

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Mathématiques

Option : Analyse numériques et mathématiques

Par

TOUIL ISLAM

THEME

ETUDE D'UN ECOULEMENT A SURFACE LIBRE-
NON LINEAIRE

Devant le jury composé de :

Président : GASMI ABD ELKADER

Encadreur : TAHAR BLIZAK

Examineur : TOUAHRIA MESSAOUD

Promotion : 2017/2018

Remerciements

Louange à notre seigneur 'ALLAH' qui nous a dotés de la merveilleuse faculté de raisonnement.

Je tiens à remercier mon promoteur Mr BIIZAK TAHAR pour la confiance qu'il m'a témoigné en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'il a su générer. Ses remarques et ses suggestions m'ont permis de finaliser ce modeste travail.

Je remercie aussi tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers ; ma famille qui ont eu rôle essentiel et continu dans ma réussite, et tous mes amis qui étaient à mes côtés tout au long de mon travail.

MERCI

Table des matières

Introduction	1
1 Notion préliminaires sur la mécanique des fluides et fonctions à variable complexe	2
1.1 Fonction à variable complexe	2
1.1.1 Fonction analytique	2
1.1.2 Les Conditions de Cauchy-Riemann	2
1.1.3 Fonction harmonique	3
1.1.4 Théorème de Schwartz	3
1.1.5 Différentielle totale	3
1.2 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	4
1.2.1 L écoulement fluide est à deux dimensions	4
1.2.2 L' écoulement est stationnaire ou permanent	4
1.2.3 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel	4
1.2.4 Type des écoulement	4
1.2.5 Lignes équipotentiels et ligne de courant	5
1.2.6 Fonction de courant	5
1.2.7 Fonction de Potentiel	6
1.2.8 Le potentiel complexe	6
1.2.9 Le fluide est non visqueux	7
1.2.10 Sources et puits	7

1.3	Quelques écoulements particuliers	8
1.3.1	Écoulement uniforme	8
1.3.2	Source en $z = a$	8
1.3.3	Puit en $z = a$	9
1.3.4	Tourbillon	10
1.3.5	Écoulement autour d'obstacles	10
1.3.6	Équation de Bernoulli	12
2	Transformations conformes	13
2.1	Transformations	13
2.2	Forme complexe d'une transformation	14
2.3	Transformations conformes	14
2.4	Quelques transformations	15
2.4.1	Quelques transformations générales	15
2.4.2	Représentation sur le Demi-Plan	17
2.5	La transformation de Schwartz-Christoffel	18
3	Quelques problèmes d'écoulement de fluides visqueux incompressibles	22
3.1	L'écoulement à travers un orifice avec séparation (jet libre)	22
3.1.1	Position du problème	23
3.1.2	Résolution du problème	23
3.2	L'écoulement perpendiculaire sur plaque plane	27
3.2.1	Position de problème	27
3.2.2	Résolution du problème	28
	Conclusion	33

Résumé

Dans ce travail, nous intéressons à l'étude de deux problèmes d'écoulement de fluide incompressible et non visqueux dans un espace bidimensionnelle : l'effet du flux de fluide sur une plaque plane, l'écoulement de fluide d'une ouverture de grand réservoir (jet libre), où la gravité et la surface tension sont négligées. Dans cette étude, Nous utilisons les transformations de Schwartz Christoffel et la méthode de l'hodographe.

Mots clés : Surface libre, Fluide, écoulement, Ligne de courant, Transformation conforme. Fonction potentielle

Abstract

In This Work, we are interested in studying two problems of incompressible and non-viscous fluid flow in a two-dimensional space : the effect of fluid flow on a flat plate, the fluid flow from a large reservoir opening. (free jet), where gravity and surface tension are neglected. In this study, We use the Schwartz Christoffel transformations and the hodograph method.

Key words : Free surface, Fluid, Flow, Streamline, Conformal transformation. Potential function.

ملخص

في هذا العمل، نهتم بدراسة مسألتين لتدفق مائع غير قابل للانضغاط وغير لزج في فضاء ذو بعدين وهما تأثير تدفق مائع على لوحة مستوية، تدفق مائع من فتحة خزان كبير (نافورة)، حيث يتم إهمال تأثير الجاذبية وقوى التوتر السطحي نستعمل في هذه الدراسة التحويلات المطابقة لشوارتس كريستوفل وطريقة الهودوغراف.

الكلمات المفتاحية: سطح حر، سائل، تدفق، خطوط السيل، تحويل مطابق، دالة كمون

Notation

$\nabla \cdot v = \text{grad}(v) = (\partial_x v; \partial_y v)$: le gradient d'un vecteur vitesse

$$\overrightarrow{\text{rot}}(v) = \nabla \wedge v$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\vec{V} = \vec{V}(x, t)$: la vitesse d'une particule de fluide se trouvant au point repère par le vecteur \bar{x} à l'instant t .

$$\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\nabla u) = 0.$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} u) = 0$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\cosh i = \cos 1.$$

Introduction

Les problèmes d'écoulements des surfaces libre se trouvent dans beaucoup d'applications de la science. Ils peuvent être définies comme des problèmes dont les formulations mathématiques comportant des surfaces (surfaces libres), qui doivent être trouvées comme faisant partie de la solution. Citons comme exemples de problèmes surfaces libres: problèmes qui traitent les vagues de la mer, les bulles montantes dans un liquide, les écoulements au dessus des obstacles. Dans ces exemples la surface libre est la surface de la mer, l'interface entre gaz et liquide respectivement. Dans notre mémoire, nous restreindrons aux problèmes de la mécanique des fluides. De nombreux résultats ont été obtenus pour le cas des écoulements surfaces libres, bidimensionnels et stationnaires. Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement surface libre au dessus d'un obstacle. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables $(x; y)$ de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$: En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe du Kirchhoff (1869) ou la transformation Schwartz - Christoffel. Notre travail est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on présente quelques définitions des fonctions à variable complexe, fonction analytique, équation de Cauchy - Riemann, fonctions harmoniques et notions préliminaires sur la mécanique des fluides. Dans le deuxième chapitre, on se donne une définition de la transformation conforme et quelques transformations classiques, la transformation de Schwartz - Christoffel. Dans le chapitre 3, Nous étudions deux problèmes physiques, la première problème est l'écoulement à travers un orifice (jet libre) et le deuxième problème est l'écoulement perpendiculaire sur plaque plane.

Chapitre 1

Notion préliminaires sur la mécanique des fluides et fonctions à variable complexe

1.1 Fonction à variable complexe

1.1.1 Fonction analytique

Définition 1.1.1 Soit Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. f est dite holomorphe sur Ω si f est dérivable en tout point de Ω .

Définition 1.1.2 Soit Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. f est dite Analytique si elle développable en série entière en tout point de Ω .

Proposition 1.1.1 Toute fonction Analytique sur Ω est holomorphe sur Ω .

1.1.2 Les Conditions de Cauchy-Riemann

Définition 1.1.3 Une condition nécessaire pour que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ soit analytique dans un ouvert connexe Ω ,est que dans Ω u et v vérifient les équation de Cauchy -Rimman

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1.1)$$

Si les dérivées partielles que figurent dans (1.1.1) sont continues dans Ω , alors les conditions de Cauchy-Rimman sont des conditions suffisantes pour que $f(z)$ soit analytique dans Ω . Les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont souvent appelées fonctions conjuguées, si l'on se donne l'une d'entre elles, on peut déterminer l'autre (à une constante additive près) de telle manière que $u + iv = f(z)$ soit analytique.

1.1.3 Fonction harmonique

Définition 1.1.4 Si les dérivées partielles secondes de u et v par rapport x et y existent et sont continues dans Ω , alors on peut tirer de (1.1.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1.2)$$

On déduit de là que, sous ces conditions, les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique qui vérifient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.1.3)$$

Les fonctions telles que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ qui vérifient l'équation de Laplace dans Ω sont appelées fonctions harmoniques.

