

Notations

Ω : ouvert de \mathbb{R}^n ; point générique $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on note par

$\bar{\Omega}$ = l'adhérence de Ω ,

Γ = la frontière de l'ouvert Ω supposée régulière,

$L^p(\Omega)$ = espace des fonctions de puissance p-ième sommable sur Ω pour la mesure de

$$\text{Lebesgue } dx = dx_1 \dots dx_n; \|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L^\infty(\Omega)$ = l'espace des (classes) fonctions essentiellement bornées ; $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} f(x)$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ = l'espace des fonctions indéfiniment différentiables avec support compact contenu dans Ω ,

$\mathcal{D}'(\Omega)$ = le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω ,

$C^k(\Omega)$ = l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω ,

$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$,

$H^m(\Omega)$ = l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in \mathbb{N}$; par convention d'écriture $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.)

$H_0^m(\Omega)$ = l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

Si X est un espace de Hilbert, on utilise les notations suivantes :

(\cdot, \cdot) le produit scalaire de X ,

$\|\cdot\|$ la norme de X ,

D^α la dérivée d'ordre α au sens des distributions ;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

$x_n \rightarrow x$ la convergence forte de la suite x_n vers l'élément x dans X ,

$x_n \rightharpoonup^* x$ la convergence faible de la suite x_n vers l'élément x dans X .

p.p. presque partout.

Si de plus $[0; T]$ est un intervalle de temps, $1 \leq p \leq \infty$, on note par :

$Q = \mathcal{O} \times]0; T[$ le domaine cylindrique ; $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ son frontière latérale.

$Q = \Omega_t \times]0; T[$ le domaine non-cylindrique ; $\hat{\Sigma} = \bigcup_{s \in [0, T]} \Gamma_s$ son frontière latérale.

$C(0, T; X)$ = l'espace des fonctions continues sur $[0; T]$ à valeurs dans X .

$\mathcal{D}(0, T; X)$ = l'espace des fonctions C^∞ de $]0; T[\rightarrow X$ et à support compact dans $]0; T[$,

$\mathcal{D}'(0, T; X)$ = l'espace des distributions ,

$L^p(0, T; X)$ = l'espace de Lebesgue,

$W^{1,p}(0, T; X)$ = l'espace de Sobolev.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappel d'analyse fonctionnelle	2
1.1 Espaces fonctionnelles	2
1.1.1 L'espace L^p	2
1.1.2 L'espace de distribution	3
1.1.3 Les espaces de Sobolev	5
1.1.4 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	7
1.2 Topologies faibles et espaces réflexifs	10
1.2.1 Topologie faibles	10
1.2.2 Topologie faible*	10
1.2.3 Espaces réflexifs, Espaces séparables	12
2 Problème hyperbolique dans un domaine cylindrique	13
2.1 Notation et position de problème	13
2.2 Formulation variationnelle	15
2.3 Démonstration d'existence et d'unicité	16
2.3.1 Existence de la solution	16
2.3.2 Unicité de la solution	23
3 Problème hyperbolique dans un domaine non-cylindrique	25
3.1 Notation et position de problème	25
3.2 Pénalisation	27
3.3 Passage à limite	28
Conclusion	31
Bibliographie	31

Introduction

La plupart des phénomènes mécaniques, physiques, biologiques, ou économiques sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles (EDP), linéaires, ou non linéaires, d'où l'intérêt d'étudier l'existence de solutions des EDP, et de leurs propriétés. Dans ce mémoire on s'intéresse à un problème d'évolution, i.e. l'opérateur différentielle dépend du temps t . Plus précisément, on démontre l'existence des solutions faibles du problème hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega_t \times]0, T[, \quad t \geq 0.$$

avec des conditions au bords de type de Dirichlet, et des conditions initiales. Le domaine Ω_t est non-cylindrique, i.e. varie avec le temps, ce qui rend le problème plus difficile à résoudre. Pour cela Lions [5] utilise la méthode de pénalisation, détaillée ici, pour approcher le problème par un problème posé dans un domaine cylindrique, est qui peut être résolue par la méthode de Faedo-Galerkin, et des estimations a priori.

Ce travail se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques éléments d'analyse fonctionnelle nécessaire, pour aborder les chapitre suivants. Dans le deuxième chapitre, on démontre l'existence et l'unicité du problème hyperbolique, dans un domaine cylindrique, avec un terme d'amortissement linéaire qui sera utile pour la suite. Le dernier chapitre est l'essentiel du travail où on démontre l'existence des solutions du problème non-cylindrique par la méthode de Lions.

Finalement on termine par une conclusion, et quelques références sur le sujet.

Chapitre 1

Rapport d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre on présente quelques espaces fonctionnels, leurs structures et quelques propriétés fondamentales, liée au problème étudié. Pour une introduction plus complète sur les topologie faible, et faible *, et les démonstrations des résultats, voir Brezis [1] ou Dautray et Lions [2].

1.1 Espaces fonctionnelles

1.1.1 L'espace L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, 1 \leq p \leq \infty$,

Définition 1.1 On note $L^p(\Omega)$ l'espace de Banach, des fonctions f , définie sur Ω à valeurs dans, \mathbb{R} et mesurables au sens de Lebesgue sur Ω , telles que

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable} : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$
$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable, et } \exists C > 0, |f(x)| < C \text{ p.p. sur } \Omega \}$$

On munit l'espace $L^p(\Omega)$ par la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} f(x).$$

Remarque 1.2 L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Théorème 1.3 Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$, et $f \in L^p(\Omega)$, telles que

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0,$$

alors il existe une sous suite extraire (f_{n_k}) telle que :

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Lemme 1.4 (Inégalité de Young) : Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Lemme 1.5 (Inégalité de Hölder) : Soient $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors le produit $f.g$ est dans L^1 et

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Dans le cas particulier où $p = q = 2$, on obtient égalité de Cauchy-Schwartz

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

1.1.2 L'espace de distribution

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de point générique $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (avec $n \geq 3$)

Définition 1.6 (L'espace des fonctions test) : On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω , et à supports compacts dans Ω .

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense $L^p(\Omega)$. Son dual topologique est appelé l'espace des distribution, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$. Autrement dit : $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si : pour toute suite (φ_m) convergente vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\langle T, \varphi_m \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ lorsque } m \rightarrow \infty,$$

Définition 1.7 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) : Soit T_m une suite de distribution sur Ω , on dit que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle T_m, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Exemple 1.8 Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors f définit une forme linéaire $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En effet, comme $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors si on pose $\int_{\Omega} f(x)dx = C < +\infty$, et $\text{supp}(\varphi) = K$, on a :

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &\leq \int_{\Omega} |f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \cdot \int_{\Omega} |f(x)| dx \\ &\leq C(K) \cdot \sup_{x \in K} |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Alors; T_f est une distribution.

Remarque 1.9 Comme $L^p \subset L^p_{loc} \subset L^1_{loc}$, $1 \leq p \leq \infty$, tout les fonctions de $L^p(\Omega)$ définit une distribution.

