UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

BENAROUS Maria

Sujet

Etude comparative des méthodes d'Adomian et Picard

Devant le jury :

Selt Omar	Prof.	Univ. de M'sila	Président
Lakehali Belkacem	Prof.	Univ. de M'sila	Encadreur
Gagui Bachir	Prof.	Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

بسم الله الرحمن الرحيم

١٤٣٨

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **Belkacem LAKEHALI** *pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

Je tiens à remercier les membres de jury qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille en particulier mes parents,et mes soeurs sans oublier mes chères amies pour leur soutient tout au long de mes études.

Dédicaces

je didie ce modeste travail.

à mes chers parents ma mère et mon père.

pour la patience et le soutien toujours.

A mes *soeur* **Asma** et son fils **Anas** et **khadidja.**

Surtout à ma chère **Khaira.**

Et à toute la famille.et toute mes amies.

Meriem Widade Alia Rahima Bouchra

Nadia.Manel Fayza

A tous collègues de promotion.

En fin je didie ce mémoire à

tout que me aime.

Table des matières

1 Rappels d'Analyse fonctionnelle **1**

1.1 Définitions préliminaires 1

2 Équations intégrales linéaires **3**

2.1 Introduction 3

2.2 Classification des équations intégrales 3

2.3 Équations intégrales de Volterra 4

2.4 Équations intégrales de Fredholm 5

2.5 L'éxistence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale 6

3 Méthodes d'Adomian et des approximations successives **10**

3.1 Méthode d'Adomian 10

3.1.1 Principes de la méthode d'Adomian: 12

3.1.2 Convergence de la méthode d'Adomian 13

3.1.3 Exemples 15

3.2 Méthode des approximations Successives 18

3.2.1 Principes de la méthode d'approximations successives 18

3.2.2 Condition de solvabilité de la méthode de Picard 19

3.2.3 Exemples 20

4 Comparaison entre les deux méthodes **23**

4.1 Exemples 23

4.2 Conclusion et Perspective 30

Introduction

Mon travail est essentiellement basé sur les deux méthodes **d'Adomian** et **Picard**. En 1894 Emile Picard est le premier qui à donné la méthode d'approximations successives, la solution de ses méthodes sont sous la forme d'une série. Puis en 1981 le professeur **George Adomian** a présenté de à nouveau une méthode qui ressemble beaucoup à la méthode de Picard. Les deux méthodes consistent à chercher des solutions sous forme de série. Elles sont considérées comme des solutions analytiques. Ce mémoire se compose de quatre chapitre, le premier est consacré à l'étude de l'espace fonctionnel dans lequel on a travaillé. Dans le second chapitre on a présenté les équations intégrales linéaires. La troisième chapitre on a présenté les méthodes de Picard et d'Adomian. Dans le dernier chapitre on a donné une comparaison par des exemples, suivie d'une conclusion.

Chapitre 1

Rappels d'Analyse fonctionnelle

1.1 Définitions préliminaires

Dans ce mémoire, notre étude sera supposé dans l'espace des fonctions continues muni de la norme de la convergence uniforme $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$.

Définition 1.1.1 *On appelle norme sur l'espace $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$ toute application notée $\|.\|$ définie sur $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$ par:*

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}^+$$

vérifiant pour tout x et y dans $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$ et α dans $\mathbb{k}$ les conditions suivantes :

1. ***Séparation :*** $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. ***Homogénéité :*** $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$
3. ***Inégalité triangulaire :*** $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Tout espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$, on dit que espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2 *L'éspace des fonctions continues définit par:*

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} / f : \textit{continue}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

est un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.1 *L'ensemble $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$ des fonctions continues sur $[a,b]$, sur lequel on peut définir de nombreuses normes, la plus classique étant la norme dite* ***la norme de la convergence uniforme****, définie par :*

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Définition 1.1.3 *On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est convergente si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Définition 1.1.4 *La suite (u_n) est dite de cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon},\ \forall p,q \geq N_{\varepsilon}, \quad \text{on a} \quad \|u_p - u_q\| < \varepsilon$$

Remarque 1.1.1 *Toute suite converge est une suite de cauchy mais l'inverse n'est pas vraie. Si l'inverse est vraie on a :*

Définition 1.1.5 *Un espace vectoriel normé $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$, est dit complet, si toute suite de Cauchy (u_n) d'éléments de $C([a,b])$ est une suite convergente dans $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$ Autrement dit,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geq N_{\varepsilon}, \quad \text{on a} \quad \|u_p - u_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément $u \in C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$ tel que

$$u_n \to u$$

Théorème 1.1.1 *L'espace $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$ est un espace complet pour la norme $\|.\|_{\infty}$. Donc $C\left([a,b], \|.\|_{\infty}\right)$ est de Banach. Pour plus de détails, voir [1].*

Chapitre 2

Équations intégrales linéaires

2.1 Introduction

En mathématiques, une équation intégrale est une équation dans laquelle une fonction inconnue apparaît sous un signe intégrale. Il existe un lien étroit entre équations différentielles et intégrales, et certains problèmes peuvent être formulés de toute façon. Voir, par exemple, la théorie de Fredholm.