1.1.4 Théorème de Schwartz

Théorème 1.1.1 Si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \quad (1.1.4)$$

1.1.5 Différentielle totale

On appelle différentielle totale de 1^{er} ordre d'une fonction f l'expression

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \quad (1.1.5)$$

1.2 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.2.1 L'écoulement fluide est à deux dimensions

Les caractéristiques de l'écoulement dans un plan sont les mêmes que dans tout plan parallèle. Ceci permet de ne considérer qu'un plan que nous prendrons pour plan des z . Les figures construites dans ce plan seront considérées comme les sections droites de cylindres infinis à génératrices perpendiculaires au plan considéré.

1.2.2 L'écoulement est stationnaire ou permanent

la vitesse du fluide en tout point (x, y) ne dépend que de la position du point considéré et non du temps.

1.2.3 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel

Si V_x et V_y désignent les composantes de la vitesse du fluide en (x, y) selon les axes des x et y , il existe une fonction ϕ appelée potentiel des vitesses telle que

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.2.1)$$

De façon équivalente si C est courbe fermée simple quelconque du plan de la variable z et si V_t désigne la composante tangentielle de la vitesse sur C

$$\oint_C V_t ds = \oint_C V_x dy - V_y dx = 0 \quad (1.2.2)$$

L'une ou l'autre des intégrales (1.2.2) est appelée la circulation du fluide le long de C . Quand la circulation est nulle sur toute courbe C , le fluide est dit irrotationnel.

1.2.4 Type des écoulements

Écoulement irrotationnel

Un fluide est dit irrotationnel si

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0 \quad (1.2.3)$$

Écoulement incompressible

La densité ou masse par unité de volume est constante. Si V_n désigne la composante normale du vecteur vitesse sur C cette condition s'écrit sous la forme

$$\oint_C V_n ds = \oint_C V_x dy - V_y dx = 0 \quad (1.2.4)$$

ou

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2.5)$$

qui exprime que la quantité de fluide contenue dans C est constant, i.e la quantité de fluide entrant dans C est égale la quantité de fluide qui en sort. Pour cette raison l'équation(1.2.4)ou (1.2.5) est appelée l'équation de continuité.

1.2.5 Lignes équipotentiellees et ligne de courant

Les familles de courbes un paramètre

$$\phi(x, y) = \alpha \quad \psi(x, y) = \beta \quad (1.2.6)$$

Où α et β désignent des constantes, sont des familles orthogonales et sont appelées respectivement les lignes équipotentiellees et les lignes de courant. Dans le cas d'un écoulement permanent les lignes de courant représentent les trajectoires des particules du fluide. La fonction ψ est appelée la fonction de courant cependant que comme déjà vu , la fonction ϕ est appelée le potentiel des vitesses.

1.2.6 Fonction de courant

Si le domaine de l'écoulement est un plan le vecteur de vitesse est vérifier à l'instant t

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (1.2.7)$$

Pour toutes les points de ce domaine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.2.8)$$

Cela implique que la forme différentielle $udx + vdy$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi, d(\psi) = udx + vdy \quad (1.2.9)$$

Implique

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (1.2.10)$$

ψ s'appelle la fonction de courant

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \wedge \left(\begin{array}{l} u = \partial \psi / \partial y \\ v = -\partial \psi / \partial x \end{array} \right) = -\partial^2 \psi / \partial^2 x - \partial^2 \psi / \partial^2 y = 0 \quad (1.2.11)$$

$\Rightarrow \Delta \psi = 0$, ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.2.7 Fonction de Potentiel

On rappelle que pour un écoulement irrotationnel: $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

Peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire $\vec{V} = \vec{\nabla} \phi$.

La fonction ϕ s'appelle fonction potentiel. On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Si de plus le fluide est incompressible la fonction ϕ vérifie l'équation de Laplace.

1.2.8 Le potentiel complexe

On voit d'après (1.2.1) et (1.2.5) que le potentiel des vitesses est harmonique. C'est-à-dire, vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 0 \quad (1.2.13)$$

On en déduit qu'il existe une fonction harmonique conjuguée $\psi(x, y)$ tel que

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.2.14)$$

Soit analytique. On a d'après (1.2.1), par dérivation

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} = V_x - iV_y \quad (1.2.15)$$

La vitesse (appelée quelque fois vitesse complexe) est donc donnée par

$$v = V_x - iV_y = \overline{d\Omega/dz} = \overline{\Omega'(z)} \quad (1.2.16)$$

et a pour module

$$V = |v| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \left| \overline{\Omega'(z)} \right| = |\Omega'(z)| \quad (1.2.17)$$

Les points pour lesquels la vitesse est nulle, ie. $\Omega'(z) = 0$, sont appelées points d'arrêt, La fonction $\Omega(z)$ dont l'importance est fondamentale dans la caractérisation d'un écoulement est appelée le potentiel complexe.

1.2.9 Le fluide est non visqueux

Ne possède pas de viscosité ou frictions internes. Un fluide visqueux a tendance adhérer la surface d'un obstacle placé sur son passage. S'il n'y a pas de viscosité les forces de pression sur la surface lui sont perpendiculaires. Un fluide non visqueux et incompressible est souvent appelé fluide parfait. On doit naturellement se rendre compte qu'un tel fluide n'est qu'un modèle mathématique de fluide réel pour lequel on néglige les phénomènes de viscosité.

1.2.10 Sources et puits

Dans les considérations théoriques précédentes nous avons supposé qu'il n'existe pas de point du plan des z [i.e. de droites dans le fluide] en lequel le fluide apparaît ou disparaît. De tels points sont respectivement appelées sources et puits. En de tels points, qui sont des points singuliers, les équation de continuité (1.2.5) et (1.2.13) ne sont plus valables. En particulier l'intégrale (1.2.4) exprimant la circulation peut ne pas être nulle le long de courbes fermées C entourant de tels points.

L'utilisation de la théorie précédente ne présente pas de difficultés pourvu que l'on introduise des singularités appropriées dans le potentiel complexe $\Omega(z)$ et que l'on remarque que les équations telles que (1.2.5) et (1.2.13) sont alors valables dans tout domaine ne contenant pas de point singulier.

1.3 Quelques écoulements particuliers

Théoriquement tout potentiel $\Omega(z)$ peut être associé un écoulement plan particulier. Les exemples qui suivent sont des cas simples qui se présentent dans la pratique. [On remarquera que l'on peut ajouter une constante tous les potentiels considérés sans affecter la forme de l'écoulement].

1.3.1 Écoulement uniforme

Le potentiel complexe correspondant l'écoulement d'un fluide à vitesse constante V_0 , dans une direction faisant un angle δ avec direction positive de l'axe des x , est :

$$\Omega(z) = V_0 e^{-i\delta} z \quad (1.3.1)$$

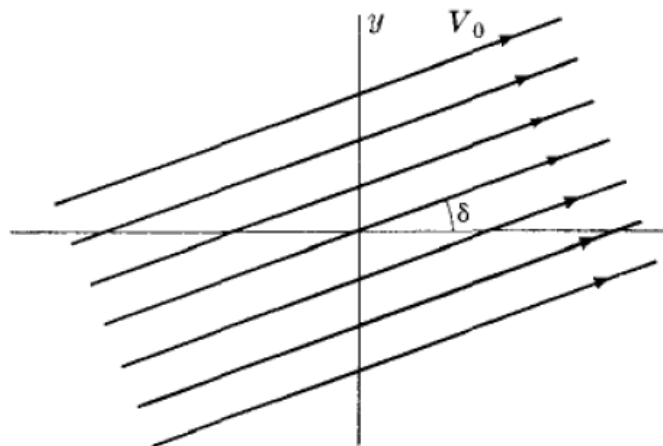


figure1.1

1.3.2 Source en $z = a$

Si un fluide sort par une vitesse constante d'une source en $z = a$ (figure1.2 ci -dessous), le potentiel complexe est:

$$\Omega(z) = K \log(z - a) \quad (1.3.2)$$

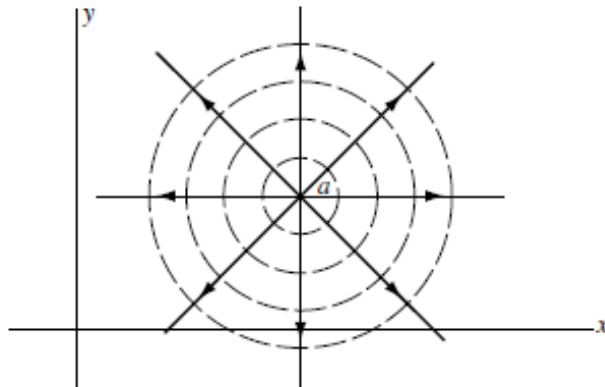


figure1.2

Où $K > 0$ est appelé la force de la source. Les lignes de courants ont été représentées en traits pleins et les équipotentiels en pointillés.