Définition 1.10 (La dérivée au sens de distribution) : Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice. On définit la dérivée au sens de distribution $D^\alpha T$ de T par :

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Ainsi; une distribution sur Ω est indéfiniment dérivable au sens des distributions.

Proposition 1.11 Si $T_m \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $D^\alpha T_m \rightarrow D^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout multi-indice α .

Démonstration. $T_m \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si :

$$\langle T_m, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

En particulier, puisque $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\langle D^\alpha T_m, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_m, \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha T, \varphi \rangle \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

■

1.1.3 Les espaces de Sobolev

Définition 1.12 on appelle espace de Sobolev d'ordre $m, m \geq 1$, a support $L^2(\Omega)$ sur Ω l'espace :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\},$$

Théorème 1.13 $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert, séparable.

On le munit de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

On désigne par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ dans } H^m(\Omega),$$

et par $H^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $H^m(\Omega)$.

Remarque 1.14 On a : $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, et pour toute $m_1 > m_2$, on a les inclusions strictes

$$H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

avec injection continue.

Théorème 1.15 (Inégalité de Poincaré) : Si Ω est borné, il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (1.1)$$

La semi-norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ induite par $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Remarque 1.16 L'inégalité (1.1) reste vraie dès que Ω est d'épaisseur bornée dans une direction.

Remarque 1.17 L'égalité de Poincaré est faux pour $H^1(\Omega)$ (par exemple si on prend Ω un domaine borné et la fonction $u(x) = 1, \forall x \in \Omega$). Ceci montre que $H_0^1(\Omega)$ est un espace propre de $H^1(\Omega)$.

Théorème de trace

On suppose que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ (assez régulière). On désigne $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ la restriction des fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On connu que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, on peut définit la trace de $\gamma_0(u)$ d'une fonction de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par

$$\gamma_0 : \begin{cases} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^0(\Gamma) \\ u \rightarrow \gamma_0(u) = u | \Gamma \end{cases}$$

Cette application se prolonge par continuité à une application linéaire continue notée γ_0 :

$$\gamma_0 : \begin{cases} H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) \\ u \rightarrow \gamma_0(u) = u | \Gamma \end{cases}$$

L'application γ_0 est appelée l'application trace d'une fonction u de $H^1(\Omega)$ sur Γ . Voir par exemple Raviat et Thomas [6].

Théorème 1.18 *On suppose que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ , C^1 par morceaux. Alors $H_0^1(\Omega)$ est le noyau de γ_0 , l'application trace sur Γ de H^1 dans $L^2(\Gamma)$:*

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(v) = 0\}.$$

Formule de Green

Rappelons qu'un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n , de frontière Γ , est dit de classe C^k , si Γ est une variété de classe C^k de dimension $n - 1$.

Théorème 1.19 (Formule de Green) : *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ par morceaux. Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \nu_i d\Gamma, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où ν_i désigne le $i^{\text{ème}}$ cosinus directeur de la normale ν à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

Pour la démonstration voir Raviart et Thomas [6]. Cette formule est un outil fondamentale pour résoudre des EDP. Elle coïncide, en dimension 1 avec la formule d'intégration par partie. Comme conséquence de ce théorème, on a :

Théorème 1.20 *Si pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$, et toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} v(x)d\Gamma.$$

où

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n} \text{ est le vecteur de gradient de } u.$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu.$$

1.1.4 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Espaces $L^p(0, T; X)$

Dans la théorie des équations d'évolution, il y a lieu de faire jouer en général des rôles distincts à la variable temporelle et la variable d'espace, et donc on rencontre en particulier des espaces de fonction à valeurs vectorielles.

Définition 1.21 *Soit X un espace de Banach, et T un réel strictement positif. Pour $p \geq 1$, on note $L^p(0, T; X)$ l'ensemble des (classes des) fonctions Lebesgue mesurables, définies sur $]0; T[$ à valeurs dans X ; telles que $t \rightarrow \|f(t)\|_X^p$ est intégrable sur $]0; T[$.*

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

Si $p = \infty$, on définit un espace de Banach $L^\infty(0, T; X)$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup \text{ess} \|f\|_X < +\infty$$

Proposition 1.22 *pour $p \in [1, +\infty[$, on a les résultats suivants :*

- *Si X est un espace séparable, alors $L^p(0, T; X)$ est aussi séparable.*
- *Si X est un espace réflexif (respectivement de Hilbert), alors $L^p(0, T; X)$ est aussi réflexif (respectivement de Hilbert).*
- *Si X, Y désignent deux espace de Banach, $X \subset Y$, avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0, T; X)$ dans $L^p(0, T; Y)$.*

Remarque 1.23 Soient X espace de Hilbert, $p = 2$, alors $L^2(0, T; X)$ est un espace de Hilbert pour la produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Notons en outre si $u(t)$ est une fonction de $L^2(0, T; X)$ et si v un élément de X , la fonction $t \rightarrow (u(t), v)_X$ appartient $L^2(0, T)$.

Définition 1.24 (Dualité) :soient p, p' telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $p \in [1, +\infty[$, alors le dual de $L^p(0, T; X)$ s'indentifie à $L^{p'}(0, T; X)$.

Théorème 1.25 (Bochner) :une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ mesurable et intégrable si est seulement si

$$\begin{cases} t \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \rightarrow \|f(t)\|_X \end{cases}$$

est intégrable sur $[0, T]$ dans ce cas :

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X dt.$$

et

$$\left(u, \int_0^T f(t) dt \right)_X = \int_0^T (u, f(t))_X dt, \quad \forall u \in X$$

Lemme 1.26 (Gronwall) :Soit ψ, G deux fonctions continues sur l'intervalle $[0, T]$, avec G est une fonction croissante et $\gamma > 0$. Si

$$\psi(t) \leq G(t) + \gamma \int_0^t \psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Alors

$$\psi(t) \leq G(t)e^{\gamma t}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Distributions à valeurs vectorielles

Soit X et Y deux espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des application linéaire continues de $X \rightarrow Y$.

Définition 1.27 On appelle l'espace des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans X , et on note $D'(0, T; X)$, l'espace

$$D'(0, T; X) = \mathcal{L}(D(]0, T[), X),$$

On note pour $f \in D'(\]0, T[; X)$, et $\varphi \in D(\]0, T[)$,

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle,$$

L'application $\varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ est continue de $D(\]0, T[)$ dans X , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de $D(\]0, T[)$.

Lemme 1.28 *Si $f \in L^1_{loc}(\]0, T[; X)$, alors l'application*

$$f \rightarrow \int_0^T f \varphi dt, \quad \forall \varphi \in D(\]0, T[).$$

est une distribution sur $\]0, T[$ à valeur dans X .

Définition 1.29 *Soit $f \in D'(0; T; X)$ et m un entier positif. La dérivée de f d'ordre m est donnée par la formule*

$$\langle \frac{d^m f}{dt^m}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle f, \frac{d^m \varphi}{dt^m} \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\]0, T[),$$

Ainsi une distribution sur $\]0, T[$.

