

المسئلة في: 2023/07/09

تصريح بتصحيح مذكرة الماستر 2

فا مكي لحيص

أنا الممضي أسفله الأستاذ:

موظر الطلبة الآتية أسماؤهم:

-1

-2

-3

أصرح بأنهم قد قاموا بتصحيح مذكرتهم المعنونة بـ:

Existence and uniqueness of some
fractional differential equations
via measure of non compactness

وذلك تبعا للتصحيح الموجهة لهم من طرف لجنة التقييم.

امضاء الأستاذ الموظر



المسئلة في: 2023/07/09

تصريح بتصحيح مذكرة الماستر 2

فا مكي لحيص

أنا الممضي أسفله الأستاذ:

موظر الطلبة الآتية أسماؤهم:

-1 مظلوف ميسحان

-2

-3

أصرح بأنهم قد قاموا بتصحيح مذكرتهم المعنونة بـ:

Existence and uniqueness of some
fractional differential equations
via measure of non compactness

وذلك تبعا للتصحيح الموجهة لهم من طرف لجنة التقييم.

امضاء الأستاذ الموظر





REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Existence and uniqueness of some fractional differential equations via measure of non compactness

Présentée par :

M^{elle} makhoulf Djehane

Mostefa NADIR	Pr,	Université de M'sila	Président.
Bachir GAGUI	M.C.A,	Université de M'sila	Encadreur.
Amina KHIRANI	M.C.A,	Université de M'sila	Examineur.
Noui DJAIDJA	M.C.B,	Université de M'sila	Examineur.

Remerciements

Je remercie avant tout **ALLAH** qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail
J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Dr. Bachir Gagui qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail

Je remercie tous les professeurs du département de mathématiques et en fin j'adresse mes sincères remerciements à mes parents, Mes frères et ma soeur, mes amis et à tous qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail

Merci à tous.

Dédicace



..... Je dédie ce mode

✍

l'homme le plus grand et le plus cher de l'univers : mon père

✍ Ma chère mère

✍

la source de mon bonheur et de ma force : me ✍
ma chère soeur

✍

ux camarade : Debik lameria, ✍

Romaissa karkab, chaima latrach

✍

tout me

✍

tout le



MAKHOLOUF Djehane

Notations

$C^n[a, b]$:	L'ensemble des fonctions n fois continument dérivables sur $[a, b]$.
\mathbb{N}	:	Ensemble des nombres naturels.
\mathbb{R}	:	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{C}	:	Ensemble des nombres complexes.
X	:	Un espace de Banach.
A	:	sous -ensemble de X .
∂A	:	la frontière de A .
\bar{A}	:	la fermeture de A .
$B_r(x, a)$:	La boule fermée dans X de centre a et de rayon r .
$\partial B_r = S_r$:	La sphère dans X
$\text{diam } X$:	Le diamètre d'ensemble X .
M_E	:	La famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de E .
N_E	:	La sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts de E .
$\mathcal{L}(X, Y)$:	Espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y .
$\mathcal{K}(X, Y)$:	Espace des opérateurs compacts de X dans Y ,
$\mathcal{R}(X, Y)$:	Espace des opérateurs de rang fini définis de X dans Y ,
B_X	:	la boule unité ouverte dans X ,
\bar{B}_X	:	la boule unité fermée dans X ,
α	:	mesure de non-compacité de Kuratowski,
χ	:	mesure de non-compacité de Hausdorff,
$AC([a, b])$:	L'espace de fonction absolument continues sur $[a, b]$.
$\text{conv } \Omega$:	L'enveloppe convexe d'un ensemble Ω .
$\overline{\text{conv} \Omega}$:	L'enveloppe convexe fermé d'un ensemble Ω .
$B(p, q)$:	La fonction β .
$E_{\alpha, \beta}(z)$:	la fonction mittag-leffler.
I^α	:	L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .
D^α	:	La dérivée fractionnaire d'ordre α .
${}^c D^\alpha$:	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.

Table des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Notations	iii
Introduction générale	1
1 Initiations sur la mesure de non compacité quelques propriétés	2
1.1 Notions	2
1.2 Compacité	2
1.3 compacité dans $C(G)$	4
1.4 Mesure de non compacité	4
1.4.1 Mesure de non compacité en général	4
1.4.2 Mesure de non-compacité de Hausdorff	5
1.4.3 Mesure de non-compacité de Kuratowskii	6
1.5 Mesure de non compacité sur les opérateurs	8
1.5.1 Mesure de non-compacité de Kuratowskii d'un opérateur	8
1.5.2 Mesure de non-compacité de Hausdorff d'un opérateur	8
1.6 Quelques théorèmes de points fixes	9
1.6.1 Notation	9
1.6.2 Théorème Alternative Non Linéaire de Leray-Schauder	10
1.6.3 Théorème de Darbo	11
2 Généralité sur les équations différentielles d'ordres fractionnaires	13
2.1 Calcul fractionnaire	13
2.1.1 La fonction Gamma	13
2.1.2 La fonction Bêta	16
2.1.3 La fonction Mittag-Leffter	17
2.2 Intégrale fractionnaire	18
2.2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	18
2.3 Dérivation fractionnaire	20

2.3.1	Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville	20
2.3.2	Dérivées fractionnaires de type Caputo	21
2.4	Comparaison entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville	24
2.5	Propriétés des dérivées fractionnaires	24
2.6	Équations différentielles fractionnaires	25
2.7	Équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville	26
2.8	Equation différentielle fractionnaire de type Caputo	28
2.8.1	Existence de solution	28
3	Existence et unicité de la solution de EDFs via la mesure de non compacité	31
3.1	Préliminaires	31
3.2	Résultat d'existence	32
	Bibliography	39

Table des figures

2.1	Le graphe de la fonction Gamma Γ	15
-----	---	----

Liste des tableaux



Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires est apparue comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notez que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux événements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables en ingénierie, physique, chimie, biologie, etc. Dans ce mémoire, nous allons inspirer des articles [1, 3,4,15,17,20] et faire l'inventaire de toutes ces études en donnant des résultats d'existence pour les solutions d'une certaine classe d'équations différentielles fractionnaires via la dérivée fractionnaire de Caputo dans un espace de Banach de dimension infinie. Cette étude est principalement réalisée en utilisant le théorème du point fixe de Monch en combinaison avec la technique de mesure de non-compacité de Kuratowski. Ce mémoire est composée de trois chapitres.

Premier chapitre, on présente quelques définitions et notions sur la mesure de non compacité comme la mesure de Kuratowski et Hausdorff sur les ensembles bornés, nous présenterons également quelques propriétés fondamentales sur les opérateurs ainsi quelques théorèmes du point fixe qui sont liés à la mesure de non-compacité dans l'espace de Banach, (théorème de Darbo, Schauder, ...).

Dans le deuxième chapitre, nous avons mentionner les concepts de certaines fonctions spéciales, intégrales et dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi leurs caractéristiques et La relation entre eux.

Troisième chapitre intitulé "Existences et unicité de la solution de EDFs via la mesure de non compacité", on traitera l'existence des solutions pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo suivantes :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), & t_J &= [0, T], & 1 < \alpha < 2 \\ y(0) &= y_0, & y(T) &= y_T \end{aligned}$$

où D la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times E \rightarrow E$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, $y_0, y_T \in E$ et E est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$

Initiations sur la mesure de non compacité quelques propriétés

Chapitre
1

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement la notion de compacité dans les espaces métriques puis introduisons les opérateurs compacts entre espaces de Banach. On donne alors un résultat fondamental de compacité pour les fonctions continues : le théorème (d'Ascoli) et quelques définitions sur la mesure de non-compacité, et pour la résolution d'équations différentielles d'ordre fractionnaire où le second membre est non linéaire, nous avons besoin d'une perspective théorème de point fixe.

1.1. Notions

Dans cette section, nous rappelons quelques notions que nous utilisons par la suite. Le diamètre et la distance de A sont définis par

$$\text{diam}(A) = \sup\{\|x - y\|; x, y \in A\}$$

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{\|x - y\|; x, y \in A\}$$

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimensions infinies.

On note par $L(X, Y)$, l'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y et par $L(X) = B(X, X)$.

Un opérateur linéaire T défini sur X vers Y i.e., $T \in L(X, Y)$.

1.2. Compacité

Définition 1.