1.3.3 Puit en $z = a$

Dans ce cas le fluide disparaît en $z = a$ (figure1.3 ci-dessous) et le potentiel complexe se déduit de celui d'une source en remplaçant K par $-K$. ce qui donne:

$$-K \log(z - a) \tag{1.3.3}$$

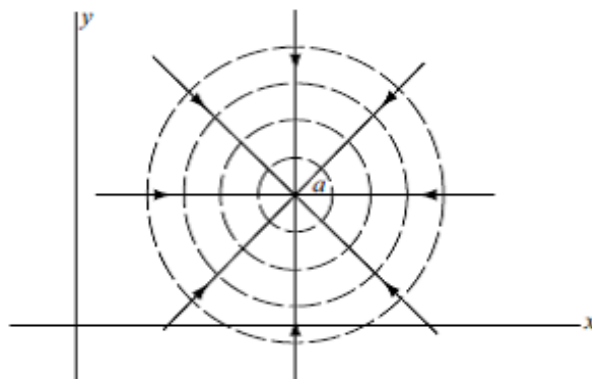


figure1.3

1.3.4 Tourbillon

L'écoulement correspondant au potentiel complexe:

$$\Omega(z) = -iK \log(z - a) \quad (1.3.4)$$

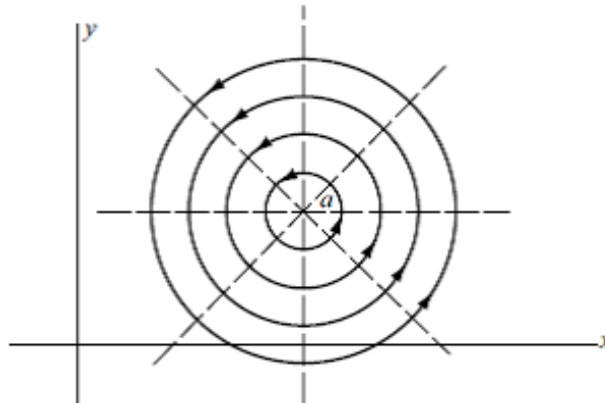


figure1.4

est représenté dans (figure1.4 ci-dessus). La vitesse d'un fluide est dans ce cas inversement proportionnelle à la distance du point considéré a . Le point $z = a$ est appelé un tourbillon et K est sa force. La circulation [voir équation 1.2.2] le long d'une courbe fermée simple C entourant $z = a$ est égale $2K\pi$ en module. On remarque que si l'on change K en $-K$ on obtient le potentiel complexe correspondant un tourbillon rétrograde.

1.3.5 Écoulement autour d'obstacles

Un important problème dans la théorie de l'écoulement des fluides consiste en la détermination de la forme de l'écoulement d'un fluide se déplaçant initialement vitesse constante V_0 et dans lequel on a placé un obstacle.

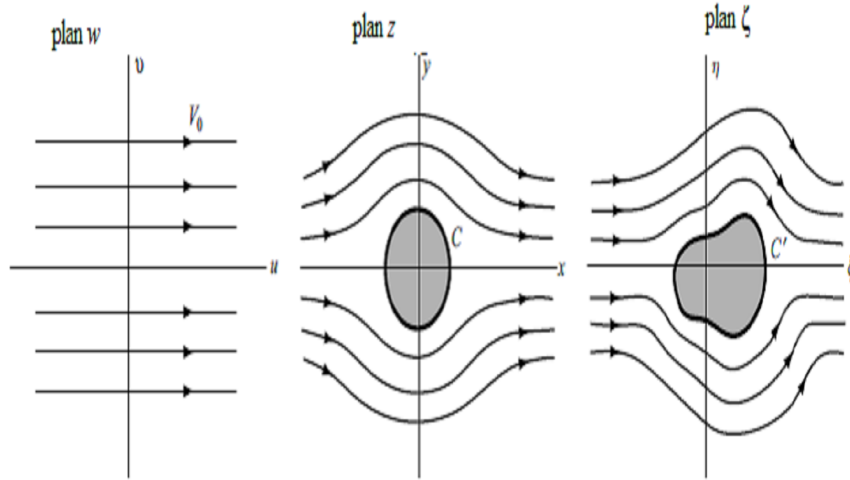


figure1.5

figure1.6

figure1.7

On cherche en général dans ce type de problème un potentiel complexe de la forme

$$\Omega(z) = V_0 z + G(z) \quad (1.3.5)$$

(si l'écoulement a lieu dans le plan des z) où $G(z)$ est tel que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} G'(z) = 0$, ce qui signifie physiquement que suffisamment loin de l'obstacle la vitesse est constante (dans ce cas V_0). De plus le potentiel complexe devra être choisi de telle façon qu'une ligne de courant représente la frontière de l'obstacle. Une connaissance de transformations conformes est souvent utile pour obtenir des potentiels complexes. Par exemple le potentiel complexe correspondant à un écoulement uniforme dans le plan des w de la (figure1.5) est donné par $V_0 w$. Par la transformation $w = z + a^2/z$ la moitié supérieure du plan des w de la (figure1.5) est transformée en la région de la moitié supérieure d'un plan des z extérieure au cercle C , et le potentiel complexe pour l'écoulement de la (figure1.6) est

$$\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (1.3.6)$$

De même si $w = F(\zeta)$ applique C et son extérieur sur C' [voir figure1.7], alors le potentiel complexe pour l'écoulement de la (figure1.6) est obtenu en remplaçant z par $F(\zeta)$ dans (1.3.6). Le potentiel complexe peut également être obtenu par passage direct du plan des w au plan des ζ au moyen d'une transformation conforme convenable.

A l'aide des considérations précédentes et en introduisant d'autres phénomènes physiques tels que des tourbillons on est en mesure de d'écrire l'écoulement d'un fluide de long de profils divers et ainsi de d'écrire le mouvement d'un avion en vol .

1.3.6 Équation de Bernoulli

Si P désigne la pression et V la vitesse d'un fluide l'équation de Bernoulli établit que :

$$P + \frac{1}{2}\sigma V^2 = K^2 \quad (1.3.7)$$

Où σ désigne la densité d'un fluide et K une constante le long de toute ligne de courant

Chapitre 2

Transformations conformes

2.1 Transformations

Définition 2.1.1 $w = u + iv$ (ou u et v sont des réels) est une fonction uniforme de $z = x + iy$ (ou x et y sont réels) nous pouvons écrire $u + iv = f(x + iy)$. En égalant les parties imaginaires et les parties réelles ceci est équivalent

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad (2.1.1)$$

Ainsi étant donné un point $(x; y)$ dans le plan de la variable z , tel que P dans la figure(2.1). ci -après, il lui correspond un point $(u; v)$ noté P' , du plan de la variable w (figure2.2). Les équations (2.1) sont appelées équations de la transformation. Nous dirons que le point P est transformé en P' par cette transformation et appellerons P' l'image de P .

