joue un rôle très important dans les mathématiques appliques et physiques.

Abstract

In this modest work we have studied the space of test functions $\mathcal{D}$ and we've seen other spaces like space $\mathcal{D}'$ of continuous linear form (distributions) and their properties and operations at them, a subspace of $\mathcal{D}'$ is the space of distributions with compact support($\mathcal{E}'$) . The most interesting subspace of $\mathcal{D}$ is $\mathcal{S}'$ the space of tempered distributions on which we can apply the Fourier transform (we have seen Fourier transform of functions on the space l^1).
The space $\mathcal{S}'$ plays a very important role in applied mathematics and Physical Sciences.