Une classe de sous-ensemble de E , s'appelle un recouvrement d'un ensemble G de E , si nous avons

$$G \subset \cup_j U_j, j \in J.$$

Définition 2.

Soit U un ensemble d'un espace normé X , U est dit compact si de tout recouvrement de U par

des ouverts de U , on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e,

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts), } U \subset \cup V_j \exists V_j(k) \quad j(k) = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{tel que } U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}$$

Définition 3.

Un ensemble U est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dans U contient une sous-suite converge vers un élément dans U .

Théorème 1.

Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.

Définition 4.

Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Définition 5.

Un espace métrique est complet si et seulement si toute suite de Cauchy converge.

Définition 6.

Un sous ensemble G d'un espace normé est totalement borné si il existe une suite finie i.e :

$$\forall \epsilon > 0, G \subset \bigcup_{j=1}^n B(\varphi_j, \epsilon)$$

Théorème 2.

Tout ensemble borné d'un espace normé est relativement compact.

Définition 7 (Opérateur Compact.).

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans Y

Définition 8 (Opérateur linéaire).

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

Condition additive :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \quad \text{on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$$

Condition homogène :

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{K} : \quad A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Définition 9 (Opérateur borné).

Un opérateur linéaire A définie sur E dans F est dit borné s il existe une constante positive $C > 0$,

tel que :

$$\|A(x)\| \leq C \|x\|_E, \quad \forall x \in E$$

1.3. compacité dans $C(G)$

Dans cette partie, l'espace des fonctions continues $C(G)$ est muni de la norme maximum :

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in G} |\varphi(x)|.$$

Définition 10.

Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$ de X , la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous suite convergente dans Y

Théorème 3 (Arzela-Ascoli).

Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées, i.e :

1. L'ensemble U est borné, tel que :

$$\forall \varphi \in U : \forall x \in G, \exists M > 0 : |\varphi(x)| \leq M$$

2. L'ensemble U est équicontinu :

$$\forall \epsilon > 0 : \forall \varphi \in U : \forall x, y \in G : \exists \delta > 0 \text{ telle que } : |x - y| < \delta \rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon$$

Théorème 4 (de Bolzano-Weierstrass).

Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente. Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compact.

1.4. Mesure de non compacité

Les mesures de non compacité sont des outils très utiles dans les espaces de Banach, Elles sont largement utilisées dans la théorie du point fixe, les équations différentielles et les équations différentielles d'ordre fractionnaires, ... etc.

1.4.1. Mesure de non compacité en général

Considérons X est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$, on note par M_X la famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de X et par N_X la famille des sous-ensembles relativement compacts.

Définition 11.

Soit l'application $\mu : M_X \rightarrow [0, \infty[$. On dit que μ est une mesure de non compacité (MNC) avec propriétés maximum. dans l'espace de Banach X , si elle satisfait les conditions suivantes :

$\forall A, B, B_1, B_2 \in M_X$ on a les propriétés suivantes

1. l'ensemble, $\ker(\mu) = \{A \in M_X \text{ telle que } : \mu(A) = 0\}$ est un ensemble non vide et $\ker(\mu) \subset M_X$
2. Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
3. $\mu(\bar{A}) = \mu(A)$
4. $\mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda\mu(A) + (1 - \lambda)\mu(B)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$.
5. $\mu(\text{conv}(A)) = \mu(A)$.
6. $\mu(B_1 \cup B_2) = \max\{\mu(B_1), \mu(B_2)\}$.
7. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble de suites de M_X telle que $A_{n+1} \subset A_n, \bar{A}_n = A_n (n = 1, 2, \dots)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$, alors $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$ et $A_\infty \in \ker(\mu)$

Définition 12.

On dit que la mesure de non compacité μ est sublinéaire, si $\forall A, B \in M_X$, et elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. $\mu(\lambda A) = |\lambda|\mu(A) \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Définition 13. 1. Une mesure de non compacité est appelée une mesure avec propriété maximale si $\max(\mu(A), \mu(B)) = \mu(A \cup B)$.

2. Une mesure de non compacité est dite régulière si $\ker(\mu) = N_X$, sublinéaire et possède une propriété maximale.
3. Une mesure de non compacité est dite Lipschitzienne si elle satisfait la condition de Lipschitz

$$\mu(A) - \mu(B) \leq \mu(B(X))d_H(A, B)$$

$$\text{avec } d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

et $B(X)$ la boule fermée dans X et de centre X et de rayon 1

1.4.2. Mesure de non-compacité de Hausdorff

En 1957, Goldenstein, Goh'berg et Markus ont introduit une autre mesure de noncompacité appelée mesure de non-compacité de Hausdorff.

Définition 14.

La mesure de non-compacité de Hausdorff d'un ensemble borné $A \in M_X$, notée $\chi(A)$, est définie par :

$$\chi(A) = \inf \left\{ \epsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon, i = 1, \dots, n \right\}$$

Où : $B(x_i, r_i)$ désigne la boule de centre x_i et de rayon r_i . où :

$$\chi(A) = \inf\{\epsilon > 0, B$$

admet un recouvrement fini des boules de rayons $< \epsilon\}$ avec B la famille des sous-ensembles bornés de X et $B \in M_X$. Dans cette définition, l'inégalité $r_i < \epsilon$, peut être remplacée par $r_i \leq \epsilon$. De plus, les centres x_i des boules qui recouvrent l'ensemble A ne sont pas forcément dans l'ensemble A ($x_i \in X$, en général). Alors une autre définition (équivalente) de la mesure de non-compacité de Hausdorff est donnée par :

$$\chi(A) = \inf\{e > 0 : A \text{ admet un } e\text{-réseau fini dans } X\}.$$

Les propriétés fondamentales de la mesure de non-compacité de Hausdorff sont citées dans le théorème suivant :

Théorème 5.

Soit (X, d) un espace métrique et $A, A_1, A_2 \in M_X$, alors

1. Si A est fini, alors : $\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ totalement bornée $\Leftrightarrow \bar{A}$ est compact.
2. Si A est fini, alors $\chi(A) = 0$.
3. $A \subset A_1 \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(A_1)$
4. $\chi(A) = \chi(\bar{A}) = \chi(\text{conv}(A))$
5. $\chi(A_1 \cup A_2) = \max\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$
6. $\chi(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\chi(A_1), \chi(A_2)\}$
7. Si X est complet, $(F_n)_n$ une suite décroissante d'ensembles non vides, fermés et bornés telle que :

$$\lim_n \chi(F_n) = 0 \text{ alors } F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \text{ est un sous-ensemble non vide et compact.}$$

Proposition 1.4.1. Soit X un espace normé et $A, A_1, A_2 \in M_X$. Alors :

1. $\chi(A_1 + A_2) \leq \chi(A_1) + \chi(A_2)$.
2. $\chi(A + x) = \chi(A), \forall x \in X$.
3. $\chi(\lambda A) = \lambda \chi(A), \lambda \in \mathbb{T}$.
4. $\chi(A) = \chi(\text{con}(A))$ où $\text{con } A$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A .

1.4.3. Mesure de non-compacité de Kuratowski

Kuratowski fut le premier (1930) à introduire et étudier la notion de la mesure de non compacité

Définition 15.

La mesure de non-compacité de Kuratowski d'un ensemble borné $A \in M_X$, notée $\alpha(A)$, est définie par :

$$\alpha(A) = \inf \left\{ \forall \epsilon > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i, B_i \subset X, \text{diam}(B_i) < \epsilon, i = 1, \dots, n \right\},$$

où : $\text{diam } B_i$ désigne le diamètre de l'ensemble B_i .

$a(A) = \inf\{\epsilon > 0 : \text{admet une recouvrement fini par des ensemble de diamètre } < \epsilon\}$.
avec : B un sous ensemble de X et $B \in M_X$

On notera que, dans cette définition, l'expression $\text{diam } B_i < \epsilon$ peut être remplacée par $\text{diam } B_i < \epsilon$.

il est clair que $a(A) \leq \text{diam } A$ pour tout ensemble borné A dans M_X et que $a(A) = 0$ si A est fini. Les propriétés essentielles de la mesure de non-compactité de Kuratowski d'un ensemble borné sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 6.

Soit (X, d) un espace métrique et $A, A_1, A_2 \in M_X$, alors

1. $\alpha(A) = 0 \iff \bar{A}$ est compact.
2. $A \subset A_1 \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(A_1)$
3. $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$
4. $\alpha(A_1 \cup A_2) = \max\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$
5. $\alpha(A_1 \cap A_2) \leq \min\{\alpha(A_1), \alpha(A_2)\}$
6. Si X est complet, $(F_n)_n$ une suite décroissante d'ensembles non vides, fermés et bornés, telles que $\lim_n \alpha(F_n) = 0$, alors $F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ est un sous-ensemble non vide et compact.

