



N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université de M'sila
Faculté des Sciences
Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

AHMEDI Souad

THEME

L'équation de Dirac pour le potentiel de Woods-Saxon

Soutenue le : 18/06/2014

Devant le jury composé de :

S. Menouar	MCA Université. de Setif	Président
H. BEKKAR	MCA Université. de Setif1	Rapporteur
S. Mejber	MCB Université. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2014

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire ont été effectués au sein de département de physique de l'université de M'sila.

Nous tenons à remercier Allah le tout puissant pour la volante, la santé, la patience, qu'il nous à donné durant toute ces longues années d'études.

Nous remercions premièrement notre encadreur et promoteur :

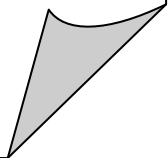
Hacene Bekkar d'avoir accepté de nous guider et d'avoir fait confiance à nos capacités.

Un grande merci aux membres de jury d'avoir honoré en acceptant du juger notre modeste travail effectué.

Nous remercions ceux qui nous sont très chers : nos parents, merci pour l'amour, pour la patience, pour les efforts, pour les sacrifices qu'ils ont fait pour nous voir réussir.

Enfin nous remercions tous nos enseignants du département de physique de l'université de M'sila et l'ensemble des collègues de notre promotion qui nous ont aidé à réalisé ce modeste travaille.

On tient également à remercier tous ceux qui, de prés ou de loin, ont Participé à l'élaboration de ce travail.



Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à tous ceux qui me sont chers
Et principalement à :*

*- Mes très chers parents qui sont tout fait pour notre
bonheur ;*

- Ma grand-mère et mes oncles ;

- Mes frères ;

- A toute ma famille ;

*- Et à tous mes amis et mes professeurs sans
Exception.*

A mes collègues de la promotion 2013/2014

A tous ceux qui m'ont aidée à réaliser ce mémoire.

*A tous les enseignants de département de physique à
l'université de M'sila.*

Table des matières

Introduction générale	3
Chapitre 01 : l'équation de Dirac	
1.1. Historique.....	6
1.2. l'équation de Dirac stationnaire.....	7
1.3. Spineur de Dirac.....	7
1.4. propriétés des matrices de Dirac.....	8
a- propriétés des matrices γ	9
1.5. l'équation de Dirac pour un potentiel centrale.....	10
Chapitre 02 : particule libre	
2.1. Introduction.....	12
2.2. Solution de l'équation de Dirac.....	12
Chapitre 03 : potentiel Woods-Saxon	
3.1. Définition.....	19
3.2. Solution de l'équation de Dirac.....	19
3.3. Spectre d'énergie.....	21
3.4. Spineur.....	23
Conclusion	25
Annexe : la méthode de Nikiforov-Uvarov (N-U)	27
Bibliographie	33

Introduction

Introduction

La mécanique quantique est un outil indispensable pour décrire et étudier les phénomènes physiques qui se manifestent à l'échelle atomique et subatomique. Elle est communément subdivisée en mécanique quantique non relativiste et mécanique quantique relativiste. La mécanique quantique relativiste a connu un grand succès en expliquant le spin des particules et l'existence des antiparticules, mais elle ne décrit que les phénomènes où le nombre de particules ne varie pas.

L'équation de Dirac joue un rôle fondamental en mécanique quantique relativiste, car c'est elle qui régit l'évolution dans le temps du système physique. Depuis la proposition de Dirac de cette équation, les physiciens théoriciens se sont penchés à trouver des solutions analytiques pour différent système physique. A partir de cette solution on obtient le Spineur qui nous permet de l'identifier le système quantique relativiste étudié.

L'objectif de ce travail est la détermination du spectre d'énergie et la fonction d'onde d'un système indépendant du temps par la méthode Nikiforov-Uvarov (N-U).

Notre mémoire est subdivisé on trois chapitres : le premier chapitre comporte des rappelés sur l'équation Dirac, le deuxièmes chapitre on consacrée a la solution de l'équation de Dirac pour la particule libre, et le troisième chapitre en détail la solution de l'équation de Dirac pour une particule de spin $\frac{1}{2}$ dans le potentiel de Woods-Saxon, une annexe sur la méthode de Nikiforov-Uvarov (N-U) donne a la fin de la mémoire.

Chapitre 1

L'Equation de Dirac

1.1) Historique

Pour expliquer l'effet photoélectrique (l'émission d'électrons par la Lumière, phénomène à la base du fonctionnement des cellules photovoltaïques), Albert Einstein en 1905 émet l'hypothèse de Planck : la structure de la lumière elle-même est discrète, c'est-à-dire formée de corpuscules appelés photons. La Lumière, qu'on associait depuis des siècles à un comportement ondulatoire, a aussi un comportement corpusculaire, comme les particules. En 1923, Louis de Broglie émet une autre hypothèse troublante, réciproque de la précédente: toute particule en mouvement a un comportement Ondulatoire ; de Broglie leur associe une onde. après deux années Schrödinger propose en 1925 une équation pour ces ondes, posant ainsi les bases de la mécanique ondulatoire. Mais l'équation de Schrödinger ne prend pas en compte la théorie de la Relativité, qui est pourtant alors bien connue. dans cette équation, l'espace et le temps n'interviennent pas de la même manière : le terme du temps est linéaire alors que celui de l'espace est quadratique

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (1.1)$$

La mécanique quantique relativiste a ainsi débuté avec l'équation Klein-Gordon(1927)

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2) \psi \quad (1.2)$$

L'équation de Klein-Gordon est une version relativiste de l'équation d'onde Pour les ondes de Matière décrivant des particules massives de spin nul, sans ou avec charge électrique. mais cette équation admettait certaines solutions dont l'énergie était négative, ce qui conduisait à des densités de probabilité négatives, ce qui, du point de vue de Dirac, était inacceptable. Le "coupable" était le terme du temps, qui intervenait de manière quadratique (c'est-à-dire avec un facteur $\partial^2/\partial t^2$) Alors pourquoi ne pas Chercher une équation dont les termes de l'espace et du temps soit linéaires ?