Espaces $W^{1,p}(0, T; X)$

Définition 1.30 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach et T un réel strictement positif.*

On définit l'espace

$$W^{1,p}(0, T; X) = \left\{ u \in L^p(0, T; X), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; X) \right\},$$

que l'on munit de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)}^p + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{W^{\infty,p}(0,T;X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X + \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_X,$$

Remarque 1.31 *pour $p \in [1, +\infty[$ l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$ est de Banach.*

Si $p = 2$, alors $W^{1,2}(0, T; X)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{W^{1,2}(0,T;X)} = \int_0^T \{(u(t), v(t))_X + (u'(t), v'(t))_X\} dt$$

Lemme 1.32 *Si $f \in L^p(0, T; X)$, $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$), alors f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0, T)$, continue de $[0, T] \rightarrow X$.*

1.2 Topologies faibles et espaces réflexifs

1.2.1 Topologie faibles

Soit E un espace de Banach, E' son dual,

Définition 1.33 On appelle topologie faible sur E , et que l'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine sur E (i.e. le minimum d'ouverts), qui rende continues toutes les applications linéaire $f \in E'$.

soit (x_n) une suite de E , on note

$$x_n \rightharpoonup x$$

la convergence faible de x_n vers x pour la topologie faible de E .

Définition 1.34 Soit $x_0 \in E$, on obtient une base de voisinages de x_0 pour la topologie faible de E en considérant tous les ensembles de la forme

$$V = \{x \in E; \langle f_i, x - x_0 \rangle \leq \varepsilon, \forall i \in I\},$$

où I est fini, $f_i \in E'$, et $\varepsilon > 0$.

Proposition 1.35 Soit (x_n) une suite de E . On a

- $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$.
- $x_n \rightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$.
- Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$; alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| < \liminf \|x_n\|$.
- Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \rightarrow f$ dans E' fortement, alors :

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$$

1.2.2 Topologie faible*

Soit E un espace de Banach, E' son dual, muni de la norme dual :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E', \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|,$$

et soit E'' son bidual muni de la norme

$$\|\zeta\|_{E''} = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |\zeta(f)|,$$

On a une injection canonique $J : E \rightarrow E''$ définie comme suit : soit $x \in E$ fixé, l'application $f \rightarrow \langle f, x \rangle$ de E' dans \mathbb{R} constitue une forme linéaire continue sur E' i.e. un élément de E'' noté Jx . On a donc

$$\langle Jx, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E}, \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$$

Il est clair que J est linéaire et que J i.e. est une isométrie $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$; en effet

$$\|Jx\|_{E''} = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|_E.$$

On a donc $J(E) \subset E''$. Cela va nous permettre de définir une nouvelle topologie sur E' :

Définition 1.36 on note la topologie faible* $\sigma(E', E)$, la topologie la moins fine sur E' rendant continues les formes linéaires $f \rightarrow f(x)$.

Proposition 1.37 On obtient une base de voisinages d'un point $f_0 \in E'$ pour la topologie $\sigma(E', E)$ en considérant tous les ensembles de la forme

$$V = \{f \in E'; \langle f - f_0, x_i \rangle \leq \varepsilon \quad \forall i \in I\},$$

où I est fini, $x_i \in E$ et $\varepsilon > 0$

soit (f_n) une suite de E' , on note

$$f_n \rightharpoonup^* f$$

la convergence faible* de f_n vers f pour la topologie de E' .

Proposition 1.38 Soit (f_n) une suite de E' . On a

- $f_n \rightharpoonup^* f \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in E$.
- $f_n \rightarrow f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(E', E'')$.
- Si $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(E', E)$.
- Si $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(E', E)$ alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f_n\| < \liminf \|f_n\|$.
- Si $f_n \rightharpoonup^* f$ pour $\sigma(E', E)$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E alors :

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

1.2.3 Espaces réflexifs, Espaces séparables

Définition 1.39 Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'' .

On dit que E est réflexif si

$$J(E) = E''.$$

Le théorème suivant est la version en dimension infini du théorème de Bolzano-Weistrass.

Théorème 1.40 Soit E un espace de Banach réflexif; alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.

Proposition 1.41 Soient E un espace réflexif, $\{x_n\}$ est une suite dans E telle que

- $\|x_n\| \leq C < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}, C$ constante,
- $\{x_n\}$ admet un point d'accumulation x unique pour la topologie faible.

Alors toute la suite $\{x_n\}$ converge vers x faiblement dans E .

Définition 1.42 On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense dans E .

Théorème 1.43 Soit E un espace de Banach séparable. Alors toute suite bornée (f_n) dans E' admet au moins une sous-suite (f_{n_k}) tels que

$$f_{n_k} \rightharpoonup^* f_n.$$

De plus on a un résultat analogue au proposition précédente.

Chapitre 2

Problème hyperbolique dans un domaine cylindrique

Dans ce chapitre, on va étudier le théorème d'existence et d'unicité des solutions faibles du problème hyperbolique linéaire dans un domaine cylindrique avec un terme d'amortissement, les techniques utilisées se basent sur la méthode de Faedo-Galerkin.

2.1 Notation et position de problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ régulière, on pose

$$Q = \Omega \times]0, T[.$$

On considère Q comme un domaine cylindrique de $\mathbb{R}^n \times]0, T[$ avec frontière latérale Σ

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

Considérons le problème suivant : étant donné des fonctions $u_0, u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, trouve une fonction $u : (x, t) \in Q \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = f \text{ dans } Q, \quad (2.1)$$

et vérifiant la condition au limite

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (2.2)$$

et la condition initial

$$u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1. \quad (2.3)$$

Dans (2.1), $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le laplacien par rapport aux seules variable d'espace, $a(x, t)$ une fonction réelle de Q dans \mathbb{R}^+ . Pour résoudre le problème(2.1) – (2.3) en considère $u(x, t)$ comme une fonction définie sur $]0, T[$ à valeurs dans un espace V . on pose

$$V = H_0^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad V^* = H^{-1}(\Omega).$$

On a

$$V \subset H \subset V^*$$

On note encore $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_*$ les normes dans V, H et V^* respectivement, on munit H par le produit scalaire (\cdot, \cdot) et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigner le produit de dualité entre V, V^* .

Pour simplifier, on note

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u'', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u'$$

On est maintenant en mesure, de formuler de façon précise le problème (2.1) – (2.3).

Théorème 2.1 Soient u_0, u_1, f avec

$$f \in L^2(0, T; H), \tag{2.4}$$

$$u_0 \in V, u_1 \in H, \tag{2.5}$$

Alors, il existe une fonction u et une seule satisfaisant à (2.1) – (2.3) et à

$$u \in L^\infty(0, T; V), \tag{2.6}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H), \tag{2.7}$$

Remarque 2.2 La condition (2.3) a un sens. En effet, de (2.6) (2.7) et comme $V \subset H$ on a

$$u(t) \in L^\infty(0, T; H) \text{ et } u'(t) \in L^\infty(0, T; H),$$

il résulte en particulier grâce au lemme 1.32 que u continue de $[0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ de sorte que $u(0) = u_0$ a un sens.

