REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Etudes sur les opérateurs multilinéaires Cohen positive fortement p-sommant et p-convex

---

Présenté par :
M^r MEKIDECHE Adem

Devant le jury composé de :

SAADI Khalil	Prof,	Université de M'sila	**Président**.
TIAIBA Abdelmoumen	Prof,	Université de M'sila	**Encadreur.**
HERAIZ Toufik	MAA,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

Je tiens à remercier sincèrement **Mr. ABDEMOUMEN TIAIBA**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury **.Mr,...khalil...Saadi .. et...Mr..,.Toufik Heraiz...** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues ,mes amis,mes parents et tous mes fréres et mes soeurs pour leurs aides et leurs encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Merci

Résumé : Notre mémoire on peut voir qu' il s'inscrit dans le cadre de la théories des opérateurs, pour plus de précisisions elle touche le font d'étude de la sommabilité des opérateurs entre des espaces de Banach. Pour ce but ont a profité de ce mémoire pour faire une étude détaillé d'un travail des Monsieurs .A ; Belacel et A, Bougoutaia en 2019. En effet ils sont donné la notion la nouveau type des opérateurs multilinéaires Cohen positive $p-$sommants. La dont ce document il ont a donné un analogue du théorème de domination de Pietsch pour cette catégorie des opérateurs. Aussi ils ont caractérisé le théorème dual de ce dernier théorème. Aussi ils ont généralisé des résultats faites par Bu et Shi en 2013 et a profondément donnent une comparaisons de cette classe « des opérateurs multilinéaires Cohen positive $p-$sommants » avec celle des opérateurs $p-$convex $m-$linéaires.

Abstract : Our dissertation is part of the theories of operators, if we want to specify more is worked in the study of the summability of operators. For this purpose we have made a detailed study of a work of Mr. A, Belacel and Mr, A, Bougoutaia in 2019. Indeed, the notion of Cohen multilinear positive $p-$summing operators is. The one of which this document gave an analog of the theorem of domination of Pietsch for this category of the operators. Also they characterized the dual theorem of this last theorem. Also, they generalized a results made by Bu and Shi in 2013 and gave a deep comparison of this class of "$p-$summing positive Cohen multilinear " with that of $m-$linear $p-$convex operators.

Table des matières

Introduction

Notre mémoire s'inscrit dans le cadre de la théories des opérateurs pour ce but on a prendre en étude approfondi L'article des Monsieurs **.A ; Belacel et A, Bougoutaia** qu' est paru dans le journal de classe (A) qui est ' Posivity journal' intitulé de l'article : **Cohen positive strongyle p−summing and p−convex multilinear operators** *en :* (**2019**) voir [15].qui aussi s'inscrit dans le cadre de la théories des opérateurs, si on veut préciser de plus ils ont travaillé dans le font d'étude de la sommabilité des opérateurs. Pour ce but le les auteurs ont fait une étude de la notion des opérateurs multilinéaires Cohen positive $p-$sommants. La dont ce document ils ont donné un analogue du théorème de domination de Pietsch pour cette catégorie des opérateurs. Aussi il a caractérisé le théorème dual de ce dernier théorème. Aussi il a généralisé des résultats faites par Bu et Shi en 2013 et a profondément donne une comparaisons de cette classe « des opérateurs multilinéaires Cohen positive $p-$sommants » avec celle des opérateurs $p-$convex $m-$linéaires.

Le mémoire s'articule autour de trois chapitres :

Le premier chapitre est essentiellement un rappel. Où on présente quelques concepts et résultats qui nous permettons d'aborder notre travail ; par exemple les notions concernant les espaces classiques qui sont les espaces de Banach, les Banach réticulés, le concept d'un opérateur positif, concave, opérateurs réguliers et plusieurs notions que on a réussie a collaboré aussi sont tous nécessaire pour une bonne lecture et compréhension de ce mémoire.

Dans **le deuxième chapitre**, on va a fixé l'attention sur l'espace des opérateurs positifs fortement $p-$ sommants et les opérateurs positivement $p-$sommants, on va voire que les auteurs de l'article. voir [15] ont conclus après un travail concédirable que l'espace des opérateurs positivement $p-$sommants de H en F sont dans $D_p^+(H, F)$, qui est l'espace de tous les opérateurs positifs fortement $q-$sommants de H dans F, tel que H est un espace de Hilbert, on peut dire que ce chapitre est une généralisation le travail de Bù. voir [11]

Dans **le troisième chapitre**, A. beacel et A. bougoutaia ont étudié la relation entre les opérateurs positivement $p-$sommants introduits par O. Blasco.voir [1] Et comme applications a généralisé un résultat à Q. Bu et Z. Shi, et il a vérifié quelques inclusions notamment la classe des opérateurs $m-$linéaires multiples $p-$convexes introduits dans sont article paru.

Notation

- p^* : **L'exposant conjugué de** p **(i.e.,**$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$**).**
- X^* : **Le dual topologique de** X**.**
- X^{**} : **La bidual topologie de** X **.**
- B_{X^*} : **Boule unité fermée de l'espace** X**.**
- T^* : **L'adjoint d'opérateur** T**.**
- T^{-1} : **L'inverse de l'opérateur** T**.**
- T_L : **La linéarisation de l'opérateur multilinéaires** ($m-$**linéaires)** T**.**
- E^+ : $\{\mathbf{x} \in \mathbf{E} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.
- $\langle .,. \rangle$: **Le crochet de dualité.**
- $\sigma(X, X^*)$: **La topologie faible.**
- $\sigma(X^*, X^{**})$: **La topologie** $*$**-faible.**
- μ : **Mesure de probabilité réguliére positive sur l'espace compact** Ω**.**
- $C(K)$: **Espace des fonctions continues sur un compact** K **à valeurs réelles.**
- $L(X, Y)$: **Ensemble de tous les opérateurs linéaires de** X **dans** Y**.**
- $\mathcal{L}(X, Y)$: **Espace des opérateurs linéaires continus de** X **dans** Y**.**
- $\mathcal{L}^+(X, Y)$: **L'ensemble de tous ces opérateurs linéaires positifs.**
- $\mathcal{L}^r(X, Y)$: **L'espace vectoriel des opérateurs réguliers.**
- $\mathcal{L}_f(X, Y)$: **L'espace des opérateurs de rang finie .**
- $\ell_p(X)$: **Espace des suites** $(x_i)_{i=1}^n \in X$ **absolument** $p-$**sommables.**

- $\ell_p^w(X)$: **Espace de suites** $(x_i)_{i=1}^n \in X$ **faiblement** $p-$**sommables.**
- $\Pi_p(X,Y)$: **Espace des opérateurs** $p-$**sommants de** X **dans** Y **.**
- $\Pi_p^+(X,Y)$: **Classe de tous les opérateurs linéaires positivement** $p-$**sommants de** X **dans** Y**.**
- $D_p(X,Y)$: **Espace des opérateurs fortement** $p-$**sommants de** X **dans** Y**.**
- $D_p^+(X,Y)$: **Espace des opérateurs positif fortement** $p-$**sommants de** X **dans** Y**.**
- $L(X_1,...,X_n;Y)$: **L'ensemble des applications multilinéaires (ou** $m-$**linéaires).**
- $\mathcal{L}(X_1,...,X_n;Y)$ **: L'ensemble des applications multilinéaires (ou** $m-$**linéaires) continues.**
- $\mathcal{L}^+(X_1,...,X_n;Y)$: **L'espace vectoriel de tous les opérateurs positifs multilinéaires (**$m-$**linéaires) continus de** $X_1 \times \cdots \times X_n$ **dans** Y.
- $D_p^m(X_1,...,X_m;Y)$: **Les opérateurs multilinéaires (**$m-$**linéaires)Cohen fortement** $p-$**sommants.**
- $D_p^{m+}(X_1,...,X_m;Y)$: **Les opérateurs multilinéaires (**$m-$**linéaires) positifs Cohen fortement** $p-$**sommants.**
- $C_p^{vex}(X,Y)$: **L'ensemble de tous ces opérateurs** $p-$**convexes.**
- $C_p^{vex,mult}(X_1,...,X_m;Y)$: **D'opérateurs multilinéaires (**$m-$**linéaires) multiples** $p-$**convexes.**
- $\Pi_{p,q}(X,Y)$: **Espace de Banach des opérateurs linéaire** $(p,q)-$**sommants de** X **dans** Y **.**
- $\Pi_{p,q}^+(X,Y)$: **Classe de tous les opérateurs linéaires positivement** $(p,q)-$**sommants de** X **dans** Y**.**
- $D_{p,q}^+(X,Y)$: **Espace des opérateurs positif fortement** $(p,q)-$**sommants de** X **dans** Y**.**
- $C_{(p,q)}^{vex}(X,Y)$: **L'ensemble de tous ces opérateurs** $(p,q)-$**convexes.**

- $X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$: **Le produit tensoriel projectif.**
- σ_m : **L'application canonique definie de** $X_1 \times \cdots \times X_m$ **dans** $X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$**.**

Chapitre 1

Préliminaires

Comme tout travail scientifique. On va cité dans quelques sections en ce premier chapitre des concepts fondamentals pour faciliter la littérature de ce mémoire. Là dont on va vous donner une maximum possible des terminologies "définitions, trésultats, propositions et théorèmes", tels que les classes des opérateurs qui soient normalement très utiles dans la suite de notre travail. Spécialement on a bien citer les opérateurs linéaires, la Topologie faible et $*$-faible, les spaces de Banach réticulés. Les espaces des suites $p-$sommables et comme un outil de la défintion de l'opérateur de linérisation d'un opérateur multilinéaire. Pour plus de détail voir [4] , [6] , [7] , [9] , [10] , [13] , [16] et [17].

1.1 Opérateurs linéaires

Cette section contenant l'espace des opérateurs linéaire. où on va voir leur définition et l'espace de ce type d'opérateurs et sont norme et aussi l'adjoint d'un opérateur linéaire. A la fin on quittera par la donner de dual de cet espace et quelques propriétés. Pour plus de détail voir [16] , [17] .

Définition 1.1.1 *Soit $u : X \longrightarrow Y$ une application entre deux espaces de Banach définis sur le méme corps $\mathbb{K}$. Elle est linéaire si et seulement si,*

$$\forall x,\, y \in X,\, \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{K} : u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

On note $L(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires. On le muni de deux opérations algébriques suivantes :

1) $\forall x \in X \ (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x).$

2) $\forall x \in X,\, \forall \lambda \in \mathbb{K} \ (\lambda u)(x) = \lambda u(x).$

Définition 1.1.2 *L'application linéaire u est continue (borné) s'il existe $C > 0$ tel que*

$\forall x \in X : ||u(x)|| \leq C\ ||x||.$

On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires continues.