En 1928 Dirac introduit la relativité restreinte dans la mécanique quantique, il Postule l'équation qui porte son nom, qui décrit le spin de l'électron et prédit le Positron, l'antiparticule de l'électron. son équation n'agit plus sur une fonction d'onde à une seule composante, comme c'était le cas de l'équation de Schrödinger, mais sur une fonction d'onde à quatre composantes, appelée Spinor, le problème des densités de probabilité négative est donc résolu. L'équation de Dirac, est une équation relativiste et invariante par rapport à la transformation de Lorentz, dans sa forme générale est une

équation dérivées partielles du premier ordre par rapport au temps et aux coordonnées de l'espace ordinaire, elle est écrite de sous forme :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar c \vec{\alpha} \vec{\nabla} \Psi + \beta m c^2 \Psi \quad (1.3)$$

$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}$: Opérateur de dérive partielle, m la masse, \hbar constante de Planck et α et β sont les matrices de Dirac de quatre lignes et quatre colonnes, et la fonction d'onde Ψ de quatre composantes. La présence de la vitesse de la lumière c montre qu'il s'agit d'une équation relativiste. Depuis la proposition de Dirac de cette équation, les physiciens se sont penchés à trouver des solutions analytiques pour différents systèmes physiques [1-4], à partir de cette solution on obtient le spineur qui nous permet de l'identifier le système quantique relativiste étudié.

1.2) L'équation de Dirac stationnaire

L'équation pour une particule fermionique relativiste a été historiquement introduite par Dirac en 1928 pour une particule dotée d'un spin $\frac{1}{2}$ en mouvement dans un espace à (3+1) dimensions $D(3,1)$. L'idée de Dirac était d'écrire une équation générale ayant une forme semblable à l'équation de Schrödinger mais dont l'hamiltonien doit tenir en compte l'existence du spin. La contrainte principale imposée par Dirac est que dans le cas d'une particule libre, l'équation doit être compatible avec l'expression de l'énergie E d'une particule relativiste, donnée par [5] :

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2 \quad (1.4)$$

Où c est la vitesse de la lumière, m représente la masse de la particule au repos et p son impulsion. Dirac montra alors que dans le cas stationnaire dans un espace à $(n+1)$ dimensions cette équation doit prendre la forme

$$(c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c^2) \Psi(r) = E \Psi(r) \quad (1.5)$$

Sont N matrices ($\sim \times N$) hermitiennes, avec $N = n+1$

1.3) Le spineur

La fonction de Dirac est une certaine matrice à quatre lignes et une colonne

$$\Psi(r, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(r, t) \\ \Psi_2(r, t) \\ \Psi_3(r, t) \\ \Psi_4(r, t) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

dit le Spineur, est sont hermétique conjuguée $\Psi^* = (\Psi^*_1, \Psi^*_2, \Psi^*_3, \Psi^*_4)$, pour cette raison la densité de probabilité donnée par [6] :

$$P = \langle \Psi | \Psi \rangle = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2 + |\Psi_4|^2 \quad (1.7)$$

Donc le problème de densité de probabilité résolu.

Le Spineur de Dirac a quatre composantes complexes, les quartes composantes représente [7] :

2 : degrés de liberté de spin ($s = \pm \frac{1}{2}$)

2 : existence des antiparticules (exemple : électron-positron)

1.4) propriétés des matrices de Dirac

Les matrices de Dirac α et β satisfont un certain nombre propriétés intéressantes, dont on donne ici les principales [6]. Pour satisfaire la contrainte de L'énergie (1.4) On montre que les matrices précédentes sont toutes de carré égal à la matrice unité

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad \text{Pour } i=1,2,\dots, n \quad (1.8)$$

Et qu'elles doivent satisfaire les relations d'anticomutations suivante

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad \text{Pour } i=1,2,\dots, n \quad (1.9)$$

$$\text{et } \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad (1.10)$$

A trois dimensions ces matrices sont de rang supérieur ou égale 4. ainsi, des matrices 4×4 sont compatibles avec un spin $\frac{1}{2}$ et peuvent être représentée de différentes manières. La représentation standard de Dirac utilise les matrices de Pauli pour construire des matrices $\beta, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ comme

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } i= x, y, z \quad (1.11)$$

Où I est la matrices 2×2, les σ_i sont des matrices bien connues de Pauli [8],

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Pour les dimensions inférieures de l'espace, c'est-à-dire à deux dimensions et à une dimension, on a seulement besoin de deux matrices σ_i à deux dimensions et une matrice α à une dimension. à deux dimensions, on aura à besoin seulement de deux d'entre elles comme les trois matrices de Pauli sont unitaires et forment une base Complète avec les transformations unitaires.

a-Propriété des matrices γ :

La quantité γ^u est un quatre vecteurs de matrices 4×4 , agissant sur la fonction d'onde (Spinor) comme sur un vecteur il existe deux représentation utiles en physique, la première est appelée la représentation standard et elle peut être donnée en bloc 2×2

$$\text{par : } \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \gamma^u = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^u \\ -\sigma^u & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

La deuxième est appelée représentation de Weyl [10] elle définie par

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \gamma^u = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^u \\ -\sigma^u & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$\text{avec } \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \text{et} \quad \text{son carré } (\gamma^5)^2 = -I$$

I : la matrice identité

σ^u : Les matrices de Pauli

$$\text{en remarque que : } \begin{cases} \gamma^0 = \beta \\ \gamma^u = \beta\alpha_i \end{cases} \quad (1.15)$$

La représentation standard est plus utile pour étudier les solutions de l'équation de Dirac aussi que sa limite non-relativiste.