2.2 Classification des équations intégrales

Une équation intégrale peut être classée comme étant une équation intégrale linéaire ou bien comme une équation intégrale non linéaire. Il y a une similitude parfaite avec la classification des équations différentielles ordinaires ou celle aussi des équations aux dérivées partielles. Les équations intégrales les plus fréquement utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm qui consistuent donc les deux principales catégories. A ces deux catégories d'équations intégrales, nous pouvons considérer encore deux autre types, à savoir les équations intégro-différentielles et les équations intégrales singulières.

Nous savons que l'équation intégrales dans ce formule :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2.2.1}$$

où $k(x,t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale (2.2.1), $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ se sont les limites de l'intégration. On peut facilement observer que la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît aussi sous le signe de l'intégrale. Il est à noter ici que le noyau $k(x,t)$ et la fonction $f(x)$ dans l'équation (2.2.1) sont des fonctions donné, et λ est une constante paramètre au sens physique on supposera dans toute la suite que $\lambda = 1$. L'objectif principal de ce texte est de déterminer la fonction inconnue $\varphi(x)$ qui va satisfaire l'équation (2.2.1) en utilisant un certain nombre de techniques de solutions. Nous doit consacrer des efforts considérables dans l'exploration de ces méthodes pour trouver des solutions de la fonction inconnue.

2.3 Équations intégrales de Volterra

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de second espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{2.3.1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues.

1. Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(x)$$

   elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de second espèce.

2. Une équation de la forme

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

   est appelée équation intégrale de Volterra linéaire de premièr espèce

3. Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

Cette équation est dite équation intégrale homogène de volterra de premièr espèce.

2.4 Équations intégrales de Fredholm

On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x \in [a,b] \tag{2.4.1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue à l'extérieur et l'intérieur du singe intégrale $k(x;t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues.

1. Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(x), \quad x \in [a,b]$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm homogène de second espèce homogène.

2. Une équation de la forme

$$\int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x \in [a,b]$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de premièr espèce.

3. Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0, \quad x \in [a,b]$$

Cette équation est dite équation intégrale homogène de Fredholm de premiè espèce.

Notion sur les opérateurs

Définition 2.4.1 *Opérateur linéaire*

Soient E et F deux espaces normés A un opérateur défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

1. **Condition additive :**

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E \text{ on a } A\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) = A\left(\varphi_1\right) + A\left(\varphi_2\right)$$

2. **Condition homogène :**

$$\forall \varphi \in E, \text{ et } \lambda \in \mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$$

Définition 2.4.2 *Opérateur linéaire borné*

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $c > 0$, telle que :

$$\|A(\varphi)\|_F \leq c\,\|\varphi\|_E \ , \forall \varphi \in E$$

Opérateur intégrale linéaire

Un opérateur intégrale ou un opérateur linéaire à noyau défini à l'aide d'une intégrale paramétrique sur certains espace fonctionnels. La forme général d'un opérateur intégrale est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} A &: C([a,b], \|.\|_\infty) \to C([a,b], \|.\|_\infty) \\ \varphi &= (A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt \end{aligned}$$

où

$$k : C([a,b], \|.\|_\infty) \times C([a,b], \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$$

est une fonction continue qui s'appelle le noyau de l'opérateur intégrale A. Cet opérateur est borné, avec

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |k(x,t)\,\varphi(t)|\,dt$$

2.5 L'éxistence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale

théorème du point fixe

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach. On va appliquer les théorèmes classiques du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour la résolution d'une équation de la forme $A\varphi = \varphi$, où A est un opérateur défini sur un espace de Banach E, pas nécessairement linéaire.

Définition 2.5.1 *Contraction*

Soit A un opérateur borné sur un espace de Banach E. On dit que A est un opérateur contractant s'il existe une constante positive k, $0 < k < 1$ telle que

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\| \tag{2.5.1}$$

pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in E$.

Le résultat suivant est appelé théorème de l'application contractante. Nous allons voir que si A est un opérateur ***contractant****, alors cette équation admet une solution unique pour tout f dans E.*

Théorème 2.5.1 *Soit A un opérateur contractant sur E. Alors l'équation*

$$A\varphi = \varphi \tag{2.5.2}$$

admet une solution unique dans E. Une telle solution est dite un point fixe de l'opérateur A.

Preuve. Montrons d'abord l'unicité du point fixe raisonnons par l'absurde. Supposant qu'il existe deux points fixes φ_1 et φ_2 telle que

$$A\varphi_1 = \varphi_1 \quad \text{et} \quad A\varphi_2 = \varphi_2$$

alors

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| - k \|\varphi_1 - \varphi_2\| < 0$$

$$(1 - k) \|\varphi_1 - \varphi_2\| < 0$$

le terme $(1 - k) > 0$, d'où $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$, ce qui implique que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Pour montrer l'existence, nous allons construire le processus itérative suivant :

$$\begin{cases} \varphi_0 & \text{solution initiale} \\ \varphi_{n+1} = A\varphi_n, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