Pour vérifier que $u'(0) = u_1$ a un sens, on doit utiliser l'équation (2.1), qui s'écrit sous la forme suivante :

$$u'' = \Delta u - a(x, t)u' + f, \tag{2.8}$$

comme

$$\Delta u \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)),$$

on a

$$\Delta u \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

de sorte que (2.8) entraîne :

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) + L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

d'où, en particulier

$$u'' \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

ce qui, joint à (2.7), grâce au lemme 1.32, que u' est continue de $[0, T] \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, ce qui justifier que $u'(0) = u_1$ a un sens.

Remarque 2.3 On montre que si u est satisfait (2.1)–(2.3), alors

$$u \in C([0, T], V) \text{ et } u' \in C([0, T], H),$$

alors, il est raisonnable de supposer que $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. voir Lions et Magenes [4]

2.2 Formulation variationnelle

Sous les hypothèses du théorème, multipliant l'équation (2.1) par une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrant sur Ω , on trouve

$$\langle u''(t), v \rangle + \int_{\Omega} \Delta u(t) v dx + \int_{\Omega} a(t) u'(t) v dx = \int_{\Omega} f(t) v dx.$$

Grâce à la formule de Green, il vient que

$$\langle u''(t), v \rangle + (\nabla u(t), \nabla v) + (a(t)u'(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

on peut alors poser le problème de façon suivant :

$$(P.V) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \\ \langle u''(t), v \rangle + (\nabla u(t), \nabla v) + (a(t)u'(t), v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1. \end{cases}$$

Remarque 2.4 *l'équation du problème (P.V) a un sens de distribution dans $D'(0, T)$. En remarquant que*

$$\langle u'', v \rangle = \frac{d^2}{dt^2} (u(t), v) \text{ dans } D'(0, T), \forall v \in V.$$

En effet, $\forall \varphi \in D(0, T)$ on a

$$\int_0^T \langle u'', v \rangle \varphi dt = \int_0^T (u, v) \varphi'' dt.$$

puisque $u \in V^$, alors $(u, v) = \langle u, v \rangle$ et d'après le théorème de Bochner on trouve que*

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'', v \rangle \varphi dt &= \left\langle \int_0^T u'' \varphi dt, v \right\rangle \\ &= \left(\int_0^T u \varphi'' dt, v \right) \\ &= \int_0^T (u(t), v) \varphi''(t) dt \\ &= \int_0^T \frac{d^2}{dt^2} (u(t), v) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\langle u'', v \rangle = \frac{d^2}{dt^2} (u(t), v) \text{ dans } D'(0, T).$$

D'autre part, u est une fonction de $L^\infty(0, T; V)$, les fonctions

$$t \rightarrow (u(t), v) \text{ et } t \rightarrow (\nabla u(t), \nabla v)$$

appartiennent à l'espace $L^2(0, T)$ pour tout $v \in V$. De même, la fonction f est une fonction de $L^\infty(0, T; H)$, la fonction $t \rightarrow (f(t), v)$ est dans $L^2(0, T)$, $\forall v \in V$, et puisque

$$L^2(0, T) \subset D'(0, T),$$

alors l'équation de (P.V) est dans $D'(0, T)$, et elle s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) + (a(x, t)u'(t), v) = (f(t), v), \text{ dans } D'(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2.3 Démonstration d'existence et d'unicité

2.3.1 Existence de la solution

La méthode utilisée s'appelle la méthode Fædo-Galerkin, elle se décompose par les étapes suivants :

Etape 1 : Problème approché

Comme l'espace $V = H_0^1(\Omega)$ étant séparable, alors il existe une suite des fonction régulier $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ qui constitue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{une base orthogonale dans } V, \\ \text{une base orthonorme dans } H. \end{array} \right.$$

En particulier, on peut être écrire

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k, \quad u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k w_k,$$

où $\alpha_k = (\alpha, w_k)$, $\beta_k = (\beta, w_k)$ telle que ces séries converge dans H . Maintenant soit V_m un sous espace

clairement

$$V_m \subset V_{m+1} \text{ et } \bigcup V_m = V.$$

On fixé m , et soit

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m r_k(t) w_k, \quad u_{0m} = \sum_{k=1}^m \alpha_k(t) w_k, \quad u_{1m} = \sum_{k=1}^m \beta_k(t) w_k,$$

On construire la suite approchée de Galerkein u_m , pour résoudre le problème approximatif suivant :

$$(P_m) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u_m \text{ telle que, } \forall s = 1, \dots, m \\ (u_m''(t), w_s) + (\nabla u_m(t), \nabla w_s) + (a(t)u_m'(t), w_s) = (f(t), w_s), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ dans } V, \text{ lorsque } m \rightarrow \infty \\ u_m'(0) = u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ dans } H \text{ lorsque } m \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Etape 2 : Solution du problème approché

Lemme 2.5 $\forall m \geq 1$, il existe une solution unique du problème (P_m) , satisfait

$$u_m \in H^2(0, T; V_m).$$

Démonstration. w_1, w_2, \dots, w_m sont orthonorme dans H on a

$$(u_m''(t), w_s) = \left(\sum_{k=1}^m r_k''(t) w_k, w_s \right) = r_k''(t),$$

et

$$(a(t)u_m'(t), w_s) = (a(t) \sum_{k=1}^m r_k'(t) w_k, w_s) = a(t)r_k'(t).$$

D'autre part, puisque w_1, w_2, \dots, w_m est orthogonale dans V alors

$$\left(\sum_{k=1}^m r_k(t) \nabla w_k, \nabla w_s \right) = (\nabla w_s, \nabla w_s) r_s(t) = \|\nabla w_s\|_2^2 r_s(t).$$

On pose

$$F_s(t) = (f(t), w_s), \quad F(t) = (F_1(t), \dots, F_m(t)),$$

et

$$R_m(t) = (r_1(t), \dots, r_m(t)), \quad C_m = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad G_m = (\beta_1, \dots, \beta_m),$$

on considère la matrice diagonale d'ordre m

$$W = \text{diag} \{ \|w_1\|_2^2, \|w_2\|_2^2, \dots, \|w_m\|_2^2 \}.$$

Le problème (P_m) est équivalent au système de m équations ordinaires linéaires, avec des coefficients constants suivante :

$$\begin{cases} R_m(t) = -WR_m(t) - a(t)R_m(t) + F_m(t), \\ R_m(0) = C_m, \quad R'_m(0) = G_m. \end{cases} \quad (2.9)$$

Puisque $F_s(t) \in L^2(0, T)$, $\forall s = 1, \dots, m$, et comme la famille w_1, \dots, w_m sont linéairement indépendante alors le système (2.9) admette une solution unique réguliers $R_m(t) \in H^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, de