Proposition 1.4.2.

Soit X un espace normé et $A, A_1, A_2 \in M_X$, alors :

1. $\alpha(A_1 + A_2) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$.
2. $\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall x \in X$.
3. $\alpha(\lambda A) = |\lambda|\alpha(A), \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
4. $\alpha(A) = \alpha(\text{conv}(A))$ où $\text{conv } A$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A .

Théorème 7.

Soit B la Boule unité $B(0,1)$ dans l'espace de Banach E , alors $\alpha(B) = \chi(B) = 0$ si E de dimension fini et $\alpha(B) = 2, \chi(B) = 1$ si E de dimension infini.

Théorème 8.

Soient $(X, (\|\cdot\|))$ un espace normé et A un sous ensemble borné de X , alors

$$\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A)$$

1.5. Mesure de non compacité sur les opérateurs

Dans cette partie on introduire quelques propriétés de la mesure de non compacité sur les opérateurs.

1.5.1. Mesure de non-compacité de Kuratowskii d'un opérateur

Définition 16.

Soient $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur continu et $\alpha(\cdot)$ est la mesure de non compacité de kuratowski dans X , pour tout $k > 0$, on dit que T est une contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A).$$

Soit le sous-ensemble borné A de $D(T)$, alors $\alpha(A) > 0$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X et :

$$\alpha(T(A)) < \alpha(A).$$

Théorème 9.

Soit X un espace de Banach et $T \in L(X)$, nous avons

1. $\alpha(T) = 0 \Leftrightarrow T$ est compact.
2. Si $T, S \in L(X)$, donc $\alpha(T, S) \leq \alpha(T)\alpha(S)$.
3. Si $K \in K(X)$, donc $\alpha(T + K) = \alpha(T)$.
4. Si B un sous ensemble borné de X , donc $\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$.

1.5.2. Mesure de non-compacité de Hausdorff d'un opérateur

Définition 17.

Soient $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur continu et $\chi(\cdot)$ la mesure de non compacité de Hausdorff dans X et $k > 0$, T est dit K -boule contraction si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ un sous-ensemble borné dans X et :

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A).$$

Théorème 10.

Soient X un espace de Banach et $T \in L(x)$, nous avons

1. $\frac{1}{2}\alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$.
2. $\chi(T) = 0 \Leftrightarrow T$ est compact.
3. Si $T, S \in \mathcal{L}(\chi)$, donc $\chi(TS) \leq \chi(T)\chi(S)$.
4. Si $K \in K(\chi)$, donc $\chi(T + k) = \chi(T)$.

Théorème 11.1. *Si $k < 1$, alors tous les opérateurs k -ensemble-contraction se condensent.*

2. *Chaque opérateur de condensation est 1-ensemble-contraction.*

Soit $T \in L(X)$, nous définissons $\alpha(T)$ par

$$\alpha(T) = \inf\{k \text{ tel que } T \text{ est } k\text{-ensemble-contraction}\}$$

et $\chi(T)$ par

$$\chi(T) = \inf\{k \text{ tel que } T \text{ est } k\text{-boule-contraction}\}$$

1.6. Quelques théorèmes de points fixes

1.6.1. Notation

On note par $L^1(I; E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : I \rightarrow E$ ayant la première dérivée absolument continue.

Définition 18.

Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T .

Théorème 12 (de Carathéodory).

L'application $f : I \times E \rightarrow E$ est dite de Carathéodory si,

1. $t \rightarrow f(t, u)$ est mesurable, $\forall u \in E$.
2. $u \rightarrow f(t, u)$ est continue, pour tout $t \in I$.
3. $\forall r > 0$, il existe une fonction $\Phi_r \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$, telle que $\forall u \in \mathbb{R}$ avec $\|u\| < r$:

$$\|f(t, u)\| \leq \Phi_r(t).$$

Alors l'application f est dite L^1 Carathéodory

Définition 19 (Principe de contraction de Banach).

Soit X un espace de Banach, et soit l'opérateur $F : X \rightarrow X$ un contractant, alors : F admet un point fixe unique i.e., :

$$\exists y^* \in X \text{ tel que } F(y^*) = y^*.$$

Théorème 13 (de Schaefer).

Soient X un espace de Banach et $F : X \rightarrow X$ un opérateur complètement continu. Alors F possède au moins un point fixe.

On dit que F est complètement continu si :

- i) $\forall b \in X \Rightarrow F(b)$ est relativement compacte,
- ii) Si l'ensemble $P = \{y \in X, \lambda F(y) = y, \lambda \in [0, 1]\}$ est borné.

Théorème 14 (Schauder).

Soit (E, d) un espace métrique complet et A une partie convexe fermée de E et soit $F : A \rightarrow A$, on a si l'ensemble $\{Fx : x \in A\}$ est relativement compact dans E . Alors F possède au moins un point fixe.

1.6.2. Théorème Alternative Non Linéaire de Leray-Schauder**Théorème 15.**

Soient Ω un ouvert borné d'un espace de Banach E et $f : \Omega \rightarrow E$ une application compacte. Alors

1. (i) f admet un point fixe dans Ω , ou
2. (ii) il existe $x \in \partial\Omega$ et $t \in [0, 1] : x = tf(x)$.

Définition 20.

L'application $T : C \subset E \rightarrow E$ est dit une α_E -contaction s'il existe une constante $k < 1$ positive telle que :

$$\alpha_E(T(W)) \leq k\alpha_E(W), \forall W \text{ fermé et borné.}$$

Théorème 16 (Mönch 1980).

Soit Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E telle que $0 \in \Omega$, et soit $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une application continue. Si l'implication

$$V = \text{Conv } T(v) \text{ ou } V = T(v) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(v) = 0 \quad (1.6.1)$$

est vérifiée pour tout sous-ensemble V de Ω , où α est une mesure de Kuratowski, alors T admet un point fixe dans Ω .

Preuve. On définit une suite $\{y_n\}$ par : $y_0 = 0$, et $y_{n+1} = T(y_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$Y = \{y_n; n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Ainsi

$$Y = T(Y) \cup \{0\},$$

d'après (2.5.1), on déduit que

$$\alpha(Y) = 0,$$

donc Y est relativement compact dans Ω .

Soit Z l'ensemble de tous les points limites de $\{y_n\}$. Il est clair que $Z = T(Z)$. On pose

$$R(X) = \text{Conv } T(X)$$

pour tout $X \subset \Omega$, et soit

$$D = \{X \subseteq \Omega \text{ tel que } Z \subset X \text{ et } R(X) \subset X\}.$$

Ainsi, Il est clair que $\Omega \in D$. On pose

$$V = \bigcap_{X \in D} X. \text{ Ainsi } Z \subset V,$$

V est un non vide et

$$Z = T(Z) \subset R(Z) \subset R(v),$$

puisque

$$R(v) \subset R(X) \subset X, \quad \forall X \subset D$$

donc

$$R(v) \subset \bigcap_{X \in D} X = V$$

done $V \in D$. De plus,

$$R(R(v)) \subset R(v)$$

alors $R(v) \in D$. Par conséquent, $V = R(v)$ (car ; v est plus petit ensemble de D) i.c.

$$V = \text{Conv } T(v)$$

De (2.5.1), implique que \bar{V} est un sous-ensemble compact de Ω .

D'après le théorème de Schauder 14 sur l'application $T|_{\bar{V}}$, on conclut que T admet un point fixe dans $\bar{V} \in \Omega$. ■

1.6.3. Théorème de Darbo

Théorème 17 (Darbo-sadovskii).

Soit Ω un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de banach E et soit l'application continue $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une α_E contraction alors T admet au moins un point fixe dans Ω

Théorème 18 (Darbo-généralisé).

Soient Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E et $T : \Omega \rightarrow \Omega$ est une Application continue et μ est une mesure de non-compactité définie dans E . Supposons qu'il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que

$$\mu(TX) \leq k\mu(X), \quad (1.6.2)$$

pour tout sous-ensemble non vide de Ω . Alors T admet un point fixe dans Ω .

