Table des matières

0.1 Introduction

L'équation aux dérivées partielles est un sujet aux multiples facettes crées pour décrire le comportement mécanique d'objets et d'autres phénomènes liés à la physique et aux problèmes d'évolution non linéaire.

L'étude des équations aux dérivées partielles non lineaires se trouve à l'interface de nombreux parobl̀emes scientifiques, en effet, la plupart des phénomènes de la physique ou des sciences de l'ingénieur sont non linéaires et une modélisation par des équations linéaires risque, dans certains cas, d'éffacer des évènements que les équations linéaires ne peuvent pas prendre en compte, leur comportement asymptotique profondément différent de celui des problèmes linéaires, qui rend la théorie difficile et qui conduit à faire appel à un arsenal mathématique très vaste.

L'interaction avec le reste de la mathématique se fait aussi en sens inverse, car un certain nombre de problèmes abstraits se traitent à l'aide d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

L'équation de *Koerteweg-deVries* "KDV" est une équation qui apparaît dans de très nombreux domaines de la physique, elle est la première EDP non linéaires connus pour montrer explicitement le comportement des ondes solitaire.

L'importance de cette équation est réside dans l'étude de plusieurs phénomènes dans diverses branches scientifiques.

Autrement dit, l'équation de "KDV" est un modèle mathématique pour les ondes en faible profondeur, c'est un exemple très connu d'équations aux dérivées partielles non linéaires dont on connait exactement les solutions.

Il y a un certain nombre de méthodes pour la construction de solutions aux équations de physique mathématique qui sont basées sur la réduction des équations originales à des équations dont les variables dépendantes moins et/ou indépendantes.

L'idée principale est réduire les EDPs à des équations ordinaires.

Dans ce travail on va rechercher la solution de l'équation de KDV de type "onde solitaire" et de type "auto similaire".

Le premier type de solutions est de forme "ondes", et le second type est de la forme "auto-similaire".

Nous avons calculé explicitement le premier type de solution, et nous avons essayer d'analyser et de rechercher le second type de solution.

Chapitre 1

Définitions et notions générales

Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques définitions et notions importantes nous les utiliserons dans le seconde et le dernier chapitre

1.1 Définition du problème

La plupart des phénomènes physiques, soit dans le domaine de la dynamique des fluides, d'éléctricité, de magnétisme, de la mécanique, de l'optique ou de flux de chaleur, peuvent être décrits de façon générale par les équations aux dérivées partielles "EDPs".

L'équation de KDV est une équation d'évolution dans une dimension d'éspace qui est nommée d'après les deux mathématiciens Néerlandais *Korteweg* et *DeVries*[7] .

L'équation de KDV a été dérivé pour décrire les ondes en eau peu profonde de grande langueur et de petite amplitude. Dans la dérivation, Korteweg et de Vries supposé que tout mouvement est uniforme dans la directionY(le long de la crête d'onde). Dans ce cas, l'élévation de la surface de l'onde, se propageant dans la direction X, est une fonction de la position X horizontale et de temps T .

En fonction des paramètres physiques, l'équation de KDV lit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial T}+\sqrt{gh}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{3}{2}\frac{\sqrt{gh}}{h}\eta\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\sqrt{gh}\left(\frac{1}{3}-\frac{\tau}{\rho g h^2}\right)\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}=0$$

oŭ h :la profondeur uniforme d'eau

g :l'accélération de la gravité

ρ :la densité

ι :la tension superficielle

$\frac{\tau}{\rho g h^2}$:le nombre de bond qui mesure la force relative de la tension superficielle et la force de gravité

L'équation de KDV peut être reformulée comme suit :

$$u_t+\alpha u u_x+u_{xxx}=0$$

Oŭ les indices dénotent les dérivées partielles.

le paramètre α peut être manipulée à n'importe quelle nombre réelle, les valeurs couramment utilisées sont $\alpha=\pm 1, \alpha=\pm 6$

Le terme u_t décrit l'évolution temporelle de propagation d'onde dans seule direction.

Le terme nonlinéaire $\alpha u u_x$ réprésente la profondeur d'onde, et le terme u_{xxx} réprésente la duffision de l'onde.

dans ce travail nous prenons $\alpha=-6$ donc l'équation devient :

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$$

cette équation est dite l'équation de KDV standard ou canonique[6].

1.2 Application et utilisation de l'équation de KDV

L'équation de KDV est une équation aux dérivées partielles non linéaire de troisième ordre comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad -6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Formulée pour la première fois dans le cadre d'une analyse des ondes en eaux peu profondes dans les canaux, par la suite on a trouvé qu'on peut impliquer cette équation dans une série de phénomènes physiques, en particulier ceux présentants des ondes de choc, des ondes progressives "travelling waves", et les solitons.

Certains phénomènes de physiques théoriques dans le domaine de la mécanique quantique sont expliqués à l'aide d'un modèle d'équation de KDV. Elle est utilisée dans la dynamique des fluides, l'aérodynamique, mécanique des milieux continus comme un modèle pour la formation d'onde de choc, les solitons, la turbulence, le comportement de la couche limite, et le transport de masse [3] .Elle est la première EDP non linéaire connus pour montrer explicitement le comportement des ondes solitaires,

Autrement dit l'équation de KDV décrit la propagation de surface d'onde dans un canal oŭ la longueur d'onde est grande devant la profondeur du canal [8] . Elle a été étudiée et appliquée pendant de nombreuses décennies.

