



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## Mémoire de Master :

Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Option : Analyse Mathématiques et numérique

*Thème :*

Application de certaines méthodes numériques aux équations  
différentielles

**Présenté par:**

Melle. Bakhi Marwa

Soutenu publiquement le: 15/06/2025

**Devant le jury composé de:**

<b>GASMI Abdelkader</b>	Prof	Université de M'sila	<b>Président :</b>
<b>BLIZAK Tahar</b>	M.C.B	Université de M'sila	<b>Encadreur :</b>
<b>MIHOUBI Hamza</b>	M.C.B	Université de M'sila	<b>Examineur :</b>

**Année universitaire 2024/2025**



# REMERCIEMENT

TOUT D'ABORD, JE REMERCIE DIEU TOUT-PUISSANT DE M'AVOIR DONNE LA FORCE ET LA PATIENCE DE MENER A BIEN CETTE RECHERCHE : JE REMERCIE DIEU TOUT-PUISSANT DE M'AVOIR DONNE LA FORCE .ET LA PATIENCE DEMENER A BIEN CETTE RECHERCHE

J'ADRESSE MES SINCERES REMERCIEMENTS ET MA GRATITUDE A TOUS CEUX QUI M'ONT SOUTENU AU .COURS DE MA CARRIERE UNIVERSITAIRE

JE REMERCIE TOUT PARTICULIEREMENT MON PROFESSEUR "**TAHER BLIZAK**" POUR SA MOTIVATION, SON SOUTIEN ET SES PRECIEUX CONSEILS, SANS LESQUELS CE TRAVAIL N'AURAIT PAS VU LE JOUR. JE REMERCIE EGALEMENT LES MEMBRES DU COMITE DE DISCUSSION

J'ADRESSE MES SINCERES REMERCIEMENTS ET MA GRATITUDE AU PRESIDENT DE JURY

PROFESSEUR "**GASMI ABDELKADER**"

PROFESSEUR "**MIHOUBI HAMZA**"

ET JE N'OUBLIE PAS DE REMERCIER TOUS MES COLLEGUES DE L'UNIVERSITE DE MSILA

ENFIN,J'EXPRIME MA GRATITUDE INFINIE AUX PROFESSEURS QUI M'ONT SOUTENU.

PROFESSEUR "**SAAD ABDELKABIR**"

PROFESSEUR "**GAGUI BACHIR**"

PROFESSEUR "**NADIR MOHAMED NASSEH**"

Merci à tous

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>i</b>
<b>1 Équation différentielle résultats fondamentaux :</b>	<b>1</b>
1.1 Équation Différentielle Ordinaire Du Premier Ordre . . . . .	1
1.1.1 Problème de Cauchy . . . . .	2
1.1.2 Solutions maximales . . . . .	2
1.1.3 solutions globales . . . . .	2
1.1.4 Régularité des solutions . . . . .	3
1.2 Existence et Unicité de La solution Du Problème Du Cauchy . . . . .	4
1.2.1 Équivalence du problème de cauchy avec la résolution d'un équation intégrale . . . . .	5
1.3 Quelques Types simple d' EDO et Méthode Résolution . . . . .	5
1.3.1 Équation à variable séparées . . . . .	5
1.3.2 Équation de Bernouli . . . . .	6
1.3.3 Équation de Riccati . . . . .	7
<b>2 Comparaison des méthode d'Euler et de Runge-Kutta</b>	<b>9</b>
2.1 Formulation du problème . . . . .	9
2.2 Méthode d'Eluer . . . . .	10
2.2.1 • stabilité(le schéma explicite est implicite) : . . . . .	11
2.3 Méthode de Runge-kutta . . . . .	13
2.3.1 Analyse des Erreues . . . . .	15
2.3.2 Exemple numériques . . . . .	16
<b>3 Méthode des différences finies pour les problème aux limites liniéaire du troisème ordre</b>	<b>19</b>
3.1 Formulation du problème : . . . . .	19
3.2 Conclusion . . . . .	27
<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>

# Introduction

Les équations différentielles sont des équations liant entre elles une fonction inconnue  $y$  d'une variable  $x$  et ses dérivées successives  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ , jusqu'à un certain ordre  $n \geq 1$ . On les présente le plus souvent sous la forme

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

c'est-à-dire que la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $y$  au point  $x$  est fonction de  $x$  et des valeurs des dérivées de  $y$  d'ordre strictement inférieur à  $n$  en ce même point  $x$ . On se pose la question de savoir ; pour  $f$  donnée, si de telles équations ont des solutions, c'est-à-dire s'il existe de telles fonctions  $y$ , puis de décrire aussi précisément que possible ces solutions éventuelles.

Dans ce travail on considère les méthodes numériques pour les équations différentielles, le mémoire est composé d'une introduction, et trois chapitres, une conclusion et une bibliographie.

Notre travail est structuré en trois chapitres :

**Le Premier chapitre :** Le but de ce chapitre est de donner la définition d'équation différentielle ordinaire du premier ordre, et le principe de résolution de l'équation différentielle ordinaire simple. est de démontrer le théorème d'existence et d'unicité des solutions pour l'équation différentielle et d'étudier quelques types de solutions (solution maximale, solution globale) sa bonne compréhension est indispensable en vue de la lecture des chapitres ultérieurs.

**Le Deuxième chapitre :** est composé de comparer les solutions numériques obtenues par la méthode d'Euler et la méthode de Runge-kutta d'ordre 4 pour la résolution du problème à valeur initiale associé aux équations différentielles. À travers cette étude, nous cherchons à évaluer la précision, la stabilité et la performance de chaque méthode.

**Le Troisième chapitre :** Dans ce chapitre, nous visons à approximer la solution d'un problème de valeurs limites linéaires du troisième ordre avec une convergence du deuxième ordre, en utilisant la méthode des différences finies pour obtenir une meilleure approximation de la solution du problème donné.

**Finalement :** on donne quelques références liées à notre travail.

# Chapitre 1

## Équation différentielle résultats fondamentaux :

Le but de ce chapitre est donner la définition d'équation différentielles ordinaire du premier ordre, et le principe de résolution de équation différentielle ordinaire simple. est démontrer la théorme d'existence et d'unicité des solutions pour l'équation différentielle et étudier quelque type de solution (solution maximale solution globale ) sa bonne compréhension est indispensable en vue de la lecture des chapitres ultérieurs .