On doit montrer d'abord que cette suite est de Cauchy, et que sa limite est une solution de (2.5.2). La limite existe, découle du fait que dans un Banach toute suite de Cauchy est convergente. Notons que,

$$\begin{aligned} \left\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\right\| &= \left\|A\varphi_n - A\varphi_{n-1}\right\| \leq k\left\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\right\| \\ &\leq k\left\|A\varphi_{n-1} - A\varphi_{n-2}\right\| \leq k^2\left\|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\right\| \\ &\leq k^2\left\|A\varphi_{n-2} - A\varphi_{n-3}\right\| \leq k^3\left\|\varphi_{n-2} - \varphi_{n-3}\right\| \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &\leq k^n\left\|\varphi_1 - \varphi_0\right\| \end{aligned}$$

$\left\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\right\| \leq k\left\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\right\| \leq k^2\left\|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\right\| \leq k^3\left\|\varphi_{n-2} - \varphi_{n-3}\right\| \leq \cdots \leq k^n\left\|\varphi_1 - \varphi_0\right\|$

En général, si $n > m$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_m\| &= \left\|(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \cdots + (\varphi_{m+1} - \varphi_m)\right\| \\ &\leq \left\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\right\| + \left\|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\right\| + \cdots + \left\|\varphi_{m+1} - \varphi_m\right\| \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^m)\|\varphi_1 - \varphi_0\| \\ &\leq (k^m + k^{m+1} + \cdots)\|\varphi_1 - \varphi_0\| = \frac{k^m}{1-k}\|\varphi_1 - \varphi_0\| \end{aligned}$$

car $k < 1$, donc

$$\lim_{n,m\to\infty}\|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$$

■

Par conséquent, la suite (φ_n) est de Cauchy, notons sa limite par φ. Il reste à montrer que φ est une solution de (2.5.2). Comme A est continu, puis A est un opérateur compact nous avon :

$$A\varphi = A(\lim_{n\to\infty}\varphi_n) = \lim_{n\to\infty}A\varphi_n = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \varphi$$

Équations intégrales de Fredholm de second espèce

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)\,, \quad x \in [a,b] \tag{2.5.3}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelle parcourant l'intervalle $[a,b]$ et λ est paramètre reél.

La fonction $k(x,t)$ est le noyau de l'équation intégrale (2.5.3), on suppose que le noyau $k(x,t)$ est défini dans le carré $[a,b]$ $\{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ du plan (x,t) et continu dans $[a,b]$, ou bien présente des discontinuités telle que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2\,dxdt < \infty \tag{2.5.4}$$

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.5.3) est dite non homogéne, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2.5.3) s'écrit

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

on dit alors qu'elle est homogène. Voir [2]

Soit l'équation intégrale issue d'un noyau continu $k(x,y)$

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{2.5.5}$$

qu'on peut l'écrire aussi sous la forme :

$$\varphi - A\varphi = f \tag{2.5.6}$$

$$(I - A)\,\varphi = f$$

L'existence de la solution pour cette équation dépend de l'existence de l'inverse de l'opérateur $(I - A)$. Comme A est compact, alors l'opérateur inverse de $(I - A)$ existe voir [3].

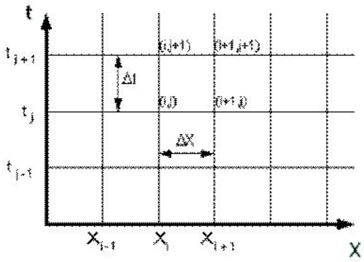
Chapitre 3

Méthodes d'Adomian et des approximations successives

Les méthodes classiques de résolution des équations mathématiques sont les méthodes des différences finies, des volumes finis et les méthodes des éléments finis donnent des approximations de la solution en des points discrets. En outre, ces méthodes requiret des techniques de discrétisation de l'espace et du temps.

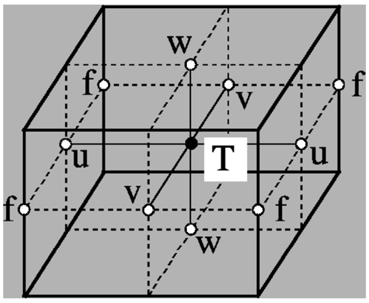
3.1 Méthode d'Adomian

En 1981, le professeur **George Adomian** présente les bases d'une méthode en évitant la discrétisation du domaine. Cette méthode est basées sur la décomposition en série c'est **la méthode d'Adomian**. Généralement la résolution analytique des équations intégrales de Fredholm sont difficiles voire impossible. C'est pour cette raison, on doit chercher des solutions approchées, parmi les méthodes de résolutions. On va traité deux méthodes.