Démonstration. On considère une suite (Ω_n) décroissante et définie par :

$$\Omega_0 = \Omega \text{ et } \Omega_n = \text{Conv} T \Omega_{n-1}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

S'il existe un nombre naturel n_0 tel que $\mu(\Omega_{n_0}) = 0$, alors Ω_{n_0} est relativement compact et puisque $T\Omega_{n_0} \subseteq \Omega_{n_0}$.

Donc le théorème de Schauder 14 implique que T admet un point fixe.

D'autre part, supposons que $\mu(\Omega_n) > 0$ pour tout $n \geq 0$. En utilisant (3.0.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_{n+1}) &= \mu(\text{Conv} T \Omega_n) \\ &= \mu(T\Omega_n) \\ &\leq k\mu(\Omega_n). \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Puisque $k < 1$, alors

$$\mu(\Omega_{n+1}) < \mu(\Omega_n), \quad \forall n \geq 0$$

Par conséquent, $\{\mu(\Omega_n)\}$ est une suite décroissante des nombres réels positifs.

Alors, il existe $r > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = r \quad (1.6.4)$$

Donc, d'après (3.0.2) on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k\mu(\Omega_n),$$

alors

$$0 \leq r \leq kr$$

implique que $r = 0$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = 0$$

Maintenant, puisque

$$\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \text{ ct } T\Omega_n \subseteq \Omega_n.$$

D'après la propriété 6 de mesure de non-compacité, nous concluons que $\Omega_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ est un sous-ensemble non vide, fermé, convexe de Ω et invariant sous l'opérateur T , et donc il appartient à $\ker \mu$.

Par conséquent, d'après le théorème de Schauder 2.1.1, T admet un point fixe dans Ω . ■

Lemme 1.6.1.

Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach $C(I, E)$ et soit G une fonction continue de $I \times I$ et $f : I \times E \rightarrow E$ une fonction qui satisfait les condition de Carathéodory et il existe $p \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $t \in I$ et tout sous ensemble borné $B \subset E$ an a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B); I_{t,h} = [t-h, t] \cap I$$

si V un sous ensemble équicontinue de D , Alors

$$\alpha\left(\left\{\int_I G(t,s)f(s, y(s))ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_I \|G(t,s)\|p(s)\alpha(V(s))ds$$

Généralité sur les équations différentielles d'ordres fractionnaires

Chapitre
2

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions sur l'intégration et la dérivation fractionnaire, et on introduire les équations différentielles fractionnaires.

2.1. Calcul fractionnaire

Fonction utile

Dans cette partie, nous présentons les définitions de les fonctions : Gamma, Bêta et Mittag-Leffter, qui seront utilisées dans la suite dans ce mémoire, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications. [2.1.1](#)

2.1.1. La fonction Gamma

En mathématiques, la fonction Gamma est une fonction complexe elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe.

Définition 21.

La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0). \quad (2.1.1)$$

Lemme 1.

Pour tout $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} 1. \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \\ 2. \Gamma(n) = (n - 1)! \\ 3. \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

2. il suffit d'appliquer 1 pour $x = n$.

3.

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{2n-5}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\dots(1)}{2^n(2n)(2n-2)(2n-4)\dots(2)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}.\end{aligned}$$

■

Remarque

La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entières est par la formule $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, la fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatifs entières.

Exemple 1.

1. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$. Et aussi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2.

$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2} + 1\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

3.

$$\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2} + 1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{\frac{-3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}.$$

FIGURE 2.1 – Le graphe de la fonction Gamma Γ .**Proposition 1.**

Pour tout $p > 0$, on a :

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}. \quad (2.1.3)$$

Preuve. Considérons la fonction

$$f(n, p) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx.$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, p) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \\ &= \Gamma(p). \end{aligned}$$

D'autre part, par l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} f(n, p) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx \\ &= \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^p}{p} \right]_0^n + \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx. \end{aligned}$$

encore fois, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} f(n, p) &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx \\ &= \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^n + \frac{(n-1)}{np(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1} dx. \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2 p(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned} f(n, p) &= \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)\dots[p+(n-1)]} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+(n-1)} dx \\ &= \frac{n!}{n^n p(p+1)\dots[p+(n-1)]} \left[\frac{x^{n+p}}{n+p} \right]_0^n \\ &= \frac{n! n^p}{p(p+1)\dots(n+p)} \end{aligned}$$

■

2.1.2. La fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale.

Définition 22.

La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (p, q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0). \quad (2.1.4)$$

Remarque

La fonction Bêta est symétrique i.e.,

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (2.1.5)$$

Proposition 2.

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(p) > 0; \operatorname{Re}(q) > 0.$$

Preuve. Soit $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy \right) \\ &= \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy, \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x + y} \end{cases} \implies \begin{cases} x = uv \\ y = u(1 - v). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \iint_D (uv)^{p-1}(u-uv)^{q-1}e^{-u}u \cdot dudv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}du \left(\int_0^1 (uv)^{p-1}(u-uv)^{q-1}udv \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u}du \left(\int_0^1 u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \right) \\ &= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \\ &= \Gamma(p+q)B(p, q). \end{aligned}$$

■

2.1.3. La fonction Mittag-Leffter

La fonction Mittag-Leffter est une généralisation directe de la fonction exponentielle e^x à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β , et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition 23.

La fonction de Mittag-Leffter est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (2.1.6)$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.1.7)$$

Exemple 2.

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simple

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \\ E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}. \end{aligned}$$

Théorème 19.

Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \left(\frac{d}{dz} \right)^n E_n(\lambda x^n) = \lambda E_n(\lambda x^n), \\ 2. \left(\frac{d}{dz} \right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda z^n) = \lambda z^{\beta-n-1} E_n(\lambda z^n). \end{array} \right. \quad (2.1.8)$$

2.2. Integrale fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel au sens de Riemann-Liouville.

Définition 24.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} I^{(2)}f(x) &= \int_a^x I^{(1)}f(u)du, \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)dt \right) du, \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du \right) f(t)dt, \\ &= \int_a^x (x-t)f(t)dt. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

En générale la $n^{\text{ème}}$ itération de l'opération I peut s'écrire

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(x) &= \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n, \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^\infty (x-t)^{(n-1)} f(t)dt. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Pour tout entier n .

2.2.1. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 25.

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre ($\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > 0$) est définie par

$$I_{a^+}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt. \quad (2.2.4)$$

De même manière, on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre ($\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0$) par

$$I_{b-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt. \quad (2.2.5)$$

Théorème 20.

Si $f \in L^1([a, b])$, alors $(I_{a+}^\alpha f)$ existe pour tout $\alpha > 0$ et $(I_{a+}^\alpha f) \in L^1([a, b])$.

Proposition 3.

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in L^2([a, b])$. Alors

$$\begin{cases} 1. I_{a+}^{(\alpha)} [I_{a+}^{(\beta)} f(x)] = I_{a+}^{(\alpha+\beta)} f(x). \\ 2. I_{a+}^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} \\ 3. \frac{d}{dx} (I_{a+}^\alpha f(x)) = I_{a+}^{\alpha-1} f(x). \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Preuve. 1. D'après la définition, on a

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha [I_{a+}^\beta f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} I_{a+}^\beta (f(y)) dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^y (y-t)^{\beta-1} f(t) dt \right) dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} dy \int_a^y (y-t)^{\beta-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) dt \left(\int_t^x (x-y)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} dy \right). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} y = t + (x-t)\tau \\ dy = (x-t)d\tau \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha [I_{a+}^\beta f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) dt \left(\int_0^1 ((x-t) - (x-t)\tau)^{\alpha-1} ((x-t)\tau)^{\beta-1} (x-t) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\ &= B(\alpha, \beta) \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt, \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\ &= I_{a+}^{(\alpha+\beta)} f(x). \end{aligned}$$

2. On a

$$I_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt,$$

On pose

$$\begin{cases} t = a + (x-a)y, & y \in [0, 1] \\ dt = (x-a)dy \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-a + (x-a)y)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta-1} y^{\beta-1} (x-a) dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-a)^{\alpha+\beta-1} (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (I_{a^+}^{\alpha} f(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx} ((x-t)^{\alpha-1}) f(t) dt \\ &= \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= I_{a^+}^{\alpha-1} f(x) \end{aligned}$$

■

2.3. Dérivation fractionnaire

Dans littérature il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications de La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo.

2.3.1. Dérivées fractionnaires de type Riemann-Liouville

Définition 26.

Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α

est définie par

$$D_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt,$$

Où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ la partie entière de α .

Définition 27.

Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :

$$D_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt$$

Lemme 2.

Si $f \in L^1([a; b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour tout $\alpha > 0$ et $I_a^\alpha f \in L^1([a; b])$.

Proposition 4.

Soit $\alpha > 0, \beta > 0, n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes :

1. Si $f(t) \in L_p([a, b]), (1 \leq p < \infty)$, alors

$$(D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f)(t) = f(t), \text{ et } (D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f)(t) = f(t)$$

2. Si $\alpha > \beta$, et $f(t) \in L_p([a, b]), (1 \leq p < \infty)$, alors

$$(D_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha f)(t) = (I_{a^+}^{\alpha-\beta} f)(t), \text{ et } (D_{b^-}^\beta I_{b^-}^\alpha f)(t) = (I_{b^-}^{\alpha-\beta} f)(t),$$

3. Si $f(t) \in C^q([a, b]), q = [\alpha + \beta] + 1$, alors

$$(D_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\beta f)(t) = (D_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(t), \text{ et } (D_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\beta f)(t) = (D_{b^-}^{\alpha+\beta} f)(t),$$

4. Si $f(t) \in L^1([a, b]), (I_{a^+}^{n-\alpha} f) \in AC^n([a, b])$, alors

$$(I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{K=1}^n \frac{(I_{a^+}^{n-\alpha} f)^{(n-K)}(a)}{\Gamma(\alpha - K + 1)} (t-a)^K$$

$$(I_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{K=1}^n \frac{(-1)^{n-K} (I_{b^-}^{n-\alpha} f)^{(n-K)}(b)}{\Gamma(\alpha - K + 1)} (b-t)^K$$

Remarque

Pour $\alpha = n, n \in \mathbb{N}$ l'opérateur \mathcal{D}^α donne le même résultat que la dérivée usuelle pour les ordres entières, tel que :

$$\begin{cases} 1. D_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x). \\ 2. D_{b^-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x). \end{cases} \tag{2.3.1}$$

2.3.2. Dérivées fractionnaires de type Caputo

On se donne une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de type Caputo.

Définition 28.1. Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :

$${}^C D_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt \quad (2.3.2)$$

2. Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :

$${}^C D_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt \quad (2.3.3)$$

Proposition 2.3.1. Soit $\alpha > 0; \beta > 0; n = [\alpha] + 1$; on a les propriétés suivantes :

i) Si $f(x) \in C^p([a; b])$, $p = [\alpha + \beta] + 1$, alors :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha {}^C D_{a^+}^\beta f)(x) = ({}^C D_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x) \text{ et } ({}^C D_{b^-}^\alpha {}^C D_{b^-}^\beta f)(x) = ({}^C D_{b^-}^{\alpha+\beta} f)(x). \quad (2.3.4)$$

ii) Si $f(x) \in C^n([a; b])$ ou $f(x) \in AC^n([a; b])$, alors :

$$({}^I_{a^+}^\alpha {}^C D_{a^+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (2.3.5)$$

$$({}^I_{b^-}^\alpha {}^C D_{b^-}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{(n-k)} f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k. \quad (2.3.6)$$

Théorème 21.

la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche ${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha$ et à droite ${}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\operatorname{Re} \epsilon(\alpha) > 0)$ avec $n = [\alpha] + 1$ est définie par :

$$\forall x \in [a, b], {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} (\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt, \quad (2.3.7)$$

et

$$\forall x \in [a, b], {}^C D_{b^-}^\alpha f(x) = (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} (D^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt$$

Cas particulier : Si $\alpha \in [0, 1]$ alors $n = 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo est

$${}^C D_{a^+}^\alpha f(x) = I_{a^+}^{1-\alpha} (Df)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(-\alpha)} f^{(1)}(t) dt.$$

et

$${}^C D_{b^-}^\alpha f(x) = (-1) I_{b^-}^{1-\alpha} (Df)(x) = \frac{(-1)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{(-\alpha)} f^{(1)}(t) dt.$$

Lemme 3.

soit $\alpha \in \mathbb{C}(\operatorname{Re} \epsilon(\alpha) > 0)$ et $n = [\alpha] + 1$ tel que ${}^C D^\alpha$ et D^α existent Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ alors :

$${}^C \mathcal{D}^\alpha f(x) = \mathcal{D}^\alpha f(x).$$

Remarque

Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivée classique $\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$\begin{cases} {}^C D_{a^+}^n f(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) \\ {}^C D_{b^-}^n f(x) = (-1)^n (f^{(n)}(x) - f^{(n)}(b)). \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Lemme 4.

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ si $f \in AC^n([a, b])$, alors

- $\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C D_{a^+}^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$
- $\lim_{\alpha \rightarrow n^+} {}^C D_{b^-}^\alpha f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t)$.

Exemple 2.3.1.

i) La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$${}^C D^\alpha C = 0.$$

ii) La dérivée de $f(x) = (x - a)^{\beta-1}$ au sens de Caputo. Soit α non entier et $0 \leq n - 1 \leq \alpha \leq n$ et $\beta - 1 > 0$, alors on a :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha f(t))(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} (D^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt.$$

et

$$\frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta-1} = (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)(x-a)^{\beta-n-1}$$

posons

$$(t-a) = s(x-a) \text{ et } s \in [0; 1]$$

$$dt = (x-a)ds$$

$$\begin{aligned} ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \beta(n-\alpha, \beta-n) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

le même résultat avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

2.4. Comparaison entre la dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction constante est donnée par :

$${}_a D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \quad {}_t D_b^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{-\alpha},$$

mais la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre p d'une fonction constante est nulle,

$${}_a^C D_t^p C = 0$$

2.5. Propriétés des dérivées fractionnaires

Théorème 22.

(Linéarité) L'opérateur de dérivé fractionnaire est un opérateur linéaire

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t), \quad t > 0.$$

Démonstration. Par exemple, pour l'opérateur de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre p ($k-1 \leq p < k$)

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\mu}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t (t-\tau)^{k-p-1} g(\tau) d\tau \\ &= \lambda {}_0 D_t^p f(t) + \mu {}_0 D_t^p g(t). \end{aligned}$$

Définition 29.

(Règle de Leibniz)

On sait que de la règle de Leibniz pour calculer la dérivée n -ième du produit de deux fonctions $f(t), g(t)$ est donné par la relation suivante :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t). \quad (2.5.1)$$

En remplaçant l'entier n par un paramètre réel p , dans le membre à droite de (2.5.1), on obtient la formule :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{(p-k)}g(t) - R_n^p, \quad n \geq p+1, \quad (2.5.2)$$

où

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi) (\tau-\xi)^n d\xi \quad (2.5.3)$$

telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^p(t) = 0$$

Alors, on a une généralisation de la règle de Leibniz d'ordres fractionnaires.

Définition 30 (Intégration par parties).

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite.

Corollaire 1.

Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n-1 < \alpha \leq n$. Soient $f(t) \in C^n([a, b])$ et $g(t) \in C^n([a, b])$, et Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) D_a^\alpha + g(t) dt &= \int_a^b D_{b-}^\alpha f(t) g(t) dt \\ \int_a^b f(t) D_{b-}^\alpha g(t) dt &= \int_a^b D_a^\alpha + f(t) g(t) dt \end{aligned}$$

2.6. Équations différentielles fractionnaires

Dans cette section on va discuter sur les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 31.

Soient $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad (2.6.1)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville, où les conditions initiales pour ce type d'EDF est de la forme

$$D^{\alpha-k} y(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad \lim_{t \rightarrow 0} I^{n-\alpha} y(t) = b_n \quad (2.6.2)$$

De la même manière

$${}^c \mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad (2.6.3)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas, les conditions est de cette forme

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.6.4)$$

L'utilisation des conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires (2.6.1) et (2.6.3) nous assure l'unicité de solutions de l'EDF correspondante, qu'on va prouver dans les théorèmes suivants.

2.7. Équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

Dans cette on présente les types problèmes sous formes d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites dont la dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Lemme 5.

Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $y \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville :

$$D_{0+}^{\alpha} y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \quad (2.7.1)$$

Admet une solution unique

$$y(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n}$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \dots, n$.

Preuve. Soit $\alpha > 0$, on a :

$$D_{0+}^{\alpha} t^{\alpha-m} = 0, \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.2)$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (2.7.1) admet une solution particulière, comme

$$y(t) = C_m t^{\alpha-m}, \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.3)$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation (2.7.1) est donnée comme une somme des solutions particulières (2.7.3), C-à-d.

$$y(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n} \quad (2.7.4)$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \dots, n$. ■

Lemme 6.