### 1.1 Équation Différentielle Ordinaire Du Premier Ordre

**Definition 1.1** soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$

une application continue .On considère l'équation différentielle

$$\dot{y} = f(x, y), \quad (x, y) \in U, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

**Definition 1.2** une solution de 1.1 sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est un fonction dérivable  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

$$(\forall x \in I) \quad (x, y(x)) \in U$$

$$(\forall x \in I) \quad \dot{y}(x) = f(x, y(x))$$

**Remark 1.3** L'inconnue de l'équation 1.1 est donc en fait une fonction. le qualificatif ordinaire pour l'équation différentielle (1.1) signifie que la fonction inconnue  $y$  dépend d'une seule variable  $x$  (lorsque 'il ya plusieurs variables  $x_i$  et plusieurs dérivées  $\partial y / \partial x_i$ , on parle l'équation aux dérivées partielles)

### 1.1.1 Problème de Cauchy

**Definition 1.4** le problème de cauchy consiste à chercher la solution d'une équation différentielle ordinaire scalaire ou vectorielle satisfaisant des conditions initiales

$$(PC) \begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \text{ où } x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^m \quad (1.2)$$

### 1.1.2 Solutions maximales

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

**Definition 1.5** soient  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$  des solutions de 1.1. on dit que  $\tilde{y}$  est un prolongement de  $y$  si  $I \subset \tilde{I}$  et  $\tilde{y}|_I = y$

**Definition 1.6** on dit qu'une solution  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est maximale si  $y$  n'admet pas de prolongement  $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $I \subsetneq \tilde{I}$

**Theorem 1.7** toute solution  $y$  se prolonge en une solution maximale  $\tilde{y}$  (pas nécessairement unique).

### 1.1.3 solutions globales

soit l'ouvert  $U$ , de la forme  $U = J \times U'$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $U'$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$

**Definition 1.8** une solution globale est une solution définie sur l'intervalle  $J$  tout entier.

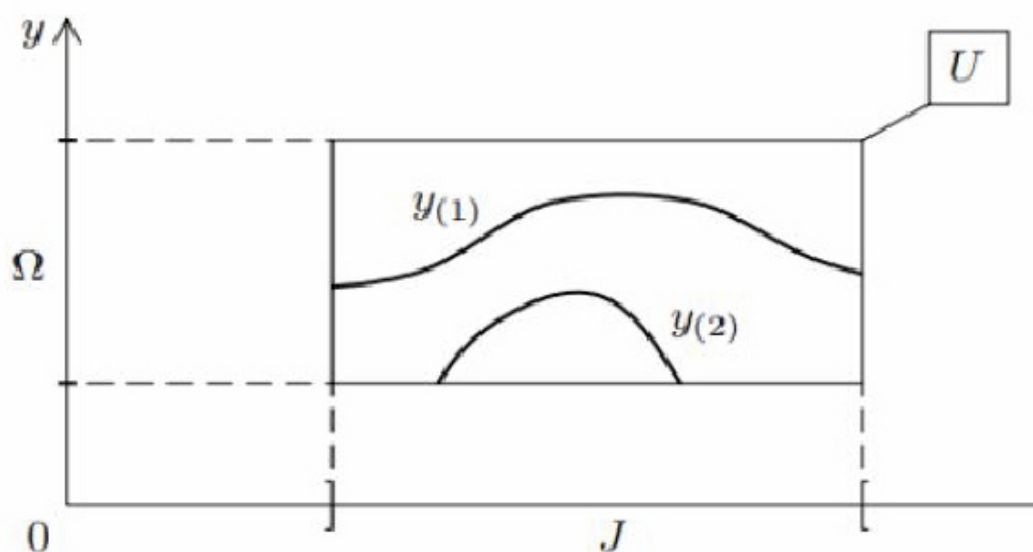


Schéma exprime que  $y_1$  est globale et  $y_2$  maximale

**Remark 1.9** *tout solution globale est maximale, mais la réciproque est fautive. sur le schéma ci-dessus par exemple,  $y_{(1)}$  est globale tandis que  $y_{(2)}$  est maximale mais non globale. Donnons un exemple explicite de cette situation.*

**Exemple 1.10** *soit*

$$y' = y^2 \text{ sur } U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{1.3}$$

cherchons les solutions de cette equation  $x \rightarrow y(x)$  de 1.3 • on a d'un part la solution  $y(x) = 0$

- si  $y$  ne s'annule pas, (1.3) s'écrit  $\frac{y'}{y^2} = 1$  d'où par intégration

$$-\frac{1}{y(x)} = x + C \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x + C}$$

cette formule définit deux solutions, définies respectivement sur  $[-\infty, -C[$  et sur  $] -C, -\infty[$  ces solutions sont maximales mais non globales Dans cet exemple  $y(x) = 0$  est la seule solution globale. de 1.3

### 1.1.4 Régularité des solutions

**Definition 1.11** *Une fonction est dite de classe  $C^k$ , si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre  $k$ .*

**Theorem 1.12** Si  $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^K$ , alors toute solution de  $y' = f(x, y)$  est de classe  $C^{k+1}$

## 1.2 Existence et Unicité de La solution Du Problème Du Cauchy

**Definition 1.13** soit  $f$  une application définie sur  $I \times U \subset \mathbb{R}$ . s'il existe une constante  $L > 0$  indépendante de  $x, y_1$  et  $y_2$  telle que :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in U, \forall x \in I$$

alors  $f$  est dite Lipschitzienne de rapport  $L$  sur  $I \times U$  ou simplement  $L$ -Lipschitzienne.

**Theorem 1.14** (cauchy Lipschitz) Si  $f$  est une application définie sur  $I \times U$  continue et  $L$ -Lipschitzienne par rapport à  $y$ , alors Le problème de cauchy admet une solution unique.

**Proposition 1.15** Une condition suffisante pour que les hypothèses du théorème soient vérifiées est que  $f$  soit dérivable par rapport à  $y$  et que sa dérivée soit bornée

**Example 1.16** montrer que

$$f(x, y) = x |y| \tag{1.4}$$

satisfait une condition de Lipschitz sur l'intervalle  $D \{x, y\} = 1 \leq x \leq 2$  et  $3 \leq y \leq 4$

**Solution 1.17**

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \|x\| |y_1 - y_2| \quad \text{comme } x \geq 1 \text{ et } x \leq 2$$

$$\|x\| |y_1 - y_2| \leq 2 \|y_1 - y_2\|$$

Ainsi  $f$  satisfait une condition de Lipschitz sur  $D$  par rapport à la variable  $y$  avec une constante de Lipschitz  $L = 2$

### 1.2.1 Équivalence du problème de cauchy avec la résolution d'un équation intégrale

**Lemma 1.18** Une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une solution du problème de cauchy de données initiales  $(x_0, y_0)$  si et seulement si

$$(i) \quad y \text{ est continue et } (\forall x \in I) (x, y(x)) \in U \quad (ii) \quad (\forall x \in I)$$

on a

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

en effet si  $y$  vérifie (i) et (ii) alors  $y$  est différentiable et on a  $y(x_0) = y_0, \dot{y}(t) = f(x, y(x))$ .

Inversement, si ces deux relations sont satisfaites, (ii) s'en déduit par intégration.