1.3 Solution travelling waves

Définition[5.10] **:**

La solution travelling wave des équations déffirentielle partielle est une onde qui ne change pas avec le temps de la forme :

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

avec x la variable spatiale, t la variable temporale, et c la vitesse constante de propagation du profil f.

La fonction f est satisfaire certaines conditions aux limites en $x = \pm\infty$

$$\begin{cases} f(+\infty, t) = c_1 \\ f(-\infty, t) = c_2 \end{cases}$$

oŭ c_1, c_2 sont des constantes.

Dans ce type de solution on cherche le profil f et la vitesse c.

Exemple 01 [10] **:**

Soit l'équation de burgers

$$u_t + uu_x = Du_{xx}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(+\infty, t) = u_1 \\ u(-\infty, t) = u_2 \end{cases}$$

introduction de la forme travelling wave $u = f(x - ct) = f(\zeta)$ dans l'équation (1)

on a $u_t = -cf_t$

$u_x = f_\zeta$

$u_{xx} = f_{\zeta\zeta}$

alors l'équation (1) devient

$$-cf_t + ff_\zeta = Df_{\zeta\zeta} \tag{1.1}$$

il faut que l'équation (1,1) satisfait les conditions aux limites quand $\zeta \to \pm\infty$.

le premier integral de (1,1) donne

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 + k = \ Df_\zeta \tag{1.2}$$

tq k est un constante d'integral.

imposant les conditions en $\zeta \to \pm\infty$ nous trouvons

$$\frac{1}{2}u_1^2 - cu_1 = \frac{1}{2}u_2^2 - cu_2 = -k$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) = c(u_1 - u_2) \\ c = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}u_2^2 - \frac{1}{2}(u_1 + u_2)u_2 = -k$$

$$k = \frac{1}{2}u_1 u_2$$

mettre la valeur de k dans (1,2)

$$f^2 - u_1 f - u_2 f + u_1 u_2 = 2D f_\zeta$$

$$(f - u_1)(u_2 - f) = -2D f_\zeta$$

et après l'integral

$$\frac{\zeta}{2D} = \frac{1}{u_2 - u_1} \ln \frac{u_2 - f}{f - u_1}$$

résoudre cette dernière pour f on trouve

$$f = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2D}(x - ct)\right)} \quad , \quad c = \frac{(u_1 + u_2)}{2}$$

1.4 Solutions solitons de l'équation de KDV

Les solitons sont un type d'ondes non linéaires dont la découverte et l'étude sont relativement récentes. Les solitons apparaissent dans de nombreux phénomènes de propagation d'ondes, ils apparaissent en particulier dans les mouvements de surface de faible amplitude pour un fluide peu profond, ils sont alors régis par l'équation de KDV [7] .

Dotées de propriétés exceptionnelles, les solitons sont utilisés dans différents domaines (hydrodynamique, fibres optiques, transmission et communication etc...).

L'étude des ondes solitaires ou solitons a commencé dans le dix-neuvième siècle, quand un jeune ingénieur écossais John Scott Russell a observé une onde unique qui est guidée par un canal local, semblait aller aussi loin qu'on la voyait sans perdre sa forme [11].

Une onde solitaire qui peut parcourir de longues distances sans changer sa forme ou perdre de l'énergie, Mathematiquement, un soliton est une solution d'une équation aux dérivées partielles non lineaires décrivant les systemes physiques.

Définition 1 [2] :

En mathématique et en physique un soliton est une onde solitaire d'auto-renforcement qui conserve sa forme tout en elle se déplace à vitesse constante.L'onde solitaire ou soliton est une solution de chaque équation d'onde qui satisfait les trois proprietés suivantes :

1-Conserve sa forme (profil initial) en tous temps

2-Est localisé :Une onde solitaire est une onde progressive localisée, c'est à dire, une onde progressive qui tend vers des états constants lorsque $\zeta \to \pm\infty$.

3-Peut passer d'autres solutions et conserve sa taille et sa forme.

Définition 2 [2] :

Une onde solitaire est une onde plane progressive « localisée », c'est-'a-dire qu'elle a des limites en -∞ et +∞ et que ces limites sont les mêmes (généralement 0). Comme toutes les ondes planes progressives les ondes solitaires sont d´efinies à l'aide de leur profil et de leur vitesse, qui est un scalaire en dimension 1 d'espace.

Ainsi un soliton de profil f et de vitesse c est une fonction de la forme :

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

avec

$$\lim_{\zeta \to \pm\infty} f(\zeta) = f_\infty$$

Cette limite étant atteinte « rapidement » (en général exponentiellement vite), si bien que toutes les dérivées de f tendent vers zéro à l'infini. Dans toute la suite on s'intéressera aux solitons pour lesquels $f_\infty = 0$.

1.5 Définition de la méthode d'auto-similarité

La méthode de similarité est l'une des méthodes classiques d'obtention de solutions exactes des EDPs, le nombre de variables indépendantes dans un EDP est réduit par un changement de variable adéqua.