Supposons que

$$y \in C(0, 1) \cap L(0, 1), \quad \text{et } D_{0+}^{\alpha} y \in C(0, 1) \cap L(0, 1). \quad (2.7.5)$$

Alors :

$$I_{0+}^n D_{0+}^{\alpha} y(t) = y(t) + C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} + \dots + C_n t^{\alpha-n} \quad (2.7.6)$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \dots, n$.

Démonstration. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $y \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$ on a

$$\begin{aligned} I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) &= y(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(I_{0+}^{n-\alpha} y^{(n-k)})(0)}{\Gamma(\alpha - k + 1)}, \\ &= y(t) - \left[\frac{(I_{0+}^{n-\alpha} y^{(n-1)})(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{(-1)} + \frac{(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} y^{(n-2)})(0)}{\Gamma(\alpha - 1)} t^{(n-2)} + \dots + \frac{(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} y)(0)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} t^{(\alpha-n)} \right]. \end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{(I_{n+}^{n-n}(n-m)(0))}{1[(\alpha - m + 1)]} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 1, 2, \dots, n$, on trouve l'égalité (2.7.6). ■

Lemme 7.

Soient $1 < \alpha < 2$ et $z \in C([0, 1])$. Alors l'unique solution de problème au limite

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} y(t) + z(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (2.7.7)$$

est donné par

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) z(s) ds \quad (2.7.8)$$

tel que :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{t[1-s]^{-1} - (t-s)^{0-1}}{\Gamma(\alpha)^{-1}}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (2.7.9)$$

Preuve. En appliquant I_{0+}^{α} , sur l'équation (2.7.7), on obtient :

$$I_{0+}^{\alpha} [D_{0+}^{\alpha} y(t) + z(t)] = 0 \iff I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} y(t) + I_{0+}^{\alpha} z(t) = 0.$$

D'après le lemme 6 pour $1 < \alpha \leq 2$ ($n = [\alpha] + 1 = 2$), on a :

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} y(t) = y(t) + C_1 t^{0-1} + C_2 t^{0-2}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

donc

$$y(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + I_{0+}^{\alpha} z(t) = 0$$

ce qui implique

$$y(t) = -I_{0+}^{\alpha} z(t) - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2}$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (2.7.7), donne par :

$$y(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2} \quad (2.7.10)$$

Les conditions aux limites implique que

$$\begin{cases} y(0) = 0 \implies C_2 = 0, \\ y(1) = 0 \implies 0 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds - C_1 \implies C_1 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds. \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (2.7.10), équivalente à

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}] z(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{([1-s]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} z(s) ds + \int_t^1 \frac{t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} z(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t, s) z(s) ds. \end{aligned}$$

■

2.8. Equation différentielle fractionnaire de type Caputo

Dans cette on présente les types problèmes sous formes d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites dont la dérivées fractionnaire au sens de Caputo.

2.8.1. Existence de solution

Lemme 8.

Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $y \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo

$${}^C D_{0^+}^\alpha y(t) = 0 \quad (2.8.1)$$

Admet une solution unique

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1} \quad (2.8.2)$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Preuve. Soit $a > 0$, on a :

$${}^C D_{0^+}^\alpha y(t) = 0, \text{ pour } m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (2.8.1), admet une solution particulière, comme

$$y(t) = C_m t^m, \text{ pour } m = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.8.3)$$

où $C_m \in \mathbb{R}$. Donc la solution générale de (2.8.1), donnée comme une somme des solutions particulières (2.8.3), c-à-d,

$$y(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

■

Lemme 9.

Supposons que $y \in C^n([0, 1])$. Alors :

$$I^{\alpha+C} D^\alpha y(t) = y(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{n-1} t^{n-1} \quad (2.8.4)$$

Où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Preuve. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $y \in C^n([0, 1])$ on a

$$\begin{aligned} I^{\alpha+C} D^\alpha y(t) &= y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k, \\ &= y(t) - \left[y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2} t^2 + \dots + \frac{y^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{y^{(m)}(0)}{m!} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$. ou trouve facilement l'égalité (2.8.4)

■

Lemme 10.

Soient $1 < a \leq 2$ et $y \in C([0, 1])$. Alors l'unique solution de problème aux limites

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha y(t) = z(t) & 0 < t < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.8.5)$$

est donné par :

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) z(s) ds, \quad (2.8.6)$$

tel que

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1} + (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (2.8.7)$$

Preuve. En appliquant I_{0+}^α , sur l'équation (2.8.5), on obtient

$$I_{0+}^\alpha [D_{0+}^\alpha y(t) - z(t)] = 0 \iff I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha y(t) - I_{0+}^\alpha z(t) = 0$$

D'après le lemme 1.5-5, pour $1 < a \leq 2$ ($n = [a] + 1 = 2$), on a :

$$I_{0+}^{\alpha+1} D_{0+}^\alpha y(t) = y(t) + C_0 + C_1 t, \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Donc

$$y(t) = C_0 + C_1 t - L_{0+}^\alpha z(t) = 0$$

Ce qui implique

$$y(t) = I_{0+}^\alpha z(t) - C_0 - C_1 t$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (2.8.5), donne par

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds - C_0 - C_1 t \quad (2.8.8)$$

Les conditions aux limites implique que :

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 0 \implies C_0 + C_1 = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \implies C_0 + 2C_1 = (I_{0+}^\alpha z)(1) + (I_{0+}^\alpha z)'(1) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} C_0 = -(I_{0+}^\alpha z)(1) + (I_{0+}^\alpha z)'(1) \\ \quad = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds \\ C_1 = (I_{0+}^\alpha z)(1) + (I_{0+}^\alpha z)'(1) \\ \quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds. \end{cases}$$

L'équation intégral-différentielle (2.8.5), équivalente à

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds \\
 &\quad - \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} z(s) ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} z(s) ds \\
 &= \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] z(s) ds \\
 &\quad + \int_t^1 \left[\frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] z(s) ds \\
 &= \int_0^1 G(t,s) z(s) ds.
 \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.

Soient $r = n \in \mathbb{N}$ ou $r \in \mathbb{C}$ tel que $n-1 < r < n$ et $g(t) \in L[a, b]$, si $a(t) \in L^\infty[a, b]$ est borné dans $[a, b]$, alors le problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires suivant d'ordre r et $b_k \in \mathbb{C}$

$$D^r y(t) = a(t)y(t) + g(t), \quad D_{+a}^{r-k} y(a+) = b_k$$

admet une unique solution $y(t)$ dans l'espace $L^r(a, b)$ on pratique, il existe une unique solution $y(t)$ dans l'espace $L^r(a, b)$ pour le problème :

$$D^r y(t) = \lambda(t-a)^\beta y(t) + g(t), \quad D_{+a}^{r-k} y(a+) = b_k \quad \lambda, \beta \in \mathbb{C}$$

Corollaire 3.

Soient $r = 1, 0 < r < 1$ et $b_0 \in \mathbb{C}$ et $g(t) \in L(a, b)$, si $a(t) \in L^\infty[a, b]$ est borné dans $[a, b]$, alors le problème de Cauchy

$$D^r y(t) = a(t)y(t) + g(t), \quad I_{+a}^{1-r} y(a+) = b_0$$

et le problème de Cauchy

$$D^r y(t) = a(t)y(t) + g(t), \quad \lim_{t \rightarrow a} [(t-a)^{1-r} y(t)] = c$$

admet une unique solution $y(t)$ dans l'espace $L^r(a, b)$.

Existence et unicité de la solution de EDFs via la mesure de non compacité

Dans ce chapitre, on s'intéresse au résultat d'existence de solutions pour le problème aux limites

$${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in J = [0, T], \quad 1 < \alpha < 2, \quad (3.0.1)$$

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T. \quad (3.0.2)$$

où ${}^c D^\alpha$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times E \rightarrow E$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard, $y_0, y_T \in E$ et E est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$. Le résultat de ce chapitre est basé sur le Théorème de point fixe de Mönch 1.6.1 combiné avec la mesure de non compacité de Kuratowski.