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m r_k(t) w_k,$$

on conclut que $u_m(t) \in H^2(0, T; V)$. ■

Etape 3 : Estimation à priori

Estimation de u_m, u'_m : Puisque $u_m(t) \in H^2(0, T; V)$, on peut prendre $v = u'_m(t)$ comme une fonction test dans le problème (P_m) , on obtient

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) + (a(t)u'_m(t), u'_m(t)) = (f, u'_m(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.10)$$

en remarque que (2.10) donne

$$\begin{cases} (u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|_2^2, \\ (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_2^2, \\ (a(t)u'_m(t), u'_m(t)) = \left\| \sqrt{a(t)} u'_m(t) \right\|_2^2. \end{cases} \quad (2.11)$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et Young, on a

$$\begin{aligned} |(f(t), u'_m(t))| &\leq \|f(t)\|_2 \|u'_m(t)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|f(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En remplace(2.11)et(2.12) dans (2.10) il vient que

$$\frac{d}{dt} \left\{ \|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_1^2 \right\} + 2 \left\| \sqrt{a(t)} u'_m(t) \right\|_1^2 \leq \|f(t)\|_2^2 + \|u'_m(t)\|_2^2,$$

et par intégration sur $[0, t]$, on trouve

$$\begin{aligned} &\|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_1^2 + 2 \int_0^t \left\| \sqrt{a(t)} u'_m(t) \right\|_1^2 dt \\ &\leq \|u_{1m}\|_2^2 + \|u_{0m}\|_1^2 + \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds \\ &\leq \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_1^2 + \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds, \end{aligned}$$

puisque

$$\|u_{0m}\|_1^2 \leq \|u_0\|_1^2 \text{ et } \|u_{1m}\|_2^2 \leq \|u_1\|_2^2,$$

en utilise le lemme de Gronwall 1.26, on déduit que

$$\|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_1^2 + 2 \int_0^t \left\| \sqrt{a(t)} u'_m(t) \right\|_1^2 dt \leq e^t \left\{ \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_1^2 + \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds \right\},$$

d'après (2.4)(2.5), il existe des constantes positives C_1, C_2, C_3 telle que

$$\|u_0\|_1 \leq C_1, \quad \|u_1\|_2 \leq C_2, \quad \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds \leq C_3,$$

on déduire que

$$\|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_1^2 + 2 \int_0^t \left\| \sqrt{a(t)} u'_m(t) \right\|_1^2 dt \leq C, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.13)$$

maintenant, on va voir l'estimation de u''_m

Estimation de u''_m Soit $v \in V$, on peut écrire v comme

$$v = w + z,$$

avec $w \in V_m = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ et $z \in V_m^\perp$, on a les suites $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ sont orthogonaux dans V , alors

$$\begin{aligned} (v, w) &= (w + z, w) \\ &= (w, w) + (z, w) = \|w\|_1. \end{aligned}$$

donc

$$(v, w) = \|w\|_1^2.$$

D'autre part, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$(v, w) = \|w\|_1^2 \leq \|v\|_1 \|w\|_1,$$

d'où, en particulier que

$$\|w\|_1 \leq \|v\|_1. \quad (2.14)$$

Alors, si on prend w comme une fonction test dans le problème (P_m) , on a

$$(u_m''(t), v) = -(\nabla u_m(t), w) - (a(t)u_m'(t), w) + (f(t), w), \quad (2.15)$$

en utilise l'inégalité de Cauchy-Swartz, on trouve

$$\begin{cases} |(\nabla u_m(t), w)| \leq \|u_m\|_1 \|w\|_1, \\ |(a(t)u_m'(t), w)| \leq \|a(t)u_m'(t)\|_2 \|w\|_1, \\ |(f(t), w)| \leq \|f(t)\|_2 \|w\|_1, \end{cases} \quad (2.16)$$

si on prend la valeur absolue d'équation (2.15) et l'estimation de (2.16), on obtient :

$$|(u_m''(t), v)| \leq \{\|u_m(t)\|_1 + \|a(t)u_m'(t)\|_2 + \|f(t)\|_2\} \|w\|_1,$$

d'après (2.14), on a

$$|(u_m''(t), v)| \leq \{\|u_m(t)\|_1 + \|a(t)u_m'(t)\|_2 + \|f(t)\|_2\} \|v\|_1,$$

par la définition de la norme dans V^* , il vient que

$$\|u_m(t)\|_* \leq \|u_m(t)\|_1 + \|a(t)u_m'(t)\|_2 + \|f(t)\|_2, \quad (2.17)$$

si on carré les deux côtés par et intégration sur $(0, T)$ de (2.17), on a

$$\int_0^T \|u_m(t)\|_*^2 dt \leq C \int_0^T \|u_m(t)\|_1^2 dt + \int_0^T \|a(t)u_m'(t)\|_2^2 dt + \int_0^T \|f(t)\|_2^2 dt,$$

et d'après (2.13), on trouve

$$\int_0^T \|u_m(t)\|_*^2 dt \leq C_4, \forall t \in [0, T]. \quad (2.18)$$

De (2.13), (2.18), on conclut que

$$\begin{cases} u_m \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; V), \\ u'_m \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; H), \\ \sqrt{a(t)}u'_m \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; H), \\ u''_m \text{ est bornée dans } L^2(0, T; V^*). \end{cases} \quad (2.19)$$

De (2.19) on a la solution u_m de problème (P_m) bornée de $L^\infty(0, T; V)$ et donc de $L^2(0, T; V)$; u'_m bornée de $L^\infty(0, T; H)$ et donc de $L^2(0, T; H)$, et par conséquent on a les estimations suivants :

$$\begin{cases} u_m \text{ est bornée dans } L^2(0, T; V), \\ u'_m \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H), \\ \sqrt{a(t)}u'_m \text{ est bornée dans } L^2(0, T; H), \\ u''_m \text{ est bornée dans } L^2(0, T; V^*), \end{cases} \quad (2.20)$$

Etape 4 : Passage à la limite On déduit (2.20) qu'on peut extraire une sous suite u_μ, u'_μ et u''_μ de u_m, u'_m et u''_m , respectivement et tels que

$$\begin{aligned} u_\mu &\rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ faible,} \\ u'_\mu &\rightarrow u' \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faible,} \\ \sqrt{a(t)}u'_\mu &\rightarrow \sqrt{a(t)}u' \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faible,} \\ u''_\mu &\rightarrow u'' \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faible.} \end{aligned}$$

si $m = \mu$, on déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla v(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v(t)) dt, \quad \forall v \in L^2(0, T; V), \\ \int_0^T (u'_m(t), v(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (u'(t), v(t)) dt, \quad \forall v \in L^2(0, T; H), \\ \int_0^T (a(t)u'_m(t), v(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (a(t)u'(t), v(t)) dt, \quad \forall v \in L^2(0, T; H), \\ \int_0^T (u''_m(t), v(t)) &= \int_0^T \langle u''_m(t), v(t) \rangle \rightarrow \int_0^T \langle u''(t), v(t) \rangle, \quad \forall v \in L^2(0, T; V^*). \end{aligned}$$

on utilise cette propriété pour passer à la limite lorsque $m \rightarrow \infty$