## 1.3 Quelques Types simple d' EDO et Méthode Ré-solution

### 1.3.1 Équation à variable séparées

Il s'agit d'équation du type

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.5}$$

Dans ce cas

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

il faut ensuite intégrer chaque membre

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

**Exemple 1.19** soit

$$(1 + x^2)y' = 1 + y^2 \quad \text{avec } 1 + x^2 > 0$$

Alors

$$\frac{y'}{1 + y^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

et en intégrant

$$\arctan(y) = \arctan(x) + c$$

Donc

$$y = \tan(\arctan(x) + c)$$

### 1.3.2 Équation de Bernouli

Il s'agit d'équation de la forme :

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^\alpha(x) \quad \alpha > 0 \quad (1.6)$$

• **Méthode de Résolution** : En divisant par  $y^\alpha$  l'équation a la forme

$$y'(x)y^{-\alpha}(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

On pose

$$z(x) = y^{1-\alpha} \Rightarrow (1-\alpha)y'(x)y^{-\alpha}(x)$$

Alors

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} = y'(x)y^{1-\alpha}(x)$$

Donc : on remplace dans l'équation 1.6 On trouve

$$\frac{z'(x)}{(1-\alpha)} = a(x)z(x) + b(x)$$

qui est un équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre

**Remark 1.20** 1- si  $\alpha = 0$  L'équation 1.6 devient une équation linéaire avec second membre

$$y'(x) - a(x)y(x) = b(x), \alpha > 0$$

2- si  $\alpha = 1$  L'équation 1.6 devient une équation linéaire sans second membre

$$y'(x)(b(x) - a(x))y(x) = 0$$

**Example 1.21** on a

$$y' + 2xy = y^2 \exp(x) \quad (1.7)$$

On dérive l'équation sur  $y^2$ , on trouve

$$y^{-2}y' + 2xy^{-1} = \exp(x) \quad (1.8)$$

On fait changement de variable  $z = y^{-1}$ , donc  $z' = -y^{-2}y'$ . En remplaçant dans 1.8, on obtient

$$z' - 2xz = -\exp(x)$$

### 1.3.3 Équation de Riccati

L'équation de Riccati s'écrit sous la forme :

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x) \quad (1.9)$$

#### • Méthode de Résolution

Soit  $y_p(x)$  solution particulière de 1.9 On pose

$$y(x) = y_p(x) + z(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_p'(x) + z'(x) \\ &= a(x)(y_p(x) + z(x))^2 + (y_p(x) + z(x))b(x) + c(x) \end{aligned}$$

Donc

$$y_p'(x) + z'(x) = a(x)y_p^2(x) + b(x)y_p(x) + c(x) + 2a(x)y_p(x)z(x) + a(x)z^2(x) + b(x)z(x)$$

d'où

$$z'(x) = (2a(x)y_p(x) + b(x))z(x) + a(x)z^2(x)$$

est un équation de Bernouli avec  $\alpha = 2$

**Exemple 1.22** soit l'équation différentielle

$$2x^2y' = (x - 1)(x^2 - y^2) + 2xy \quad (1.10)$$

telle que  $y_p = x$  est un solution particulière. Cette équation est de Ricatti se transforme à

$$y' = \frac{(1-x)}{2x^2}y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{x-1}{2} \quad (1.11)$$

telle que  $a(x) = \frac{(1-x)}{2x^2}$ ,  $b(x) = \frac{1}{x}$  et  $c(x) = \frac{x-1}{2}$ . alors on pose  $y = y_p + z(x) = x + z(x) \Rightarrow y' = 1 + z'(x)$  en remplaçant dans 1.11

ona

$$z'(x) = \frac{(2-x)}{x} z(x) + \frac{(1-x)}{2x^2} z^2(x)$$

alors

$$z(x) = \frac{2x}{C e^x - x}$$

Donc

$$y = x + \frac{2x^2}{C e^x - x}$$

# Chapitre 2

## Comparaison des méthode d'Euler et de Runge-Kutta

### 2.1 Formulation du problème

Dans cette section, nous considérons deux méthodes numériques pour trouver des solutions approximatives du problème de valeur initiale (PVI) pour les équations différentielles ordinaires du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_0, x_n] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où :  $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$  et  $f(x, y(x))$  est une fonction donnée et

$y(x)$  est la solution de l'équation 2.1. Dans cet article, nous déterminons la solution de cette équation sur un interval fini  $[x_0, x_n]$ , en commençant par le point initial  $x_0$  une approximation continue de la solution  $y(x)$  ne sera pas obtenue ; ou lieu de cela, des approximations de  $y$  seront générées pour différentes valeurs, appelées points de maillage, dans l'intervalle  $[x_0, x_n]$ . Les méthodes numériques utilisent l'équation 2.1 pour obtenir des approximations des valeurs de la solution correspondant à différentes sélections de  $x$ , définies par :

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

Le paramètre  $h$  est appelé le pas de discrétisation. Les solutions numériques de (1) sont données par un ensemble de points  $\{(x_n, y_n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ , où chaque point  $(x_n, y_n)$  est un point d'approximation correspondant  $(x_n, y(x_n))$  sur la courbe de solution.

## 2.2 Méthode d'Eluer

La méthode d'Euler est la méthode explicite à un pas la plus simple. C'est une méthode fondamentale pour l'intégration numérique des équation différentielle ordinaire. Euler a prposé cette méthode pour les problème de valeur initiale (PVI) en 1768

à construire une solution numérique ainsi

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_h - 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

cette méthode est obtenue en considérant l'équation différentielle en chaque noeud  $x_n$  et en remplaçant la dérivée exacte  $y'(x_n)$  par le taux d'accroissement

$$y'(x_n) \simeq \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

De même, en utilisant le taux d'accroissement

$$y'(x_{n+1}) \simeq \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

pour approcher  $y'(x_{n+1})$ , on obtient la méthode d'Euler implicite

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_h - 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.2.1 • stabilité (le schéma explicite est implicite) :

On étudie le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où  $\lambda < 0$  est donné. La solution exact est

$$y(x) = y_0 \exp(\lambda x)$$

En particulier, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

**Definition 2.1** On pose  $x_n = nh$ , où le pas de temps  $h > 0$  est donné et  $y_n$  une approximation de  $y(x_n)$  par un schéma donné. On dit alors que le schéma associé à ce problème est absolument stable si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

• Ce n'est malheureusement pas toujours le cas avec le schéma d'Euler explicite et  $h \approx 1.0526$

- Instabilité Euler explicite - stabilité Euler implicite
- On pose

#### Exemple 2.2

$$\begin{cases} y'(x) = -2y \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ le pas } h = 1.0526$$

► La formule générale pour l'approximation d'Euler Explicite est :

$$\begin{cases} y_0 \text{ est donnée} \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

- $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \lambda h y_n = (1 + \lambda h) y_n$
- $y_n = (1 + \lambda h)^n y_0, \forall n \geq 0$

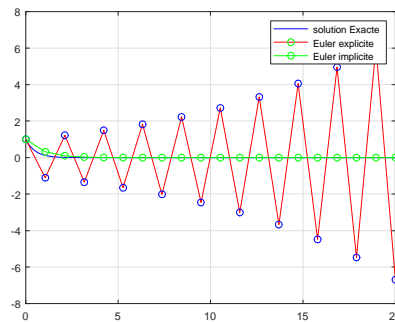


FIG. 2.1 –  $y'(x) = -2y(x)$  avec  $y(0) = 1$  pour le pas  $h = 1.0526$

- si  $|1 + \lambda h| < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_n| = 0$
- si  $|1 + \lambda h| > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_n| = +\infty$
- stabilité ssi  $|1 + \lambda h| < 1 \Leftrightarrow 0 < h < -\frac{2}{\lambda}$
- Le schéma d'Euler explicite est **conditionnellement instable**.

► La formule générale pour l'approximation d'Euler Implicite est :

$$\begin{cases} y_0 \text{ est donnée} \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

- $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + \lambda h y_{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} y_n$
- $y_n = \left(\frac{1}{1 - \lambda h}\right)^n y_0, \forall n \geq 0$ .
- Or  $\left|\frac{1}{1 - \lambda h}\right| < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_n| = 0$
- Le schéma d'Euler explicite est **conditionnellement stable**

## 2.3 Méthode de Runge-kutta

Principe méthode de Runge-kutta :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

L'idée fondamentale des méthodes de Runge-kutta est d'intégrer l'équation

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

sur  $[x_n, x_{n+1}]$  et de calculer

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à  $q$  points intermédiaires :

$x_{n,i+1} = x_n + h_i$  pour calculer l'intégrale.