Exemple 2.1.1 Si $w = z^2$ alors $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$. et la transformation est définie par $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$. L'image du point $(1, 2)$ du plan de la variable z est le point $(3, 4)$ du plan de variable w

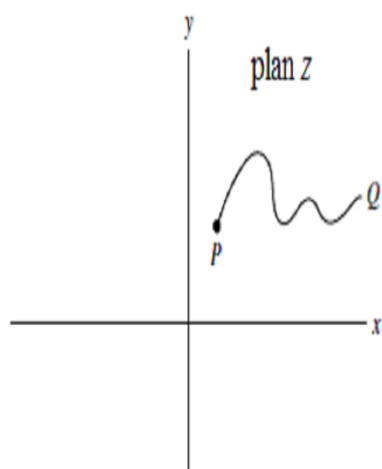


figure2.1

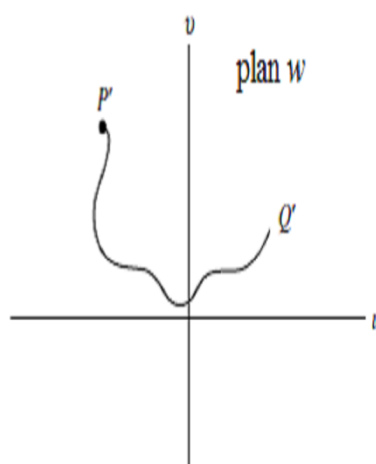


figure2.2

2.2 Forme complexe d'une transformation

Il est particulièrement intéressant de considérer le cas où u et v désignent la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$ i.e. $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$. dans un tel cas le jacobien de la transformation est:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 \quad (2.2.1)$$

On en déduit que la transformation est conforme dans les domaines où $f'(z) \neq 0$. les points pour lesquels $f'(z) = 0$ sont appelés points critiques.

2.3 Transformations conformes

Supposons que le point $(x_0; y_0)$ d'un plan des xy soit transformé en le point $(u_0; v_0)$ d'un plan des uv [figure2.3 et figure2.4] cependant que les courbes C_1 et C_2 [se coupant en $(x_0; y_0)$] sont respectivement transformées en C'_1 et C'_2 [se coupant en $(u_0; v_0)$]. Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 en $(x_0; y_0)$ est égale en grandeur et sens, l'angle entre C'_1 et C'_2 en $(u_0; v_0)$, est dite conforme en $(x_0; y_0)$ une transformation qui conserve les angles en

grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale

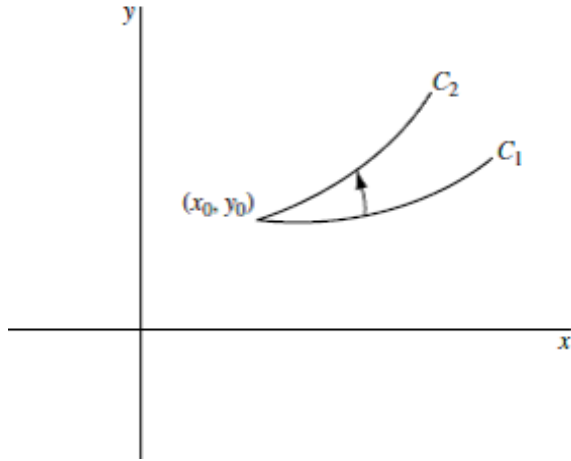


figure2.3

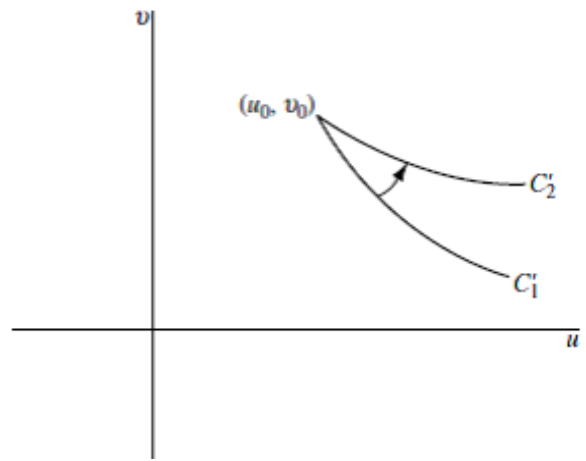


figure2.4

Théorème 2.3.1 *Si $f(z)$ est analytique et si $f'(z) \neq 0$ en tous les points d'un ouvert connexe Ω , la transformation $w = f(z)$ est conforme en tous points de Ω .*

2.4 Quelques transformations

2.4.1 Quelques transformations generales

Dans les exemples suivants α, β, γ sont des constantes complexes, a, θ_0 , étant des constantes réelles

Translation $w = z + \beta$

Par cette transformation les figures du plan z sont déplacées ou translatées dans la direction du vecteur β

Rotation $w = e^{i\theta_0} z$

Par cette transformation les figures du plan z subissent une rotation d'angle θ_0

Homothétie $w = az$

Par cette transformation les figures sont dilatées (ou contractées) si $a > 1$ (si $0 < a < 1$).
On considère la contraction comme un cas particulier de dilatation

Inversion $w = 1/z$

Pour z non nul transformé les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

Transformation linéaire $w = \alpha z + \beta$

Où α et β sont des constantes complexes est appelée une transformation linéaire. Etant donné que l'on peut écrire $w = \alpha z + \beta$ au moyen des transformations successives $w = \zeta + \beta, \zeta = e^{i\theta_0}\tau, \tau = \alpha z, \alpha = ae^{i\theta_0}$ on voit que la transformation linéaire la plus générale s'exprime sous la forme de produit de transformations telles que translation, rotation, homothétie.

Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.4.1}$$

Avec a, b, c, d des complexes. Transformée les cercles en droites et respectivement.

Transformation de Joukowski

La transformation de Joukowski est définie par : $w = \frac{\pi z}{\alpha}$

$$J(z) = z + \frac{1}{z}; \forall z \neq 0 \tag{2.4.2}$$

Cette application est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$ car :

$\forall z \neq 0, J'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$. De plus $\forall z \notin \{-1, 0, 1\}, J'(z) \neq 0$, donc cette transformation est une application conforme sur tous les domaines ouverts d'un plan complexe n'incluant ni 0 ni 1 et ni -1.