Etape 5 : Vérification que $u(t)$ une solution (2.1) – (2.3) On considère

$$v_N(t) = \sum_{k=1}^N b_k(t)w_k,$$

Pour $m > N$, alors $v_N \in L^2(0, T; V_m)$. Multipliant l'équation du problème (P_m) par $b_k(t)$, on trouve

$$(u_m''(t), v_N(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla v_N(t)) + (a(t)u_m'(t), v_N(t)) = (f(t), v_N(t)).$$

Par intégration sur $(0, T)$, on a

$$\int_0^T (u_m''(t), v_N(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla v_N(t)) + (a(t)u_m'(t), v_N(t)) dt = \int_0^T (f(t), v_N(t)) dt. \quad (2.21)$$

Par passage à la limite lorsque $m \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_0^T \langle u''(t), v_N(t) \rangle + (\nabla u(t), \nabla v_N(t)) + (a(t)u'(t), v_N(t)) dt = \int_0^T (f(t), v_N(t)) dt.$$

On a $v_N \rightarrow v$ fort dans V , alors si $N \rightarrow \infty$, on a

$$\int_0^T \langle u''(t), v(t) \rangle + (\nabla u(t), \nabla v(t)) + (a(t)u'(t), v(t)) dt = \int_0^T (f(t), v(t)) dt, \quad (2.22)$$

Alors

$$\langle u''(t), v(t) \rangle + (\nabla u(t), \nabla v(t)) + (a(t)u'(t), v(t)) = (f(t), v(t)), \text{ p.p. dans } L^2(0, T).$$

donc u satisfait l'équation du problème (2.1) – (2.3). il reste montrer que u est vérifier les condition initial, pour cela, on considère la fonction $v \in C^2(0, T; V)$ avec $v(T) = v'(T) = 0$.

L'intégration par partie de (2.22), donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u(t), v''(t) \rangle + (\nabla u(t), \nabla v(t)) + (a(t)u'(t), v(t)) dt \\ = \int_0^T (f(t), v(t)) dt + (u'(0), v'(0)) - (u(0), v(0)). \end{aligned} \quad (2.23)$$

D'autre part, si on intégrant par partie l'équation(2.21), et lorsque $m \rightarrow \infty$ et $N \rightarrow \infty$, on déduit

$$\begin{aligned} \int_0^T (u(t), v''(t)) + (\nabla u(t), \nabla v(t)) + (a(t)u'(t), v(t)) dt \\ = \int_0^T (f(t), v(t)) dt + (u_1, v'(0)) - (u_0, v(0)), \end{aligned} \quad (2.24)$$

en comparant avec (2.23) et (2.24), on trouve

$$(u'(0), v'(0)) - (u(0), v(0)) = (u_1, v'(0)) - (u_0, v(0)).$$

Alors, pour toute $v \in C^2(0, T; V)$, avec $v(T) = v'(T) = 0$, le caractère arbitraire de $v'(0)$ et de $v(0)$ donne

$$u'(0) = u_1, \quad u(0) = u_0.$$

d'où l'existence de la solution.

2.3.2 Unicité de la solution

Pour prouver l'unicité, on suppose que le problème admet deux solutions u_1, u_2 . Posons $w = u_1 - u_2$, on a

$$\begin{aligned} u_1'' - \Delta u_1 + a(t)u_1' &= f, \\ u_2'' - \Delta u_2 + a(t)u_2' &= f, \end{aligned}$$

faisons la différence des deux système, on obtient

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + a(t)w' = 0, \\ w(x, 0) = 0, \quad w'(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Remarquons que l'équation de (2.25) donne

$$\langle w'', v \rangle + (\nabla w, \nabla v) + (a(t)w', v) = 0, \forall v \in V \quad (2.26)$$

.comme $w'(t)$ n'appartient pas à V , on ne peut pas remplacer v par $w'(t)$ dans (2.26), puisque la première terme n'est pas loisible. Donc, il faut introduire une nouveau fonction auxiliaire :

$$\psi(t) = \begin{cases} - \int_t^s w(\delta) d\delta & \text{si } t \leq s, \\ 0 & \text{si } t > s. \end{cases}$$

Clairement

$$\psi(t) \in V \text{ et } \psi'(t) = w(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

On pose

$$w_1(t) = \int_0^t w(\sigma) d\sigma \text{ de sorte que } \psi(t) = w_1(t) - w_1(s), \text{ si } t \leq s.$$

Si on prend $\psi(t)$ comme une fonction test dans (2.26), et après l'intégration sur $[0, T]$, on obtient

$$\int_0^s \langle w'', \psi(t) \rangle dt + \int_0^s (\nabla w, \nabla \psi(t)) dt + \int_0^s (a(x, t)w', \psi(t)) dt = 0, \quad (2.27)$$

on remarque que

$$\psi'(t) = w(t), \quad \psi(0) = -w(s) \text{ et } w_1(0) = 0,$$

par suite, si on intégrant par partie, on a

$$\int_0^s \langle w''(t), \psi(t) \rangle dt = - \int_0^s (w'(t), \psi'(t)) dt = \int_0^s (w'(t), w(t)) dt = -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|w(t)\|_2^2 dt,$$

d'autre part, on a

$$\int_0^s (\nabla w(t), \nabla \psi(t)) dt = \int_0^s (\nabla \psi'(t), \nabla \psi(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|\nabla \psi(t)\|_2^2 dt,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^s (a(t)w'(t), \psi(t)) dt &= - \int_0^s (a(t)w, \psi'(t)) dt \\ &= - \int_0^s (a(t)w(t), w(t)) dt = - \int_0^s \left\| \sqrt{a(t)}w(t) \right\|_2^2 dt, \end{aligned}$$

d'après (2.27), on a

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \{ \|w(t)\|_2 - \|\psi\|_1 \} dt + 2 \int_0^s \left\| \sqrt{a(t)}w(t) \right\|_2^2 dt = 0,$$

on déduit alors

$$\|w(s)\|_2 + \|\psi(0)\|_1 + 2 \int_0^s \left\| \sqrt{a(t)}w(t) \right\|_2^2 dt = 0 \Rightarrow w(s) = 0, \forall s \in [0, T]$$

d'où l'unicité de la solution.