Les matrices γ^i doivent satisfaire la règle d'anticommutation :

$$\{\gamma^u, \gamma^v\} = 2g^{uv}I \quad (1.16)$$

avec $g^{\mu\nu}$ le tenseur métrique :

$$g_{uv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

$$\text{On voit aussi que } (\gamma^0)^2 = I \quad \text{et} \quad (\gamma^u)^2 = -I$$

-Trace et déterminant :

$$\text{Tr } \gamma^u = \begin{cases} 4 & \text{si } \gamma^u = I \\ 0 & \text{si } \gamma^u \neq I \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\text{et } \det \gamma^u = 1 \quad (1.19)$$

1.5) l'Equation de Dirac pour un potentiel centrale

L'équation de Dirac pour une particule dans un potentiel centrale $V(r)$ donnée par :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m + V(r)) \Psi(r,t) \quad (1.20)$$

en peut déduire que l'hamiltonien s'écrit sous la forme [6] :

$$H_D = \frac{\vec{\alpha} \vec{r}}{r} \left[p_r + \frac{i(J^2 - L^2 + \frac{1}{4})}{r} \right] + \beta m + V(r)$$

avec : $p_r = -\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$; p_r : Opérateur d'impulsion radiale, J : le moment cinétique totale

et L : le moment cinétique orbitale.

Il est convient d'écrire les solutions $\Psi(r, t)$ sous forme

$$\Psi(r, t) = e^{-iEt} \Psi(r) \quad (1.21)$$

$$\text{avec } \Psi(r, t) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(r) y_{lj}^M \\ iG(r) y_{lj}^M \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

est l et l' sont nombres quantique orbitale j le moment cinétique et M sont projection sur l'axe oz. $F(r)$ et $G(r)$ sont des fonctions arbitraires de r , y_{lj}^M sont les harmoniques sphériques d'ordre l . Donc le problème réduit a résoudre le système des deux équations différentielles complexes pour les fonctions radiales $F(r)$ et $G(r)$ suivant :

$$\begin{cases} \left(-\frac{d}{dr} + i \frac{\Omega(j+\frac{1}{2})}{r} \right) G(r) = (E - m - V(r)) F(r) \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\Omega(j+\frac{1}{2})}{r} \right) F(r) = (E + m - V(r)) G(r) \end{cases} \quad (1.23)$$

avec $\Omega = \pm 1$; Ω : représente la parité.

Pour un potentiel bien déterminée on peut résoudre le système et obtenir l'énergie et les Composantes de Spineur [9].

Chapitre 2

Particule Libre

2.1) Introduction

Plusieurs méthodes étaient proposées par les physiciens pour traiter le système du particule libre c'est-à-dire, la solution de l'équation de Dirac pour une particule libre soit à D(1,1) ou D(3,1) dimensions. dans ce chapitre nous proposons l'une de ces méthode [6,10].

2.2) Solution de l'équation de Dirac

L'Hamiltonien de Dirac pour une particule libre :

$$H = c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 \quad (2.1)$$

Où $\vec{\alpha}$ et β sont les matrices de Dirac définies en premier chapitre. dans la base des coordonnées, l'équation Dirac pour une particule libre

$$[-i\hbar c\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta mc^2]\Psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(r, t) \quad (2.2)$$

Depuis l'operateur sur le coté gauche est une 4×4 matrice, la fonction d'onde $\Psi(r, t)$ est un vecteur de quatre composant (Spineur) de fonctions de r et t :

$$\Psi(r, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(r, t) \\ \Psi_2(r, t) \\ \Psi_3(r, t) \\ \Psi_4(r, t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Pour obtenir l'équation stationnaire nous utilisons une solution de la forme

$$\Psi(r, t) = \psi(r)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (2.4)$$

avec E l'énergie quand a substitué (2.4) dans l'équation (2.2) on obtient :

$$[-i\hbar c\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta mc^2]\psi(r) = E\psi(r) \quad (2.5)$$

En particulier, nous cherchons des solutions de la forme :

$$\psi_p(r) = u_p e^{-\frac{ipr}{\hbar}} \quad (2.6)$$

Où u_p est un vecteur de quatre composants qui satisfait l'équation

$$[c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2]u_p = Eu_p \quad (2.7)$$

Nous cherchons u_p dans la forme d'un vecteur composée de deux vecteurs de deux composantes :

$$u_p = \begin{pmatrix} \Phi_p \\ \chi_p \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$\Phi_p(r)$ et $\chi_p(r)$ sont des fonction de r , Par conséquent, si on écrire l'équation (2.6) de forme matricielle, nous trouvons :

$$\begin{pmatrix} E - mc^2 & -c\vec{\sigma}\vec{p} \\ -c\vec{\sigma}\vec{p} & E + mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_p(r) \\ \chi_p(r) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

qui donne les deux équations :

$$(E - mc^2)\Phi_p(r) - c\vec{\sigma}\vec{p}\chi_p(r) = 0 \quad (2.10)$$

$$-c\vec{\sigma}\vec{p}\Phi_p(r) + (E + mc^2)\chi_p(r) = 0 \quad (2.11)$$

D'après l'équation (2.11) on obtient :

$$\chi_p(r) = \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{E+mc^2}\Phi_p(r) \quad (2.12)$$

on peut aussi résoudre le premier terme pour $\Phi_p(r)$ et obtenir :

$$\Phi_p(r) = \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{E+mc^2}\chi_p(r) \quad (2.13)$$