3.1. Préliminaires

Dans cette section, nous rassemblons quelques définitions de la dérivation et intégration d'ordre fractionnaire. On note par $C(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \rightarrow E$, avec la norme supremum habituelle

$$\|y\|_\infty = \sup_{t \in J} \|y(t)\|$$

Soit $L^1(J, E)$ est l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : J \rightarrow E$ qui sont Bochner intégrables, muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_J \|y(t)\| dt.$$

$AC^1(J, E)$ désigne l'espace des fonctions $y : J \rightarrow E$, dont la dérivée première est absolument continue. De plus, pour un ensemble donné V de fonctions $v : J \rightarrow E$, désignons par

$$V(t) = \{v(t) : v \in V, t \in J\}.$$

et

$$V(J) = \{v(t) : v \in V, t \in J\}.$$

3.2. Résultat d'existence

Premièrement, on va définir ce qu'est une solution du problème aux limites (3.0.1)(3.0.2)

Définition 32.

une fonction $y \in AC(I, E)$ est dite une solution du problème (3.0.1)(3.0.2) si y satisfait l'équation

$${}^c D^r y(t) = f(t, y)$$

sur I avec les conditions $y(0) = y_0$ $y(T) = y_T$.

Lemme 11.

Soit $1 < r < 2$ et $h : I \rightarrow E$ une fonction continue. Une fonction y est dite solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t, s)h(s)ds \quad (3.2.1)$$

où

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)y_0 + \frac{t}{T}y_T$$

et

$$G(t, s) = \frac{1}{T(r)} \begin{cases} (t-s)^{r-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{r-1} & 0 \leq s \leq t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1} & t \leq s \leq T \end{cases}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites

$${}^c D^r y(t) = h(t), t \in J \quad (3.2.2)$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T \quad (3.2.3)$$

Preuve. On applique l'opérateur I^α à l'équation (3.2.2) et (3.2.3), on trouve

$$\begin{aligned} y(t) &= I_a^\alpha h(t) + c_0 + c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 t, \end{aligned}$$

pour certaines constantes $c_0, c_1 \in E$, les conditions (3.2.3) donnent

$$c_0 = y_0$$

Parce que

$$y_0 = y(0) = \mathbf{0} + c_0 + c_1(\mathbf{0}),$$

$$y(0) = c_0,$$

et

$$c_1 = \frac{1}{T}y_T - \frac{1}{T}y_0 - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Parce que

$$\begin{aligned}
 y_T = y(T) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 T \\
 y_T &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + y_0 + c_1 T, \\
 c_1 T &= y_T - y_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \\
 c_1 &= \frac{1}{T} y_T - \frac{1}{T} y_0 - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds.
 \end{aligned}$$

Ensuite, la solution de (3.2.2)-(3.2.3) est

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + y_0 + \left(\frac{1}{T} y_T - \frac{1}{T} y_0 - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right) t, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + y_0 + \frac{t}{T} y_T - \frac{t}{T} y_0 - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \left(1 - \frac{t}{T} \right) y_0 + \frac{t}{T} y_T, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^t (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_t^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
 &\quad + \left(1 - \frac{t}{T} \right) y_0 + \frac{t}{T} y_T, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T} (T-s)^{\alpha-1} \right] h(s) ds - \frac{t}{T} y_T \int_t^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right] \\
 &\quad + \left(1 - \frac{t}{T} \right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.
 \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons (3.2.1). ■

Lemme 12.

Le problème aux limites (2.1)-(2.2) a une solution y , si et seulement si y satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) ds,$$

où

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{T} \right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

Il est évident que $G(t,s)$ est continue sur $[0, T] \times [0, T]$.

Noton que

$$G^* = \sup\{\|G(t,s)\|, (t,s) \in J \times J\}.$$

La fonction g est continue sur J , donc il existe $g^* = \sup \|g(t)\|$. Pour établir notre résultat principal concernant l'existence de solutions de (3.2.2)-(3.2.3), nous donnons des conditions sur les fonctions impliquées dans ce problème.

Nous supposons que :

(H1) $f : J \times E \rightarrow E$ satisfait aux conditions de Carathéodory.

(H2) Il existe $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$, de telle sorte que

$$\|f(t, y)\| \leq p(t)\|y\|, \text{ pour } t \in J \text{ et chaque } y \in E.$$

(H3) Pour chaque $t \in J$ et chaque borné $B \subset E$ nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \alpha(f(j_{i,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B), \quad I_{t,h} = [t-h, t] \cap J$$

Théorème 23.

Supposons que les hypothèses (H1)-(H3) sont vérifiées. Si

$$G^* \int_0^T p(s)ds < 1, \tag{3.2.4}$$

Alors, le problème aux limites (3.0.1)(3.0.2) admet au moins une solution.

Preuve. On transforme le problème (3.0.1)-(3.0.2) en un problème au point fixe, en considérant l'opérateur

$$N : C(I, E) \rightarrow C(I, E)$$

$$y \rightarrow (Ny)(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)f(s, y(s))ds$$

Les points fixes de N sont des solutions du problème (3.0.1)(3.0.2) .

Soit :

$$R \geq \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s)ds} \tag{3.2.5}$$

et on considère l'ensemble :

$$D_R = \{y \in C(I, E), \|y\|_\infty \leq R\}$$

D_R est fermé, borné et convexe.

Afin de prouver l'existence des points fixes de N , on doit montrer que N satisfait les hypothèses du théorème 15. La preuve se fait en trois étapes :

étape 1 : On montre que N est Continue

Soit $\{y_n\}$ une suite telle que :

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \text{ dans } C([0, T], E)$$

Donc : $\forall t \in I$, on a

$$\begin{aligned} \|(N_{y_n})(t) - (Ny)(t)\| &= \left\| \int_0^T G(t,s) f(s, y_n(s)) ds - \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^T \|G(t,s)\| \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \sup \|G(L,S)\| \int_0^T \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq G^* \int_0^T \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds \end{aligned}$$

Comme f est de Carathéodory, on a f mesurable par rapport à y , donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(Ny_n)(t) - (Ny)(t)\| \leq G^* \int_0^T \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds.$$

Donc :

$$\|(Ny_n)(t) - (Ny)(t)\|_{n \rightarrow \infty} \longrightarrow 0.$$

D'où la continuité de N .

étape 2 : On montre que N est bien défini de D_R dans D_R , c'est à dire que $N(D) \subset D_R$ par l'hypothèse (H2) et la condition (3.2.5), alors pour tout $y \in D_R$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} \|N(T)\| &= \left\| g(t) + \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \|g(t)\| + \int_0^T \|G(t,s)\| \|f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \sup \|g(t)\| + \sup \|G(t,s)\| \int_0^T p(s) \|y(s)\| ds \\ &\leq g^* + G^* \int_0^T p(s) \|y\| ds \text{ (par } (H_2)) \\ &\leq g^* + RG^* \int_0^T p(s) ds \\ &\leq R \left(\text{car } R \geq \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s) ds} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\|N(T)\| \leq R.$$

C'est à dire,

$$(Ny)(t) \in D_R \Rightarrow N(D_R) \subset D_R$$

étape 3 : On montre que $N(D_R)$ est borné et équicontinu

Par l'étape 2, on a $N(D_R) = \{N(y) : y \in D_R\} \subset D_R$.

Donc $\forall y \in D_R$ on a $\|N(y)\|_\infty \leq R$, donc $N(D_R)$ est borné.

pour l'équicontinuité de $N(D_R)$, soit $t_1, t_2 \in I$, alors :

$$\|N(y)(t_2) - N(y)(t_1)\|_{t_1 \rightarrow t_2} \Rightarrow 0$$

Donc, $N(D_R)$ est équicontinue.

Maintenant, soit V un sous ensemble de D_R tel que

$$V \subset \overline{\text{conv}}(N(V) \cup \{0\})$$

V est borné et équicontinu.

En plus, la fonction $v \rightarrow v(t) = \alpha(V(t))$ est continue sur I .

Puisque g est continue sur I , elle est bornée sur I .

Donc l'ensemble $\{\overline{g(t)}; t \in I\}$ est compact.