1.6 Solution "auto-similaire"

On entend par "solution auto-similaire " d'une équation aux dérivées partielles une fonction de deux variables qui s'écrit sous la forme :

1-Solution de type

$$u(x,t) = t^{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$$

Oŭ les exposants de t sont des constantes réels appelés paramètres de la solution et prennent des valeurs particulières déterminées carractérisant la solution d'une EDP donnée, et φ est une fonction d'une seule variable appelée "profil" qui est la solution d'une équation déffirentielle ordinaire résulte de l'EDP après insertion de u [1].

La détermination de la solution revient à déterminer les paramètres et le profil en générale .

2-Solution de type auto similaire générale est de la forme:

$$u(x,t) = c(t)\varphi\left(\frac{x}{\alpha(t)}\right)$$

avec $c(t)$ et $\alpha(t)$ sont deux fonctions d'une seule variable t [1].

3-Solution de type profil mobil qui est de la forme :

$$u(x,t) = c(t)\varphi\left(\frac{x - b(t)}{\alpha(t)}\right)$$

encore la détermination de cette solution revient à déterminer les trois fonctions $c(t)$, $b(t)$, $\alpha(t)$ et le profil φ.

1.7 Construction des solutions auto-similaires

Solutions auto-similaires se produisent souvent dans de nombreux problèmes de physique mathématique.

La méthode de similarité est basée sur quelques propriétés de symétrie d'un système

physique et la symétrie algebrique d'un EDP non linéaire.

Les solutions auto-similaires sont obtenues en résolvant une EDO associée .Ces solutions sont invariantes par une transformation de redimensionnement ou de

la similitude [9].

1.8 Schéma pour obtenir solution auto similaire

Pour construire une solution auto similaire on a besoit de suivit les étapes suivantes[9]

$$\boxed{\textbf{équation originale } \mathbf{p(x,t,u,u_x,u_t,...)=0}}$$

$$\downarrow \boxed{\text{cherche une solution auto similaire}} \downarrow$$

$$\boxed{\textbf{on applique la transformation } \mathbf{u \rightarrow \ \boldsymbol{\alpha}^{\lambda}u, x \rightarrow \boldsymbol{\alpha}^{s}x, \quad t \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\gamma}t}}$$

$$\downarrow \boxed{\ \alpha \text{ paramètre libre, } \lambda,\ s,\ \gamma \ \text{ appellés exposants}} \downarrow$$

$$\boxed{\textbf{on doit choisir } \boldsymbol{\lambda,\beta,\gamma} \textbf{ de sorte que l'équation préserve sa forme}}$$

$$\downarrow \boxed{\ \text{d'oŭ l'obtention de } \ \mathrm{p}(\alpha^{s}\mathrm{x},\ \alpha^{\gamma}\mathrm{t}\ ,\alpha^{\lambda}\mathrm{u},..)=0} \downarrow$$

$$\boxed{\textbf{utiliser solution auto similaire}}$$

$$\downarrow \boxed{\ \text{substutier dans l'équation originale}} \downarrow$$

$$\boxed{\textbf{obtenir une équation différentielle ordinaire}}$$

1.9 Équation admettant une solution "auto-similaire"

Une condition pour qu'une équation aux dérivées partielles admette une solution auto-similaire est donné par le théorème suivant[5,1] :

Théorème1 [5] **:**

Soit $p(x, t, u, u_x, u_t, ..) = 0$ une équation aux dérivées partielles, alors p admet une solution auto-similaire si et seulement si elle est invariante sous l'action de dilatation c'est-à-dire si l'on remplace :

$$u \to \alpha^{\lambda} u$$

$$x \to \alpha^{s} x \tag{1.3}$$

$$t \longrightarrow \alpha^{\gamma} t$$

On obtient :

$$p(\alpha^{s} x, \ \alpha^{\gamma} t \ , \alpha^{\lambda} u....) = 0$$

On a la règle de dérivation :

la dérivation pour t

$$\frac{\partial(\alpha^{\lambda} u)}{\partial(\alpha^{\gamma} t)} = \alpha^{(\lambda-\gamma)} \frac{\partial u}{\partial t}$$

la dérivation pour x

$$\frac{\partial(\alpha^\lambda u)}{\partial(\alpha^s x)} = \alpha^{(\lambda-s)}\frac{\partial u}{\partial x}$$

L'équation est invariante :

$$p(x,t,u,..) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p(\alpha^s x, \;\; \alpha^\gamma t \;\; ,\alpha^\lambda u, ...) = 0$$

Exemple 01 [5] :

Soit l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

on a :

$$\frac{\partial(\alpha^\lambda u)}{\partial(\alpha^s x)} = \alpha^{(\lambda-s)}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2(\alpha^\lambda u)}{\partial(\alpha^s x)^2} = \alpha^{(\lambda-2s)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et on a :

$$\frac{\partial(\alpha^\lambda u)}{\partial(\alpha^\gamma t)} = \alpha^{(\lambda-\gamma)}\frac{\partial u}{\partial t}$$