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

La fonction  $\Phi$  associée à une méthode de Runge-Kutta à  $q$  évaluations de  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^q c_i k_i(x, y, h)$$

avec :

$$k_i(x, y, h) = f(x, y + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} k_j(x, y, h)), 1 \leq i \leq q$$

Sous la forme d'un tableau dit tableau de Butcher :

$a$	$B$
	$c_t$

TAB :2.1-Tableau de butcher 1

avec  $B = (b_{i,j})_{i,j \in [1,q]} \in M_{q,q}(\mathbb{R})$ ,  $a = (a_i)_{i \in [1,q]} \in \mathbb{R}^q$ .

★ La méthode de Runge-Kutta d'ordre 0 si :

$$a_i = \sum_{j=1}^q b_{i,j}$$

★ La méthode de Runge-Kutta d'ordre 1 si (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si :

$$\sum_{i=1}^q c_i = 1$$

★ La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 si elle d'ordre 1 et si :

$$\sum_{i=1}^q c_i a_i = \frac{1}{2}$$

★ La méthode de Runge-Kutta est explicite si :

$$\forall (i, j) \in [1, q], j \leq i b_{ij} = 0$$

★ Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si  $f$  est contractante en  $y$

### Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2 :

tableau de Butcher :

0	0	0
$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2\alpha}$	0
	$1 - \alpha$	$\alpha$

TAB :2.2\_ Tableau de butcher 2

$$\Phi(x, y, h) = (1 - \alpha)f(x, y) + \alpha f\left(x + \frac{h}{2\alpha}, y + \frac{h}{2\alpha}f(x, y)\right)$$

Avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on obtient la méthode de Heun :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f\left(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\right)$$

Avec  $\alpha = 1$ , on obtient la méthode d'Euler modifiée ou méthode du point milieu :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$$

### Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 3 :

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par tableau de Butcher suivant :

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

TAB :2.3\_ Tableau de butcher 3

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\bullet k_1 &= hf(x, y) \\ \bullet k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \\ \bullet k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) \\ \bullet k_4 &= hf(x + h, y + k_3)\end{aligned}$$

Alors :

► **La formule générale pour l'approximation de Runge-kutta d'ordre 4 est :**

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

### 2.3.1 Analyse des Erreues

Il existe deux types d'erreurs dans la résolution numérique des équation différentielles ordinaires :les **erreurs d'arrondi** et **erreurs de troncature** :

- **Erreurs d'arrondi** :Elle proviennent du fait que les ordinateurs ne peuvent représenter les nombres qu'en utilisant un nombre fixe et limité de chiffres significatifs. Ainsi, certains nombres ne

peuvent pas être stockés exactement en mémoire, ce qui introduit une différence appelée erreur d'arrondi.

- **Erreurs troncature** :Ces erreurs surviennent lorsqu'on utilise des approximation numérique pour estimer un solution. La précision dépend alors de la finesse du pas de discrétisation, noté .

Une méthode **convergente** si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n| = 0 \quad (2.7)$$

où :

- représente la solution approchée
- désigne la solution exacte

Dans cet article, nous étudions deux problèmes de valeur initiale pour évaluer la précision des méthodes proposées. Les solutions approchées sont calculées à l'aide du logiciel *Mathematica*, en appliquant deux méthodes numériques avec différentes tailles de pas.

L'erreur maximale est définie par :

$$e_r = \max_{1 \leq n \leq \text{steps}} (|y(x_n) - y_n|) \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Exemple numériques

Dans cette section, nous considérons en exemple numérique pour déterminer quelles méthodes numériques convergent plus rapidement vers la solution analytique. Les résultats numériques et les erreurs sont calculés, et les résultats sont présentés graphiquement.

**Exemple 2.3** Nous considérons le problème de valeur initiale :

$$\begin{cases} y' = x^2 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ sur l'intervalle } x \in [0, 1] \quad (2.9)$$

La solution exacte du problème 2.9 donné est donnée par :

$$y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - x$$

Les résultats approximatifs et erreurs maximales sont obtenus et présentés dans les tableaux (a)-(b) et les graphiques des solutions numériques sont affichés dans les figures

1-4

Table (a)

Approximations numériques et erreurs maximales pour la taille de pas  $h = 0,1$ 

$x_n$	Euler $h = 0.1$	$e_r$	Runge-kutta $h = 0.1$	$e_r$	solution Exacte
0.1	1.000000	5.346522e-03	1.005346	4.160451e-08	1.005347
0.2	1.011000	1.188946e-02	1.022889	8.267156e-08	1.022889
0.3	1.035221	1.997196e-02	1.055192	1.230289e-07	1.055192
0.4	1.075277	3.004235e-02	1.105319	1.633248e-07	1.105319
0.5	1.134288	4.268731e-02	1.176975	2.058045e-07	1.176975
0.6	1.216002	5.867694e-02	1.274679	2.556237e-07	1.274679
0.7	1.324962	7.902615e-02	1.403988	3.230297e-07	1.403988
0.8	1.466746	1.050782e-01	1.571787	4.269413e-07	1.571788
0.9	1.648046	1.386196e-01	1.786665	6.007689e-07	1.786666
1.0	1.877370	1.820370e-01	2.059407	9.018153e-07	2.059407

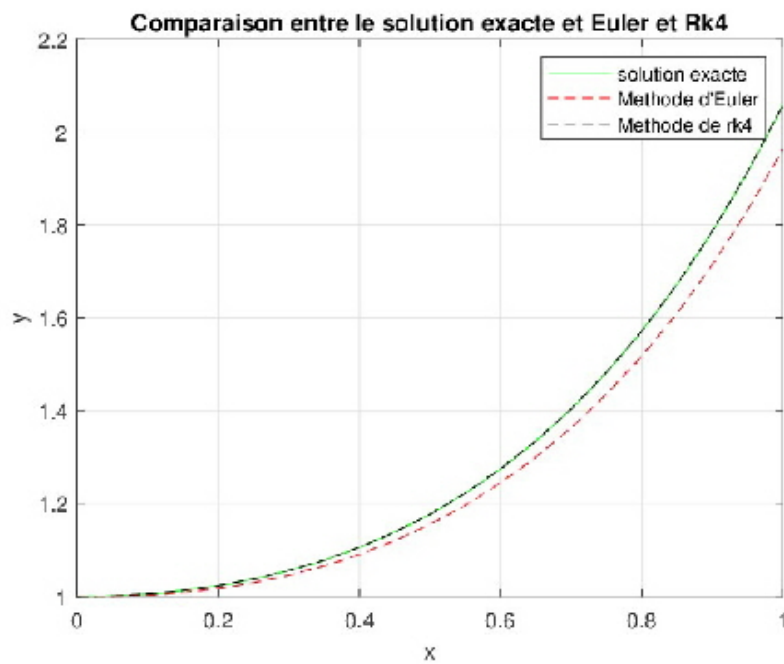
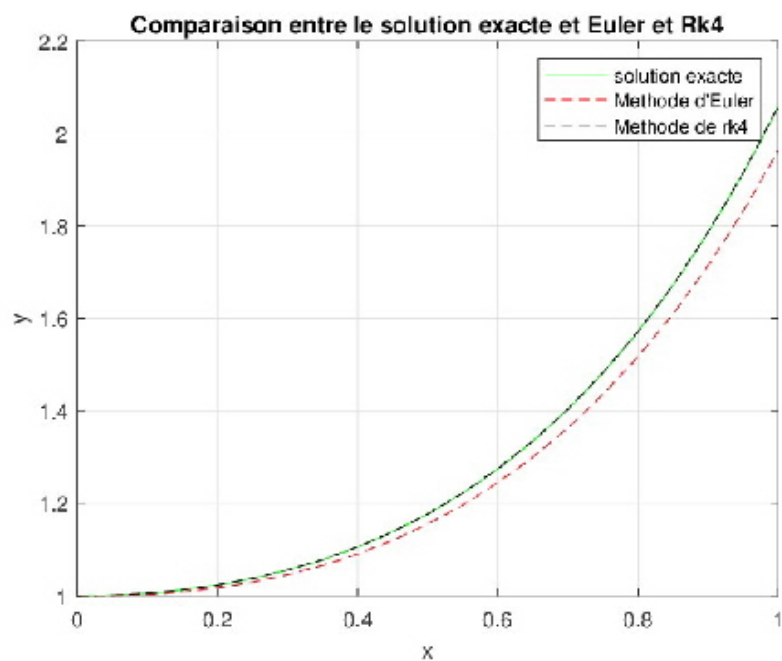
Erreur maximale : 9.018153E-07