On utilise l'équation (2.12) et (2.10) on peut formaliser une seule équation pour $\Phi_p(r)$ qui est donnée par :

$$(E - mc^2)(E + mc^2)\Phi_p(r) - c^2(\vec{\sigma}\vec{p})^2\Phi_p(r) = 0 \quad (2.14)$$

Cependant

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma}(\vec{p} \times \vec{p}) = p^2 \quad (2.15)$$

d'où

$$[E^2 - ((mc^2)^2 + c^2p^2)]\Phi_p = 0 \quad (2.16)$$

Selon la condition $\Phi_p(r) \neq 0$, l'équation est satisfaite si seulement la quantité dans les supports disparaît, qui cède les valeurs propres

$$E = E_p = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (2.17)$$

Nous remarquons que les valeurs propres peuvent être positives ou négatives

$$\begin{cases} E > 0 \rightarrow mc^2 \\ E < 0 \rightarrow -mc^2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Donc l'équation (2.18) admet deux classes de solutions, une donne les valeurs de l'énergie avant négatives, les autres positives et elles sont séparées par un "gap" égal à mc^2 , m étant la masse de la particule dans le cas classique. La première correspond aux états d'énergie positive, correspondent à la particule de charge électrique q , la deuxième correspond aux états d'énergie négative, correspondent par conjugaison de charge à ceux d'une particule de même masse et de charge opposée (reformuler ce paragraphe pour bien éclairer la solution)

-cas $E > 0$, on peut prendre

$$\Phi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ou} \quad \Phi_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

alors

$$\chi_p = \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Cependant $\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$ (2.21)

afin que

$$\chi_p = \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E_p+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E_p+mc^2} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E_p+mc^2} \\ -\frac{cp_z}{E_p+mc^2} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

u_p :

$$u_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_p+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E_p+mc^2} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad u_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E_p+mc^2} \\ -\frac{cp_z}{E_p+mc^2} \end{pmatrix}$$

Notez que quand $p=0$, les troisième et quatrième composantes de u_p disparaissent.

Dans ce cas, l'énergie est seulement $E_0 = mc^2$, et la fonction d'onde devient :

$$\Psi(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} \quad \text{Ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{imc^2t}{\hbar}} \quad (2.23)$$

-cas $E < 0$, nous prenons

$$\chi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Donc :

$$\Phi_p = \frac{c\vec{\sigma}p}{E_p - mc^2} \chi_p = \frac{-c\vec{\sigma}p}{|E_p| + mc^2} \chi_p \quad (2.25)$$

La solution pour u_p est par le même raisonnement :

$$u_p = \begin{pmatrix} -\frac{cp_z}{|E_p| + mc^2} \\ -\frac{c(p_x + ip_y)}{|E_p| + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ou} \quad u_p = \begin{pmatrix} -\frac{c(p_x - ip_y)}{|E_p| + mc^2} \\ \frac{cp_z}{E_p + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

afin que dans le $P = 0$ de la limite, et $E_0 = -mc^2$, est la fonction d'onde correspondent :

$$\Psi(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{imc^2t}{\hbar}} \quad \text{Ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{imc^2t}{\hbar}} \quad (2.27)$$

L'interprétation est que les solutions d'énergie négatives correspondent aux antiparticules, et les composants, Φ_p et χ_p de u_p correspondent à la particule et l'antiparticule respectivement.

dans la limite non-relativiste, pour $E > 0$, nous avons

$$E_p \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} \quad (2.28)$$

alors

$$\chi_p = \frac{c\vec{\sigma}p}{2mc^2 + \frac{p^2}{2m}} \Phi_p \quad (2.29)$$

Depuis $mc^2 \gg \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, on a $\chi_p \ll \Phi_p$, qui le néglige, et rappeler que pour $E > 0$,

$$\Phi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ou} \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Les fonctions réduisent à :

$$\Psi_p(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{ipr}{\hbar}} \quad \text{Ou} \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{ipr}{\hbar}} \quad (2.31)$$

Chapitre 3
Potentiel
Woods - Saxon

3.1) Définition :

Le potentiel de woods-saxon est un potentiel de champ moyen entre les nucléons (protons et Neutrons) à l'intérieur du noyau atomique il a utilisé pour dériver de manière approximative les forces qui s'appliquent entre les nucléons [11]. Woods-Saxon proposée la forme suivante :

$$V(r) = \frac{-V_0}{1+e^{-\frac{(r-R)}{a}}} \quad (3.1)$$

Où V_0 : la profondeur de puis de potentiel

r : la distance du nucléon par rapport au centre du noyau. a : est une longueur représentant

l'épaisseur de la surface du noyau

$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ le rayon du noyau, avec $r_0 = (1,2 - 1,4)F_m$; et A : Le nombre de la masse atomique. r_0, a et V_0 peuvent être ajustés pour reproduire en mieux les faits expérimentaux.