L'équation devient

$$\alpha^{(\lambda-\gamma)}\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^{(\lambda-2s)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On dit que l'équation est invariante donc :

$$\alpha^{(\lambda-\gamma)} = \alpha^{(\lambda-2s)}$$

$\Longrightarrow$

$$\lambda-\gamma=\lambda-2s$$

Ce qui est entraîne $\gamma=2s$ et λ quelconque

Alors on dit que l'équation de la chaleur est invariante sous l'action de dilatation de x par α^s et t par α^{2s} pour tout λ et s et par suite elle admet une solution auto-similaire.

la recherche de la solution sous forme $u(x,t)=t^{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$ se déduit de $u(x,t)$ par le changement $\alpha^{\lambda}u(\alpha^s x,\alpha^{\gamma}t)=\alpha^{\lambda}u(\alpha^s x,1)$ qui doit être égale à $u(x,t)$, on choisit α telle que $\alpha^{\gamma}t=1\Rightarrow\alpha=t^{-\frac{1}{\gamma}}$.

ainsi la solution s'écrit $u(x,t)=t^{\frac{-\lambda}{\gamma}}\varphi\left(\dfrac{x}{t^{\frac{s}{\gamma}}}\right)$

Exemple 02 [13] **:**

Considérons l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{2t}+ku\frac{\partial u}{\partial x}=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.4}$$

on utilisons les variables (1.3), l'équation (1.4) devient :

$$\alpha^{\lambda-\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha^{\lambda-\gamma}\frac{u}{2t}+\alpha^{2\lambda-s}ku\frac{\partial u}{\partial x}=v\alpha^{\lambda-2s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

l'équation est invariante donc

$$\lambda-\gamma=2\lambda-s=\lambda-2s$$

oŭ

$$\gamma=2s,\lambda=s\ -\gamma,\lambda=s$$

il vient :

$$\frac{\lambda}{\gamma}=\frac{s}{\gamma}=\frac{1}{2}$$

La recherche de la solution sous la forme $u(x,t)=t^{\alpha}\varphi\left(\dfrac{x}{t^{\beta}}\right)$ se déduit de $u(x,t)$ par le changement $\alpha^{\lambda}u(\alpha^{s}x,\alpha^{\gamma}t)=\alpha^{\lambda}u(\alpha^{s}x,1)$ qui doit être égale à $u(x,t)$.on choisit α telle que $\alpha^{\gamma}t=1\Rightarrow\alpha=t^{-\frac{1}{\gamma}}$.

Alors la solution s'écrit comme suit :

$$u(x,t)=t^{-\frac{\lambda}{\gamma}}u(t^{-\frac{s}{\gamma}}x,1)$$

$$=t^{\alpha}\varphi(xt^{-\beta})$$

telle que

$$\alpha=-\frac{\lambda}{\gamma}=-\frac{1}{2},et\beta=\frac{s}{\gamma}=\frac{1}{2}$$

Chapitre 2

Solution travelling wave de l'équation de KDV

Introduction :

L'équation de *Korteweg et de Vriers* "KDV" est un modèle mathématiques pour les ondes en faible profondeur. C'est un exemple très connu d'équations aux dérivées partielles non linéaire dont on connait exactement les solutions.

Ces solutions comprennent (mais ne se limites pas) à des solutions travelling waves particulière ou "des solitons".

l'équation de KdV, C'est une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, non-linéaire et dispersive, dont la forme standard est donnée par :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0} \tag{2.1}$$

Définition [12] :

On appelle solution en onde progressive"travelling wave" ou encore en onde solitaire toute solution non identiquement nulle de (2.1) de la forme :

$$u(x,t) = f(x-ct)$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}$

On dit que C est la vitesse de l'onde correspondante, car la solution est stationnaire dans un repère mobile se déplaçant à vitese c.

Théorème 2 [12] **:**

Pour toute vitesse $c \succ 0$, il existe une unique solution de (2.1) en onde progressive à vitesse c parmi les fonctions trois fois continûment dérivables dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre trois tendent vers 0 à l'infini.

Démonstration [12] **:**

Soit $u(x,t) = f(x-ct)$ une telle onde.

En injectant cette expression dans l'équation (2.1) et on obtient :

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0$$

autrement dit

$$(-cf - 3f^2 + f'')' = 0$$

Par integration et en tenant compte des conditions à l'infini on obtient la condition nécéssaire

$$- cf - 3f^2 + f^{"} = 0 \tag{2.2}$$

après multiplication par f' on obtient

$$-cf'f - 3f'f^2 + f'f^{"} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(-\frac{c}{2}f^2 - f^3 + \frac{1}{2}(f')^2)' = 0$$

et de nouveau les conditions à l'infini nous fournissent la condition nécessaire

$$-\frac{c}{2}f^2 - f^3 + \frac{1}{2}(f'\ )^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(f^{'})^2 = \frac{c}{2}f^2 + f^3 \tag{2.3}$$

On en déduit que f ne peut pas s'annuler car auquel cas $f^{'}$ s'annulerait au même point (par (2,3)), il en viendrait ensuite de même pour $f^{''}$et $f^{'''}$(par(2.1),(2.2)), et finalement f serait identiquement nulle par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

On déduit aussi de la relation (2,3) qui en un point d'extremum de f on doit avoir $\frac{c}{2}f^2 + f^3 = 0$ autrement dit $f = -\frac{c}{2}$ ou $f = 0$

Si $c \preceq 0$ la fonction $\frac{c}{2}f^2+f^3$ est négative entre 0 et $-\frac{c}{2}$ ce qui n'est pas compatible avec(2,3).