Table (b)

Approximations numériques et erreurs maximales pour la taille de pas  $h = 0,05$ 

$x_n$	Euler $h = 0.05$	$e_r$	Runge-kutta $h = 0.05$	$e_r$	solution Exacte
0.1	1.002625	2.72522e-03	1.005347	1.301490e-09	1.005347
0.2	1.016824	6.065302e-03	1.022889	3.882936e-09	1.022889
0.3	1.044980	1.021216e-02	1.055192	6.409312e-09	1.055192
0.4	1.089920	1.539924e-02	1.105319	8,879089e-09	1.105319
0.5	1.155937	2.19382e-02	1.176975	1.135999e-08	1.176975
0.6	1.244439	3.023996e-02	1.274679	1.405327e-08	1.274679
0.7	1.363140	4.084852e-02	1.403988	1.740254e-08	1.403988
0.8	1.517300	5.448747e-02	1.571788	2.227484e-08	1.571788
0.9	1.714542	7.212387e-02	1.786666	3.025846e-08	1.786666
1.0	1.964351	9.505670e-02	2.059407	4.414865e-08	2.059407

Erreur maximale :5.46915E-08

FIG. 2.2 – Approximation numériques pour un pas de taille  $h = 0.1$ FIG. 2.3 – Approximation numériques pour un pas de taille  $h = 0.05$

# Chapitre 3

## Méthode des différences finies pour les problème aux limites liniéaire du troisième ordre

### 3.1 Formulation du problème :

On considère le problème aux limites liniéaire du troisième ordre :

$$y'''(x) = p_2(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) + r(x) \quad a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

avec le premier cas particulier de trois conditions aux limites :

$$\left| \begin{array}{l} y(a) = \alpha_1 \\ y'(a) = \alpha_2 \\ y(b) = \beta_1 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

**Etapes de résolution numérique :première étape :**

- nous sélectionnons un entier  $N > 0$  et divisons l'intervalle  $[a, b]$  en  $(N + 1)$  sous-intervalle égaux

- point de maillage :  $x_i = a + ih$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots, N + 1$
- où le pas  $h$  est donnée par  $h = (b - a) / (N + 1)$

**Deuxième étape :**On approxime toutes les dérivée dans 3.1en utilisant des approximation par différences finies aux point de maillage intérieurs.

- Approximation de la première dérivée (centrée,convergence d'ordre 2) :

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\xi_i) \quad (3.3)$$

- Approximation de la deuxième dérivée (centrée, convergence d'ordre 2) :

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\eta_i) \quad (3.4)$$

- pour la troisième dérivée, on utilise une approximation spéciale adaptée aux conditions aux limites, tout en conservant la convergence d'ordre 2 :

$$y'''(x_i) = \frac{y(x_{i-3}) - 6y(x_{i-2}) + 12y(x_{i-1}) - 10y(x_i) + 3y(x_{i+1}))}{2h^3} + \frac{h^2}{4}y^{(5)}(\zeta_i) \quad (3.5)$$

En substituant les équations 3.3, 3.4, 3.5 dans l'équation 3.1, on obtient l'équation suivante

$$\frac{y(x_{i-3}) - 6y(x_{i-2}) + 12y(x_{i-1}) - 10y(x_i) + 3y(x_{i+1}))}{2h^3} = p_2(x_i) \left[ \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2} \right] + p_1(x_i) \left[ \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \right] + p_0(x_i)y(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12} [2p_1(x_i)y'''(\xi_i) + p_2(x_i)y^{(iv)}(\eta_i) + 3y^{(v)}(\zeta_i)]$$

Une méthode de différences finies avec un erreur de troncature d'ordre  $O(h^2)$  est

obtenue par en utilisant avec les conditions aux limites 3.1 pour définir :

$$w_0 = \alpha_0, \quad w_{N+1} = \beta_0, \quad w'_0 = \alpha_1$$

et

$$\frac{w_{i-3} - 6w_{i-2} + 12w_{i-1} - 10w_i + 3w_{i+1}}{2h^3} - p_2(x_i) \left[ \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2} \right] - p_1(x_i) \left[ \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right] - p_0(x_i)w_i = r(x_i)$$

(3.6)

pour chaque  $i = 3, 4, 5, \dots, N$ .

En multipliant l'équation (3.6) par  $2(h^3)$ , on peut l'exprimer sous la forme :

$$w_{i-3} - 6w_{i-2} + [12 - 2hp_2(x_i) + h^2p_1(x_i)]w_{i-1} - [10 - 4hp_2(x_i) + 2h^3p_0(x_i)]w_i + [3 - 2hp_2(x_i) - h^2p_1(x_i)]w_{i+1} = 2h^3r(x_i)$$

pour chaque  $i = 3, 4, 5, \dots, N$ .

Mais cette formule est adaptée à  $N - 2$  points de maillage, nous devons donc dériver une formule spéciale pour  $i = 1$  et  $i = 2$  en utilisant les conditions aux limites.

$$y'_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\xi_1) \quad (3.7)$$

$$y''_1 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\eta_1) \quad (3.8)$$

pour maintenir une convergence du second ordre, nous dérivons une nouvelle approximation par différences finies en utilisant la dérivée première en  $i = 0$  et un point supplé-

mentaire dans la formule de différences ,en suivant un algorithme qui est donnée par

$$y_1''' = \frac{8y_0 - 9y_1 + y_3 + 6y_0'}{3h^3} - \frac{3h^2}{20}y^{(5)}(\zeta_1) \quad (3.9)$$

En substituant les équation 3.7,3.8,et 3.9dans l'équation 3.1, on obtient

$$\frac{8y_0 - 9y_1 + y_3 + 6hy_0'}{3h^3} = p_2(x_1) \left[ \frac{y_3 - 2y_1 + y_2}{h^2} \right] + p_1(x_1) \left[ \frac{y_2 - y_0}{h^2} \right] + p_0(x_1) y_1 + r(x_1) - \frac{h^2}{60} \left[ \begin{array}{c} 10p_1(x_1)y'''(\xi_1) \\ + 5p_2(x_1)y^{(iv)}(\eta_1) - 9y^{(v)}(\zeta_1) \end{array} \right]$$