3.2)-Solution de l'équation de Dirac :

L'équation de Dirac pour une particule de masse m et de spin $\frac{1}{2}$ soumise a un potentiel $V(x)$ donné par :

$$\left(c\alpha \cdot p + \beta mc^2 + V(x) \right) \Psi(x) = E\Psi(x) \quad (3.2)$$

Où $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$; α, β sont les matrices de Dirac, et $E = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ nous définirons au cours de la

solution de l'équation de Dirac, le Spineur $\Psi(x)$ est définie par :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

L'équation (3.2) est équivalente à deux équations complexes, si on choisit l'axe ox comme un axe du mouvement de la particule, on prend le choix Particulier suivant pour les matrices [12] :

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

on obtient :

$$-i \frac{d}{dx} g(x) + (E - V(x))g(x) - mf(x) = 0 \quad (3.5)$$

$$i \frac{d}{dx} f(x) + (E - V(x))f(x) - mg(x) = 0 \quad (3.6)$$

On dérive l'équation (3.6) on obtient :

$$i \frac{d^2}{dx^2} f(x) - \frac{dV(x)}{dx} f(x) + (E - V(x)) \frac{df(x)}{dx} = m \frac{dg(x)}{dx} \quad (3.7)$$

utilisant les deux équations (3.5) et (3.6) on obtient :

$$\frac{dg(x)}{dx} = -i(E - V(x)) \left[\frac{i}{m} \frac{df(x)}{dx} + \frac{E - V(x)}{m} \right] + imf(x) \quad (3.8)$$

Après le remplacement de (3.8) dans l'équation (3.6) devient :

$$i \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left[i(E - V(x))^2 - \frac{dV(x)}{dx} - im^2 \right] f(x) = 0 \quad (3.9)$$

Il faut donc résoudre l'équation (3.9) pour déterminer les énergies et la fonction $f(x)$

les vecteurs propres correspondants pour le potentiel de Woods-Saxon

$$V(x) = \frac{-V_0}{1+e^{-\alpha x}} \quad (3.10)$$

avec V_0 , et α sont des Paramètres réelles.

On remplace $V(x)$ et sa dérivée dans l'équation (3.9) on obtient :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left[E^2 + \frac{2EV_0}{1+e^{-\alpha x}} + \frac{V_0^2}{(1+e^{-\alpha x})^2} + i \frac{\alpha V_0 e^{-\alpha x}}{(1+e^{-\alpha x})^2} - m^2 \right] f(x) = 0 \quad (3.11)$$

On utilise le changement de variable suivant :

$$S = 1+e^{-\alpha x} \quad (3.12)$$

L'équation (3.11) dévient:

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} + \frac{-s}{s(1-s)} \frac{df(s)}{ds} + \frac{(E^2 - m^2)s^2 + (2EV_0 - iV_0\alpha)s + V_0^2 + iV_0\alpha}{\alpha^2 [s(1-s)]^2} f(s) = 0 \quad (3.13)$$

On comparaison (3.9) avec l'équation (20) (voir l'annexe) [13], on trouve les paramètres

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 1; \quad \alpha_3 = 1 \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{\alpha^2}(E^2 - m^2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2EV_0}{\alpha^2} - \frac{iV_0}{\alpha} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{V_0^2}{\alpha} - \frac{iV_0}{\alpha}$$

$$\text{et } \alpha_4 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_5 = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_6 = \frac{1}{4} - \frac{E^2 - m^2}{\alpha^2} \quad (3.16)$$

et on peut calculer l'autre paramètre suivant la méthode de (N-U) [13], on obtient

$$\alpha_7 = \frac{-1}{2} - \frac{2EV_0}{\alpha^2} + \frac{iV_0}{\alpha} \quad (3.17)$$

$$\text{et } \alpha_8 = \frac{1}{4} - \frac{V_0^2}{\alpha^2} - \frac{iV_0}{\alpha} \quad (3.18)$$

$$\alpha_9 = \frac{-2EV_0}{\alpha^2} - \frac{V_0^2}{\alpha^2} - \frac{E^2 - m^2}{\alpha^2} = \frac{-(E+V_0)^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\alpha^2} \quad (3.19)$$

Et pour la fonction $f(s)$ on est de calculer :

$$\alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_0^2}{\alpha^2} - i\frac{V_0}{\alpha}} \quad (3.20)$$

$$\alpha_{11} = 2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{m^2 - (E + V_0)^2} + 2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_0^2}{\alpha^2} - i\frac{V_0}{\alpha}} \quad (3.21)$$

$$\text{et } \alpha_{12} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_0^2}{\alpha^2} - i\frac{V_0}{\alpha}} \quad (3.22)$$

$$\text{et } \alpha_{13} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{m^2 - (E + V_0)^2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_0^2}{\alpha^2} - i\frac{V_0}{\alpha}}\right) \quad (3.23)$$

3.3) Spectre d'énergie

Pour trouver l'énergie, on utilise la relation suivante :

$$\alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0 \quad (3.24)$$

On remplace les paramètres par ces expressions, l'équation (3.24) réduit a :

$$(E + V_0)^2 - V_0(E + V_0) - m^2 + \frac{1}{4}\left(n^2 + \frac{2niV_0}{\alpha}\right)\alpha^2 + \frac{V_0^2 m^2}{\alpha^2\left(n^2 + \frac{2niV_0}{\alpha}\right)} = 0 \quad (3.25)$$

après réarrangements, On obtient une équation d'ordre 2 pour le paramètre E :

$$E^2 + V_0 E + \left(\frac{\alpha^2 n^2}{4} + \frac{V_0^2 m^2}{\alpha^2 n^2 + 4V_0^2} - m^2 \right) + i \left(\frac{nV_0 \alpha}{2} - \frac{2V_0^3 m^2}{\alpha^3 n^3 + 4\alpha n V_0^2} \right) = 0 \quad (3.26)$$

$$\Delta = V_0^2 - 4 \left(\frac{\alpha^2 n^2}{4} + \frac{V_0^2 m^2}{\alpha^2 n^2 + 4V_0^2} - m^2 \right) - 4i \left(\frac{n\alpha V_0}{2} - \frac{2V_0^3 m^2}{\alpha^3 n^3 + 4\alpha n V_0^2} \right)$$