Dès lors nécessairement $c \succ 0$ et f est partout comprise entre $-\frac{c}{2}$ et 0.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $x = 0$ est tel que $f(0) = -\frac{c}{2}$ et $f^{'}(x) \succ 0$ pour tout $x \succ 0$

Après prise de racine carré ,on peut alors récrire (2,3) sous la forme :

$$\frac{1}{2}(f^{'})^2 = \frac{c}{2}f^2 + f^3$$

$\Longrightarrow$

$$f^{'} = \sqrt{cf^2 + 2f^3}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{f^{'}}{\sqrt{cf^2 + 2f^3}} = 1 \qquad \text{sur } [0, +\infty[$$

et après intégration

$$\int_0^x \frac{f^{'(y)}}{\sqrt{cf^2(y) + 2f^3(y)}}dy = \int_0^x dy$$

$$\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{c}\,|f(y)|\,\sqrt{1+\dfrac{2}{c}f(y)}}dy = \int_0^x dy$$

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{c}}\int_0^x \frac{f'(y)}{f(y)\sqrt{1+\frac{2}{c}f(y)}}dy = \int_0^x dy$$

$$\frac{-1}{\sqrt{c}}\int_0^x \frac{f'(y)}{f(y)\sqrt{1+\dfrac{2}{c}f(y)}}dy = x$$

$$\frac{-1}{\sqrt{c}}\int_{\frac{-c}{2}}^{f(x)} \frac{du}{u\sqrt{1+\dfrac{2}{c}u}} = x$$

Par le changement d'inconnue $v = \sqrt{1+\dfrac{2}{c}u}$ donc $u = \dfrac{c}{2}(v^2-1)$ et $du = \dfrac{c}{2}(2vdv)$

alors l'intégral devient :

$$x = \frac{-1}{\sqrt{c}}\int_0^{\sqrt{1+\frac{2}{c}f(x)}} \frac{\dfrac{c}{2}(2vdv)}{\dfrac{c}{2}(v^2-1)v}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{c}}\int_0^{\sqrt{1+\frac{2}{c}f(x)}} \frac{dv}{1-v^2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[\log\frac{1+v}{1-v}\right]_0^{\sqrt{1+\frac{2}{c}f(x)}}$$

$$x\sqrt{c} = \log \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{c} f(x)}}{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{c} f(x)}}$$

$$\exp(x\sqrt{c}) = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{c} f(x)}}{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{c} f(x)}}$$

C'est -à-dire

$$1 + \frac{2}{c} f(x) \ = \left(\frac{\exp(\sqrt{c}x) - 1}{\exp(\sqrt{c}x) + 1} \right)^2$$

$$f(x) = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{\exp(\sqrt{c}x) - 1}{\exp(\sqrt{c}x) + 1} \right)^2 - 1 \right]$$

$$f(x) = \frac{c}{2} \left[\frac{\exp(2\sqrt{c}x) - 2\exp(\sqrt{c}x) + 1}{\exp(2\sqrt{c}x) + 2\exp(\sqrt{c}x) + 1} - 1 \right]$$

$$f(x) = \frac{c}{2} \left[\frac{-4\exp(\sqrt{c}x)}{\exp(2\sqrt{c}x) + 2\exp(\sqrt{c}x) + 1} \right]$$

$$= \frac{-c}{2} \left[\frac{4}{\exp(\sqrt{c}x) + 2 + \exp(-\sqrt{c}x)} \right]$$

$$= \frac{-c}{2} \left[\frac{2}{\exp(\frac{\sqrt{c}}{2}x) + \exp(-\frac{\sqrt{c}}{2}x)} \right]^2$$

$$f(x) = \frac{-c}{2} \left[\frac{1}{ch^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right)} \right]$$

Donc

$$f(x) = \frac{-c}{2}\ sech^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x\right)$$

Où la fonction sécante hyperbolique $sech$ est définie par :

$$sech(x) \quad = \frac{1}{ch(x)}$$

avec :

$$ch\,(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

alors :

$$f(x-ct) = \frac{-c}{2} \quad sech^2 \frac{\sqrt{c}}{2}\,(x-ct)$$

Donc la solution s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u(x,t) = \ f(x-ct) = \frac{-c}{2} \quad sech^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\,(x-ct)\right)}$$

Chapitre 3

Solution auto similaire pour l'équation de KDV

Introduction :

Il y a un certain nombre de méthodes pour la construction de solutions aux équations de physique mathématique qui sont basées sur la réduction des équations originales à des équation déffirentielles ordinaire.

Dans ce chapitre nous présentons un de ces méthodes, c'est la méthode d'auto similaire pour l'équation non linéaire KDV.