Chapitre 3

Problème hyperbolique dans un domaine non-cylindrique

Dans ce chapitre, on considère un problème hyperbolique linéaire dans un domaine non-cylindrique. Pour démontrer l'existence, on utilise la méthode de pénalisation due à Lions [5] qui consiste à remplacer le problème par un problème pénalisé. L'existence est obtenue par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.1 Notation et position de problème

Soit Q un domaine non-cylindrique de $\mathbb{R}_x^n \times]0, T[$, avec frontière $\hat{\Sigma}$, et \mathcal{O} ouvert borné de \mathbb{R}_x^n avec frontière Γ , telle que

$$Q \subset \mathcal{O} \times]0, T[.$$

Notation et hypothèses

Pour préciser bien le domaine Q , on utilise les notations suivantes :

$$Q \cap \{t = s\} = \Omega_s \text{ pour } s > 0,$$

$$\Gamma_s = \partial Q \cap \{t = s\}, \quad 0 < s < T, \text{ où } \partial Q \text{ la frontière de } Q,$$

$$\hat{\Sigma} = \bigcup_{s \in [0, T]} \Gamma_s, \text{ de sorte que } \partial Q = \Omega_0 \cup \hat{\Sigma} \cup \Omega_T.$$

Les hypothèses sur Q sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_t \text{ est monotone croissante avec } t, \text{ c'est à dire, si } \Omega_t^* = \text{projection de } \Omega_t \\ \text{sur l'hyperplan } t = 0, \text{ alors } \Omega_t^* \subset \Omega_{t'}, \text{ si } t \leq t'; \end{array} \right. \quad (3.1)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in]0, T[, \Omega_t \text{ a une propriété de régularité suivante :} \\ \text{si } u \in H_0^1(\mathcal{O}), u = 0 \text{ p.p. dans } \mathcal{O} - \Omega_t, \text{ alors} \\ \text{la restriction de } u \text{ à } \Omega_t \text{ appartient à } H_0^1(\Omega_t). \end{array} \right. \quad (3.2)$$

En plus des espaces du chapitre 1, on besoin aussi les espaces $L^q(0, T; L^p(\Omega_t))$.

Définition 3.1 On définit l'espace $L^q(0, T; L^p(\Omega_t))$, où $1 \leq q \leq \infty$ comme un espace de classe des fonctions $w \in L^q(0, T; L^p(\mathcal{O}))$ tels que $w(x, 0) = 0$ p.p. dans $\mathcal{O} - \Omega_t$ et p.p. dans $(0, T)$.

Ces espaces sont munis des normes

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^p(0, T; L^p(\Omega_t))} &= \left[\int_0^T \|w\|_{L^p(\Omega_t)}^q dt \right]^{\frac{1}{p}}, \\ \|w\|_{L^\infty(0, T; L^p(\Omega_t))} &= \sup_{0 < t < T} \text{ess} \|w\|_{L^p(\Omega_t)}. \end{aligned}$$

On adapte les même définition pour $L^q(0, T; H_0^1(\Omega_t))$ et $L^q(0, T; L^2(\Omega_t))$ pour $1 \leq q \leq \infty$.

Le problème

On cherche u dans Q la solution de problème hyperbolique suivant :

$$(P) : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \quad \Omega_t \times]0, T[\\ u = 0 \quad \text{sur } \hat{\Sigma}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad , \quad x \in \Omega_0. \end{array} \right.$$

On le théorème d'existence suivant

Théorème 3.2 On suppose que (3.1), (3.2) on lieu, on donne f, u_0, u_1 avec

$$f \in L^2(Q) \quad (3.3)$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \quad (3.4)$$

$$u_1 \in L^2(\Omega_0) \quad (3.5)$$

il existe une fonction u la solution de (P) vérifiant

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)), \quad (3.6)$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)), \quad (3.7)$$

Remarque 3.3 La condition $u = 0$ sur Σ contenue dans l'appartenance à $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t))$.

Remarque 3.4 De (3.6) (3.7) et le lemme 1.32, il résulte en particulier que

$$u(t) \in C([0, T]; L^2(\Omega_t)),$$

de sorte que $u(0) = u_0$ a un sens.

Pour vérifier que $u'(0) = u_1$ a un sens, d'après l'équation de (P) et puisque Ω_t étant «croissante avec t », on trouve que

$$u''(t) \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_0)),$$

on a $u'(t) \in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega_t))$ et $u''(t) \in L^\infty([0, T]; H^{-1}(\Omega_0))$, en particulier d'après le lemme 1.32 que

$$u'(t) \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega_0)),$$

de sorte que $u'(0) = u_1$ a un sens.

3.2 Pénalisation

On utilise la méthode de pénalisation qui transforme le problème précédent à un problème posé dans un domaine cylindrique. Pour cela on considère que

$$\begin{cases} \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \text{ la prolongement de } u_0, u_1 \text{ à } \mathcal{O} \text{ par } 0 \text{ hors de } \Omega_0, \\ \tilde{f} \text{ la prolongement de } f \text{ à } \mathcal{O} \times]0, T[\text{ par } 0 \text{ hors de } Q. \end{cases}$$

On considère aussi la fonction $a(x, t) \in L^\infty(\mathcal{O} \times]0, T[)$ définie par

$$a(x, t) = \begin{cases} 1 \text{ dans } \mathcal{O} \times]0, T[- Q, \\ 0 \text{ dans } Q, \end{cases}$$

voir la figure suivante.

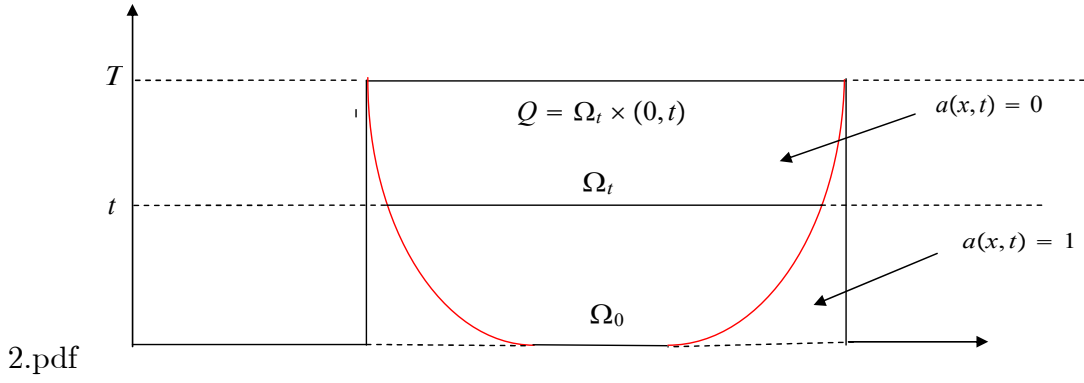


FIG. 3.1 – Les domaines \mathcal{O} et Ω

Alors, dans le cylindre $\mathcal{O} \times]0, T[$, on considère le problème pénalisé suivant :

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a u_\varepsilon' = \tilde{f}, & (\varepsilon > 0), \quad \text{sur } \mathcal{O} \times]0, T[, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \\ u_\varepsilon(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_\varepsilon'(x, 0) = \tilde{u}_1(x). & x \in \mathcal{O} \end{cases} \quad (3.8)$$

On a le théorème d'existence et d'unicité pour $\varepsilon > 0$

Théorème 3.5 *Pour $\varepsilon > 0$, il existe une seule fonction u_ε , définies sur $\mathcal{O} \times]0, T[$ telle que*