On définit une norme des opérateurs $||.||$ sur $\mathcal{L}(X,Y)$ par

$$||u|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||,$$

On a également $||u|| = \inf\{C :$ vérifie l'inégalité précédente$\}$.

Alors, la quantité $||u||$ définit une norme sur $\mathcal{L}(X,Y)$.

**Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X,Y)$ est aussi un espace de Banach.*

Définition 1.1.3 (Dual topologique) *Soit X un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note X^* l'espace de Banach des formes linéaires continues sur X , (i.e)., $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.*

Notons ici que l'espace X^* est toujours complet pour la norme des opérateurs.

Proposition 1.1.1 *Soit X un espace de Banach. Pour tout $x \in X$ on a $||x|| = \sup\limits_{||x^*|| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|$.*

Exemple 1.1.1 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On a $(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$, avec p^*est le conjugué de p, (i.e) ; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.*

Définition 1.1.4 (Isomorphisme, isométrie) *L'application linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme, si T est bijective continue de sorte que T^{-1} est aussi continue.*

** Si $||T(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in X$, on dit que T est une isométrie.*

** Si l'isomorphisme $T : X \longrightarrow T(X)$ vérifier $||T(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in X$ on dit que T est une isométrie injective et on écrit $T : X \hookrightarrow Y$.*

1.1.1 L'adjoint d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.1.5 *Soit X, Y deux espaces vectoriels normés. Pour un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X;Y)$, on definie l'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(Y^*;X^*)$ par :*

$$T^*(y^*)(x) = y^*(Tx) \ (i.e.,) \ \langle x \ ; T^*y^* \rangle = \langle Tx \ ; y^* \rangle \ ,$$

pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$, T^*est appelé adjoint de T.

Proposition 1.1.2 1) *Soit $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ alors T^* linéaire et $||T|| = ||T^*||$.*

2) *Pour tout $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y;Z)$ on a $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.*

1.2 Topologie faible et $*$-faible

Définition 1.2.1 (Topologie faible) *Soit X un espace de Banach, on note X^* l'espace dual ($X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

La topologie faible, noté $\sigma(X, X^*)$ sur un espace de Banach X est la plus petite topologie sur X rendent continue tous les élements $x^* \in X^*$.

Théorème 1.2.1 *Les sous espaces vectoriels fermés de X sont les mêmes pour les deux topologies (forte et faible). Il en est même plus généralement des parties fermées convexes.*

Théorème 1.2.2 (Topologie $*$-faible) *La topologie $*$-faible d'ésignée aussi par $\sigma(X^*, X)$ est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues tout les application $(\varphi_n)_{x\in X}$ comme $X \hookrightarrow X^{**}$, il est clair que la topologie $\sigma(X^*, X)$ est moins fine que la topologie $\sigma(X^*, X^{**})$.*

Autrement dit la topologie $*$-faible $\sigma(X^*, X)$ posséde moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$.

Théorème 1.2.3 (Alaoglu-Banach-Bourbaki) *L'ensemble* $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* : ||\varphi|| \leq 1\}$ *est compacte pour la topologie* $*$*-faible* $\sigma(X^*, X)$.

Théorème 1.2.4 (Kakutani) *Soit* X *un espace de Banach. Alors* X *est réflexif si et seulement si* $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* : ||\varphi|| \leq 1\}$ *est compact pour la topologie* $\sigma(X, X^*)$.

1.3 Espaces de Banach réticulés

Cette section à une très importante rôle pour ce travail car là on va voir l'espace muni d'une relation d'ordre totale ou partielle qui nous fournit l'utilisation des inégalités dans notre travail et autres propriétés. Pour plus de détail voir [6] , [7].

Définition 1.3.1 *Soit* E *un ensembel vide un espace vectoriel muni d'une relation binaire d'ordre notée* $'' \leq ''$

(i) $\forall x \in E,\ x \leq x$ (*réflexive*),

(ii) $x,\ y \in E,\ x \leq\ y$ *et* $y \leq x \implies x = y$ (*antisymetrique*),

(iii) $x,\ y,\ z \in E,\ x \leq y$ *et* $y \leq z \implies x \leq z$ (*transitive*).

Définition 1.3.2 *Un espace vectoriel ordonné* X *la dont pour les quel toute paire d'éléments à une borne supérieur est appelé espace vectoriel réticulé,i.e.,*

$$\forall x,\ y \in X,\ \sup(x, y) \in X \ \ et \ \ \inf(x, y) \in X.$$

Définition 1.3.3 *Soit* X *un espace vectoriel réel ordonné,* X *est complètement réticulé, si:*

$$\forall A \in X \ \ tel\ que \ \ A \neq \Phi,\ A\ major\acute{e} \implies \sup(A)\ existe.$$

Définition 1.3.4 *Un espace vectoriel ordonné est un espace vectoriel réel* E *qui est aussi un espace ordonné où les structures linéaires et de l'ordre reliéent par les implications* :

(1) Si $x,\ y,\ z \in E$ *et* $x \leq y$, *alors* $x + z \leq y + z$,

(2) Si $x,\ y \in E,\ x \leq y$ *et* $0 \leq a \in \mathbb{R}$, *alors*, $ax \leq ay$.

Définition 1.3.5 *Soit X un espace de Banach. Si X est réticulé alrs,*

1) $\forall x \in X$; $\||x|\| = ||x||$,

2) $\forall x, y \in X$; $|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|$.

Notons:

$\|x\| = \sup(x, -x)$ *tel que*

$$x = x^+ - x^- \text{ et } |x| = x^+ + x^- \qquad (1.1),$$

ou la partie positive de x est $x^+ = \sup(x, 0)$ (ou $x^+ = x \vee 0$), et la partie négative de x est $x^- = \sup(-x, 0)$ (ou $x^- = x \wedge 0$)

tel que $\sup((x + z), (y + z)) = \sup(x, y) + z$.

Proposition 1.3.1 *pour tout x, $y \in E$ et $t \in \mathbb{R}$,*

1) $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$,

$x \vee y = -(-x) \wedge (-y)$,

$(x \vee y) + z = (x + z) \vee (y + z)$,

et $(x \wedge y) + z = (x \wedge y) + (y \wedge z)$.

2) $|tx| = |t||x|$ *et* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

3) *$x^+ \perp x^-$ et la décomposition de x dans la différence des deux élements positifs orthogonaux est uniques.*

4) *$x \leq y$ est équivalent à $x^+ \leq y^+$ et $x^- \leq y^-$.*

5) *$x \perp y$ est équivalent à $|x| \vee |y| = |x| + |y|$ dans ce cas on a $|x+ y| = |x| + |y|$.*

6) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *et* $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

7) *Pour tout x, y, $z \in E^+$ on a $(x + y) \wedge z \leq (x \wedge z) + (y \wedge z)$, et l'ensemble*

$E^+ := \{x \in E : 0 \leq x\}$ est appelé cône positif de E.

8) $|x + y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$, *et* $|x - y| = |(x \vee z) - (y \vee z)| + |(x \wedge z) - (y \wedge z)|$.

9) $|x| = 0 \iff x = 0$.

Exemple 1.3.1 *Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ avec leurs normes euclidiennes sont tous des* *espaces de Banach réticulés.*

Proposition 1.3.2 *Le dual $E^{\,*}$d'un espace de Banach réticulé E est un espace de Banach complètement réticulé muni de l'ordre nature*

$$x_1^* \leq x_2^* \Longleftrightarrow \langle x_1^*, x\rangle \leq \langle x_2^*, x\rangle \ \forall x \in E^+,$$

où $\langle .,. \rangle$, est le crochet de dualité.

Demonstration. Nous allons esquisser la démonstration, nous définition le cône positif dans $E^{\,*}$ par $x^* > 0 \iff x^*(x) > 0 \ \forall x^* \in E^*$, Dans ce cas, il est facile de vérifier que pour tout x^*, y^*dans $E^{\,*}$ et pour tout $x > 0$ on a

$$(x^* \vee y^*)(x) = \sup\{x^*(u) + y^*(x-u) : 0 \leq u \leq x\},$$

et

$$(x^* \wedge y^*)(x) = \inf\{x^*(v) + y^*(x-v) : 0 \leq v \leq x\}.$$

Pour plus de détails voir [6, p.3]. ∎

1.3.1 Opérateurs linéaires positifs

Le but de cette partie est de faire un survole un peut approfondi sur les opérateurs linéaires positifs où on va donné la définition de ces opérateurs et leur constriction algébrique, ce type d'opérateurs sont entre les espaces de Banach réticulés. Pour plus d'informations consulter [3] , [8].

Définition 1.3.6 *[3] Si E et F sont des espaces vectoriels réticulés,*

a) $T : E \longrightarrow F$ est un opérateur linéaire positif si $x \geq 0 \Longrightarrow Tx \geq 0$, $T(E^+) = F^+$, sont fermés par l'addition et la multiplication par des réels positifs mais pas sous la multiplication par des réels négatifs. L'ensemble de tous ces opérateurs linéaires positifs est noté par : $\mathcal{L}^+(E,F)$.

b) L'espace engendré par les opérateurs linéaires positifs est dit l'espace vectoriel des opérateurs réguliers, noté par $\mathcal{L}^r(E,F)$.