En utilisant (H3), le lemme (1.6.1) et les propriétés de la mesure α , on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha(V(t)) \\ &< \alpha(N(V)(t) \cup \{0\}) \\ &\leq \alpha(N(V)(t)) \end{aligned}$$

$$\text{car } \alpha(N(V)(t) \cup \{0\}) = \max\{\alpha(N(V)(t)), \alpha(\{0\})\}$$

on a :

$$\begin{aligned} N(V)(t) &= \left\{ g(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V \right\} \\ &= \{g(t), t \in I\} + \left\{ \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha(N(V)(t)) &= \alpha\left(\{g(t), t \in I\} + \left\{ \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V \right\}\right) \\ \alpha(N(V)(t)) &\leq \alpha(\{g(t), t \in I\}) + \alpha\left(\left\{ \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V \right\}\right) \\ &\leq \alpha\left(\left\{ \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V \right\}\right) \\ &\leq \int_0^T \|G(t,s)\|p(s)v(s) ds \\ &\leq G^* \|v\|_\infty \int_0^T p(s) ds. \end{aligned}$$

Puisque on a $G^* \int_0^T p(s) ds < 1$, alors $\|v\|_\infty = 0$, c'est à dire $v(t) = 0 \forall t \in I$, i.e., $\alpha(V(t)) = 0$.

Donc $(V(t))$ est relativement compact dans E .

Par le théorème d'Aocoli-Arzelà, V est relativement compact dans D_R (car $V \subset D_R$ est borné et équicontinue).

Puisque toutes les hypothèses du théorème ?? sont satisfaites, l'application N admet par conséquent un point fixe qui est une solution du problème (3.0.1)-(3.0.2). ■

Exemple 3.2.1. Soit le problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = \frac{4}{5 + \sinh(t)} |y(t)|, t \in [0, 1], 1 < \alpha \leq 2 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (3.2.6)$$

On pose :

$$E = [0, +\infty[$$

et

$$f(t, x) = \frac{4}{5 + \sinh(t)} x, \quad (t, x) \in [0, 1] \times [0, +\infty[$$

(H1) (1) La fonction f , telle que

$$f(t, x) = \frac{4}{5 + \sinh(t)} x$$

est **mesurable** par rapport à $t \in [0, 1]$

Comme $t \rightarrow f(t, x)$ continue parce que est une somme et une multiplication de fonctions continues. Donc f est mesurable $\forall x \in E$.

(2) Il est claire que f est continue par rapport à x presque partout sur $[0, +\infty[$.

D'après (1) et (2) alors la fonction vérifient les conditions de **Carathéodory**.

(H2) est vérifiée, puisque

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\|_E &= \left| \frac{4}{5 + \sinh(t)} x \right| \\ &\leq |x| \left| \frac{4}{5 + \sinh(t)} \right| \\ &\leq \frac{4}{5 + \sinh(t)} |x| \\ &= p(t) \|x\|. \end{aligned}$$

(H3) D'après **(H2)**, on a

$$\|f(t, x)\|_E \leq \frac{4}{5 + \sinh(t)} \|x\|_E.$$

Soit B un sous ensemble borné dans $E = [0, +\infty[$ et $x \in B$

$$f(t, B) \subset \frac{4}{5 + \sinh(t)} B$$

Après avoir appliqué la deuxième propriété de la mesure de non compacité 2 et la définition 6, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mu(f(t, B)) &\leq \mu\left(\frac{4}{5 + \sinh(t)} B\right) \\ &\leq \left| \frac{4}{5 + \sinh(t)} \right| \mu(B), \end{aligned}$$

et comme $\frac{4}{5 + \sinh(t)}$ est positive pour chaque $t \in [0, 1]$. Alors

$$\mu(f(t, B)) \leq \frac{4}{5 + \sinh(t)} \mu(B).$$

Pour $T = 1$ nous trouvons

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1-s)^{\alpha-1} & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t(1-s)^{\alpha-1} & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Un calcul simple donne

$$G^* < \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.$$

La condition (3.2.4) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\begin{aligned} G^* \int_0^1 p(s) ds &< G^* \int_0^1 \frac{4}{5 + \sinh(s)} ds, \\ &< G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \sinh(s)} ds. \end{aligned}$$

On a pour chaque $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \sinh(t) &\leq 1.175 \\ G^* \int_0^1 \frac{1}{1 + \sinh(s)} ds &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{1 + 0} ds \\ &< \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Est satisfait pour chaque $\alpha \in]1, 2[$.

Alors d'après le Théorème 22, le problème (3.2.5) a une solution sur $[0, 1]$.

Conclusion

Dans ce travail, on fait l'objectif de cette étude sur l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire dans des espaces de Banach, en utilisant dans ce travail la technique de mesure de non-compacité combiné avec les théorèmes du point fixe et en particulier le théorème de Darbo et de Mönch.

Bibliographie

- [1] R.R.Akhmerov, et M.I.Kamenskii, Measure of noncompactness and condensing operators, birkhäuser verlag basel, 1992
- [2] J.M. Ayerbe ,T. Dominguez ,G. Lopez Acedo ,Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Springer Basel AG, 1997.
- [3] J. Banas s et M.Mursaleen, Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations , Springer India, 2014.
- [4] R. P. Agarwal,M. Meehan, D. O’regan, Fixed point theory and applications, Cambridge University Press.2001
- [5] A. Aghajani, J. Banas, & N. Sabzali, Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications, Bull. Belg. Math. Soc, 20, p.345-358, 2013.
- [6] H. Medjekal, existence et unicité de la solution d’une équation différentielle fractionnaire de temps infini dans un espace de Banach, Thèse doctorat en sciences, université de annaba 2015.
- [7] Anatoly A.Kilbas, Sergei A.Marzan, Cauchy Problem for DiØerential Equation with Caputo derivative, Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis, 2004.
- [8] J. Banaś, K. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach spaces, Lect. Notes Pure appl. Math., vol. 60, Dekker, New York, 1980.
- [9] N. Redjel, Quelques résultats de points fixes et applications, Mémoire de doctorat, Univ. Mentouri constantine 1, 2016.
- [10] CH. Belabbaci, Mesure de non compacité et spectre essentiel, thèse de doctorat LMD, université Laghouat, 2017.
- [11] S. BELADJOUZ, Mesure de non compacité et applications sur les EDOs mémoire Master, université de M’sila, 2017.
- [12] V. V. Subralmanyam, Elementary Fixed Point Theorems, Springer Nature Singapore, 2018.
- [13] T. HOUMOR, Analyse du chaos dans un système d équations différentielles fractionnaires, université Constantine 1, faculté des sciences exactes, 2014.
- [14] R.P. Agarwal,M. Meehan, D.O’Regan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Univ Press, 2004.

- [15] M. Benchohra, and J. E. Lazreg, Existence results for nonlinear implicit fractional differential equations, *Surv. Math. Appl.* 9, 2014.
- [16] S. Mehdi ,équations différentielles dans un espaces de banach ,Mémoire de Master, université de Tlemcen, 2012.
- [17] M. Nadir ,cours sur les équations intégrales, université de M sila, 2016.
- [18] M. Nadir, généralité sur les équations différentielles ordinaires, université de M sila, 2016.
- [19] R.P. Agarwal, M. Benchohra, D. Seba, on the application of measure of non compactness to the existence of solutions for fractional differential equations, 55, p. 221-230, 2009.

Abstract

The fixed point principle is very important to solving many nonlinear differential equations, in this work we study the existence and uniqueness results for certain classes of differential equations of fractional order of Caputo. These results are obtained by using Mönch's fixed point theorem and combined with kuratouskii's measure of non-compactness .

Keywords : Measure of non compactness, Fixed point theorem, fractional differential equations, Caputo fractional derivative.

Résumé

La theorie du point fixe est très important dans la résolution de nombreuses équations différentielles non linéaires, notre étude d'existence et de l'unicité nous présentons plusieurs résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Ces résultats ont été obtenus en utilisant le théorème du point fixe de Mönch en combinaison avec la mesure de non-compacité de kuratouskii.

Mot clés : Mesure de non compacité, Point fixe, Équations différentielles fractionnaire , existence de solutions, Dérivée fractionnaire de type caputo, intégral fractionnaire.

ملخص

يعتبر مبدأ النقطة الثابتة مهم جدا في حل العديد من المعادلات التفاضلية غير الخطية، خاصة في دراسة الوجود و الوحدانية. في هذه المذكرة نقدم العديد من نتائج الوجود لفئات معينة من المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية بمعنى كابوتو. حيث تم الحصول على هذه النتائج باستخدام نظرية النقطة الثابتة في مونغ جنبا الى جنب مع مقياس عدم التراص الخاص ب كوراتوسكي.

الكلمات المفتاحية : قياس عدم التراص، النقطة الثابتة، معادلات تفاضلية ذات رتبة كسرية، وجود حلول، المشتقة ذات رتبة كسرية من نوع كابوتو.