3.1 Proprieté d'auto similarité pour l'équation de KDV

On applique le théorème 1 pour l'équation de KDV suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{3.1}$$

On trouve :

$$\frac{\partial(\alpha^{\lambda}u)}{\partial(\alpha^{\gamma}t)} = \alpha^{(\lambda-\gamma)}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\alpha^{\lambda}u)}{\partial(\alpha^{s}x)} = \alpha^{(\lambda-s)}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$\Longrightarrow$

$$(\ \alpha^{\lambda}u\ )\ \frac{\partial(\alpha^{\lambda}u)}{\partial(\alpha^{s}x)} = \alpha^{2\lambda-s}u\frac{\partial u}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial^3(\alpha^{\lambda}u)}{\partial(\alpha^{s}x)^3} = \alpha^{\lambda-3s}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Alors l'équation de KDV devient :

$$\alpha^{(\lambda-\gamma)}\frac{\partial u}{\partial t} - 6\alpha^{2\lambda-s}u\frac{\partial u}{\partial x} \quad + \alpha^{\lambda-3s}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

l'équation est invariante si

$$\alpha^{\lambda-\gamma} = \alpha^{2\lambda-s} = \alpha^{\lambda-3s}$$

$\Longrightarrow$

$$\lambda-\gamma = 2\lambda-s = \lambda-3s$$

ce qui est entraîne $\gamma = 3s$, $\lambda = s - \gamma$, $\lambda = 2s$

et

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{2}{3} , \frac{s}{\gamma} = \frac{1}{3}$$

La recherche de la solution auto similaire de la forme $u(x,t) = t^{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$ se déduit de $u(x,t)$ par le changement $\alpha^{\lambda}u(\alpha^{s}x, \alpha^{\gamma}t) = \alpha^{\lambda}u(\alpha^{s}x, 1)$ qui est doit égale à $u(x,t)$,on choisit α telle que $\alpha^{\gamma}t = 1 \Longrightarrow \alpha = t^{-\frac{1}{\gamma}}$

alors la solution s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = t^{-\frac{\lambda}{\gamma}}u(t^{-\frac{s}{\gamma}}x, 1)$$

$$= t^{\alpha}\varphi(xt^{-\beta})$$

telle que

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\gamma} = -\frac{2}{3}, et\ \beta = \frac{s}{\gamma} = \frac{1}{3}$$

3.2 La recherche de la solution de type auto similaire générale

Soit l'équation de KDV suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

la solution de type auto similaire générale s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = c(t)\varphi\left(y\right), \quad y = \frac{x}{\alpha(t)}$$

alors on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c}\varphi - c\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}x\varphi^{'}$$

$$= \dot{c}\varphi - c\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}y\varphi'$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c}{\alpha}\varphi^{'}$$

$\Longrightarrow$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c^2}{\alpha}\varphi^{'}\varphi$$

et

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{c}{\alpha^3}\varphi'''$$

dans ce cas l'équation de KDV devient

$$\dot{c}\varphi - c\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}y\varphi' - 6\ \frac{c^2}{\alpha}\varphi^{'}\varphi + \quad \frac{c}{\alpha^3}\varphi''' = 0$$

divisons par c nous obtenons

$$\frac{\dot{c}}{c}\varphi - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}y\varphi' - 6\ \frac{c}{\alpha}\varphi^{'}\varphi + \quad \frac{1}{\alpha^3}\varphi''' = 0 \tag{3.2}$$

Théorème 3 :

Soit la forme bilinéaire[5] :

$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(t) = 0$

alors elles existent des constantes A_i tel que :

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{i=2}^{n} A_i f_i(x) & (i = 2, ..., n) \\ g_k(t) = -A_k g_1(t) & (k = 2, ..., n) \end{cases}$$

donc d'après le théorème 3 l'équation (3,2) est une forme bilinéaire s'écrit sous la forme :

$$\varphi''' = A_1\varphi + A_2 y\varphi' + A_3\varphi'\varphi \tag{3.3}$$

De plus on trouve le systeme d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{c}}{c} = -A_1 \dfrac{1}{\alpha^3} \\ -\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -A_2 \dfrac{1}{\alpha^3} \\ -6\dfrac{c}{\alpha} = -A_3 \dfrac{1}{\alpha^3} \end{cases} \tag{3.4}$$

l'équation 2 de système (3,4) donne

$$\dot{\alpha}\alpha^2 = A_2$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{3}\alpha^3 = A_2 t + k$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha(t) = \left[3\left(A_2 t + k\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

avec : k est une constante arbitaire

et de l'équation 3 du système (3,4) on obtient

$$c = \frac{1}{6} A_3 \frac{1}{\alpha^2}$$

$\Longrightarrow$

$$c(t) = \frac{1}{6} A_3 \left[3\left(A_2 t + k\right)\right]^{\frac{-2}{3}}$$

L'équation 1 du système (3,4) donne

$$\frac{\dot{c}}{c} = -A_1 \frac{1}{\alpha^3}$$

$\Longrightarrow$

$$\ln(c) = -\frac{A_1}{3A_2}\ln\left[3\left(A_2 t + k\right)\right]$$

$$\ln(c) = \ln\left[3\left(A_2 t + k\right)\right]^{-\frac{A_1}{3A_2}}$$

$\Longrightarrow$

$$c(t) = \left[3\left(A_2 t + k\right)\right]^{-\frac{A_1}{3A_2}}$$

et on a d'après qui a précede

$$c(t) = \frac{1}{6}A_3\left[3\left(A_2 t + k\right)\right]^{\frac{-2}{3}}$$

il faut que :

$$\begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 6 \end{cases}$$

Finalement on trouve :

$$\alpha(t) = \left[3\left(t + k\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$c(t) = \left[3\left(t + k\right)\right]^{\frac{-2}{3}}$$