Pour tout $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$, la norme de T est définie par:

$$||T||_r = \inf\{\ ||S|| : S \in \mathcal{L}^+(E,F),\ |T(x)| \leq S(x),\ x \in E^+\}.$$

Théorème 1.3.1 *[8, Proposition 1.3.5] Si E est un Banach réticulé et F un espace normé réticulé alors tout opérateur régulier de E dans F est continu pour la norme*

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| : x \in B_E^+\},\ où\ B_E^+ = B_E \cap E^+.$$

Demonstration. *Supposons que T ne pas être continue. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in E$ tel que $||x_n|| \leq 2^{-n}$ et $n \leq ||T(x)||$.*

Depuis $||T(x)|| \leq ||T(|x|)||$ pour tout $x \in E$, nous pouvons supposer que $x_n \geq 0$. Laisser

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E_+.$$

Il s'ensuit que

$$||T(x)|| \geq ||T(x_n)|| \geq n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est une contradiction. D'où T est continue. $||T(x)|| \leq ||T(|x|)||$ implique que

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| : x \in B_E^+\}.$$

Ceci termine la preuve. ■

Proposition 1.3.3 *L'espace $(\mathcal{L}^r(E,F), ||.||_r)$ est un espace de Banach. Si $F = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = \mathcal{L}^r(E,\mathbb{R})$.*

1.4 Les espaces des suites $p-$sommables

Tout d'abord,si X un espace de Banach, nous noterons par :

$X^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n)_n \ /\ x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N}\}$ espace de toutes les suites $(x_n)_n$ d'éléments de X. L'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition suivante,

$$(x_n)_n + (y_n)_n := (x_n + y_n)_n.$$

et la loi de multiplication suivante,

$$\lambda.(x_n)_n := (\lambda.x_n)_n\ ;\text{où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.4.1 (L'espace des suites $p-$sommables) *Une suite (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est absolument $p-$sommables si la suite scalaire $(||x_n||)$(resp. $(||x_i||)_{1\leq i\leq n}$) est dans ℓ_p.*

On note $\ell_p(X)$ (resp. $\ell_p^n(X)$) l'espace des suites (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument $p-$sommables muni de la norme:

$$\begin{cases} ||(x_n)_n||_{\ell_p(X)} = ||(x_n)_n||_p = (\sum\limits_{n=1}^{\infty}||x_n||^p)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1\leq p\leq\infty, \\ ||(x_n)_n||_{\ell_\infty(X)} = ||(x_n)_n||_\infty = \sup\limits_n||x_n|| \quad \text{si} \quad p=\infty. \end{cases}$$

Théorème 1.4.1 *[10]$(\ell_p(X), ||.||_p)$ est un espace de Banach muni de la norme $||x||_p = ||(x_n)||_p$.*

Inégalité de Hölder généralisé

Soient $(X, ||.||)$ un espace vectoriel normé $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n$ deux suites finies d'éléments de X et $0\leq p,q,r\leq+\infty$ avec $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Alors,

$$(\sum_{i=1}^n||x_i||^r||y_i||^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\sum_{i=1}^n||x_i||^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n||y_i||^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Définition 1.4.2 *Une suite (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est faiblement $p-$sommables si la suite scalair $(\varphi(x_n))$ (resp.$(\varphi(x_i)_{1\leq i\leq n})$) est dans ℓ_p pour tout $\varphi\in X^*$.*

On note $\ell_p^w(X)$ (resp. $\ell_{p,w}^n(X)$) l'espace des suites (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X faiblement $p-$sommables telle que

$$\ell_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : (\langle x_n,\varphi\rangle)_n \in \ell_p, \forall\varphi\in X^*\}$$

muni de la norme :

$$\begin{cases} ||(x_n)_n||_{p,w} = ||(x_n)_n||_{\ell_p^w(X)} = \sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}}(\sum\limits_{i=1}^n|\langle x_n,\varphi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \quad 1\leq p\leq\infty, \\ ||(x_n)_n||_{\ell_\infty^w(X)} = \sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sup\limits_n|\langle x_n,\varphi\rangle|\right) \quad \text{si} \quad p=\infty. \end{cases}$$

Définition 1.4.3 *On considérons le cas où X est remplacé par un espace de Banach réticulé E, et on definie notre espace de suite qui est $\ell_{p,|w|}^n(X)$, comme suit :*

$\ell_{p,|w|}^n(X) := \{(x_i)_{i=1}^n : (|x_i|)_{i=1}^n \in \ell_{p,w}^n(X)\}$ tel que $\quad ||(x_i)_i||_{\ell_{p,|w|}^w(X)} = ||(|x_i|)_{i=1}^n||_{p,w}$.

Soit $B^+_{E^*} = B_{E^*} \cap B^+$*,si* $x_1, ..., x_n \geq 0$ *,on a*

$$||(x_i)_i||_{\ell^w_{p,|w|}(X)} = \sup_{\xi \in B^+_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} \langle x_n, \xi \rangle^p)^{\frac{1}{p}} = ||(x_i)^n_{i=1}||_{p,w} \tag{1.2}$$

Proposition 1.4.1 *Pour* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $(\psi_i)^n_{i=1} \in \ell^n_{p^*,w}(Y^*)$ *on a :*

$$||(\psi_i)_i||_{\ell^n_{p^*,w}(Y^*)} = \sup_{\xi \in B_{y^{**}}} (\sum_{i=1}^{n} |\xi(\psi_i)|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} = \sup_{y \in B_y} ||\psi_i(y)_i||_{p^*}.$$

Proposition 1.4.2 *Pour l'espace des suites scalaires convergentes vers zéro qui est défine par :*

$(C_0)_w = \{(x_n)_n : x_n \in X$ *et* $(\langle x_n, \xi \rangle) \in C_0, \forall \xi \in X^* \}$

$($*et* $C_0 = \{x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \lim\limits_{i \longrightarrow \infty} |x_i| = 0\})$.

Cet espace est un sous-espace fermé de ℓ_∞ *muni de la norme* sup.

Théorème 1.4.2 *[9] i)* $\ell^w_\infty(X) = \ell_\infty(X)$*, si* $p = \infty$.

ii) $(\ell^n_{p,w}(X), ||.||_{p;w})$ *est un espace de Banach.*

iii) Soient $1 \leq p \leq \infty$*, alors,* $\ell_p(X) \subset \ell^w_p(X)$ *de plus,* $\ell_p(X) = \ell^w_p(X)$ *si et seulement si* $dim(X)$ *est finie.*

Proposition 1.4.3 1) *Si* $1 \leq p \leq \infty$ *on a* $\ell^w_p(X) = \mathcal{L}(\ell^n_{p^*}, X)$ *isometriquement.*

2) *Si* $p = \infty$ *on a* $\ell^w_p(X) = \mathcal{L}(C_0, X)$ *isometriquement.*

(*tel que* p^**la conjugué de p,i.e.,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).

1.5 Idéaux d'opérateurs

Définition 1.5.1 (Opérateur de rang fini) *Un opérateur linéaire continu* T *de* X *dans* Y *est de rang fini si* $dimT(X) < \infty$,

L'espace des opérateurs linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X, Y)$.

Exemple 1.5.1 *Si* $dim(X) = n \Rightarrow dimT(X) \leq dim(X) = n$ *; donc* $T \in \mathcal{L}_f(X, Y)$.

Proposition 1.5.1 *Soient* X,Y $T \in \mathcal{L}_f(X,Y) \Leftrightarrow T(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x) y_k$ *ou* $x_k^* \in X^*$ *et* $y_k \in Y$; $1 \leq k \leq n$.

Définition 1.5.2 *Une classe* I *des opérateurs linéaires bornés, est dite idéal des opérateurs linéaires pour tous* X *et* Y *qui sont des espaces de Banach si et selement si :*

a) $I(X,Y)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(X,Y)$ *et* $\mathcal{L}_f(X,Y) \subset I(X,Y)$.

b) Propriété d'idéal: $E \underset{\mathcal{L}_f(E,X)}{\xrightarrow{u}} X \underset{I(X,Y)}{\xrightarrow{T}} Y \underset{\mathcal{L}(Y,F)}{\xrightarrow{v}} F$, *alors* $v \circ T \circ u \in I(E,F)$

De plus, si la norme $||.||_I : I(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *satisfait:*

1) $(I(X,Y), ||.||_I)$ *est un espace Banach* (*Quasi Banach*).

2) $||id_{\mathbb{K}}||_I = 1$.

3) $||\ v \circ T \circ u||_I \leq ||v||\ ||T||_I\ ||u||$,

alors $(I(X,Y), ||.||_I)$ *s'appelle idéal Banach (Quasi Banach) des opérateurs linéaires.*

Exemple 1.5.2 *Les espaces* $\mathcal{L}_f(X,Y)$ *et* $\mathcal{L}(X,Y)$ *sont des idéaux linéaires.*

1.5.1 Opérateurs linéaires $p-$sommants

Définition 1.5.3 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, X *et* Y *deux espaces de Banach. Soit* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, *on dit que* T *est* $p-$*sommant s'il existe une constante positive* C *tel que pour tout* $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, *on a*

$$(\sum_{i=1}^{n} ||T(x_i)||^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \varphi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}},$$

(i.e),

$$||T(x_i)_{i=1}^n||_p \leq C\ ||(x_i)_{i=1}^n||_{p,w} \qquad (1.3).$$

On note l'espace des opérateurs linéaires $p-$*sommants de* X *dans* Y *par :*

$\Pi_p(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y,\ T$ *est* $p-$*sommants*$\}$, *et muni de la norme*

$$\overline{\wedge}_p(T) = \inf\{C : C \text{ verifant l'inégalité } (1.3)\}.$$

Remarque 1.5.1 *Si* $T \in \Pi_p(X,Y)$ *alors* $||T(x_i)_{i=1}^n||_p \leq \overline{\wedge}_p(T)\ ||(x_i)_{i=1}^n||_{p,w}$

D'après la définition de l'inférieure.

Proposition 1.5.2 *Soit* $T \in \Pi_p(X,Y)$

i) $||T|| \leq \overline{\curlywedge}_p(T)$.

ii) $(\Pi_p(X,Y),\ \overline{\curlywedge}_p(.))$ *est un espace normé.*

iii) $(\Pi_p(X,Y),\ \overline{\curlywedge}_p(.))$ *est un ideal de Banach.*

Théorème 1.5.1 (théorème d'inclusion) *[9] Soit* $1 \leq p < q \leq \infty$ *alors* $\Pi_p(X,Y) \subset$

$\Pi_q(X,Y)$ *et* $\overline{\curlywedge}_q(T) \leq \overline{\curlywedge}_p(T)\ \forall T \in \Pi_p(X,Y)$.