En omettant le terme d'erreur et en multipliant l'équation précédente par  $6h^3$ ,on obtient la formule aux diffétences finies pour  $i = 1$   $[16 - 6hp_2(x_1) + 3h^2p_1(x_1)] w_0 - [18 - 12hp_2(x_1) + 6h^3p_0(x_1)] w_1 - [6hp_2(x_1) + 3h^2p_1(x_1)] w_2 + 2w_3 + 12w_0' = 6h^3r(x_1)$

pour obtenir la formule aux différence finies appropriée à  $i = 2$  ,nous suivons la même démarche que pour  $i = 1$ , mais sans utiliser de point supplémentaire dans sa dérivation.

$$y_2' = \frac{y_3 - y_1}{2h} - \frac{h^2}{2}y'''(\xi_2) \quad (3.10)$$

$$y_2'' = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\eta_2) \quad (3.11)$$

$$y_2''' = \frac{-14y_0 + 27y_1 - 18y_2 + 5y_3 - 6hy_0'}{3h^3} + \frac{3h^2}{20}y^{(5)}(\zeta_2) \quad (3.12)$$

En substituant les équation 3.10,3.11 et 3.12 dans l'équation 3.1, on obtient

$$\frac{-14y_0 + 27y_1 - 18y_2 + 5y_3 - 6hy_0'}{3h^3} = p_2(x_2) \left[ \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} \right] + p_1(x_2) \left[ \frac{y_3 - y_1}{2h} \right] + p_0(x_2) y_2 + r(x_2) - \frac{h^2}{60} [10p_1(x_2) y'''(\xi_2) + 5p_2(x_2) y^{(iv)}(\eta_2) + 9y^{(v)}(\zeta_2)]$$

En omettant le terme d'erreur et en multipliant l'équation précédente par  $6h^3$ ,on obtient la formule aux diffétences finies pour  $i = 2$

$$-28w_0 + [54 - 6hp_2(x_2) + 3h^2p_1(x_2)] w_1 - [36 - 12hp_2(x_2) + 6h^3p_0(x_2)] w_2 + [10 - 6hp_2(x_2) - 3h^2p_1(x_2)] w_3 - 12w_0' = 6h^3r(x_2)$$

L'utilisation conjointe des équation donne un système avec une matrice presque penta-diagonale de dimension  $N \times N$

$$Aw = c \quad (3.13)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} (18 + 3F_2(x_1)) & -3F_3(x_1) & 2 & \vdots & \vdots & 0 \\ 54 - 3F_1(x_2) & -(36 - 3F_2(x_2)) & 10 - 3F_3(x_2) & \vdots & \vdots & \vdots \\ -6 & 12 - F_1(x_3) & -(10 + F_2(x_3)) & 3 - F_3(x_3) & \vdots & \vdots \\ 1 & -6 & 12 - F_2(x_4) & -(10 + F_2(x_4)) & 3 - F_3(x_4) & \vdots \\ 0 & \vdots & 1 & -6 & (12 + F_1(x_N)) & -(10 + F_1(x_N)) \end{pmatrix}_{N \times N}$$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{pmatrix}_{N \times 1}, \text{ et } c = \begin{pmatrix} 6h^3r(x_1) - (16 + 3F_1(x_1))\alpha_0 - 12h\alpha_1 \\ 6h^3r(x_2) + 28\alpha_0 + 12h\alpha_1 \\ 2h^3r(x_3) - w_0 \\ 2h^3r(x_4) \\ \vdots \\ 2h^3r(x_{N-1}) \\ 2h^3r(x_N) - (3 - F_3(x_N))\beta_0 \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

$$F_1(x_i) = 2hp_2(x_i) - h^2p_1(x_i), F_2(x_i) = -4hp_2(x_i) + 2h^3p_0(x_i), F_3(x_i) = 2hp_2(x_i) + h^2p_1(x_i), \text{ for } i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Maintenant, en utilisant la décomposition **LU** avec **MATLAB**, nous allons résoudre le système linéaire 3.13, afin de réduire les calculs pour plusieurs valeurs de pas ( $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025, h = 0.0125$ ). Ensuite, nous extrapolerons la solution pour obtenir une précision d'ordre supérieur.

**► Algorithme (3.1) : Méthode des Différences Finies Linéaires (3.1) Pour La Résolution des Problèmes aux Limites du Troisième Ordre**

pour approximer la solution du problème aux limites

$$y'''(x) = p_2(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) + r(x) \quad a \leq x \leq b$$

Avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(a) = \alpha_0 \\ y(b) = \beta_0 \\ y'(a) = \alpha_1 \end{cases}$$

**Étape(1)** : Entrer les bornes  $a, b$ ; et les conditions aux limites  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1$

**Étape(2)** : pour  $k = 1, 2, 3, 4$  ( pour déterminer  $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$ )

- poser  $N_k = (10 * 2^{(k-1)} - 1)$ ;
- $h = (b - a) / (N_k - 1)$ ;
- Effectuer les étapes (2-9)

**Étape(3)** : pour  $i = 1, 2, 3, \dots, N_k$  poser  $x(i) = a + ih$ , calculer  $p_1(x_i), p_0(x_i), p_0(x_i)$  et  $r(x_i)$ . (valeurs des fonctions associées dans l'équation 3.1)

**Étape(4)** : pour  $i = 1, 2, 3, \dots, N_k$  définir

- $F_1(i) = 2hp_2(i) - h^2p_1(i)$  ;
- $F_2(i) = -2h^3p_0(i) + 4hp_2(i)$  ;
- $F_3(i) = 2hp_2(i) + h^2p(i)$  ;

( L'ajout des formules aux différence finies pour  $y'$  et  $y''$  des équation 3.3 et 3.4 comme fonction  $F'$  ) ;

**Étape(5)** : pour  $i = 1, 2, 3, \dots, N_k$  définir

\*(La diagonale principale de A (d0))

$$d0 = [-(18 + 3F_2(1)) \quad -(36 + 3F_2(2)) \quad -(10 + F_2(3)) \quad \dots \quad -(10 + F_2(N_k))] ;$$

\*(La première diagonale supérieure de A (dU1))

$$dU1 = [-3F_3(1) \quad (10 - 3F_3(2)) \quad (3 - F_3(3)) \quad \dots \quad (3 - F_3(N_k - 1))] ;$$

\*( La deuxième diagonale supérieure de A (dU2))

$$dU2 = [2 \quad 0 \quad \dots \quad 0]_{1 \times (N_k - 2)}$$

\*(La première diagonale inférieure A (dL1))

$$dL1 = [(54 + 3F_1(2)) \quad (12 + F_1(3)) \quad \dots \quad (12 + F_1(N_k))] ;$$