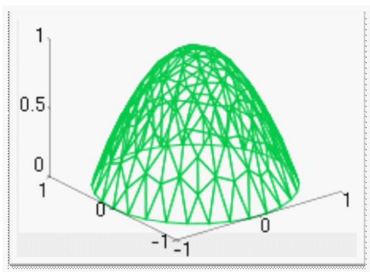
Discretisation par

Difference finies dans $\mathbb{R}^2$



Discretisation par Volumes

finis dans $\mathbb{R}^3$



Discretisation par éléments

finis dans $\mathbb{R}^3$

3.1.1 Principes de la méthode d'Adomian:

La méthode d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnells de différents types : équations algébriques, différentielles, intégrales, intégro-différentielles, aux dérivées partielles (EDP). La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes **linéaires**. Il suffit d'écrire l'équation fonctionnelle sous la forme :

$$\varphi - A\varphi = f \tag{3.1.1}$$

où A est un opérateur intégrale linéaire et f une fonction connue.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} \varphi_n(x) \tag{3.1.2}$$

et à **décomposer** le terme linéaire $A\varphi$ sous forme d'une série :

$$A\varphi = \sum_{n\geq 0} A_n \tag{3.1.3}$$

Les termes A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante :

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[A\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i\varphi_i\right)\right], \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.1.4}$$

En remplaçant les relations (3.1.2)-(3.1.3) dans (3.1.1), on obtient :

$$\sum_{n\geq 0} \varphi_n = f + \sum_{n\geq 0} A_n \tag{3.1.5}$$

alors on a

$$\varphi = f + A\varphi$$

Ce qui entraîne par identification :

$$\begin{cases} \varphi_0 = f(x) \\ \varphi_1 = A\varphi_0 \\ \varphi_2 = A\varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n+1} = A\varphi_n \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Il est à noter que cette identification n'est pas **unique** mais c'est la seule qui permet de définir **explicitement** les φ_n. La relation (3.1.6) permet de calculer tous les termes de la série sans ambiguïté car les A_n ne dépendent que de $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$.

En pratique, il est presque toujours impossible de calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \varphi_n$. Aussi se contente-t-on généralement d'une solution approchée ψ_n sous la forme de série tronquée :

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \tag{3.1.7}$$

En résumé, après la détermination des $(A_n)_{n\geq 0}$,une sommation donne la solution approchée de l'équation. Cependant la question qu'on peut d'ores et déjà se poser, c'est comment déterminer les $(A_n)_{n\geq 0}$ et à quelles conditions converge la méthode.

3.1.2 Convergence de la méthode d'Adomian

Les fondements mathématiques de la méthode sont dus au professeur **Y.Cherruault** qui a donné la démonstration de la convergence de la méthode d'Adomian et a utilisé les théorèmes du point fixe pour les équations fonctionnelles abstraites ($A\varphi = f$; où A est un opérateur) , voir [4].

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des conditions suffisantes de convergence. Toutes ces conditions portent sur l'opérateur linéaire A.

En effet, de la relation (3.1.6). on a besoint de rappéler quelques notions élémentaires de convergence des séries.

Rappel sur la convergence des séries numériques

Soit une série numérique

$$\sum_n u_n$$

de termes u_n. On dit que la série est convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$, où $S_n = \sum_n u_n$

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \quad \vdots \\ S_n &= u_1 + \cdots + u_n \end{aligned}$$

où, la limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

donc, la suite des sommes partilles est convergente alors la série est converge.

Théorème 3.1.1 *Si la série des opérateurs* $\sum_{n\geq 0} A_n$ *converge alors la série des solutions* $\sum_{n\geq 0} \varphi_n$ *est converge aussi .i.e.*

$$si \quad \sum_{n\geq 0} A_n < +\infty \quad alors \quad \sum_{n\geq 0} \varphi_n < +\infty \qquad et \quad réciproquement$$

Notons d'abord que la méthode d'Adomian appliquée à (3.1.1) se ramène à la recherche.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} S_i \\ S_n &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n \end{aligned}$$

Plus clairement

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_1 = S_0 + S_1 = 0 + \varphi_1 \\ S_2 = S_0 + S_1 + S_2 = 0 + \varphi_1 + \varphi_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ S_{n+1} = S_0 + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n) \end{cases}$$

vérifiant la relation récurrente suivante :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \quad \varphi_0 = f \\ S_{n+1} = A(\varphi_0 + S_n) \end{cases} \quad et \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.1.8}$$

On en déduit le résultat de convergence suivant.

Théorème 3.1.2 *Si l'opérateur A est une contraction (c'est -à-dire vérifie $\|A\| < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence*

$$S_{n+1} = A(\varphi_0 + S_n)$$

avec $S_0 = 0$, $n \geq 0$ converge vers S solution de $S = A(\varphi_0 + S)$.

Preuve. De la relation (3.1.8),et de $\delta < 1$, on a:

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|A(\varphi_0 + S_n) - A(\varphi_0 + S)\| \\ &\leq \|A\| \|S_n - S\| < \delta \|S_n - S\| \\ &\leq \delta^n \|S_1 - S\| \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$ vers S.