Demonstration. *Prendre* $x_1, ..., x_n \in X$ *et observez que si* $\lambda_i = ||T(x_i)||^{(\frac{q}{p}-1)}$ *on a* $||T(x_i)||^q = ||T(\lambda_i x_i)||^p$. *si* T *est* $p-$*sommant, On a*

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n}||T(x_i)||^q)^{\frac{1}{q}} &= (\sum_{i=1}^{n}||T(\lambda_i x_i)||^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \overline{\curlywedge}_p(T) \sup_{\varphi\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n}|\langle\varphi,\lambda_i x_i\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \overline{\curlywedge}_p(T) \sup_{\varphi\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^p|\langle\varphi,x_i\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Maintenant, puisque $q \geq p$, *nous pouvons appliquer inégalité holder le congugué indices* $\frac{q}{p}$ *et* $\frac{q}{q-p}$ *pour obtenir*

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n}||T(x_i)||^q)^{\frac{1}{q}} &\leq \overline{\curlywedge}_p(T)(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^{\frac{qp}{q-p}})^{\frac{q-p}{qp}} \sup_{\varphi\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n}|\langle\varphi,x_i\rangle|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= \overline{\curlywedge}_p(T)\ (\sum_{i=1}^{n}||T(x_i)||^q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\ ||(x_i)_{i=1}^n||_{q.w}\end{aligned}$$

alors,

$$(\sum_{i=1}^{n}||T(x_i)||^q)^{\frac{1}{q}} \leq \overline{\curlywedge}_p(T)\ ||(x_i)_{i=1}^n||_{q.w}.$$

D'où

$T \in \Pi_q(X,Y)$ *et* $\overline{\curlywedge}_q(T) \leq \overline{\curlywedge}_p(T)$. ∎

1.5.2 Opérateurs linéaires fortement $p-$sommants

Définition 1.5.4 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$ *et* X, Y *deux espaces de Banach, un opérateur linéaire borné* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *est Cohen fortement* $p-$*sommant s'il transforme toute suite* $p-$*sommable à une suite Cohen fortement* $p-$*sommable. C'est-à-dire l'opérateur*

$$\begin{aligned} T : \ell_p(X) &\longrightarrow \ell_p(Y) \\ (x_i)_{i=1}^{\infty} &\longmapsto \ (T(x_i))_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

est bien défini.

* $D_p(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y,\ T$ *est Cohen fortement* $p-$*sommants*$\}$.

* *Pour* $p = 1$, $D_1(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

Proposition 1.5.3 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *et* $1 \leq p \leq \infty$ *alors les propriétés suivantes sont équivalentes*:

$a)$ T *est Cohen fortement* $p-$*somment.*

$b)$ *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \ ||(x_i)_{i=1}^{\infty}||_p ||(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}||_{p^*,w}$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$, *et tout* $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X)$.

$c)$ *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \ ||(x_i)_{i=1}^{n}||_p ||(\varphi_i)_{i=1}^{n}||_{p^*,w}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, x_i \in X$, $\varphi_i \in Y^*$, $i = 1, ..., n$.

Remarque 1.5.2 *Si* $T \in D_p(X,Y)$ *alors* $||T|| \leq d_p(T)$.

Proposition 1.5.4 $(D_p(X,Y), d_p(T))$ *est un idéal de Banach.*

1.6 Les opérateurs linéaires positifs fortement $p-$sommants

1.6.1 Les opérateurs positivement $p-$sommants

Dans cet paragraphe on vous donner une petite rappelle sur les opérateurs positivement $p-$sommants où on va vous citer le célèbre théorème de domination. Pour plus de détails voir [1] , [2] .

Définition 1.6.1 *Soient* $1 \leq p < \infty$, X *un espace de Banach réticulé,* Y *un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, *on dit que l'opérateur* $T : E \longrightarrow X$ *est positivement* $p-$*sommant si il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et toute suite* $(x_i)_{i=1}^n \subset E^+$, *on a*

$$||T(x_i)_{i=1}^n||_p \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}^+} (\sum_{i=1}^n | \langle x_i, \xi \rangle |^p)^{\frac{1}{p}} = C \; ||(x_i)_{i=1}^n||_{\ell^n_{p,|w|}(E)} \qquad (1.4),$$

si $p = \infty$,
$$\sup_{1 \leq i \leq n} ||T(x_i)|| \leq C \; ||(x_i)_{i=1}^n||_{\ell^n_{\infty,|w|}(E)}.$$

On note par :

$\Pi_p^+(E,X) = \{T : E \longrightarrow X \; , T$ *est positivement* $p-$*sommant*$\}$ *et*

$\overline{\wedge}_p^+(T) = \inf\{C, \; C$ *vérifiant l'inégalité* $(1.4)\}$

* *Si* $p = \infty$, $\Pi_\infty^+(E,X) = \mathcal{L}(E,X)$.

Théorème 1.6.1 $(\Pi_p^+(E,X), \overline{\wedge}_p^+(.))$ *est un espace de Banach.*

Théorème 1.6.2 (Théoréme de Domination) *[2] Soit* $u \in \mathcal{L}(E,Y)$ *est un opérateur positivement* $p-$*sommant si, et seulement s'il existe une probabilité* μ *sur l'ensemble* $K = B_{X^*}^+$, *muni par la topologie* $*$*-faible, et une constante positive* C *telle que*

$$||u(x)|| \leq C \; (\int_K \langle x, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*))^{\frac{1}{p}}, \qquad (1.5)$$

pour tout $x \in E^+$, $\overline{\wedge}_p^+(u) = \inf\{C, \; C$ *vérifiant l'inégalité* $(1.5)\}$.

Proposition 1.6.1 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E,Y)$. *Alors* u *est un opérateur positivement* $p-$*sommant si, et seulement, si il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $x \in E$, *on a*

$$||u(x)|| \leq C \; (\int_K \langle |x|, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*))^{\frac{1}{p}}.$$

Preuve. Soit $x \in E$, dapres (1.1), on a

$$\begin{aligned}
||u(x)|| = & \ ||u(x^+ - x^-)|| \\
& \leq ||u(x^+)|| + ||u(x^-)|| \\
& \leq C \ (\int_K \langle x^+, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*))^{\frac{1}{p}} + C \ (\int_K \langle x^-, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*))^{\frac{1}{p}} \\
& \leq 2C \ (\int_K \langle |x|, x^* \rangle^p \, d\mu(x^*))^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Pour la prouve de l'inverse, il suffit appliquer le **Théoréme 1.6.2** pour $x \in E^+$. ■

1.6.2 Les opérateurs positifs fortement $p-$sommants

Dans cette partie nous donnons une rappelle sur les opérateurs fortement $p-$sommants où on va vous citer le célèbre théorème de domination. Pour plus de détails voir [3].

Définition 1.6.2 *Soient $1 \leq p < \infty$. Un l'opérateur $T : X \longrightarrow F$ est positif fortement $p-$sommant, si $\exists C > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i=1}^n \subset X^+$et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset F^{*+}$,on a*

$$\sum_{i=1}^n | \langle T(x_i), y_i^* \rangle | \leq C \ ||(x_i)_{i=1}^n||_p ||(y_i^*)_{i=1}^n||_{\ell^n_{p^*,|w|}(F^*)} \qquad (1.6),$$

on note par :

$D_p^+(X, F) = \{T : X \longrightarrow F, \ T$ est positif fortement $p-$sommant$\}$

et

$d_p^+(T) = \inf\{C, C$ vérifiant l'inégalité (1.6)$\}$.

** Si $p = 1, D_1^+(X, F) = \mathcal{L}(X, F)$.*

Théorème 1.6.3 *$(D_p^+(X, F), d_p^+(.))$ est un espace de Banach.*

Théorème 1.6.4 (Théoréme de Domination) *L'opérateur $T \in \mathcal{L}(X, F)$ est positif fortement $p-$sommant $(1 \leq p < \infty)$,si et seulement si $\exists C > 0$ et une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{F^{**}}^+$ telles que pour tous $x \in X$ et $y^* \in F^*$,on a :*

$$| \langle T(x), y^* \rangle | \leq C \ ||x|| \ (\int_{B^+_{F^{**}}} \langle |y^*|, \psi \rangle^{p^*} \, d\mu)^{\frac{1}{p^*}} \qquad (1.7).$$

En plus, dans ce cas, $d_p^+(T) = \inf\{C, \ C$ vérifiant l'inégalité (1.7)$\}$.

Preuve. ($\Rightarrow$)Soit $T \in D_p^+(X,F)$ et puisque $T^* \in \Pi_{p^*}^+(F^*,X^*)$, on obtient:

$|\langle T(x), y^* \rangle| = |\langle x, T^*(y^*)\rangle| \leq ||x||\ ||T^*(y^*)|| \leq \overline{\wedge}_{p^*}^+(T^*)||x||(\int\limits_{B_{F^{**}}^+} \langle |y^*|, \psi\rangle^{p^*} d\mu)^{\frac{1}{p^*}}.$

($\Leftarrow$)Soient $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i=1}^n \subset F^*$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset X$;on a d'après (1.7)

$|\langle T(x_i), y^* \rangle| \leq C\ ||x_i||\ (\int\limits_{B_{F^{**}}^+} \langle |y_i^*|, \psi\rangle^{p^*} d\mu)^{\frac{1}{p^*}},$

pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi, en utilisant l'inégalité **Hölder** nous obtenons que

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y^* \rangle| \leq C\sum_{i=1}^n [||x_i||\ (\int\limits_{B_{F^{**}}^+} \langle |y_i^*|, \psi\rangle^{p^*} d\mu)^{\frac{1}{p^*}}]$$
$$\leq C\ (\sum_{i=1}^n ||x_i||^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n \int\limits_{B_{F^{**}}^+} \langle |y_i^*|, \psi\rangle^{p^*} d\mu)^{\frac{1}{p^*}}$$
$$\leq C\ ||(x_i)_{i=1}^n||_p \sup_{\psi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^n \langle |y_i^*|, \psi\rangle^{p^*} d\mu)^{\frac{1}{p^*}}, \text{(car } \mu \text{ est mesure de probabilité)}$$
$$\leq C\ ||(x_i)_{i=1}^n||_p\ ||(y_i^*)_{i=1}^n||_{\ell^n_{p^*,|w|}(F^*)}.$$ Alors $T \in D_p^+(X,F)$. ∎

1.7 Les opérateurs multilinéaires

A cette partie on donnera la notion qui généralise celle de linéaire qu'on va l'appeler le type des applications multilinéaires. Avec une définition d'un norme sur cette classe pour qu'elle soit un espace normé. Aussi on prendra quelques caractérisations de ce espace. Pour plus de détails voir [4] , [18] et [19].

Définition 1.7.1 *Une application $T : X_1, ..., X_n \to Y$ est dite multilinéaire ou $n-$linéaire, Si pour tout x^j , $y^j \in X_j$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) avec $1 \leq j \leq n$ on a:*

$T(x^1, ..., \alpha x^j + \beta y^j, ..., x^n) = \alpha T(x^1, ..., x^j, ..., x^n) + \beta T(x^1, ..., y^j, ..., x^n).$

$*$ *Si $Y = \mathbb{K}$, T est dite forme multilinéaire.*

$*$ *Si $m = 2$, T est dite bilinéaire (ou $2-$linéaire).*

$*$ *On note par $L(X_1, ..., X_n; Y)$ l'ensemble des applications multilinéaire de $X_1, ..., X_n$ dans Y.*

Exemple 1.7.1 *L'applications*

$T : \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} : (\lambda_1, ..., \lambda_n) \mapsto \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n$

T est une application multilinéaire.