2.4.2 Representation sur le Demi -Plan

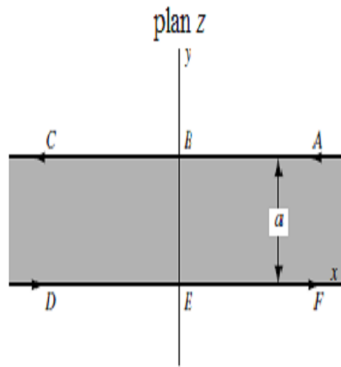


figure2.5

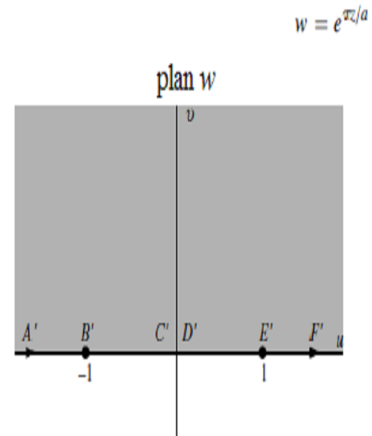


figure2.6

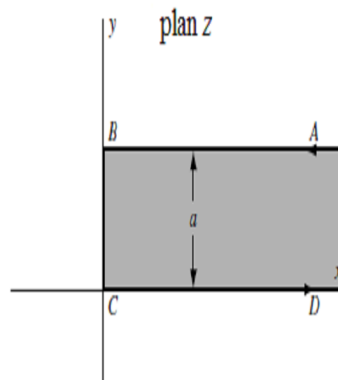


figure2.7

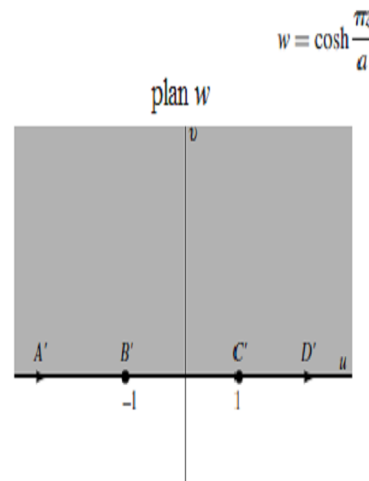


figure2.8

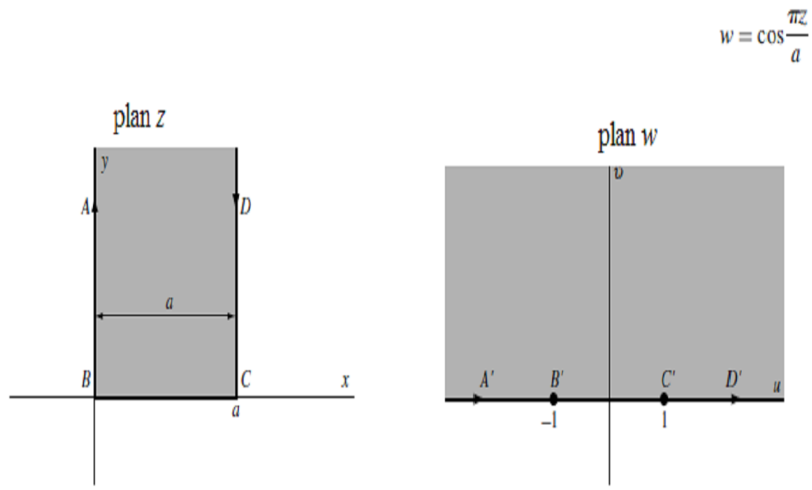


figure2.9

figure2.10

2.5 La transformation de Schwartz-Christoffel

Considérons un polygone [figure2.11] dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soient w_1, w_2, \dots, w_n les points correspondant respectivement x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z [figure2.12]

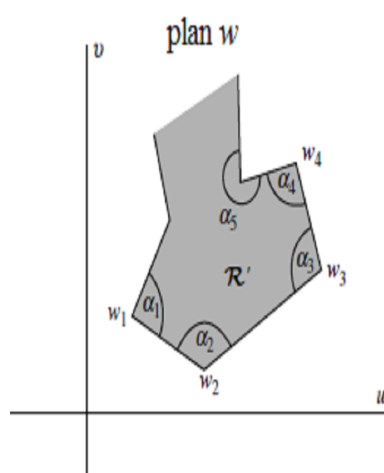


figure2.11

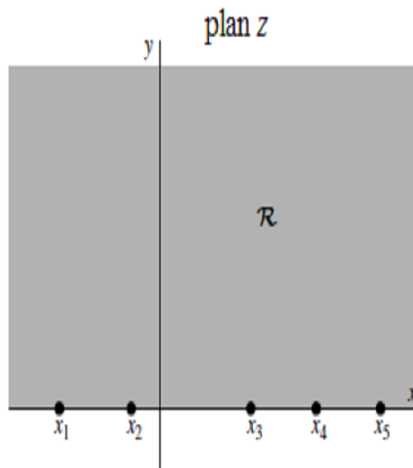


figure2.12

Une transformation qui représente l'intérieur R d'un polygone considéré sur le demi-plan supérieur d'un plan des z , et la frontière d'un polygone sur l'axe réel, est donnée par

$$\frac{dw}{dz} = (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} \quad (2.5.1)$$

où

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} dz + B \quad (2.5.2)$$

Où A et B sont des constantes complexes.

On notera que

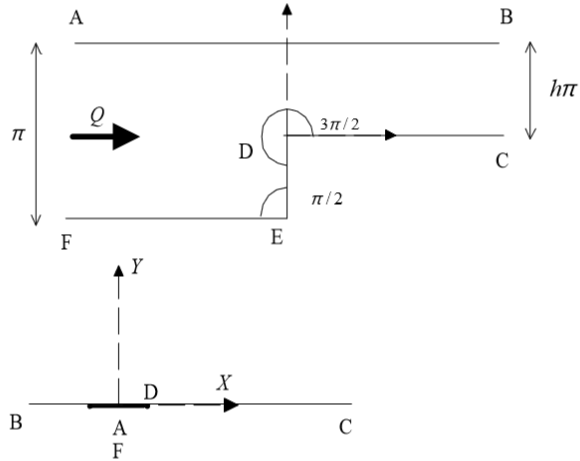
1. Parmi les points x_1, x_2, \dots, x_n on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de 2.5 et 2.6 n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

Exemple 2.5.1 *Marche d'escalier*

On étudie un écoulement irrotationnel au voisinage d'un rétrécissement brutal. À l'infini, il y a un écoulement parallèle de débit Q . Pour les besoins de l'exercice, on considère que la largeur AF vaut π et qu'en BC on a $h\pi$ avec $h < 1$. On ramène le problème en question à un problème plan à l'aide d'une transformation de Schwartz-Christoffel: les points A et F seront confondus avec l'origine (le point image sera assimilé à une source puisqu'en AF il transite un débit Q), le point D aura pour image D' situé en $Z = 1$, les points B et C sont repoussés à l'infini, seul le point E n'est fixé pour l'instant (on le laisse libre de façon

à pouvoir écrire la conservation des débits).

titre1



12.png

figure2.13

On a : $a_A = 0$, $a_E = \pi/2$, $a_D = 3\pi/2$, d'où l'on déduit les exposants : $p_A = 0$, $p_E = -1/2$, et $p_D = 1/2$. La transformation de Schwartz-Christoffel est donc:

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{K}{z} \sqrt{\frac{z-1}{z-z_E}} \quad (2.5.3)$$

Dans le plan Z , la solution irrotationnelle d'une source en $Z = 0$ est le potentiel complexe

$$\phi + i\omega = \frac{Q}{\pi} \ln Z = \frac{Q}{\pi} \ln R + \frac{Q}{\pi} \Theta \quad (2.5.4)$$

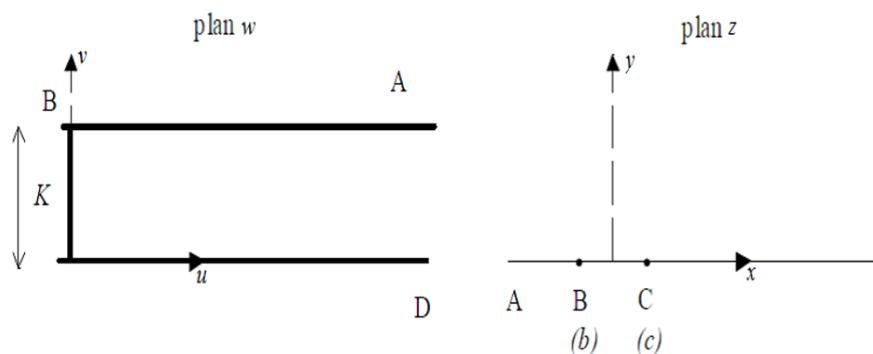
Si l'on pose $Z = Re^{i\Theta}$.