Par ailleurs, on a :

$$\sum_{n\geq 0} A_n = \sum_{n\geq 1} \varphi_n$$

et comme $\sum\limits_{n\geq 1} \varphi_n$ est convergente d'après le théorème (3.1.1). On a alors le résultat suivant. ∎

Corollaire 3.1.1 *Si A est une contraction alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} \varphi_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} A_n$ sont convergentes. De plus, $\sum\limits_{n\geq 0} \varphi_n$ est solution de l'équation :*

$$\varphi - A\varphi = f$$

3.1.3 Exemples

Exemple 3.1.1 *Soit l'équation intégrale de volterra suivante.*

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x \varphi(t)dt \tag{3.1.9}$$

où $f(x) = 1$ et $k(x,t) = 1$, La solution exacte est $\varphi_e(x) = e^{-x}$. Substitution la série de décomposition $\varphi(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \varphi_n(x)$ dans (3.1.9) donne,

$$\sum_{n\geq 0} \varphi_n(x) = 1 - \int_0^x \sum_{n\geq 0} \varphi_n(t)\, dt$$

Nous identifions le composant zéro par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégrale. Nous obtenons donc la relation de récurrence suivante:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_{n+1}(x) = -\int_0^x \varphi_n(t)\,dt \quad ,n \geq 0 \end{cases}$$

On a, donc

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1 \\
\varphi_1(x) &= -\int_0^x \varphi_0(t)\,dt = -\int_0^x 1dt = -x \\
\varphi_2(x) &= -\int_0^x \varphi_1(t)\,dt = -\int_0^x -tdt = \frac{x^2}{2!} \\
\varphi_3(x) &= -\int_0^x \varphi_2(t)\,dt = -\int_0^x \frac{t^2}{2!}dt = -\frac{x^3}{3!} \\
\varphi_4(x) &= -\int_0^x \varphi_3(t)\,dt = -\int_0^x -\frac{t^3}{3!}dt = \frac{x^4}{4!}
\end{aligned}$$

Et donc. Donner la solution en série d'après ***TAYLOR***

$$\varphi(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-x}$$

Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

Soit l'équation de Volterra

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x \varphi(t)dt \qquad , x \in [0,1]$$

La solution exacte de cette équation est $\varphi_e(x) = e^{-x}$.

La solution approchée $\varphi_i(x)$ de la méthode d'Adomian, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4,$ on a

$$\|\varphi_i(x) - \varphi_e(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \{|\varphi_i(x) - \varphi_e(x)|\}$$

i	$\varphi_i(x)$	$\varphi_e(x)$	$\Vert\varphi_i(x)-\varphi_e(x)\Vert_\infty$
0	1	e^{-x}	0.632120558828558
1	$-x$	e^{-x}	$-1,00000000000000$
2	$\frac{x^2}{2!}$	e^{-x}	0.132120558828558
3	$-\frac{x^3}{3!}$	e^{-x}	-0.528069659740599
4	$\frac{x^4}{4!}$	e^{-x}	-0.326212774504776

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = (e^x - 1) + \int_0^1 t\varphi(t)\,dt \tag{3.1.10}$$

La solution exacte est $\varphi(x) = e^x$, appliquant la technique de la méthode d'Adomian, on pose

$$\varphi_0(x) = e^x - 1 \tag{3.1.11}$$

et, obtient

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 t\varphi_0(t)\,dt = \int_0^1 t(e^x - 1)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \int_0^1 t\varphi_1(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2}tdt = \frac{1}{4} \\
\varphi_3(x) &= \int_0^1 t\varphi_2(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{4}tdt = \frac{1}{8} \\
\varphi_4(x) &= \int_0^1 t\varphi_3(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{8}tdt = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

la solution de l'équation (3.1.10) dans une forme de série donnée par

$$\varphi(x) = (e^x - 1) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) \tag{3.1.12}$$

où nous pouvons facilement obtenir la solution sous une forme donnée par

$$\varphi(x) = e^x \tag{3.1.13}$$

Comparaison entre les itérés et la solution exacte

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = (e^x - 1) + \int_0^1 t\varphi(t)dt \quad , x \in [0,1]$$

la solution exacte de cette équation est $\varphi_e(x) = e^x$.

Les itérés $\varphi_i(x)$ est obtenu par la méthode d'Adomian $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4,$ on a

$$\|\varphi_i(x) - \varphi_e(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \{|\varphi_i(x) - \varphi_e(x)|\}$$

i	$\varphi_i(x)$	$\varphi_e(x)$	$\|\varphi_i(x) - \varphi_e(x)\|_\infty$
0	$e^x - 1$	e^x	$-1,0000$
1	$\frac{1}{2}$	e^x	-0.5000
2	$\frac{1}{4}$	e^x	-0.7500
3	$\frac{1}{8}$	e^x	-0.8750
4	$\frac{1}{16}$	e^x	-0.9375

3.2 Méthode des approximations Successives

La méthode des itérations successives de Picard est une méthode intéressante à présenter car elle est très proche de l'intuition. Cette technique est évidemment très fastidieuse s'il faut faire tous les calculs à la main. C'est pourquoi on utilise la calculatrice. L'utilisation de la calculatrice nous permet de voir les résultats intermédiaires (les résultats de chaque itération), ce qui n'est pas toujours le cas avec des logiciels plus puissants. Il y a plusieurs façons de faire avec la calculatrice.