Remarque 1.7.1 *Définissons les applications $n-$linéaires suivantes:*

$(T_1 + T_2)(x^1, ..., x^n) = T_1(x^1, ..., x^n) + T_2(x^1, ..., x^n),$

$(\lambda T)(x^1, ..., x^n) = \lambda T(x^1, ..., x^n)$ *pour* $(x^1, ..., x^n) \in X_1 \times \cdots \times X_n.$

Ce qui donne à $L(X_1, ..., X_n; Y)$ une structure d'espace vectoriel.

Théorème 1.7.1 (Multilinéaire continue) *Soient $T \in L(X_1, ..., X_n; Y)$ et*

$x = (x^1, ..., x^n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ On munit $X_1 \times \cdots \times X_n$ de la norme

$||x|| = ||(x^1, ..., x^n)||_\infty = \max\limits_{1 \le j \le n} ||x^j||_{X_j}$, alors, les propriétés suivantes sont equivalentes:

(1) T est continue.

(2) T est continue au point $0_{X_1 \times \cdots \times X_n} = (0, ..., 0)$.

(3) $||T(x^1, ..., x^n)||$ est borné sur le produit des boules unitées: $||x^1|| \le 1, ..., ||x^n|| \le 1$.

(4) $\exists M > 0$ telles que $(x^1, ..., x^n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ on ait:

$$||T(x^1, ..., x^n)|| \le M \; ||x^1|| \times \cdots \times ||x^n|| = M \prod_{j=1}^{n} ||x^j||.$$

Dans ce cas, on pose

$$||T|| = \sup_{\substack{x^j \in B_{X_j} \\ 1 \le j \le n}} ||T(x^1, ..., x^n)||.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble des applications multilinéaires (ou $n-$linéaire) continues de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dans Y par $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ quand $X_1 = ... = X_n = X$ nous écrivons $\mathcal{L}(^n X, Y)$ et si $Y = \mathbb{K}$ nous utilisons $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_n)$ et $\mathcal{L}(^n X) = \mathcal{L}(^n X, \mathbb{K})$. Nous représentons $\mathcal{L}(^1 X, Y)$ par $\mathcal{L}(X, Y)$.

Proposition 1.7.1 *Soient $X_1 \times \cdots \times X_n$ des espaces de Banach et Y un espace normé, l'application $T \in L(X_1, ..., X_n; Y)$ est continue si, et seulement si, T est separement continue ($i.e., T$ est continue pour chaque variable) de $X_1 \times \cdots \times X_n$.*

Corollaire 1.7.1 *Si* $X_1 \times \cdots \times X_n$ *sont des dimensions finies, alors toute* $T \in L(X_1, ..., X_n; Y)$ *est continue, i.e.,* $L(X_1, ..., X_n; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$.

Théorème 1.7.2 (graphe fermé) *Soient* $X_1 \times \cdots \times X_n$ *,* Y *sont des espaces de Banach et* $T : X_1, ..., X_n \to Y$ *une application* $n-$*linéaire de graphe fermé, alors* T *est continue.*

Théorème 1.7.3 (l'opérateur $m-$linéaire positif) *l'opérateur* $m-$*linéaire*

$T : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ *est positif si* $T(x^1, ..., x^n) \in Y^+$*, pour chaque*

$x^1 \in X_1^+, ..., x^n \in X_n^+$. *On note par* $\mathcal{L}^+(X_1, ..., X_n; Y)$ *l'espace vectoriel de tous les opérateurs positifs* $m-$*linéaires continus de* $X_1 \times \cdots \times X_n$ *dans* Y *muni de la norme*

$$||T|| = \sup_{\substack{x^j \in B^+_{E^j} \\ 1 \leq j \leq m}} ||T(x^1, ..., x^n)||.$$

Définition 1.7.2 (L'adjoint d'un opérateur multilinéaire) *Pour tout opérateur multilinéaire* $T : X_1, ..., X_n \to Y$*, on le associe avec l'opérateur adjoint suivant*

$T^* : Y^* \to \mathcal{L}(X_1, ..., X_n)$*, qui est définie par:*

$$y^* \mapsto T^*(y^*) : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{K} \quad ou$$

$$T^*(y^*)(x^1, ..., x^n) = y^* T^*(x^1, ..., x^n) \ \ et\ \mathbb{K} = \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}.$$

Chapitre 2

Opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants

Dans ce deuxième chapitre, on fixe l'attention sur l'espace des opérateurs positifs fortement $p-$ sommants et les opérateurs positivement $p-$sommants, on va expliquer que que les auteurs de l'article [15] ont conclus après un travail concédirable que l'espace des opérateurs positivement $p-$sommants de H en F sont dans $D_p^+(H,F)$, qui est l'espace de tous les opérateurs positifs fortement $q-$sommants de H dans F, tel que H est un espace de Hilbert, on peut dire que ce chapitre est une généralisation le travail de Bù.pour plus d'informations voir [11]

2.1 Opérateurs $m-$linéaires Cohen fortement $p-$sommants

Dans la courte suite on prendra une vue sur les opérateurs $m-$linéaires Cohen fortement $p-$sommants là on va vous donner la définition des opérateurs Cohen fortement $p-$sommantet on éclaire que cet ensemble est un espace de Banach. Pour plus de détails voir [5].

Définition 2.1.1 *Un opérateur multilinéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ est Cohen fortement $p-$sommant si et seulement si il existe une constante C, tel que pour*

$x_1^j, ..., x_n^j \in X_j, 1 \leq j \leq m$, et pour tout $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in Y^*$

$$|| \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle ||_{\ell_1^n} \leq C \ (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} ||y_i^*(y)||_{\ell_{p^*}^n} \qquad (2.1),$$

on note par:

$D_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \{T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$, T est un opérateurs $m-$linéaires Cohen fortement $p-$sommants$\}$

et

$d_p^m(T) = \inf\{C$,vérifiant l'inégalité $(2.1)\}$.

** Si $p = 1$, $D_1^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.*

Théorème 2.1.1 *[5]* 1) *$(D_p^m(X_1, ..., X_m; Y), d_p^m(.))$ est un espace de Banach.*

2) *T appartient à la classe des opérateurs $m-$linéaires Cohen fortement $p-$sommants si et seulment si, son adjoint T^* appartient à la classe des opérateur linéaires absolument p^*-sommant.*

2.2 Opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants

Dans cette section on touchons avec notre étude la notion des Opérateurs multilinéaires positifs Cohen fortement $p-$sommants là on va vous donner la définition et on éclaire que c'est un espace de Banach. et que ce type d'opérateurs vérifier le théorème de domination Pour plus de détails voir [1] , [3] , [10] et [11]. .

Définition 2.2.1 *Soit* $1 \leq p < \infty$. *Un opérateur* $m-$*linéaire* $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to F$ *est positif Cohen fortement p−sommant si* $\exists C > 0$, *telle que pour tous* $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j; 1 \leq j \leq m$ *et tout* $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in F^*$

$$|| \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle ||_{\ell_1^n} \leq C \ (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \quad ||y_i^*||_{\ell^n_{p^*,|w|}(F^*)} \qquad (2.2),$$

on note par:

$D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F) = \{T : X_1 \times \cdots \times X_m \to F$, T *est un opérateur* $m-$*linéaires positifs Cohen fortement* $p-$*sommants*$\}$

et

$d_p^{m+}(T) = \inf\{C, C$ *vérifiant l'inégalité* (2.2)$\}$.

Théorème 2.2.1 $(D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F), d_p^{m+}(.))$ *est un espace de Banach.*

Remarque 2.2.1 *Soit* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; F)$, *Alors* T *est un opérateur multilinéaire positif Cohen fortement* $p-$*sommant si, et seulement si,* $\exists K > 0$ *telle que*

$$|| \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle ||_{\ell_1^n} \leq K \ (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \quad ||y_i^*||_{\ell^n_{p^*,w}} \qquad (2.3),$$

pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j; 1 \leq j \leq m$ *et tout* $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in F^{*+}$.

Proposition 2.2.1 *Soient* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; F)$, R *un opérateur dans* $\mathcal{L}^+(F, G)$ *et* S_j *dans* $\mathcal{L}(E_j, X_j)$ $(1 \leq j \leq m)$.

1) *Si* T *est positif Cohen fortement* $p-$*sommant, alors* RT *est positif Cohen fortement* $p-$*sommant et* $d_p^{m+}(RT) \leq d_p^{m+}(T)||R||$.

2) *Si* T *est positif Cohen fortement* $p-$*sommant, alors* $T \circ (S_1, ..., S_m)$ *est positif Cohen fortement* $p-$*sommant et* $d_p^{m+}(T \circ (S_1, ..., S_m)) \leq d_p^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} ||S_j||$.

Demonstration. 1) Soit $T \in D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$. Alors d'après (2.3) on a

$$\begin{aligned} || \langle RT(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle ||_{\ell_1^n} &= || \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), R^*(y_i^*) \rangle ||_{\ell_1^n} \\ &\leq d_p^{m+}(T) (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B^+_{F^{**}}} (\sum_{i=1}^{n} \langle R^*(y_i^*), y^{**} \rangle^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq d_p^{m+}(T) ||R|| (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B^+_{F^{**}}} (\sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i^*, \tfrac{R^{**}(y^{**})}{||R^{**}||} \right\rangle^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

$$\leq d_p^{m+}(T)\|R\|(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\|x_i^j\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi\in B_{G^{**}}^+} (\sum_{i=1}^{n}\langle y_i^*,\varphi\rangle^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.$$

Donc $RT \in D_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$ et $d_p^{m+}(RT) \leq d_p^{m+}(T)\|R\|$.

1) Soit $T \in D_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$. Alors d'après (2.1) on a

$$\begin{aligned}\|\langle T\circ(S_1,...,S_m)(x_i^1,...,x_i^m),y_i^*\rangle\|_{\ell_1^n} &\leq d_p^{m+}(T)(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\|S_jx_i^j\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**}\in B_{F^{**}}^+}\|y_i^*(y^{**})\|_{\ell_{p^*}^n}\\ &\leq d_p^{m+}(T)(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\|S_j\|^p\|x_i^j\|_{E_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**}\in B_{F^{**}}^+}\|y_i^*(y^{**})\|_{\ell_{p^*}^n}\\ &\leq d_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\|S_j\|\,(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^j\|_{E_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**}\in B_{F^{**}}^+}\|y_i^*(y^{**})\|_{\ell_{p^*}^n}.\end{aligned}$$

Donc, $T\circ(S_1,...,S_m)$ est un opérateur multilinéaire positif Cohen fortement $p-$sommant et $d_p^{m+}(T\circ(S_1,...,S_m)) \leq d_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\|S_j\|$. ∎

Lemme 2.2.1 (Ky Fan) *[9, p.190] Soient E un espace vectoriel topologique séparé, C une partie convexe compacte de E. Soit M un ensemble des fonctions définies sur C à valeurs dans $(-\infty,+\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes:*

a) Toute $f\in M$ est convexe et semicontinue inférieurement ;

b) Si $g\in conv(M)$, il existe $f\in M$ telle que $g(x)\leq f(x)$, $\forall x\in C$;

c) Il existe $r\in\mathbb{R}$ telle que toute $f\in M$ prend une valeur r. Alors, il existe $x_0\in C$ telle que $f(x_0)\leq r$ pour toute $f\in M$.