Exemple 2.5.2 Transformation d'une tranche de fluide

Considérons une tranche de fluide entre deux plans horizontaux. Les points $A; B; C$ sont en $+\infty, 0$ et $-\infty$ définissent un polygone dégénéré. Dans la transformation de Schwartz-Christoffel, tous les points se retrouvent sur le même axe ($y = 0$) comme le montre Dans le plan image, A est situé $+\infty; B'$ en $b; C'$ $c > b$; et D en $-\infty$. Les angles dans le plan w

entre les noeuds d'un polygone sont : $\alpha_B = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_C = \frac{\pi}{2}$, d'ou l'on tire : $p_B = \frac{-1}{2}$ et $p_C = \frac{-1}{2}$

titre



13.png

figure2.14 passage du plan w au plan z

L'équation de Schwartz-Christoffel donne :

$$\frac{dw}{dz} = K(z-b)^{-\frac{1}{2}}(z-c)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{z}$$

d'ou l'on tire

$$w(z) = 2K \ln(\sqrt{z-b} + \sqrt{z-c}) + w_0$$

On peut inverser cette équation et obtenir ainsi :

$$z = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(b-c) \cosh(K(w-w_0))$$

Les paramètres b et c peuvent être choisis librement, mais pas K et w_0 qui doivent être choisis de telle sorte que les points images soient bien les images souhaitées par la transformation $z(w)$

Chapitre 3

Quelques problèmes d'écoulement de fluides visqueux incompressibles

Résumé

Dans les situations d'écoulement impliquant des limites droites, nous appliquons le théorème de Schwartz-Christoffel et la méthode de l'hodographe peuvent fournir une technique pour résoudre analytiquement l'écoulement. Par exemple, l'écoulement à travers un orifice (jet libre), écoulement perpendiculaire sur plaque plane, et écoulement autour d'obstacles quelconques

dans ce chapitre nous étudions les deux problèmes suivantes:

- 1) L'écoulement à travers un orifice (jet libre)
- 2) L'écoulement perpendiculaire sur plaque plane

3.1 L'écoulement à travers un orifice avec séparation (jet libre)

Nous nous intéressons des écoulements potentiels irrotationnels . De l'équation de continuité $\nabla u = 0$, on tire que quel que soit l'écoulement d'un fluide incompressible , il existe toujours une fonction dite fonction de courant qui vérifie :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Avec $u = (u, v)$ dans un repère cartésien $x - y$. Si de plus l'écoulement est irrotationnel, alors sa vorticité est nulle : $\nabla u = 0$ et donc il existe une fonction dite potentiel de vitesse telle que : $u = -\nabla\phi$ Nous plaçons aussi en régime permanent de telle sorte que le théorème de Bernoulli soit vérifié le long des lignes de courant $\psi = cte$. On a négligé en première approximation l'effet du champ de pesanteur. On peut définir un potentiel complexe : $w = \phi + i\psi$: La dérivée de ce potentiel par rapport à $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe :

$$\frac{dw}{dz} = u - iv$$

3.1.1 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, au fond d'un réservoir infiniment grand, l'orifice a une largeur $\pi + 2b$, où l'effet de gravité et tension de surface sont négligés. Nous supposons que l'écoulement à l'infini ($y \rightarrow -\infty$) est uniforme et l'épaisseur du jet libre tend vers π , d'après la loi de Bernoulli la vitesse de l'écoulement potentiel sur les surfaces libres AI et AI' est $|V| = 1$. Le problème est de trouver le profil du surface libre et le coefficient de contraction du jet c'est-à-dire le rapport entre la largeur π du jet à l'infini et largeur $\pi + 2b$ de l'orifice.

3.1.2 Résolution du problème

Un liquide s'écoule sous la forme d'un jet libre à travers une fente dans une paroi plane d'un réservoir. Les autres parois sont suffisamment éloignées pour avoir un effet négligeable sur le profil d'écoulement au niveau de la fente et la paroi plane peut donc être considérée comme étant d'une étendue infinie (figure 3.1a).A

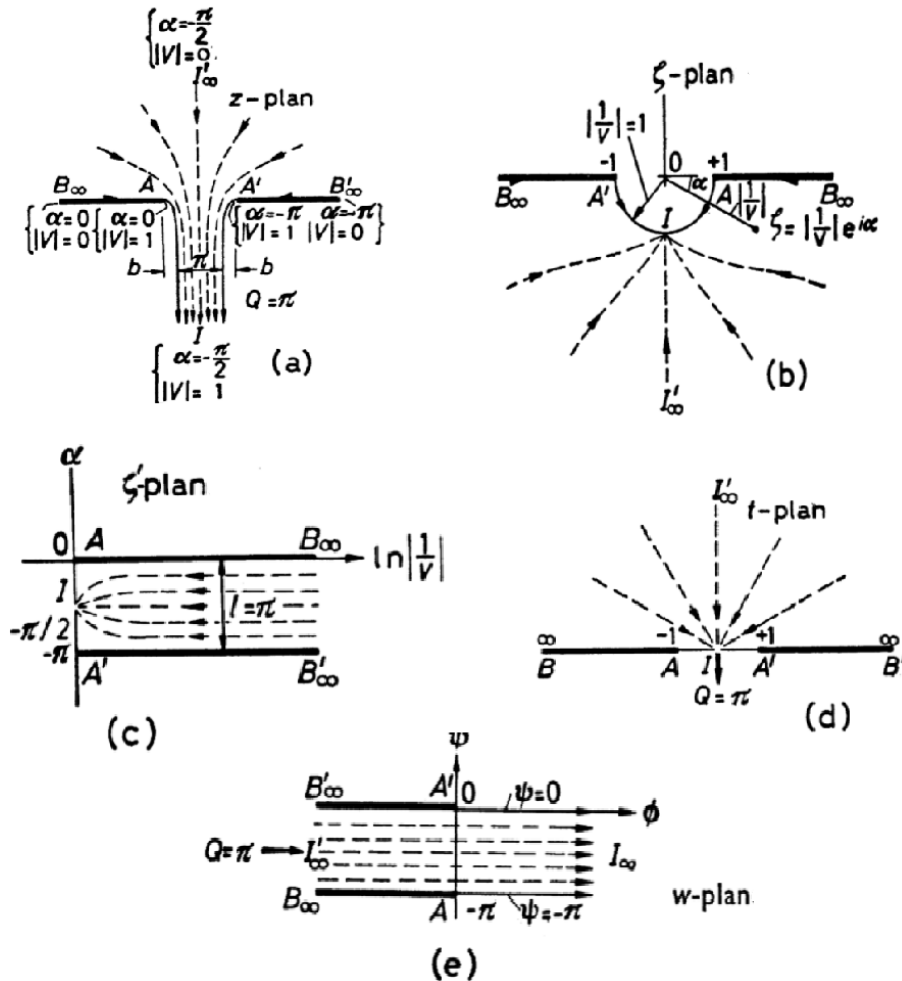


figure3.1jet libre

l'échelle de longueur est adoptée qui fait la vitesse libre de la ligne, et donc la vitesse finale de jet à I_∞ , l'unité. La décharge est arbitrairement fixée à π de sorte que la largeur de jet ultime est de π . La largeur de la fente est $\pi + 2b$, et b doit être déterminé. Le schéma d'écoulement dans chaque plan peut être trouvé en tenant compte des positions de divers points, la lettre utilisée pour désigner les points correspondants dans tous les plans. Dans la tabulation ci-dessous, les colonnes 1 à 4 sont remplies directement et les motifs sont esquissés (figures 3.1, a, b et c). Les constantes dans les fonctions de transformation de plan t et de plan- w sont déterminées, les colonnes 5 et 6 sont complétées et les modèles restants

3.1. L'écoulement à travers un orifice avec séparation (jet libre)

sont esquissés (figure 3.1 d et e)

point	plan				
	z	$\zeta = \left \frac{1}{V} \right e^{i\alpha}$	$\zeta' = \ln \left \frac{1}{V} \right + i\alpha$	$t = \cosh(\zeta' + i\pi)$	$w = -\ln t$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
B	$\alpha = 0, V = 0$	∞e^{i0}	$\infty + i0$	$-\infty = \infty e^{i\pi}$	$-\infty - i\pi$
A	$0 \quad 1$	e^{i0}	$0 + i0$	$-1 = e^{i\pi}$	$0 - i\pi$
I	$\frac{-\pi}{2}, \quad 1$	$e^{-i(\pi/2)}$	$0 - i\frac{\pi}{2}$	$i0 = 0e^{i(\pi/2)}$	$+\infty - i\frac{\pi}{2}$
A'	$-\pi, \quad 1$	$e^{-i\pi}$	$0 - i\pi$	$1 = e^{i0}$	$0 - i0$
B'	$-\pi, \quad 0$	$\infty e^{-i\pi}$	$\infty - i\pi$	$\infty = \infty e^{i0}$	$-\infty - i0$
I'	$\frac{-\pi}{2}, \quad 0$	$\infty e^{-i(\pi/2)}$	$\infty - i\frac{\pi}{2}$	$\infty = \infty e^{i(\pi/2)}$	$-\infty - i\frac{\pi}{2}$