3.2.1 Principes de la méthode d'approximations successives

On va appliquer la méthode de Picard dans une équation de Fredholm de second espèce. Pour ce faire, on doit choisir une approximation donnée $\varphi_0(x)$. Après substitution on obtient les premiérs approximations $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= f(x) + \int_0^1 k(x,t)\varphi_0(t)dt \\
\varphi_2(x) &= f(x) + \int_0^1 k(x,t)\varphi_1(t)dt \\
\varphi_3(x) &= f(x) + \int_0^1 k(x,t)\varphi_2(t)dt \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\varphi_n(x) &= f(x) + \int_0^1 k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

et donc la limite est

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \tag{3.2.2}$$

3.2.2 Condition de solvabilité de la méthode de Picard

Pour la convergence de la méthode de Picard pour les équations intégrales de Fredholm du second éspèce, on dispose du théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *l'équation de Fredholm du 2^{nd} éspèce*

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \qquad , x \in [a,b]$$

On peut réecrir cette équation sous la forme

$$\varphi - A\varphi = f \tag{3.2.3}$$

où A est un opérateur intégrale qui est compact voir [3]

la forme (3.2.3)

$$(I - A)\,\varphi = f$$

où

$$T = I - A$$

$$T\varphi = f$$

si A est compact, alors $(I - A)$ est inversible(i.e:l'existence et l'unicité de la solution), par le théorème de Banach (point fixe), la méthode des approximations successives admet une seule solution si selement si $\|T\| < 1$.

Preuve. voir [3]. ■

3.2.3 Exemples

Exemple 3.2.1 *On va appliquer cette méthode dans une équation de Volterra*

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\, dt$$

où la solution exacte est $\varphi(x) = e^x$. On choisit que $\varphi_0(x) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 1 + \int_0^x 0dt = 1 \\
\varphi_2(x) &= 1 + \int_0^x dt = 1 + x \\
\varphi_3(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \\
\varphi_4(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \\
\vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\
\varphi_n(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

On a de toute évidence

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Donc $\varphi_n(x)$ est la n-ième somme partièlle de la série de **TAYLOR**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

D'où

$$\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} e^x$$

Exemple 3.2.2 *Soit l'equation intégrale de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = (x + e^x) - \int_0^1 xt\varphi(t)\,dt \tag{3.2.4}$$

pour l'aproximation zéro $\varphi_0(x)$*,en choisit que*

$$\varphi_0(x) = 0 \tag{3.2.5}$$

la méthode d'approximations successives admet l'utilisation de la formule d'itération

$$\varphi_{n+1}(x) = (x + e^x) - \int_0^1 xt\varphi_n(t)\,dt \quad ,n \geq 0 \tag{3.2.6}$$

en remplaçant (3.2.5) dans (3.2.6),on obtient

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1(x) & = & (x + e^x) - \int\limits_0^1 xt\varphi_0(t)\,dt = e^x + x \\
\varphi_2(x) & = & (x + e^x) - \int\limits_0^1 xt\varphi_1(t)\,dt = e^x - \frac{1}{3}x \\
\varphi_3(x) & = & (x + e^x) - \int\limits_0^1 xt\varphi_2(t)\,dt = e^x + \frac{1}{9}x \\
\varphi_4(x) & = & (x + e^x) - \int\limits_0^1 xt\varphi_3(t)\,dt = e^x - \frac{1}{27}x \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\
\varphi_{n+1}(x) & = & (x + e^x) - \int\limits_0^1 xt\varphi_n(t)\,dt = e^x + \frac{(-1)^n}{3^n}x
\end{array}$$

par conséquent, la solution $\varphi(x)$ *de (3.2.4) est donné par*

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(x) = e^x$$

Comparaison entre les itérés et la solution exacte

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = (x + e^x) - \int_0^1 xt\varphi(t)\,dt$$

la solution exacte de cette équation est $\varphi_e(x) = e^x$.

les itérés $\varphi_i(x)$ est obtenu par la méthode de Picard $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots$,on a

$$\|\varphi_i(x) - \varphi_e(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \{|\varphi_i(x) - \varphi_e(x)|\}$$

i	$\varphi_i(x)$	$\varphi_e(x)$	$\|\varphi_i(x) - \varphi_e(x)\|_\infty$
0	0	e^x	$-1,0000$
1	$e^x + x$	e^x	$1,0000$
2	$e^x - \frac{1}{3}x$	e^x	$0,0000$
3	$e^x + \frac{1}{9}x$	e^x	0.1111
4	$e^x - \frac{1}{27}x$	e^x	$0,0000$

Chapitre 4

Comparaison entre les deux méthodes

Dans ce dernier chapitre, on donne la comparaison entre les deux méthodes. Pour ce faire on va traiter deux exemples :

En utilisant le Logiciel MATLAB.

4.1 Exemples

On prend quelques exemples des équations intégrales de volterra et Fredholm pour une comparaison.

Exemple 4.1.1 *Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm*

$$\varphi(x) = (e^x - 1) + \int_0^1 t\varphi(t)dt$$

1. Par la méthode d'approximations successives

   La solution exacte est $\varphi(x) = e^x$, on choisit que $\varphi_0(x) = e^x - 1$, puis la première approximation est