La solution de cette équation donnée :

$$E_{\pm} = -\frac{V_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{V_0^2 - \alpha^2 n^2 - \frac{4V_0^2 m^2}{\alpha^2 n^2 + 4V_0^2} + 4m^2 - 4i \left(\frac{nV_0 \alpha}{2} - \frac{2V_0^3 m^2}{\alpha^3 n^3 + 4\alpha n V_0^2} \right)} \quad (3.27)$$

On remarque que E est une paramètre complexe telle que

$$E = \varepsilon + i\xi \quad (3.28)$$

ε : l'énergie du système, et ξ un paramètre dépend de la nature relativiste du système physique.

après une calcul très difficile on obtient

$$\varepsilon_{\pm} = -\frac{V_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{V_0^2 - \alpha^2 n^2 + \frac{4m^2 V_0^2}{\alpha^2 n^2 + 4V_0^2} + 4m^2 + \sqrt{\Delta_1}} \quad (3.29)$$

$$\Delta_1 = V_0^6 \Lambda + V_0^4 \rho + V_0^2 \Upsilon + (\alpha^2 n^2 - 4m^2)^2 \quad (3.30)$$

et

$$\Lambda = \frac{64m^4}{(\alpha^3 n^3 + 4\alpha n V_0^2)^2} \quad (3.31)$$

$$\text{et } \rho = 1 + \frac{16m^4}{(\alpha^2 n^2 + 4V_0^2)^2} - \frac{32}{\alpha^3 n^3 + 4\alpha n V_0^2} - \frac{8m^2}{\alpha^2 n^2 + 4V_0^2} \quad (3.32)$$

$$\text{et } \Upsilon = 2\alpha^2 n^2 + 8m^2 - \frac{8m^2(\alpha^2 n^2 - 4m^2)}{(\alpha^2 n^2 + 4V_0^2)} \quad (3.33)$$

3.4) Le Spineur

L'expressions la fonction $f(x)$ selon la méthode (N-U) [13] donnée par :

$$f(s) = s^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}}\right)} (1-s)^{\left(\frac{1}{\alpha} \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2}\right)} p_n \left(-2 + \frac{4iV_0}{\alpha}, \frac{2}{\alpha} \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2}\right) (1-2s) \quad (3.34)$$

On a $s = 1 + e^{-\alpha x}$ donc :

$$f(x) = \left(1 + 2e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}}\right)} + 2e^{-\alpha x \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}}\right)} \right) \left(e^{-x \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2}} \right) p_n \left(-2 + \frac{4iV_0}{\alpha}, \frac{2}{\alpha} \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2}\right) (-1 - 2e^{-\alpha x}) \quad (3.35)$$

On remplace (3.35) dans l'équation(3.6) obtient :

$$\begin{aligned}
g(x) = & \frac{i}{m} p_n \left(-2 + \frac{4iV_0}{\alpha}, \frac{2}{\alpha} \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2} \right) \left[\left(-2\alpha e^{-\alpha x} \right. \right. \\
& - \alpha \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}} \right) e^{-\alpha x \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}} \right)} \\
& - \alpha \left(3 + \sqrt{-2 + \frac{4iV_0}{\alpha}} \right) e^{-\alpha x \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}} \right)} \left. \right) e^{-x \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2}} \\
& + \left(-\sqrt{m^2 - (E+V_0)^2} \right) e^{-x \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2}} \left(1 + 2e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}} \right)} \right. \\
& \left. + 2e^{-\alpha x \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}} \right)} \right) \left(e^{-x \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2}} \right) \\
& + \frac{E - V(x)}{m} \left(1 + 2e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}} \right)} \right. \\
& \left. + 2e^{-\alpha x \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{-1}{2} + \frac{iV_0}{\alpha}} \right)} \right) \left(e^{-x \sqrt{m^2 - (E+V_0)^2}} \right) \left. \right] \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Conclusion

Conclusion

Conclusion

Nous avons obtenu la solution de l'équation de Dirac pour une particule de masse m et de Spin $\frac{1}{2}$ soumis au potentiel de Woods-Saxon indépendant du temps. Par l'utilisation des techniques mathématiques on abouti a une équation différentielle d'ordre deux, nous avons résoudre par la méthode de Nikiforov-Uvarov. Nous avons obtenus le spectre d'énergie, et le Spineur correspondant. Notre résultat a est en accord ou résultat obtenir par d'autre chercheur.

Annexe

La méthode de Nikiforov-Uvarov (N-U)

1)- **La méthode de Nikiforov-Uvarov** (N-U) [13, 7, 8] est basée sur la résolution d'équation Différentielle du 2^{ème} ordre de type hypergéométrique, en utilisant la fonction spéciale orthogonal qui conduit à une solution exacte de l'équation de Schrödinger pour certains types de Potentiel. Pour un potentiel donné, l'équation de Schrödinger est transformée à une équation Différentielle de 2^{ème} ordre avec des transformations appropriés des coordonnées, ($r \rightarrow s$) et elles peuvent être résolues pour trouver une solution exacte on particulière. L'équation est donnée par la formule suivante :

$$\frac{d^2}{ds^2} \Psi(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \frac{d}{ds} \Psi(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi(s) = 0 \quad \langle 1 \rangle$$

Où $\sigma(s)$ et $\tilde{\sigma}(s)$ sont des polynômes au plus de degré 2, $\tilde{\tau}(s)$ est un polynôme de degré 1 et $\Psi(s)$ Est une fonction de type hypergéométrique.