On conclu que la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{u(x,t) = [3(t+k)]^{\frac{-2}{3}} \varphi \left(\frac{x}{[3(t+k)]^{\frac{1}{3}}} \right)}$$

3.2.1 Détermination du profil φ :

Le profil φ est la solution de l'équation (3,3) c'est-à-dire la solution de EDO d'ordre trois suivante [9] :

$$\varphi''' - 2\varphi - y\varphi' - 6\varphi'\varphi = 0 \tag{3.5}$$

après le premier intégral l'équation (3,5) devient

$$(y+2\varphi)\left[\varphi'' - (y+2\varphi)\varphi\right] - (1+\varphi')\varphi' = k$$

et k est une constante d'intégral

la solution de l'équation (3,5) peut réprésenter par :

$$\varphi(y) = g'(y) + g^2(y)$$

tq: la fonction $g(y)$ est une solution de l'équation

$$g" - 2g^3 - yg = A \tag{3.6}$$

Pour A=$2^{\frac{-2}{3}}$ l'équation(3,6) admet comme solution

$$g(y) = \frac{d}{dy}\left[\ln F(-2^{(-\frac{1}{3})}y)\right]$$

oŭ $F = F(z)$ satisfait l'équation d'Airy

$$F'' = zF \tag{3.7}$$

Résolution de l'équation $F'' = zF$ [4] :

Pour résoudre cette équation on utilise la méthode d'une série de puissances de la forme

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

On dérive successivement les expressions en série :

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

$$F^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k x^{k-1}$$

$$F^{''} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\alpha_k x^{k-2}$$

Alors l'équation (3,7) devient

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\alpha_k x^{k-2} - x \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = 0$$

puis par un changement d'indices dans la première et la seconde sommation on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\alpha_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n-1}x^n = 0$$

et de nouveau en sortant le premier terme de la première somme afin d'uniformiser les indices :

$$2.1.\alpha_2 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)\alpha_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n-1}x^n = 0$$

$\Longrightarrow$

$$2\alpha_2 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} - \alpha_{n-1}\right] x^n = 0$$

Comme cette relation doit être satisfaite pour n'importe quelle valeure de $x \in \mathbb{R}$ il faut que les coefficients soient tous nuls, c'est-à-dir qu'on doit avoir

$$2\alpha_2 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} - \alpha_{n-1}\right] x^n = 0 \ \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha_2 = 0$$

et

$$[(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} - \ \alpha_{n-1}] = 0 \qquad , n = 1, 2, 3, ...$$

puisque α_{n+2} est donné en fonction de α_{n-1}, les coefficients α_n seront déterminés successivement par bonds de trois

nous commençons par choisir de façon arbitaire $\alpha_0 = c_1, \alpha_1 = c_2$

alors que $\alpha_2 = 0$ le reste des coefficients sont les suivants :

$$\begin{cases} \alpha_0 = c_1 \\ \alpha_3 = \dfrac{\alpha_0}{3.2} = \dfrac{c_1}{3.2} \\ \alpha_6 = \dfrac{\alpha_3}{6.5} = \dfrac{\alpha_0}{6.5.3.2} = \dfrac{c_1}{\prod_{j=1}^{j=2} 9j^2 - 3j} \\ \vdots \\ \alpha_{3k} = \dfrac{\alpha_{3k-3}}{3k(3k-1)} = \dfrac{\alpha_0}{\prod_{j=1}^{j=k} 3j(3j-1)} = \dfrac{c_1}{\prod_{j=1}^{j=k} 9j^2 - 3j} \\ \vdots \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_5 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{3k+2} = 0 \end{cases}$$

et

$$
\begin{cases}
\alpha_1 = c_2 \\
\alpha_4 = \dfrac{\alpha_1}{4.3} = \dfrac{c_2}{4.3} \\
\alpha_7 = \dfrac{\alpha_4}{7.6} = \dfrac{\alpha_1}{7.6.4.3} = \dfrac{c_2}{\prod_{j=1}^{j=2}(3j+1)3j} \\
\vdots \\
\alpha_{3k+1} = \dfrac{\alpha_{3k-2}}{(3k+1)3k} = \dfrac{\alpha_1}{\prod_{j=1}^{j=k}(3j+1)3j} = \dfrac{c_2}{\prod_{j=1}^{j=k} 9j^2+3j}
\end{cases}
$$

On conclu que

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{\prod_{j=1}^{j=k} 9j^2-3j} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{\prod_{j=1}^{j=k} 9j^2+3j}$$

$$F = c_1 F_1 + c_2 F_2$$

avec : $\alpha_{3k} = \dfrac{\alpha_0}{2.3.5.6...(3k-1)3k}$

$\alpha_{3k+1} = \dfrac{\alpha_1}{3.4.6.7....3k(3k+1)}$

Alors

$$F = \alpha_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2.3.5.6...(3k-1)3k} \right) + \alpha_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3.4.6...3k(3k+1)} \right)$$

3.3 La recherche de la solution auto similaire classique

Les solutions de type auto similaire de la forme $u(x,t) = t^{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$ permettant la transformation de l'EDP à une EDO, la détermination de la solution revient donc à déterminer les deux paramètres α et β et le profil φ.