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\mathcal{O})), u_\varepsilon' \in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O})),$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\mathcal{O})),$$

$$u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a u_\varepsilon' = \tilde{f},$$

et

$$u_\varepsilon(0) = \tilde{u}_0, u_\varepsilon'(0) = \tilde{u}_1.$$

Démonstration. Si on remplace la fonction $a(x, t)$ dans le chapitre deux par $\frac{1}{\varepsilon} a(x, t)$, on trouve d'après la démonstration de l'existence du théorème 2.2 que le problème admet un solution $\forall \varepsilon > 0$. ■

3.3 Passage à limite

Si on multiplie l'équation de (3.8) par $u_\varepsilon(t)$ et on intègre sur \mathcal{O} , il vient que la première intégrale n'est pas loisible car $u_\varepsilon'(t)$ n'appartient pas à $H_0^1(\mathcal{O})$ donc dans ce cas, grâce à l'égalité d'énergie (Voire Lions et Magenes [1]) on a

$$\|u_\varepsilon'(t)\|_2^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_1^2 = \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_1^2 + 2 \int_0^t (f(\sigma), u'(\sigma)) d\sigma, \quad (3.9)$$

d'après l' inégalité de Cauchy-Schwartz et Young on conclut

$$\int_0^T (f(\sigma), u'(\sigma)) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_0^T \|f(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^T \|u'_\varepsilon(\sigma)\|^2 d\sigma,$$

donc (3.9) équivaut à

$$\|u'_\varepsilon(t)\|_2^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_1^2 \leq \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_1^2 + \int_0^T \|f(\sigma)\|^2 d\sigma + \int_0^T \|u'_\varepsilon(\sigma)\|^2 d\sigma.$$

On applique le lemme de Gronwall on trouve

$$\|u'_\varepsilon(t)\|_2^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_1^2 \leq C \left\{ \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_1^2 + \int_0^T \|f(\sigma)\|^2 d\sigma \right\}, \quad (3.10)$$

où C est une constante positive indépendante de m et ε .

D'après (3.10), on a les estimations suivantes :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \text{ bornée de } L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{O})) \\ u'_\varepsilon \text{ bornée de } L^2(0, T; L^2(\mathcal{O})), \end{cases} \quad (3.11)$$

d'après (3.11), on peut extraire une sous suite telle que

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightarrow w \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{O})) \text{ faible,} \\ u'_\varepsilon \rightarrow w' \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\mathcal{O})) \text{ faible,} \end{cases} \quad (3.12)$$

d'après l'équation (2.13) de chapitre 2, on a l'estimation suivante

$$\|u'_\varepsilon(t)\|_2 + \|u_\varepsilon(t)\|_1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \left\| \sqrt{a(t)} u'_\varepsilon(t) \right\|_2^2 d\sigma \leq C, \quad (3.13)$$

de (3.13) on trouve

$$\int_0^T \left\| \sqrt{a} u'_\varepsilon \right\|_2^2 d\sigma \leq C\varepsilon,$$

ceci implique que

$$\sqrt{a} u'_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ fort dans } L^2(0, T; L^2(\mathcal{O})), \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

et puisque l'injection de $L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$ dans $L^1(0, T; L^1(\mathcal{O}))$ est continue, on obtient

$$\sqrt{a} u'_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^1(0, T; L^1(\mathcal{O})), \quad (3.14)$$

de (3.12) on conclut que

$$u'_\varepsilon \rightarrow w' \text{ dans } L^1(0, T; L^1(\mathcal{O})),$$

d'après le théorème 1.3, on a

$$\sqrt{a}u'_\varepsilon \rightarrow \sqrt{a}w' \text{ dans } L^1(0, T; L^1(\mathcal{O})), \quad (3.15)$$

de (3.14) et (3.15), on conclut que

$$\sqrt{a}w' = 0 \text{ p.p. dans } \mathcal{O} \times]0, T[.$$

Mais, on a $a = 1$ dans $\mathcal{O} \times]0, T[- Q$, alors

$$w' = 0 \text{ p.p. dans } \mathcal{O} \times]0, T[- Q,$$

comme $w(x, 0) = \tilde{u}_0(x)$, $w(x, 0) = 0$ dans $\mathcal{O} - \Omega_0$ et par conséquent, grâce à (3.1) :

$$w = 0 \text{ p.p. dans } \mathcal{O} \times]0, T[- Q.$$

Cela, joint à (3.2) montre que

$$\text{Si } u \text{ désigne la restriction de } w \text{ à } Q, \text{ alors } u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)).$$

Donc u satisfait à (3.6) et (3.7).

Maintenant, et d'après le chapitre deux, on considère l'équation

$$\langle u''_\varepsilon(t), v \rangle + (\nabla u_\varepsilon(t), \nabla v) + \frac{1}{\varepsilon} (a u'_\varepsilon(t), v) = (f(t), v) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in H_0^1(\mathcal{O}). \quad (3.16)$$

Comme la restriction de l'équation (3.16) dans Q , et avec la fonction a satisfait $a u'_\varepsilon = 0$ sur Ω_t , on trouve que

$$\langle u''_\varepsilon(t), v \rangle + (\nabla u_\varepsilon(t), \nabla v) = (f(t), v) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_t). \quad (3.17)$$

Grâce à (3.12), et par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'équation (3.17), de ce fait on obtiens l'équation

$$\langle u'', v \rangle + (\nabla u, \nabla v) = (f, v) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_t), \quad (3.18)$$

et avec les condition initiale vérifié, le théorème est démontré.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons démontré l'existence et l'unicité des solutions faibles du problème hyperbolique dans un domaine cylindrique

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = f, & \mathcal{O} \times]0, T[, \\ u = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, & x \in \mathcal{X} \end{cases} \quad (3.19)$$

où le terme $a(x, t) u'$ joue le rôle d'un amortissement linéaire. Ensuite on a considéré le problème hyperbolique dans un domaine non-cylindrique

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, & \Omega_t \times]0, T[, \\ u = 0, & \text{sur } \hat{\Sigma}, \\ u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, & x \in \Omega_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour démontrer l'existence, on a utilisé la méthode de pénalisation due à Lions [5] qui consiste à remplacer (3.20) par le problème (3.19) avec le terme de pénalisation $\frac{a(x, t)}{\varepsilon} u'$. L'existence est obtenue par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Bibliographie

- [1] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, (1987).
- [2] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, *Mathematical analysis and numerical science and technology*, Berlin Heidelberg (1992)
- [3] J. FERREIRA, *Non linéaire hyperbolique parabolic partial differential equation in non cylindrical domain*, Rendicontidel circolo mathematico di palermo Serie II, Tomo XLIV (1995).
- [4] J.L, LIONS ET E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogenes et application*, Vol.1, Dunod (1968).
- [5] J. LIONS, *Qqm de resolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, (1969).
- [6] RAVIAT, THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des EDP*, Masson (1992).
- [7] S. SALSA, *partial Differential equation in action.from modelling to theory*, Springer-Verlag, (2008).