La solution de cette équation s'exprime généralement en fonction des polynômes orthogonaux.

La solution $\langle 1 \rangle$ peut être obtenue par le produit de deux fonctions indépendantes :

$$\Psi(s) = \Phi(s)y(s) \quad \langle 2 \rangle$$

Avec

$$y''(s) + \left(2\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\right)y'(s) + \left(\frac{\Phi''(s)}{\Phi(s)} + \frac{\Phi'(s)\tilde{\tau}(s)}{\Phi(s)\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\right)y(s) = 0 \quad \langle 3 \rangle$$

Le coefficient de $y'(s)$ est écrit sous la forme $\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}$, où $\tau(s)$ est un polynôme de degré 1.

$$2\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \quad \langle 4 \rangle$$

Donc les formes plus régulières sont obtenues comme suit :

$$\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \quad \langle 5 \rangle$$

Où

Annexe

$$\pi(s) = \frac{1}{2} [\tau(s) - \tilde{\tau}(s)] \quad \langle 6 \rangle$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad \langle 7 \rangle$$

Le nouveau paramètre $\pi(s)$ est un polynôme au plus de degré 1.

De plus, le terme $\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}$ qui apparaît dans le coefficient de $y(s)$ dans l'équation (3) est arrangé

Comme suit :

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)' + \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)^2 = \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)' + \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)^2 \quad \langle 8 \rangle$$

Dans ce cas, en considérant l'égalité par (7) le coefficient de $y(s)$ est transformé à une forme plus simple

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} = \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \quad \langle 9 \rangle$$

Avec :

$$\bar{\sigma}(s) = \tilde{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s)\sigma(s) \quad \langle 10 \rangle$$

Par substitution le membre droite de l'équation (4) et l'équation (9) à l'équation (3)

Une équation de type hypergéométrique est obtenue comme suit :

$$y''(s) + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} y'(s) + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} y(s) = 0 \quad \langle 11 \rangle$$

Si polynôme $\bar{\sigma}(s)$ dans l'équation (11) est divisible par $\sigma(s)$ on peut écrire

$$\bar{\sigma}(s) = \lambda\sigma(s) \quad \langle 12 \rangle$$

Où λ est constante

Pour déterminer le polynôme $\pi(s)$, l'équation (10) est comparée avec l'équation (12) donc une équation quadratique de $\pi(s)$ est obtenue :

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \tilde{\sigma}(s) - \lambda\sigma(s) = 0 \quad \langle 13 \rangle$$

Où

Annexe

$$k = \lambda - \pi'(s) \quad \langle 14 \rangle$$

La solution de cette quadratique $\pi(s)$ résulte l'égalité suivante :

$$\pi(s) = \frac{\sigma(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad \langle 15 \rangle$$

En remplaçant σ' , $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\sigma}$ dans l'expression de $\pi(s)$ on trouve un polynôme dont on peut trouver l'expression de k d'après ces racines

On remplace la formules de k dans l'équation $\langle 15 \rangle$ on peut définir $\tau(s)$:

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad \langle 16 \rangle$$

Le choix de la solution nécessite que la dérivée de $\tau(s)$ doit être négative.

Donc λ vérifier l'égalité suivant :

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{[n(n-1)\sigma'']}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \langle 17 \rangle$$

Et $y(s) = y_n(s)$ une fonction de type hypergéométrique dont les solutions sont données selon

La relation de Rodrigue

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)] \quad \langle 18 \rangle$$

Sachant que :

$$\frac{d}{ds} [\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s) \quad \langle 19 \rangle$$

L'équation suivante est une forme générale de l'équation de Schrödinger qui peut être obtenue pour différent potentiels :

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\varepsilon_1 s^2 + \varepsilon_2 s - \varepsilon_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \right] \psi(s) = 0 \quad \langle 20 \rangle$$

On peut résoudre cette équation quand $\langle 20 \rangle$ est comparé avec $\langle 1 \rangle$, on obtient

$$\tilde{\tau}(s) = \alpha_1 - \alpha_2 s \quad \langle 21 \rangle$$

Annexe

$$\sigma(s) = s(1 - \alpha_3 s) \quad \langle 22 \rangle$$

$$\tilde{\sigma}(s) = -\varepsilon_1 s^2 + \varepsilon_2 s - \varepsilon_3 \quad \langle 23 \rangle$$

Nous substituons $\langle 22 \rangle$, et $\langle 23 \rangle$ dans $\langle 15 \rangle$, nous obtenons :

$$\pi = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k\alpha_3)s^2 + (\alpha_7 + k)s + \alpha_8} \quad \langle 24 \rangle$$

$$\text{Où } \alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1); \alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3); \alpha_6 = \alpha_5^2 + \varepsilon_1;$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \varepsilon_2; \alpha_8 = \alpha^2 + \varepsilon_3 \quad \langle 25 \rangle$$

Dans l'équation $\langle 24 \rangle$, la fonction sous la racine carrée doit être la racine d'un polynôme selon la méthode NU, où

$$k_{1,2} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \pm 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad \langle 26 \rangle$$

$$\text{Avec : } \alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6 \quad \langle 27 \rangle$$

Les expressions de $\pi(s)$ sont obtenus pour chaque valeur de k

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) - 2\sqrt{\alpha_3\alpha_8} \quad \langle 28 \rangle$$