\*(La deuxième diagonale inférieure A (dL2))

$$dL2 = [-6 \quad \dots \quad -6]_{1 \times (N_k - 1)}$$

\*(La troisième diagonale inférieure A (dL3))

$$dL3 = [1 \quad \dots \quad 1]_{1 \times (N_k - 2)}$$

\*(Le vecteur constant (c) dans L'équation 3.13)

$$c = \left[ \begin{array}{l} (12h^3r(1) - (16 - 3F_1(1)\alpha_0 - 6hal); \quad (12h^3r(2) + 28\alpha_0 + 6hal); \quad (2h^3r(3) - \alpha_0); \\ \quad \quad \quad 2h^3r(4); \dots, \quad 2h^3r(N(k) - 1); \quad 2h^3r(N(k)) - (3 - F_3(N(k)))\beta_0 \end{array} \right]$$

**Étape(6)** : Factoriser A en une matrice à deux diagonales :

– La matrice L a une diagonale principale-entrées-et trois autres inférieures

– La matrice U a une diagonale principale et deux supérieures

**Étape(7)** : pour  $i = 1, 2, 3, \dots, N_k$  Résoudre  $LY = d$  pour trouver  $Y$  par substitution

avant

**Étape(8)** : pour  $i = N, N_k - 1, \dots, 2, 1$  résoudre  $UW = Y$  afin de déterminer la solution

approchée  $W$  par substitution arrière

Ecrire les valeur de  $w$  à  $x_i = a + 0.1 * i$ , pour  $i = 1, \dots, 9$

**Étape(9)** : pser  $N_1 = 9$

pour  $i = 1, 2, 3, \dots, N_k$ , pour  $j = 0, 2, 4, 8, \dots, N_k$  définir  $w_{1,i,k} = w_j$ ;

**Étape(10)** : pour  $i = 1, 2, \dots, N_1$  définir  $h = (b - a)/N_1$ ;  $x(i) = a + ih$

**Exemple 3.1** considérons le problème aux limites linéaire d'ordre trois :

$$\begin{cases} y'''(x) = 2x^2y'' - 3xy' - 5x^2y + (3x^3 - x^2 - 5x - 4)e^{2x}, 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \quad , \quad y(1) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

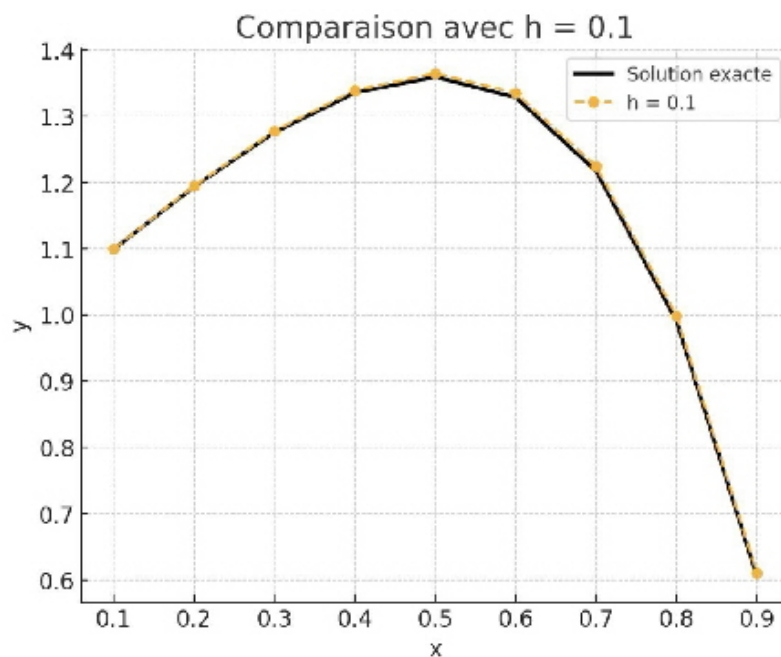
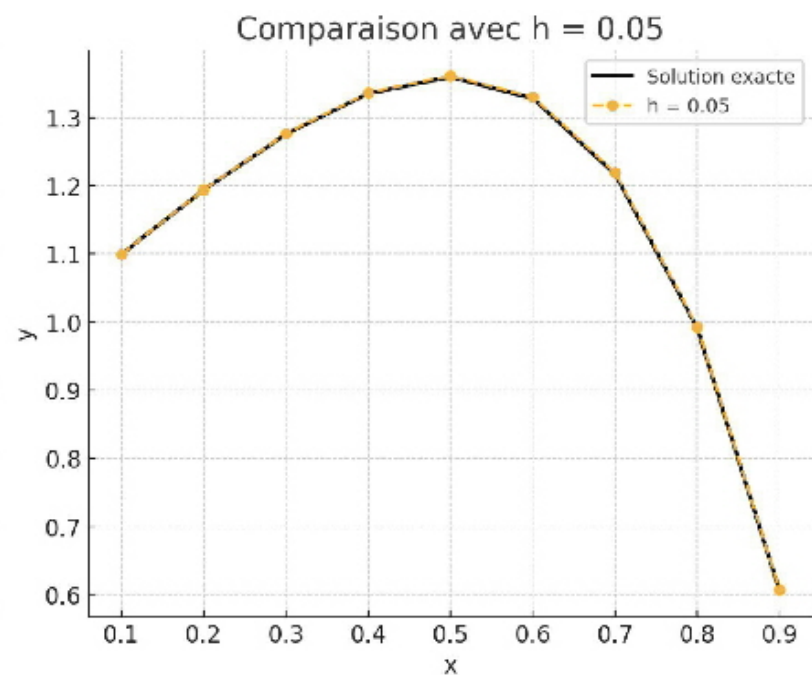
La solution exacte est :  $y = (-x + 1)e^{2x}$

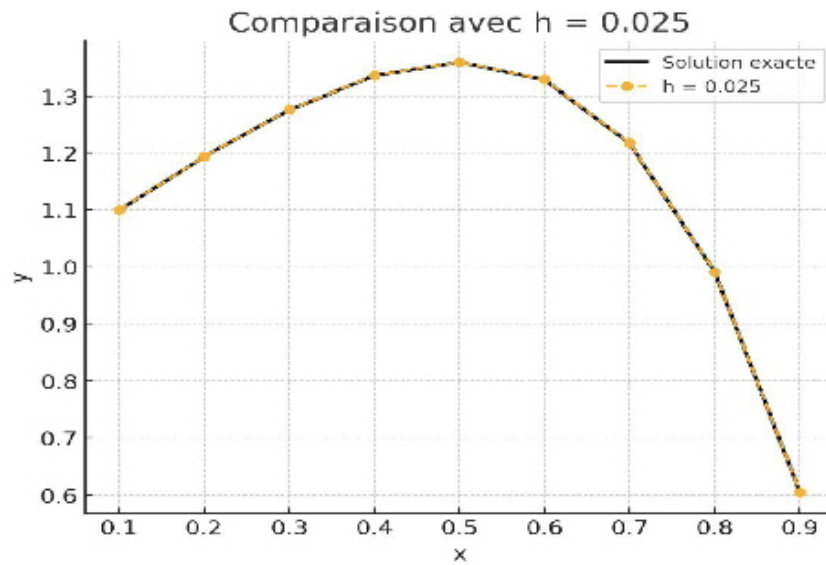
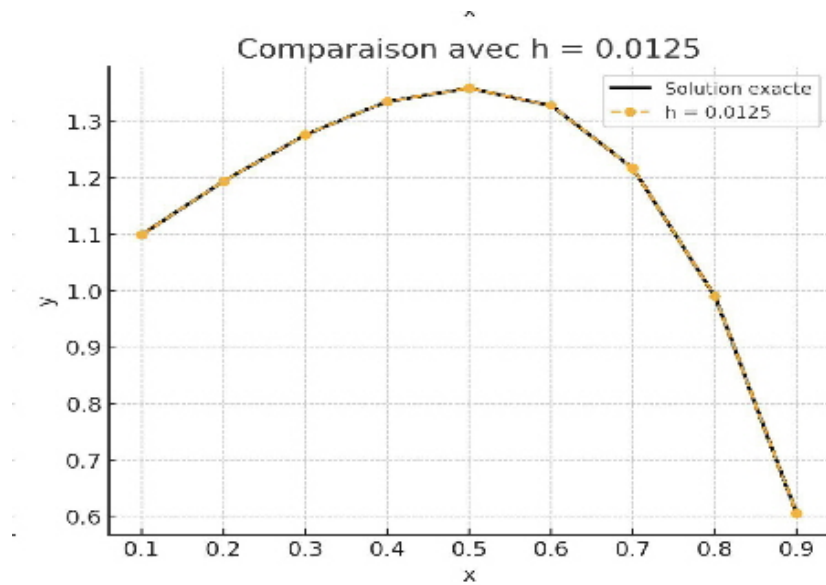
En appliquant méthode de différences finies à l'exemple, nous obtenons les résultats suivants, qui représentent les solutions approchées pour différents valeurs de  $h$  comme indiqué