Théorème 2.2.2 (Théorème de Domination) *Si un opérateur $m-$linéaire $T\in\mathcal{L}(X_1,...,X_m;F)$ est positif Cohen fortement $p-$sommant $(1<p\leq\infty)$, alors il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{F^{**}}^+$ telle que pour tous $x^1,...,x^m\in X_1\times\cdots\times X_m$ et $y^*\in F^{*+}$ nous avons:*

$$|\langle T(x^1,...,x^m),y^*\rangle| \leq d_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|\,\|y^*\|_{L_{p^*}(B_{F^{**}}^+,\mu)} \qquad (2.4).$$

À l'inverse, s'il y a une constante positive C et une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{F^{**}}^+$ telle que pour tous $x^1,...,x^m\in X_1\times\cdots\times X_m$ et $y^*\in F^{*+}$, on a :

$$|\langle T(x^1,...,x^m),y^*\rangle| \leq C\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|\,\|y^*\|_{L_{p^*}(B_{F^{**}}^+,\mu)} \qquad (2.5)$$

alors, $T\in D_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$ et $d_p^{m+}(T)\leq C$.

Demonstration. Tout d'abord, nous prouvons l'inverse, soient $x^1, ..., x^m \in X_1 \times \cdots \times X_m$ $(1 \leq i \leq n)$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in F^{*+}$. Nous avons d'aprés (2.5)

$$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j|| \Big(\int_{B^+_{F^{**}}} (y_i^*(y^{**})^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p^*}}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle| &\leq C \sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{m} ||x_i^j|| \Big(\int_{B^+_{F^{**}}} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p^*}} \Big) ; \text{(par } \textbf{Hölder}\text{)} \\
&\leq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{m} ||x_i^j|| \Big)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(\int_{B^+_{F^{**}}} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big) \Big)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{B^+_{F^{**}}} \sum_{i=1}^{n} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p \Big)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B^+_{F^{**}}} \Big(\sum_{i=1}^{n} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} \Big) \int_{B^+_{F^{**}}} d\mu(y^{**}) \\
&\leq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p \Big)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B^+_{F^{**}}} \Big(\sum_{i=1}^{n} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}} \mu(B^+_{F^{**}}) ; (\mu(B^+_{F^{**}}) = 1) \\
&\leq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p \Big)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B^+_{F^{**}}} ||(y_i^*(y^{**}))_{i=1}^n||_{\ell^n_{p^*}}.
\end{aligned}$$

Cela implique que $T \in D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$ et $d_p^{m+}(T) \leq C$.

Pour prouver (2.4), soit $K = B^+_{F^{**}}$. On considére l'ensemble C des mesures de probabilité sur $C(K)^*$. L'ensemble C est un convexe compact dans $C(K)^*$muni de sa topologie $*$-faible $\sigma(C(K)^*, C(K))$. Soit M un ensemble des fonctions définies sur C à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f_{((x_i^j),(y_i^*))}(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \Big(|\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle| - \tfrac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \tfrac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \langle y_i^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big) \tag{2.6}$$

où $(x_i^j)_{i=1}^n \subset X_j$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset F^{*+}, (1 \leq j \leq m)$.

Ces fonctions sont convexes et continues.

Nous appliquons maintenant le lemme de **Ky Fan** avec $E = C(K)^*$. Soient f, g dans M et $\lambda \in [0, 1]$ telles que :

$$f_{((x_i'^j),(y_i'^*))}(\mu) = \sum_{i=1}^{k} \Big(|\langle T(x_i'^1, ..., x_i'^m), y_i'^* \rangle| - \tfrac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||x_i'^j||^p - \tfrac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \langle y_i'^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big)$$

et

$$g_{((x_i''^j),(y_i''^*))}(\mu) = \sum_{i=1}^{l}(| \langle T(x_i''^1, ..., x_i''^m), y_i''^* \rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||x_i''^j||^p$$
$$- \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \langle y_i''^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\mu(y^{**})).$$

Il s'ensuit que

$$\lambda f = \sum_{i=1}^{k} \lambda(| \langle T(x_i'^1, ..., x_i'^m), y_i'^* \rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||x_i'^j||^p$$
$$- \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \langle y_i'^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))$$
$$= \sum_{i=1}^{k}(| \left\langle T(\lambda^{\frac{1}{mp}} x_i'^1, ..., \lambda^{\frac{1}{mp}} x_i'^m), \lambda^{\frac{1}{p^*}} y_i'^* \right\rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||\lambda^{\frac{1}{mp}} x_i'^j||^p$$
$$- \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \left\langle \lambda^{\frac{1}{p^*}} y_i'^*, y^{**} \right\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))$$

et

$$(1-\lambda) g = \sum_{i=1}^{l} (1-\lambda)(| \langle T(x_i''^1, ..., x_i''^m), y_i''^* \rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||x_i''^j||^p$$
$$- \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \langle y_i''^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))$$
$$= \sum_{i=1}^{l}(| \left\langle T((1-\lambda)^{\frac{1}{mp}} x_i''^1, ..., (1-\lambda)^{\frac{1}{mp}} x_i''^m), (1-\lambda)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^* \right\rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||(1-\lambda)^{\frac{1}{mp}} x_i''^j||^p$$
$$- \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K | \left\langle (1-\lambda)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^*, y^{**} \right\rangle |^{p^*} d\mu(y^{**})).$$

Enfin, nous avons

$$\lambda f + (1-\lambda) g = \sum_{i=1}^{n}(| \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \langle y_i^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))\,;$$

avec $n = k + l$,

$$x_i^j = \begin{cases} \lambda^{\frac{1}{mp}} x_i'^j & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k \\ (1-\lambda)^{\frac{1}{mp}} x_i''^j & \text{si } k+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad \text{et} \quad y_i^* = \begin{cases} \lambda^{\frac{1}{p^*}} y_i'^* & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k \\ (1-\lambda)^{\frac{1}{p^*}} y & \text{si } k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Soit $y_0 \in B_{F^{**}}^+$ tel que

$$\sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} (\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y^{**} \rangle^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} = (\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y_0 \rangle^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \qquad (2.7)$$

et f de la forme (2.6). On a

$$f(\delta_{y_0}) = \sum_{i=1}^{n}(| \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \langle y_i^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\delta_{y_0}(y^{**}))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} | \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \sum_{i=1}^{n} \int_K \langle y_i^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\delta_{y_0}(y^{**})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} | \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y^{**} \rangle^{p^*} d\delta_{y_0}(y^{**})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} | \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle | - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} (\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y^{**} \rangle^{p^*}) \int_K d\delta_{y_0}(y^{**})$$

$= \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1,...,x_i^m), y_i^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} (\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y_0\rangle^{p^*})$;(d'aprés l'égalité (2.7) et $\delta_{y_0}(B_{F^{**}}^+) = 1$).

δ_{y_0} est la mesure de Dirac supportée par y_0.

En utilisant l'identité élémentaire

$$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{*+} \quad \alpha\beta = \inf_{\xi>0} \left\{ \frac{1}{p}(\frac{\alpha}{\xi})^p + \frac{1}{p^*}(\xi\beta)^{p^*} \right\} \qquad (2.8)$$

nous trouvons que

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1,...,x_i^m), y_i^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} (\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y_0\rangle^{p^*})$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1,...,x_i^m), y_i^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} (\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p)^{\frac{1}{p}} . (\sum_{i=1}^{n} \langle y_i^*, y_0\rangle^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}) ;$$

et ceci d'aprés (2.3) est inférieur ou égale à zero. D'aprés le lemme de **Ky Fan**, $\exists\mu \in C$ telle que $f(\mu) \leq 0$ pour toute $f \in M$. Si on prend $x = (x^1, ..., x^m) \in X_1, ..., X_m$ et $y^* \in F^{*+}$, on a:

$$f(\mu) = f_{(x,y^*)}(\mu)$$
$$= |\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle| - \frac{d_p^{m+}(T)}{p} \prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{d_p^{m+}(T)}{p^*} \int_K \langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}) \leq 0.$$

D'où

$$|\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle| \leq d_p^{m+}(T)(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m} ||x_i^j||^p - \frac{1}{p^*}\int_K \langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**})).$$

Fixant $\xi > 0$. Et en remplaçant x^jpar $\frac{1}{\xi^{\frac{1}{m}}}x^j$et y^*par ξy^*, on trouve

$$|\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle| = |\left\langle T(\frac{1}{\xi^{\frac{1}{m}}}x^1, ..., \frac{1}{\xi^{\frac{1}{m}}}x^m), \xi y^* \right\rangle|$$
$$\leq d_p^{m+}(T)(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m} ||\frac{x^j}{\xi^{\frac{1}{m}}}||^p - \frac{1}{p^*}\int_K \langle \xi y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))$$
$$\leq d_p^{m+}(T)(\frac{1}{p}(\frac{1}{\xi}\prod_{j=1}^{m} ||x^j||)^p + \frac{1}{p^*}(\xi(\int_K \langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}})^{p^*}).$$

Prendre l'inférieur sur tout $\xi > 0$ et en utilisant l'identité élémentaire (2.8), on obtient

$$|\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle|$$
$$\leq d_p^{m+}(T)\inf_{\xi>0}(\frac{1}{p}(\frac{1}{\xi}\prod_{j=1}^{m} ||x^j||)^p + \frac{1}{p^*}(\xi(\int_K \langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}})^{p^*})$$
$$= d_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m} ||x^j||(\int_K \langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$

Ce qui implique que

$$|\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle| \leq d_p^{m+}(T)\prod_{j=1}^{m} ||x^j|| \; ||y^*||_{L_{p^*}(B_{F^{**}}^+,\mu)}. \ \blacksquare$$