$\zeta' \rightarrow t$. La bande semi-infinie dans le plan ζ' est ouvert à la B, B^1 vertex et, le long de l'axe réel t -plan B, A et A^1 sont situés dans l'ordre at $-\infty, -1$ et 1 . De la symétrie, on voit que je tombe à l'origine et B at $+\infty$. Puisque, dans le plan ζ , l est égal à π et A^1 est situé à $-i\pi$, nous avons :

$$t = \cos \frac{\pi}{l} (\zeta' - \zeta_1)$$

$$t = \cos(\zeta' + i\pi)$$

qui est la transformation montrée dans la colonne 5.

$t \rightarrow w$. Le flux vers le demi-puits à l'origine du t -plan étant $Q = \pi$. la transformation vers le w -plan est donnée par:

$$w = -\ln t$$

Ce qui permet de compléter les entrées de la colonne 6 et d'esquisser le motif du plan w (figure 3.1d)

Les transformations successives sont:

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = \left| \frac{1}{V} \right| e^{i\alpha}$$

$$\zeta' = \ln \zeta = \ln \left| \frac{1}{V} \right| + i\alpha$$

3.1. L'écoulement à travers un orifice avec séparation (jet libre)

$$t = \cosh(\zeta' + i\pi)$$

$$w = -\ln t \quad \text{ou} \quad t = e^{-w}$$

$$e^{-w} = \cosh \left[\ln \frac{dz}{dw} + i\pi \right]$$

Pour toutes les lignes de courant.

Pour le profil les lignes de courant libre AI (figure 3.1a)

$$\zeta' = i\alpha$$

où α varie de 0 à $\frac{-\pi}{2}$

$$t = \cosh i(\alpha + \pi) = \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

et

$$ds = dw = \frac{-dt}{t} \quad \text{depuis} \quad w = -\ln t$$

$$dx = \cos \alpha ds = -\cos \alpha \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad t = -\cos \alpha$$

$$dx = dt$$

Lorsque x augmente de 0 à b , entre les points A et I , t augmente de -1 à 0 .

$$b = \int_0^b dx = \int_{-1}^0 dt = 1$$

D'où le coefficient de contraction = $\frac{\pi}{\pi+2b} = \frac{\pi}{\pi+2} = 0.61$

Pour l'équation du profil, nous avons, depuis $dx = dt$

$$x = t + C \quad C \text{ est constant}$$

$$= -\cos \alpha + C$$

$x = 0$ quand $\alpha = 0$, donc $C = 1$

$$x = 1 - \cos \alpha$$

$$dy = \sin \alpha ds$$

$$= -\sin \alpha \frac{dt}{t}$$

$$= \sin \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} dx$$

$$= \sin \alpha \tan \alpha dx$$

$$y = \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) - \sin \alpha$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \cos \alpha \\ y = \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) - \sin \alpha \end{array} \right\}$$

Ces équations permettent de tracer le profil, les coordonnées x et y étant calculées pour différentes valeurs de α . Puisque l'analyse ne tient pas compte de la gravité, le profil théorique s'écarte du réel à mesure que la distance de la fente augmente et que les effets de gravité deviennent appréciables. Le profil de la moitié de jet peut être considéré comme celui de l'écoulement sous une vanne verticale, les effets gravitationnels étant négligés.

3.2 L'écoulement perpendiculaire sur plaque plane

3.2.1 Position de problème

Soit AA' une plaque plane horizontale, dans un écoulement de fluide incompressible de vitesse à l'infini $V = 1$. Dans la description du sillage de Helmholtz on suppose que l'écoulement décolle aux extrémités A et A' de la plaque, provoquant ainsi la présence en aval de celle-ci,

d'une zone de fluide au repos dont on peut montrer qu'elle s'étend nécessairement jusqu'à l'infini. Le problème qui se pose est de trouver l'écoulement potentiel en dehors de ce sillage et de déterminer, en particulier, la forme des lignes de jet issues des points A et A' . L'allure de l'écoulement et de calculer la résistance F éprouvée par la plaque. La zone d'eau morte située derrière la plaque est à pression constante puisqu'il n'y a pas de mouvement, de plus, cette pression est nécessairement p puisque la zone d'eau morte s'étend jusqu'à l'infini. L'application de la loi de Bernoulli montre alors que la vitesse de l'écoulement potentiel extérieur sur les lignes de jet AI_∞ et $A'I'_\infty$ est $|V| = 1$.

3.2.2 Résolution du problème

Le cas de l'écoulement d'une plaque plane avec séparation a été traité par les transformations aux plans $-\zeta$, $-\zeta'$ et t sont simples (Fig. 3.2), la relation ζ' , $-t$ étant

$$\begin{aligned} t &= \cos \frac{\pi}{l} (\zeta' - \zeta_1) \\ &= \cosh(\zeta' - i\pi) \end{aligned}$$

Le motif dans le plan t est celui du flux de l'origine I vers l'extérieur vers l'arc infini représentant le point C , et de nouveau vers l'origine (figure 3.2d). Ce modèle n'est pas susceptible de transformation directe vers le plan w . Cependant, une transformation intermédiaire en un plan w' , l'ouverture du modèle de telle sorte que l'axe négatif réel est tourné d'un angle π dans le sens inverse des aiguilles d'une montre produirait le motif d'un doublet. La transformation nécessaire du plan t vers le plan w' est similaire à celle de l'écoulement autour de l'extrémité d'une plaque mince ($z = Aw^2$), C'est