dans le tableau

**Table (1.1)**

$x_i$	Exact $Y$	$W_i(h = 0.1)$	$W_i(h = 0.05)$	$W_i(h = 0.025)$	$W_i(h = 0.0125)$
0.1	1.09926248	1.09945718	1.09934530	1.09928723	1.09926910
0.2	1.19345976	1.19433658	1.19379324	1.19355538	1.19348492
0.3	1.27548316	1.27753316	1.27620571	1.27568575	1.27553614
0.4	1.33532456	1.33890771	1.33652472	1.33565662	1.33541109
0.5	1.35914091	1.36439876	1.36084026	1.35960702	1.35926211
0.6	1.32804677	1.33481404	1.33017748	1.32862762	1.32819757
0.7	1.21655999	1.22425193	1.21893383	1.21720414	1.21672703
0.8	0.99060648	0.99806306	0.99287133	0.99121882	0.99076513
0.9	0.60496475	0.61022038	0.60654294	0.60539014	0.60507488

FIG. 3.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée avec  $h = 0.1$ FIG. 3.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée avec  $h = 0.05$

FIG. 3.3 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée avec  $h = 0.025$ FIG. 3.4 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée avec  $h = 0.0125$

## 3.2 Conclusion

Les **méthodes numériques** constituent une branche des mathématiques qui s'intéresse à la conception, à l'analyse et à l'implémentation d'algorithmes permettant d'obtenir des *solutions approchées* à des problèmes mathématiques difficiles, voire impossibles à résoudre analytiquement à l'aide des méthodes classiques. En effet, dans de nombreux cas, il est impossible de déterminer une solution exacte, ce qui motive le recours à des procédures numériques étape par étape. Parmi ces méthodes, la **méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre** se distingue par sa précision. Bien que moins intuitive que la méthode d'Euler, elle offre généralement de *meilleurs résultats numériques*, tout en restant relativement simple à mettre en œuvre. En comparaison, l'un des principaux inconvénients de la **méthode d'Euler** est sa *précision limitée*. L'erreur commise tend à s'accumuler au fil des itérations : plus on s'éloigne du point initial, plus l'écart entre l'approximation et la solution exacte devient important. Cette accumulation d'erreur s'explique par l'approximation linéaire utilisée par la méthode : à chaque étape, on avance le long d'un segment de droite tangente à la courbe de la solution au point considéré. Ce phénomène peut être observé visuellement sur un graphique comparant la solution exacte et l'approximation obtenue. Une autre méthode fondamentale est la **méthode des différences finies**, qui repose sur l'approximation des dérivées par des *différences entre les valeurs* de la fonction sur une grille de points régulièrement espacés. Cette méthode est largement utilisée pour résoudre aussi bien des **équations différentielles ordinaires (EDO)** que des **équations aux dérivées partielles (EDP)**, en particulier dans les **problèmes aux limites**. Elle consiste à remplacer les dérivées par des différences progressives, rétrogrades ou centrées, transformant ainsi l'équation différentielle en un système d'équations algébriques résoluble numériquement. Bien qu'elle soit appréciée pour sa simplicité et sa facilité d'implémentation, son efficacité dépend fortement du *choix du pas* (temporel et spatial). Un maillage trop grossier compromet la précision, tandis qu'un maillage très fin augmente les coûts de calcul. La **stabilité** et la **convergence** des résultats sont donc liées à une bonne sélection des paramètres de discrétisation.

# Bibliographie

- [1] Ascher, Uri M., Greif, Chen. A First Course in Numerical Methods. États-Unis : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [2] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., Meade, D. B. (2017). Elementary Differential Equations. Royaume-Uni : Wiley.
- [3] BUTCHER. J. C. . Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. The University of Auckland, New Zealand.1987
- [4] Fortin, A. (2001). Analyse numérique pour ingénieurs. Canada : Presses internationales Polytechnique.
- [5] Jedrzejewski, F. (2005). Introduction aux méthodes numériques. Allemagne : Springer.
- [6] King, A. C., Billingham, J., Otto, S. R. (2003). Differential Equations : Linear, Non-linear, Ordinary, Partial. Royaume-Uni : Cambridge University Press.
- [7] Merrien, J. (2007). Exercices et problèmes d'Analyse numérique avec Matlab : Rappels de cours, corrigés détaillés, méthodes. France : Dunod.

## الملخص:

الهدف من هذا البحث هو دراسة المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى، وتقديم حلول عددية تقريبية لها. تم اعتماد الطرق العددية الكلاسيكية، مثل طريقة أويلر وطريقة رونج-كوتا، بالإضافة إلى تقنية الفرق المنتهية، وذلك لتقريب الحلول وتحليل سلوكها. تم التركيز على مقارنة دقة وكفاءة هذه الطرق العددية من خلال أمثلة عددية توضح تباين النتائج باختلاف كل خوارزمية.

## الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية - الطرق العددية - طريقة أويلر - رونج كوتا - الفرق المنتهية

## Résumé :

Le but de ce travail est d'étudier les équations différentielles ordinaires du premier ordre et de proposer des solutions numériques approximatives. Les méthodes numériques classiques telles que la méthode d'Euler, la méthode de Runge-Kutta et la technique des différences finies sont appliquées pour approcher la solution et analyser son comportement. L'étude comprend également une comparaison de la précision et de l'efficacité de ces méthodes à l'aide d'exemples numériques illustratifs.

## Mots clés :

Équations différentielles - Méthodes numériques - Méthode d'Euler - Runge-Kutta - Différences finies

## Abstract :

The objective of this study is to investigate first-order ordinary differential equations and to provide approximate numerical solutions. Classical numerical methods such as Euler's method, the Runge-Kutta method, and the finite difference technique are applied to approximate the solution and analyze its behavior. The study also includes a comparison of the accuracy and efficiency of these methods using illustrative numerical examples.

## Keywords:

Differential equations - Numerical methods - Euler method - Runge-Kutta - Finite differences