$\pi(s)$ Devient

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}] \quad \langle 29 \rangle$$

Pour le même à partir de $\langle 7 \rangle$ $\langle 21 \rangle$ et $\langle 24 \rangle$ on obtient :

$$\tau = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - 2[(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) - \alpha_8] \quad \langle 30 \rangle$$

$$\text{et } \tau' = -(\alpha_2 - 2\alpha_5) - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})$$

$$= -2\alpha_3 - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) < 0 \quad \langle 31 \rangle$$

2)-le spectre d'énergie

Annexe

maintenant tout les polynômes sont obtenus, on utilisé l'équation(14) avec(30)et(31)on trouve :

$$\alpha_2 n - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0 \quad \langle 32 \rangle$$

Cette équation donne le spectre d'énergie pour un problème donné

3)-la fonction d'onde

a)- Cas $\alpha_3 \neq 0$:

À partir de (19)on obtient :

$$\rho(s) = s^{\alpha_3-1}(1 - \alpha_3 s)^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1} \quad \langle 33 \rangle$$

A partir de l'équation (18)on obtient

$$y_n = p_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)}(1 - 2\alpha_3 s) \quad \langle 34 \rangle$$

$$\text{Où} \quad \alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \quad \langle 35 \rangle$$

$$\text{Et} \quad \alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad \langle 36 \rangle$$

$p_n^{(\alpha, \beta)}$ Sont les polynômes de Jacob, si on remplace dans l'équation (5)nous obtenons :

$$\Phi(s) = s^{\alpha_{12}}(1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \quad \langle 37 \rangle$$

Donc, la solution générale devient :

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}}(1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} p_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)}(1 - 2\alpha_3 s) \quad \langle 38 \rangle$$

Les paramètres α_{12} , et α_{13} sont donnés par :

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}$$

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \quad \langle 39 \rangle$$

b)-Cas $\alpha_3 = 0$:

Annexe

pour ce type de problème:

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} p_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)} (1 - \alpha_3 s) = L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad \langle 40 \rangle$$

et

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} = e^{\alpha_{13} s} \quad \langle 41 \rangle$$

La solution donnée par (2-38) devient :

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13} s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad \langle 42 \rangle$$

Dans certains cas, on nécessite la 2^{ème} solution de (2-26)

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad \langle 43 \rangle$$

Par la même procédure on obtient:

$$\psi(s) = s^{\alpha^*_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha^*_{12} - \frac{\alpha^*_{13}}{\alpha_3}} p_n^{(\alpha^*_{10}-1, \frac{\alpha^*_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 s)$$

et le spectre d'énergie est :

$$\begin{aligned} & \alpha_2 n - 2n\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 \\ & + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} + \alpha_5 = 0 \end{aligned} \quad \langle 45 \rangle$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha^*_{10} &= \alpha_1 + 2\alpha_4 - 2\sqrt{\alpha_8} \\ \alpha^*_{11} &= \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \\ \alpha^*_{12} &= \alpha_4 - \sqrt{\alpha_8} \\ \alpha^*_{13} &= \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \end{aligned} \quad \langle 46 \rangle$$

Bibliographie

Bibliographie

Bibliographie

- [1] S. De Les and S.Giardino Journal of Mathémtical physics 55,022301(2014)
- [2] W. A. Yahya, B.J.Falaye, O.J.oluwadare and K.J.Oyewuni arxiv:quant-ph 18 Feb.2014
- [3] S. IKhdari and R.Sever arxiv: quant. Ph 0610183V1 12oct.2006
- [4] O.panella, S.Biondini and A.arda Arxiv: quant-ph 10023723 V2 16 Jun 2010
- [5] Aliane Idir Mémoire de Magistère en physique Université de Constantine(2010)
- [6] A. Messiah mécanique quantique T2 (1972)
- [7] C. Longuemare-Séminaire d'anayse13Nov.2007
- [8] C.C.Tanondji, B.Dire, F.Laloe Mécanique quantique T1(1973)
- [9] Sln-Har Dong and Zhong-Qi.Ma physics letters A312 (2003) 78-83.
- [10] www.nyn.de/class/tuck-man/qunt-mech/lectures/.
- [11] Lue. Valentin physique subatomique noyaux et particule T2 OPU (1987)
- [12] S.Ikhdau and Ramazan-Seven quant-ph arxiv: h0808.1002 V1 7Avr2008
- [13] A. Nikiforov et V.Ouvarov " Spécial fonctions of mathémtical physics OPU (1987)

الملخص:

في هذا العمل قمنا بدراسة معادلة ديراك لجسيمة نسبية خاضعة لكمون وودز ساكسون . باستخدام تقنيات رياضية حولنا المسألة إلى البحث عن حل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، و بالاعتماد على طريقة نكفاروف ايفروف توصلنا إلى عبارة الطاقة ودالة الموجة السبينور.

Résumé :

Nous avons obtenu la solution de l'équation de Dirac pour une particule relativiste soumis au potentiel de Woods-Saxon indépendant du temps. Par l'utilisation des techniques mathématiques on abouti a une équation différentielle d'ordre deux, nous avons résoudre par la méthode de Nikiforov-Uvarov. Nous avons obtenu le spectre d'énergie, et le Spineur correspondant.

Abstract:

We got the solution of the Dirac equation for a particle subject to potential time-independent Woods-Saxon. By the use of mathematical techniques are led to a second order differential equation, we solve by the method of Nikiforov-Uvarov. We obtained the energy spectrum and the corresponding spinor.