Proposition 2.2.2 *Un opérateur $m-$linéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; F)$ est positif Cohen fortement $p-$sommant $(1 < p \leq \infty)$, si et seulement s'il existe une constante positive $K > 0$ et une mesure de probabilité de Radon μ sur $B^+_{F^{**}}$ telle que pour tous*

$(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ et $y^* \in F^{*+}$, on a :

$$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| \leq K \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| (\int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \qquad (2.9).$$

Demonstration. Implication directe. Soient $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$ et $y^* \in F^{*+}$. d'aprés (1.1) on a

$$\begin{aligned}
|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| &= |\langle T(x^1, ..., x^m), y^{*+} - y^{*-} \rangle| \\
&\leq |\langle T(x^1, ..., x^m), y^{*+} \rangle| + |\langle T(x^1, ..., x^m), y_i^{*-} \rangle| \\
&\leq C \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| (\int_{B^+_{F^{**}}} (y^{*+}(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\quad + C \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| (\int_{B^+_{F^{**}}} (y^{*-}(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq 2C \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| (\int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Implication indirecte. Soients $(x_i^1, ..., x_i^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ $, 1 \leq i \leq n$ et tout $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in F^*$. On a d'aprés (2.9)

$$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| \leq K \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| (\int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de **Hölder**, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| &\leq K \sum_{i=1}^{n} [\prod_{j=1}^{m} ||x^j|| (\int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}] \\
&\leq K (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x^j||)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} \int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq K (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x^j||)^{\frac{1}{p}} (\int_{B^+_{F^{**}}} \sum_{i=1}^{n} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq K (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x^j||)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B^+_{F^{**}}} (\sum_{i=1}^{n} (|y^*|(y^{**}))^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \int_{B^+_{F^{**}}} d\mu(y^{**}) \\
&\leq K (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x^j||)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B^+_{F^{**}}} (\sum_{i=1}^{n} (|y^*|(y^{**}))^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}; (\mu(B^+_{F^{**}}) = 1) \\
&\leq K (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} ||x^j||)^{\frac{1}{p}} ||(y_i^*)_{i=1}^n||_{\ell^n_{p^*,|w|}(F^*)}.
\end{aligned}$$

Alors, $T \in D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$ et cela terminera la preuve. ■

Théorème 2.2.3 *Considérons* $1 < p_1 \leq p_2 \leq +\infty$. *Si* $T \in D_{p_1}^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$, *alors* $T \in D_{p_2}^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$ *et* $d_{p_1}^{m+}(T) \leq d_{p_2}^{m+}(T)$.

Demonstration. Si $T \in D_{p_2}^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$, d'aprés (2.4) on a

$$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| \leq d_{p_2}^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| \; ||y^*||_{L_{p_2^*}(B_{F^{**}}^+, \mu)}$$

$$\leq d_{p_2}^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| \; ||y^*||_{L_{p_1^*}(B_{F^{**}}^+, \mu)} \text{ ; (si } p_1 \leq p_2 \text{ alors } ||y^*||_{L_{p_2^*}(B_{F^{**}}^+, \mu)} \leq ||y^*||_{L_{p_1^*}(B_{F^{**}}^+, \mu)})$$

tel que pour chaque $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ et $y^* \in F^{*+}$.

Cela implique que $T \in D_{p_1}^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$ et $d_{p_1}^{m+}(T) \leq d_{p_2}^{m+}(T)$. ■

Théorème 2.2.4 *Soit* $1 < p \leq \infty$. *Soit* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; F)$ *et* T^* *l'adjoint de* T.

Alors, $T \in D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$, *si et seulement si,* $T^* \in \Pi_{p^*}^+(F^*, \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$, *et nous avons*

$d_p^{m+}(T) = \overline{\wedge}_{p^*}^+(T^*)$, *où* $\Pi_{p^*}^+$ *est la classe des opérateurs positivement* p^*-*sommants.*

Demonstration. Supposons que $T \in D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$. D'aprés (2.9) on a

$$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| \leq d_p^{m+}(T) \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| \Big(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p^*}}$$

pour tous $(x^j) \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$ et $y^* \in F^*$.

Nous prenons le supremum sur toutes les suites $(x^j)_{j=1}^m$ avec $||x^j|| \leq 1$,on obtient

$$\sup_{||x^1||, ..., ||x^j|| \leq 1} |T^*(y^*)(x^1, ..., x^n)| \leq d_p^{m+}(T) \Big(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Alors $||T^*(y^*)|| \leq d_p^{m+}(T) \Big(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p^*}}$.

Par le théoréme de domination de Pietsch **Proposition 1.6.1 ,**

$T^* \in \Pi_{p^*}^+(F^*, \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$ et $\overline{\wedge}_{p^*}^+(T^*) \leq d_p^{m+}(T)$.

Pour prouver l'inverse, supposons que $T^* \in \Pi_{p^*}^+(F^*, \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$.

On a pour tous $(x^j) \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$ et $y^* \in F^*$.

$$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| = |T^*(y^*)(x^1, ..., x^m)| \leq ||T^*(y^*)|| \prod_{j=1}^{m} ||x^j||.$$

En utilisant le théoréme de **domination de Pietsch** pour les opérateurs positivement p^*-sommants, on obtient

$$| \langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle | \leq \overline{\wedge}^+_{p^*}(T^*) \prod_{j=1}^{m} ||x^j|| \, (\int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

Finalement, d'aprés la **Proposition 2.2.2** , T est un opérateur multilinéaire positif Cohen fortement $p-$sommant et $d^{m+}_p(T) = \overline{\wedge}^+_{p^*}(T^*)$. ■

Théorème 2.2.5 *Soit* $1 < p \leq \infty$. *Soit* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ *et* T^**son adjoint. On a* $T \in D^m_p(X_1, ..., X_m; Y)$

si, et seulement si, $T^* \in \Pi_{p^*}(Y^*, \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$ *et on a* $d^m_p(T) = \overline{\wedge}_{p^*}(T^*)$.

Proposition 2.2.3 *Pour* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $\Pi_{p,q}(X, Y) \subseteq \Pi^+_{p,q}(X, Y)$.

Théorème 2.2.6 *Pour* $1 < p \leq \infty$. $D^m_p(X_1, ..., X_m; F) \subseteq D^{m+}_p(X_1, ..., X_m; F)$.

Demonstration. Si $T \in D^m_p(X_1, ..., X_m; F)$ par le **Théorème 2.2.5**, l'opérateur $T^* \in \Pi_{p^*}(F^*, \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$. D'aprés la **Proposition 2.2.3**, nous avons $T^* \in \Pi^+_{p^*}(F^*, \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$. Par le **Théorème 2.2.4**, on trouve $T \in D^{m+}_p(X_1, ..., X_m; F)$. ■

Chapitre 3

Opérateurs multilinéaires p-convex

Dans ce troisième chapitre, A. belacel et A. bougoutaia ont étudié la relation entre les opérateurs positivement $p-$sommants introduits par O. Blasco.voir [1] Et comme applications a généralisé un résultat à Q. Bu et Z. Shi, et il a vérifié quelques inclusions notamment la classe des opérateurs $m-$linéaires multiples $p-$convexes introduits dans sont article paru.voir [11] Pour plus d'informations voir[3] , [9] , [12] , [19] et [20].

3.1 Produit tensoriel projectif

Définition 3.1.1 *Soient $m \in \mathbb{N}$, et $X_1, ..., X_m; Y$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, pour chaque $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$, nous définissons le nombre réel positif $\pi(u) = \inf \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{m} ||x_i^j|| \right\}$, où l'infimum portée sur toutes les représentations possibles de u de la forme*

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m.$$

Alors π est une norme tensorielle sur l'espace $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ et en plus on a $\pi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = ||x^1|| \cdots ||x^m||$.

** On note $X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces $X_1, ..., X_m$ i. e., le complété de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = \cdots = X_m = X$ on écrit simplement $\hat{\otimes}_\pi^m X$.*

Proposition 3.1.1 (Le produit tensoriel des opérateurs) *Soient* $X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_m$ *des espaces vectoriels normés et soient les opérateurs linéaires conituns* $T_j : X_j \longrightarrow Y_j$ *, pour tout,* $j = 1, ..., m$ *il existe un unique opérateur linéaire continu*

$T_1 \otimes \cdots \otimes T_m : X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi Y_m$*, tels que*

$T_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi T_m(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = T_1(x^1) \otimes \cdots \otimes T_m(x^m)$*, pour tout* $x^j \in X_j$*, et en plus*

$$||T_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi T_m|| = \prod_{j=1}^{m} ||T_j||.$$

Proposition 3.1.2 *Si tous les espaces vectoriels* $X_1 \times \cdots \times X_m$ *sont de dimension finie, alors* $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ *est un espace à dimensions finies.*

De plus, si $X_1 \times \cdots \times X_m$ *sont normés, alors* $X_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ *est complet.*

Théorème 3.1.1 (Linéarisation des applications $m-$linéaires continues) *Soient* $X_1, ..., X_m; Y$ *des espaces de Banach* $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ *une application multilinéaire continue, alors, il existe une unique application linéaire continue* T_L *definie sur* $X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ *dans* Y*, qui vérifier que* $T_L(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) = T_m(x^1, ..., x^m)$ *pour tout* $x^j \in X_j$*, et tout* $j = 1, ..., m$*, avec* σ_m *est l'application canonique definie de* $X_1 \times \cdots \times X_m$ *dans* $X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ *par:*

$$\sigma_m\ (x^1, ..., x^m) = x^1 \otimes \cdots \otimes x^m.$$

Autrement dit: $T = T_L \circ \sigma_m$*.*

La correspondance $T \longleftrightarrow T_L$ *est une isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach* $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ *et* $\mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$*. De plus l'application* T_L *s'appelle linéarisation de* T*.*

Remarque 3.1.1 *Le théoréme précédent donne l'identification* $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$*.Si* $Y = \mathbb{K}$*, le dual de* $(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m)$ *est identifié à l'espace des formes multilinéaires bornées* $(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m)^* = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$*. Avec cette identification, l'action d'une forme continue* T*, comme fonction linéaire continue sur* $X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ *est donné par :*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \longmapsto \sum_{i=1}^{n} T(x_i^1, ..., x_i^m).$$

Cette dualité donne une nouvelle formule pour la norme projective,

$$\pi(u) = \sup\{|\langle u, T\rangle|,\ T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m), ||T|| \leq 1\}.$$

3.1.1 Opérateurs $p-$convexes

Définition 3.1.2 *L'opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est $p-$convexe, si $\exists\ M > 0$, telle que pour toute suite $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ on a*

$$\begin{cases} ||\sum_{i=1}^{n}|T(x_i)|^p||^{\frac{1}{p}} \leq M(\sum_{i=1}^{n}||x_i||^p)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ ||\sup_{1\leq i\leq n}|T(x_i)||| \leq M \max_{1\leq i\leq n}||x_i|| & si \qquad p = \infty. \end{cases}$$

On note $C_p^{vex}(X, Y) = \{L$'ensemble de tous ces opérateurs $p-$convexes$\}$

et aussi on note par:

$C_p^{vex}(T) = \{M :$ *la plus petite constante* $M\}$.