$$w' = At^2$$

Pour le point $A', t = +1$, et w' est réel et positif, donc A est

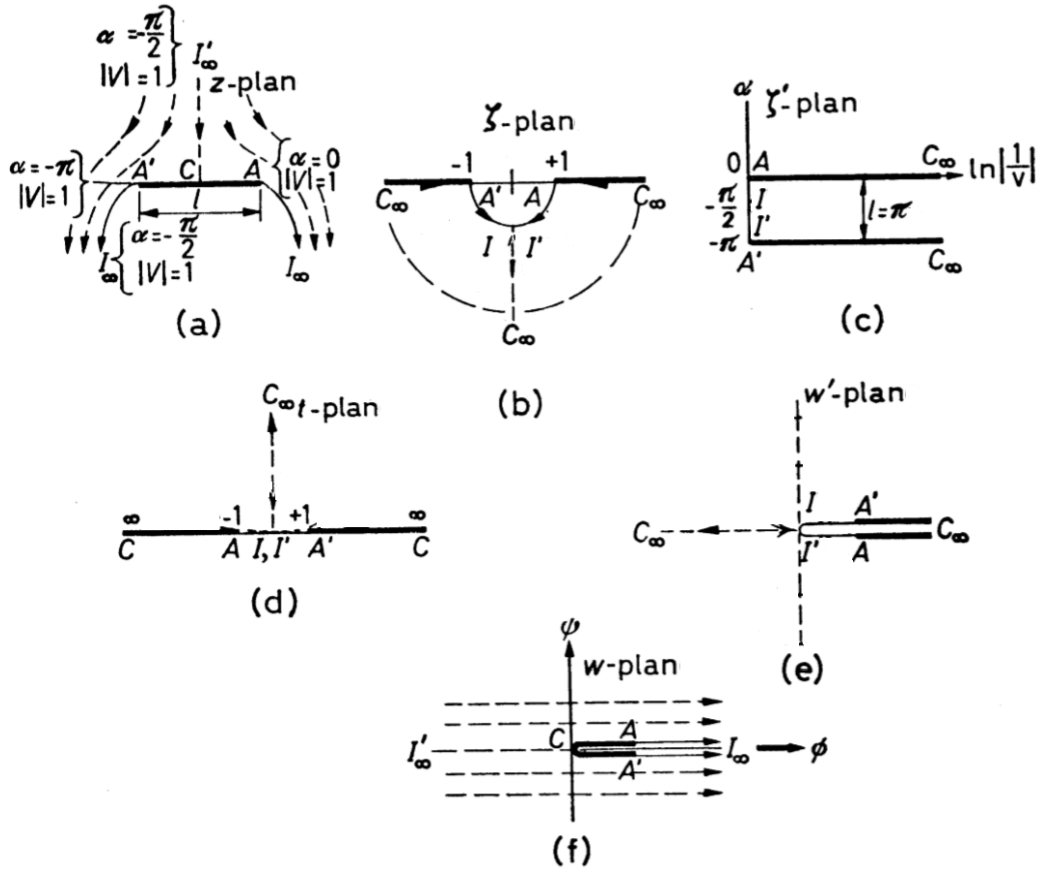


figure3.2

une constante réelle et positive. La transformation du doublet en plan w est effectuée par :

$$w = \frac{1}{w'} = \frac{1}{At^2} = \frac{C}{t^2}$$

où C est une constante positive réelle.

En variante, la transformation $w - t$ peut être obtenue comme suit. D'après un examen du plan z , il est évident que la plaque doit être pliée autour du point C de sorte que la ligne de séparation se réunisse pour produire le motif uniforme du plan w . Le diagramme du plan w (Fig. 3.2e) peut donc être tiré directement du plan z et il peut être considéré comme un polygone $CI_\infty I'_\infty I_\infty C$, qui occupe tout le plan w . Le total des angles de déviation pour les sommets à l'infini est 3π et ces sommets peuvent être traités comme un seul. Au moyen

d'une transformation $S - C$, le polygone peut être mappé sur le plan t pour produire un motif conforme à celui déjà obtenu, le sommet C ouvert étant placé à $t = \infty$ et I à $t = 0$

$$w = A_1 \int \frac{dt}{t^2} + B_1 = -\frac{\frac{1}{2}A_1}{t^2} + B_1 = \frac{C}{t^2} + B_1$$

Si le point C vaut $w = 0$, B_1 est nul; et puisque, pour le point A , w et t^2 sont à la fois réels et positifs, C est réel et positif. C est déterminé par la largeur, l , de la plaque. Le long de CA

$$\zeta = \frac{1}{|V|} e^{i\alpha} = \frac{1}{V} = \frac{1}{q}$$

où q est désormais écrit pour la vitesse, $|V|$

Ainsi, le long de CA

$$\begin{aligned} t &= \cosh(\zeta' + i\pi) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\ln q + i\pi} + e^{-\ln q - i\pi}) \end{aligned}$$

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$$

et depuis

$$t = -\frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right)$$

$$q = -t - \sqrt{t^2 - 1}$$

Le signe négatif étant choisi de manière à rendre $q = 0$ pour le point C à $t = -\infty$.

Le long de la ligne de courant CA dans le plan z , $q = \frac{d\phi}{dx}$, et dans le plan w , $w = \phi$ puisque CA est dans l'axe réel, donc $\frac{dw}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{-2C}{t^2}$.

Ces relations sont utilisées dans l'intégration le long de CA :

$$\frac{l}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} dt = - \int_{-\infty}^{-1} \frac{2C}{qt^2} dt$$

Substitution pour q rendements, lors de l'intégration :

$$C = \frac{l}{\pi + 4}$$

3.2. L'écoulement perpendiculaire sur plaque plane

$$w = \frac{l}{(\pi + 4)t^2}$$

Le long de la ligne de courant libre AI , $\zeta^1 = i\alpha$ et donc :

$$t = \cosh(i\alpha + i\pi) = \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

En outre, puisque w est réel le long de AI , $i\psi$ est égal à zéro et

$$\phi = w = \frac{C}{t^2} = C \sec^2 \alpha$$

et, depuis $q = \frac{d\phi}{ds} = 1$,

$$s = \phi$$

$$s = \frac{1}{\pi + 4} \sec^2 \alpha$$

Avec α . variant de 0 à $\frac{-\pi}{2}$ le long de AI . De là, prenant le centre de la plaque comme origine,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2l}{\pi+4} (\sec \alpha + \frac{\pi}{4}) \\ y = \frac{l}{\pi+4} [\sec \alpha \tan \alpha - \ln \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})] \end{array} \right\}$$

La force résultante sur la plaque découle de l'équation de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho q^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho q_0^2$$

où p_0 et q_0 se réfèrent au fluide non perturbé. Avec q_0 comme unité

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho(1 - q^2)$$

$$F = \pi \rho C q_0^2 = \frac{\pi}{\pi + 4} \rho q^2 l^2 = 0.440 \rho q^2 l^2$$

$$F = C_D A \frac{1}{2} \rho q_0^2$$

Et l'intégration à travers la plaque donne la force de pression sur la face amont, par unité de longueur de la plaque

$$F = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \rho (1 - q^2) dx = \rho \int_{-\infty}^{-1} (1 - q^2) \frac{dx}{dt} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= -2\rho C \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{q} - q\right) \frac{dt}{t^3} \\
 &= -4\rho C \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^3} dt \\
 &= \pi\rho C
 \end{aligned}$$

Selon l'équation de Bernoulli, la pression varie en fonction du carré de la vitesse et, puisque tous ces mouvements sont géométriquement similaires, la force résultante sera proportionnelle au carré de la vitesse d'approche. Par conséquent, pour toute vitesse d'approche q_0

$$F = \pi\rho C q_0^2 = \frac{\pi}{\pi + 4} \rho q_0^2 l^2 = 0.440 \rho q_0^2 l^2$$

$$F = C_D \frac{l^2}{2} \rho q_0^2$$

d'où $\frac{C_D}{2} = 0.440 \Rightarrow C_D = 0.880$

C_D = coefficient de traînée avec une valve, selon cette solution, de 0.880.

Conclusion

Dans cet actuel mémoire. Nous avons donné quelque définition sur l'analyse complexe et mécanique de fluide , et donné aussi quelque transformation classique et conforme. et nous appliquons le théorème de Schwartz-Christoffel et la méthode de l'hodographe peuvent fournir une technique pour résoudre analytiquement l'écoulement. Par exemple, l'écoulement à travers un orifice (jet libre), écoulement perpendiculaire sur plaque plane, et écoulement autour d'obstacles quelconques

Bibliographie

- [1] -**Christophe ANCEY**,Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides
- [2] -**Murray R,Spiegel,Ph.D.Seymour Lipschutz**;Schaum's outlines complex variables
- [3] -**Stéphane Ravier et Mattieu Rigaut**,Mécanique des fluides, Ecole Normale Supérieure de LYON, janvier 2000.
- [4] -**Rimi KHAZANI** ,Résolution analytique du problémé d'écoulement sans l'effet de gravité ,UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA 25 mai 2016
- [5] -**HAMIDI ASMA** ,Traitement analytique de problème d'écoulement par la méthode de Kirchhoff ,UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA 18 juin2017
- [6] -**M.Damou** ,Mécanique des fluides ,(O.P.U),Septembre1993.
- [7] -**J.gosse** ,Mécanique des fluides ,(53-64).1976.
- [8] -**A.Gasmi** ,Ecoulement potentiel et bidimensionnel issu d'un orifice d'un réservoir.Thèse de Magister,1997.
- [9] -**Stephen Childress** ,An Introduction to Theoretical Fluid Dynamics, February 12, 2008