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= (e^x - 1) + \int_0^1 t\varphi_0(t)dt \\
&= (e^x - 1) + \int_0^1 t\left(e^t - 1\right)dt \\
&= e^x - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

on obtient donc, par intégration

$$\varphi_1(x) = e^x - \frac{1}{2}$$

le deuxième approximation

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= (e^x - 1) + \int_0^1 t\varphi_1(t)dt \\
&= (e^x - 1) + \int_0^1 t\left(e^x - \frac{1}{2}\right)dt \\
&= e^x - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

on obtient donc, par intégration

$$\varphi_2(x) = e^x - \frac{1}{4}$$

de la même manière on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= e^x - \frac{1}{8} \\
\varphi_4(x) &= e^x - \frac{1}{16} \\
\varphi_5(x) &= e^x - \frac{1}{32} \\
\varphi_6(x) &= e^x - \frac{1}{64}
\end{aligned}$$

le n-ième itéré

$$\varphi_n(x) = e^x - \frac{1}{2^n} \quad n \geq 1$$

la solution d'après **TAYLOR** est

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(e^x - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= e^x
\end{aligned}$$

2. Par la méthode d'Adomian

   où $f(x) = e^x - 1$, $\lambda = 1$ et $k(x,y) = 1$, alors la solution s'écrit comme suit :

$$\sum_{n\geq 0} \psi_n(x) = (e^x - 1) + \int_0^1 t \sum_{n\geq 0} \psi_n(t)dt$$

   le premier terme est $\psi_0(t) = e^x - 1$ et la relation :

$$\psi_{n+1}(x) = \int_0^1 t\psi_n(t)dt \quad n \geq 0$$

   donc :

$$\begin{aligned}
\psi_0(t) &= e^x - 1 \\
\psi_1(x) &= \int_0^1 t\psi_0(t)dt = \int_0^1 t\left(e^t - 1\right)dt = \frac{1}{2} \\
\psi_2(x) &= \int_0^1 t\psi_1(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}tdt = \frac{1}{4} \\
\psi_3(x) &= \int_0^1 t\psi_2(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{4}tdt = \frac{1}{8} \\
\psi_4(x) &= \int_0^1 t\psi_3(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{8}tdt = \frac{1}{16} \\
\psi_5(x) &= \int_0^1 t\psi_4(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{16}tdt = \frac{1}{32} \\
\psi_6(x) &= \int_0^1 t\psi_5(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{32}tdt = \frac{1}{64}
\end{aligned}$$

   alors :

$$\psi(x) = e^x - 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

   donc la solution converge vers :

$$\psi(x) = e^x$$

3. Pour valider notre travail, on doit calculer la différence entre les solutions φ et ψ des deux méthodes :

$$\|\varphi_i(x) - \psi_i(x)\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \{|\varphi_i(x) - \psi_i(x)|\} = \max_{x\in[a,b]} \{|\varphi_i(x) - \psi_i(x)|\}$$

les itéries de $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ pour $i = 0, \ldots, 4$ dans l'intervalle $[0, 1]$ sont obtenus par les deux méthodes :

i	$\varphi_i(x)$	$\psi_i(x)$	$\|\varphi_i(x) - \psi_i(x)\|_\infty$
0	$e^x - 1$	$e^x - 1$	0, 0000
1	$e^x - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1.7183
2	$e^x - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	2.2183
3	$e^x - \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	2.4683
4	$e^x - \frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	2.5933
5	$e^x - \frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	2.6558
6	$e^x - \frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	2.6870

Exemple 4.1.2 *Soit l'équation intégrale lineaire de Volterra*

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\varphi(t)dt \tag{4.1.1}$$

1. Par la méthode d'approximations successives

   la solution exacte $\varphi(x) = \sin x$. On choisit que $\varphi_0(x) = x$, puis la première approximation est

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= x + \int_0^x (t - x)\varphi_0(t)dt \\ &= x + \int_0^x (t - x)tdt \\ &= x + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{xt^2}{2}\right]_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3!}\end{aligned}$$

on obtient donc, par intégration

$$\varphi_1(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

la deuxième approximation peut être calculée de la même manière qui donne

$$\varphi_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

ensuite, on obtient de la même manière

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \\
\varphi_4(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \\
\varphi_5(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \\
\varphi_6(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}
\end{aligned}$$

en continuant ce processus, le n-ième itéré

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

la solution finale de la série est $\sin x$ d'après **TAYLOR**

donc la solution de (4.1.1) est

$$\varphi(x) = \sin x$$

2. Par la méthode d'Adomian

Considérons $\psi_0(x) = x$, et la solution sous la forme d'un série

$$\psi(x) = \sum_{n \geq 0} \psi_n(x)$$

Ensuite substituant cette série dans l'équation donné, nous avons

$$\sum_{n \geq 0} \psi_n(x) = x + \int_0^x (t - x) \left[\sum_{n \geq 0} \psi_n(t) \right] dt$$

Maintenant, décomposant les différents termes de la manière suivante, nous obtenons un ensemble de solutions