Remarque 3.1.2 *Un espace de Banach X est $p-$convexe si id_X est $p-$convexe.*

Exemple 3.1.1 *Tout espace de Banach est $p-$convexe.*

Proposition 3.1.3 *Pour $1 < q \leq p \leq +\infty$, on a*

*a)*1.$D_{p,q}^{+}(X, F) \subset C_{(q,p)}^{vex}(X, F)$;

2.$D_{\infty,q}^{+}(X, F) = C_{(q,\infty)}^{vex}(X, F)$;

3.$D_{\infty,q}^{+}(X, F) \subset C_{(s,s)}^{vex}(X, F)$, *pour tout* $s < q$.

b) 1.$D_{p,q}^{+}(X, c_0) = \mathcal{L}(X; c_0)$;

2.$D_{p,q}^{+}(X^*, \ell^1) = C_{(q,p)}^{vex}(X^*, \ell^1)$.

3.2 Opérateurs multilinéaires $p-$convex

Proposition 3.2.1 *Soient $1 < p \leq \infty$ et $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; F)$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes*

1) $T \in D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; F)$.

2) $T_L \in D_p^{m+}(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m; F)$.

3) *Il existe un espace de Banach Z, $u \in D_p^+(Z;F)$ et $S \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Z)$ tels que $T = uS$.*

Demonstration. * 1) $\Longrightarrow$ 2) Soit $T \in D_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$ et pour tout $y^* \in F^*$ et $z \in X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, z admet une représentation $z = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$ telle que

$\sum\limits_{i=1}^{n}(||x_i^1|| \times \cdots \times ||x_i^m||) \leq ||z|| + \varepsilon$

D'aprés la **Proposition 2.2.2** , nous avons

$|\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle| \leq d_p^{m+}(T) \prod\limits_{j=1}^{m} ||x^j||(\int\limits_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$. Alors

$$\begin{aligned}
|\langle T(z), y^*\rangle| &= |\left\langle T(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m), y^*\right\rangle| \\
&= |\sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m), y^*\rangle| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m), y^*\rangle| \\
&\leq d_p^{m+}(T) \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} ||x^j||(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq d_p^{m+}(T)\ (||z|| + \varepsilon||)(\int_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

Ainsi, $|\langle T(z), y^*\rangle| \leq d_p^{m+}(T)\ ||z||(\int\limits_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$.

Il découle de **Théoréme 1.6.4** que $T_L \in D_p^{m+}(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m; F)$.

* 2) $\Longrightarrow$ 3) Si $T_L \in D_p^{m+}(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m; F)$ et le fait que $T = T_L \circ \sigma_m$, on prend donc $Z = X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$.

* 3) $\Longrightarrow$ 1) Supposons qu'il existe un espace de Banach Z, $u \in D_p^+(Z;F)$ et

$S \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Z)$ tels que $T = uS$. Alors

$||S(x^1,...,x^m)|| \leq ||S|| \prod\limits_{j=1}^{m} ||x^j||$ et par le **Théorème 1.6.4**

$|\langle u(z), y^*\rangle| \leq d_p^{m+}(u)\ ||z||(\int\limits_{B_{F^{**}}^+} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$. Alors

$|\langle T(x^1,...,x^m), y^*\rangle| = |\langle u(S(x^1,...,x^m)), y^*\rangle|$

$$\leq d_p^{m+}(u)\ ||S(x^1,...,x^m)||\ (\int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq d_p^{m+}(u)\ ||S||\ \prod_{j=1}^{m}||x^j||\ (\int_{B^+_{F^{**}}} (|y^*|(y^{**}))^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

Nous avons, selon la **Proposition 2.2.2** $T \in D_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$. ■

Définition 3.2.1 *Pour $1 < p \leq \infty$, un opérateur $m-$linéaire $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow F$ est appelé multiple $p-$convexe s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour chaque suite finie $(x_i^j)_{i=1}^{n_j} \subset X_j$, $1 \leq j \leq m$.*

$$||(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} |T(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m)|^p)^{\frac{1}{p}}|| \leq C\ \prod_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}||x_i^j||^p_{X_j})^{\frac{1}{p}},$$

ou

$$||(\bigvee_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} |T(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m)|\ || \leq C\ \prod_{j=1}^{m}\max_{1\leq i\leq n}||x_i^j||_{X_j},\ \textit{quand } p=\infty.$$

Dans ce cas, nous donnons la norme de l'opérateur multiple $p-$convexe T par

$C_p^{vex}(T) := \{C : C$ vérifie l'inégalité ci-dessus$\}$.

$C_p^{vex,mult}(X_1,...,X_m;F) = \{$ d'opérateurs $m-$linéaires multiples $p-$convexes$\}$.

** $(C_p^{vex,mult}(X_1,...,X_m;F), C_p^{vex}(.))$ est un espace de Banach.*

Proposition 3.2.2 *Si $1 < p < \infty$, alors*

1) $D_p^{m+}(X_1,...,X_m;F) \subset C_p^{vex,mult}(X_1,...,X_m;F)$.

2) $D_p^{m+}(X_1,...,X_m;c_0) = \mathcal{L}(X_1,...,X_m;c_0)$.

Demonstration. 1) Soit $T \in D_p^{m+}(X_1,...,X_m;F)$, alors $T = T_L \circ \sigma_m$ tel que $T_L \in D_p^{+}(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m;F)$ et $\sigma_m(X_1,...,X_m;X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m)$ l'opérateur canonique $m-$linéaire.

par la **Proposition 3.1.3** $T_L \in C_p^{vex}(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m;F)$ où $C_p^{vex}(X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m;F)$ la classe de tous les opérateurs $p-$convexes de $X_1\hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ dans F voir [9].

Pour chaque suite finie $(x_i^j)_{i=1}^{n_j} \subset X_j$; $1 \leq j \leq m$, nous avons

$$\begin{aligned}||(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} |T(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m)|^p)^{\frac{1}{p}}|| &= ||(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} |T_L \circ \sigma_m(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m)|^p)^{\frac{1}{p}}|| \\ &= ||(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} |T_L(\sigma_m(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m))|^p)^{\frac{1}{p}}|| \\ &\leq M\ (\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} ||\sigma_m(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m)||^p)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M\ (\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} ||x_{i_1}^1||^p \times \cdots \times ||x_{i_m}^m||^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= M\ (\sum_{i_1=1}^{n_1} ||x_{i_1}^1||^p \times \sum_{i_2=1}^{n_2} ||x_{i_2}^1||^p \times \cdots \times \sum_{i_m=1}^{n_m} ||x_{i_m}^m||^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= M\ \prod_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} ||x_i^j||^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Puis par la **Définition 3.2.1** $T \in C_p^{vex,mult}(X_1, ..., X_m; F)$.

2) Il est clair que $D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; c_0) \subset \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; c_0)$.

Maintenant, prenons $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; c_0)$, puis $T = T_L \circ \sigma_m$ tel que

$u \in \mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m; c_0)$ nous avons par la **Proposition 3.1.3** $u \in D_p^{m+}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m; c_0)$, par la proposition ci-dessus $T \in D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; c_0)$, dans ce cas

$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; c_0) \subset D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; c_0)$.

Alors $D_p^{m+}(X_1, ..., X_m; c_0) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; c_0)$. ■

Bibliographie

[1] BLASCO, O. : *A class of operators from a Banach lattice into a Banach space. Collect. Math.* ***37****(1), 13 – 22(1986).*

[2] ZHUKOVA, O.I. : *On modifications of the classes of $p-$nuclear, $p-$summing and $p-$integral operators, Sib. Math. J. 30(5), 894 – 907(1998).*

[3] ACHOUR, D.,BELACEL, A. : *Domination and factorization theorems for positive strongly $p-$Summing operators. Positivity. 18,785 – 804(2014).*

[4] MATOS, M.C. : *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmith multilinear mappings. Collect. Math.* ***54****(2), 111 – 136(2003).*

[5] ACHOUR, D.,MEZRAG, L. :*On the cohen strongly $p-$summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 327, 550 - 563(2007).*

[6] LINDENSTRAUSS,J., TZAFRIRI,L. : *Classical Banach Spaces, I and II. Springer-Verlag, Berlin, 1996.*

[7] SCHAEFER, H.H. : *Banach Lattices and Positive Operators. Springer, Berlin,1974.*

[8] MEYER-NIEBERG, P. : *Banach lattices. Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1991.*

[9] DIESTEL, J., JARCHOW, H., TONGE, : *Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, 1995.*

[10] MEZRAG, L., SAADI, K. : *Inclusion theorems for Cohen strongly summing multilinear operators. Bull. Belg. Math. Simon Stevin.* ***16****,1 – 11(2009).*

[11] Bu, Q., Shi, Z. : *On Cohen almost summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl.* **401**, *174 – 181(2013).*

[12] Bu, Q., Labuschagne, C.A. : *Positive Multiple Summing and concave Multilinear Operaors on Banach Lattices. Mediterr. J. Math* ***12****,77 – 87 (2015).*

[13] Cohen, J.S. : *Absolutely p−summing p−nuclear operators and their conjugates. Math. Ann. 201,177 – 200(1973).*

[14] Dimant, V. : *Strongly p−summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 278 182 – 193(2003).*

[15] Bougoutaia, A., Belacel, A. : *Cohen Positive strongly p−summing and p−convex multilinear operators. Positivity. 23,379 – 395(2019).*

[16] Bezis, H. : *Analyse fonctionnelle, Théorie et application. Dunod, 1983.*

[17] Hengartner, W., Lambert, M., Reischer, C. : *Introduction à L'analyse Fonctionnelle.Les Presses de I'Université du Québec,1981.*

[18] Ramanujan, M. S., Schock, E. : *Operators ideals spaces of bilinear operators, Lin.Multilin. Alg. 18, 307 – 318(1985).*

[19] Silva, A.R. : *Linearização de aplicações multilineares continuas entre espaços de Banach e multi–ideais de composiç ão, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.*

[20] Ryan, R. : *Introduction to Tensor Product of Banach Spaces, La linéarisation du polynômesm−homogénes Springer–Verlag, London, 2002.*