Ce type de solution a la particularité qu'elle est invariance sous l'action de dilatation

On distingue trois cas pour la détermination des paramètrses

Cas 1 :l'un des paramètres est déterminé alors que le deuxième reste indétermine

Cas 2 :les deux paramètres restent indéterminé et son liés

Cas3 :les deux paramètres prennent des valeurs déterminées indépendamment du profil[1] .

Considérons l'équation de KDV :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Et la solution de la forme

$$t^{\alpha}\varphi(\zeta)$$

avec

$$\zeta = xt^{-\beta}$$

3.3.1 Détermination des paramètre

La dérivation parraport à t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1}\varphi + (-\beta x t^{-\beta-1})\varphi' t^{\alpha}$$

$$= t^{\alpha-1}(\alpha\varphi - \beta x t^{-\beta}\varphi')$$

$$= t^{\alpha-1}(\alpha\varphi - \beta\zeta\varphi')$$

la dérivation parraport à x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^{\alpha-\beta}\varphi'$$

$\Longrightarrow$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = t^{2\alpha-\beta}\varphi'\varphi$$

et

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = t^{\alpha-3\beta}\varphi'''$$

Donc l'équation de KDV s'écrit sous la forme :

$$t^{\alpha-1}(\alpha\varphi - \beta\zeta\varphi') - 6t^{2\alpha-\beta}\varphi'\varphi + t^{\alpha-3\beta}\varphi''' = 0$$

on divisons par $t^{\alpha-1}$, alors l'équation devient :

$$(\alpha\varphi-\beta\zeta\varphi')-6t^{\alpha-\beta+1}\varphi'\varphi+t^{1-3\beta}\varphi'''=0 \tag{3.8}$$

dérivons (3.2) une dérivations formèle par t on obtient

$$(-6\alpha+6\beta-6)t^{\alpha-\beta}\varphi'\varphi+(1-3\beta)t^{-3\beta}\varphi'''=0$$

cette équation est identiquement nulle si

$$-6\alpha+6\beta-6=0 \ et \ 1-3\beta=0$$

c'est-à-dire

$$\alpha=\frac{-2}{3} \quad , \quad \beta=\frac{1}{3}$$

La solution s'écrit comme suit :

$$\boxed{u(x,t)=t^{\frac{-2}{3}}\varphi(t^{-\frac{1}{3}}x)}$$

avec φ est la solution de l' ODE

$$\frac{-2}{3}\varphi-\frac{1}{3}\zeta\varphi'-6\varphi'\varphi+\varphi'''=0$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude analytique de l'équation de KDV.

On introduit deux types de solutions,on cherche des solutions de type "onde solitaire" appelée aussi "traveling wave", et des solutions de type "auto similaire".

Nous avons également calculer explicitement la solution du problème de premier type, en cherchons surtout le profil de la solution.

Nous avons cherché les exposants liés aux problème et essayer de trouver la solution du problème.

Dans la recherche de solution travelling wave nous avons detaillé tous les calcules, et donner explicitement une solution exacte.

Dans le deuxième cas, c'est la recherche de solution auto similaire nous avons également detaillé tous les aspets liés au problème et donne le cas générale du problème avec une solution de forme particulier.

Bibliographie

[1] **N.Benhamidouche**,Cours d'équation de physique $2^{\text{ème}}$master,2010/2011.

[2] **S.Benzoni**, Master : EDP dispersives, univ. Lyon.2009.

[3] **C.M. Davenport**, The General Analytical Solution for the Korteweg-de Vries Equation, 2008.

[4] **A. Giroux**, Équations differentielles, notes de cours pour MAT 2115, Département de Mathématiques et Statistique, univ.Montréal 2010.

[5] **A. HANACHE**, mémoire de magistère, étude comparative entre 'self-similar' method et la méthode des profiles mobiles, univ. M'sila. 2009.

[6] **Willy Hereman,** Shallow water Waves and Solitary waves, Departement of Mathematical and computer Sciences, Colorado school of Mines,USA.

[7] **S.Hildebrandt, H.Karcher**, Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equation, Springer 2003.

[8] **R. E. Mickens,** mathematical methods for the natural and engineering science, vol. 65 ,2004.

[9] **Andrie.D.polyanin , Valentin F.Zaitsev**, Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, CRC Press, 2012.

[10] **P.L.SACHDEV,** Self-Similarity and beyond :Exact Solutios of non linear problems,CRC Press LLC, 2000.

[11] **SANDERBAIS,** The equations :icons of knowledge, by Amesterdam university press, 2005.

[12] **D.Smets**, Methodes mathématiques pour la mécanique des fluides,2010.

[13] **D.Zwillinger**, Handbook of Differential Equations, 3rd edition, Academic Press, 1997.