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \int_0^x (t-x)\,\psi_0(t)\,dt \\
&= \int_0^x (t-x)\,tdt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{xt^2}{2}\right]_0^x \\
&= -\frac{x^3}{3!}
\end{aligned}$$

on obtient donc, par intégration

$$\psi_1(x) = -\frac{x^3}{3!}$$

Le second terme $\psi_2(x)$, sera :

$$\begin{aligned}
\psi_2(x) &= \int_0^x (t-x)\,\psi_1(t)\,dt \\
&= \int_0^x (t-x)\left(-\frac{t^3}{6}\right)dt \\
&= \left[-\frac{t^5}{30} + \frac{xt^4}{24}\right]_0^x \\
&= \frac{x^5}{5!}
\end{aligned}$$

on obtient donc, par intégration

$$\psi_2(x) = \frac{x^5}{5!}$$

Ensuite, de la même manière on obtient

$$\begin{aligned}
\psi_3(x) &= -\frac{x^7}{7!} \\
\psi_4(x) &= \frac{x^9}{9!} \\
\psi_5(x) &= -\frac{x^{11}}{11!} \\
\psi_6(x) &= \frac{x^{13}}{13!}
\end{aligned}$$

et donc

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) + \psi_4(x) + \psi_5(x) + \psi_6(x) + \cdots$$

En continuant de cette façon, nous obtenons une série

$$\psi(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} + \cdots\cdots$$

à l'aide de la formule de **TAYLOR**, on obtient :

$$\psi(x) = \sin x$$

3. Pour valider notre travail, on doit calculer la différence entre les solutions φ et ψ des deux méthodes :

$$\|\varphi_i(x) - \psi_i(x)\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \{|\varphi_i(x) - \psi_i(x)|\} = \max_{x\in[a,b]} \{|\varphi_i(x) - \psi_i(x)|\}$$

les itéries de $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ pour $i = 0, \ldots, 4$ dans l'intervalle $[0,1]$ sont obtenus par les deux méthodes :

i	$\varphi_i(x)$	$\psi_i(x)$	$\|\varphi_i(x) - \psi_i(x)\|_\infty$
0	x	x	$0,0000000000000$
1	$x - \frac{x^3}{3!}$	$-\frac{x^3}{3!}$	$1,0000000000000$
2	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$0,8333333333333$
3	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$	$-\frac{x^7}{7!}$	$0,841666666666667$
4	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$	$\frac{x^9}{9!}$	$0,841468253968254$
5	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$	$-\frac{x^{11}}{11!}$	0.841471009700176
6	$\varphi_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!}$	$\frac{x^{13}}{13!}$	0.841470984648068

4.2 Conclusion et Perspective

Rach [**5**] et **Bellomo** et **Sarafyan** [6] sont les premiers qui ont donné une comparison entre les deux méthodes sur certains exemples des équations mathématiques (EDO, EDP) **non linéaires**. Il ont conclus que les deux méthodes sont toute a fait différéntes voir [8]. Mais Golberg [7] a prouvé que la méthode d'Adomian pour des équations linéaires était équivalente à la méthode classique d'approximations successives.

Perspective

Dans ce mémoire on a traité que le cas 1-d. Dans l'avenir j'espère étendre ce projet aux équations aux dérivées partielles qui sont plus compliquées.

Bibliographie

[1] Yves CAUMEL, "Cours d'analyse fonctionnelle et complexe", Cépaduès-Éditions, 2009.

[2] M.KRASNOV,A.KISSÉLEV,G.MAKARENKO."Équations intégrales", ÉDitions MIR, 1976.

[3] KENDALL E. ATKINSON "The Numerical Solution of Integral Equations",Cambridge Univ. 2009.

[4] Cherruault Y.and Adomian G, "Decomposition Methods A New Proof Of Convergence",Math. Comput Modelling, Vol.18, No.12, pp.103-106, 1993.

[5] R.Rach, "On the Adomian (decomposition) method and comparisons with Picard's method", J.Math. Anal.Appl, 128, 480-3, 1987.

[6] N.Bellomo, and D.Sarafyan, "On Adomians decomposition methods and some comparisons with Picard's iterative scheme", J.Math. Anal. Appl., 123, 389-400, 1987.

[7] Michael A. Golberg "A note on the decomposition method for operator equations", Applied Mathematics and Computation 106 (1999) 215-220.

[8] Abdul-Majid Wazwaz."Lineair and Non linear Integral Equations:Miethods and Applications", Springer, 2011.

[9] George Adomian."Solving Frontier Problems of Physics", Springer, 1994.

الخلاصة :

في هذه المذكرة قمنا بإستعمال طريقتين لحل معادلة من نوع فريدهولم و طريقة أدوميان وطريقة التقريبات المتتابعة من أجل إجراء مقارنة بينهما. وقد قدمنا أمثلة لكل من الطريقتين.

الكلمات المفتاحية :

المعادلات التكاملية فريدهولم و فولتيرا، طريقة تجزئة أدوميان، كثير حدود أدوميان، سلاسل، طريقة التقريبات المتتابعة.

Résumé :

Dans ce mémoire, pour résourdre les équations intégrales linéaires de Fredholm, on a utilisé deux méthodes la première est la méthode des approximations successives la second est la méthode d'Adomian, dans le but de compare les résultats de chaque méthode. Des exemples sont donnés pour illustrer la différence.

Mots clés :

Equations intégrale de Fredholm et Volterra, Polynôme Adomian, Séries, méthode d'approximations successives.

Abstract :

In this work, We appry two methods, ADOMIAN and successives approximations methods, to resolve the Fredholm integral equations.
In order to compare between these methods we have presented some exemples.

Key word :

The integrals equations of type Fredholm and Volterra, Polynôme Adomian, Series, Adomian decomposition method, Picard method.