

REPUBLIQUE ALGERIENNE DE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudaif de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Département de Mathématiques



Mémoire de master

Domiane :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Option :analyse Mathématiques et numérique

Thème

On the Numerical Solution of Volterre-Fredholm Integral equations
using fourth Tchebychev Polynomail

Présenté par
Smaini Tahar

Soutenu publiquement le :20/06/2023

Devant le jury composé de :

GAGUI Bachir	Prof	Université de M'sila	Président
Mostefa Nadir	Prof	Université de M'sila	Encadreur
DJAIDJA Noui	M.C.B	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude, en premier lieu, à Dieu Tout-Puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qui m'ont été accordés tout au long de ces longues années d'éducation.

Je voudrais adresser mes sincères remerciements au **professeur Mostefa Nadir** d'avoir accepté de superviser cette recherche et pour les conseils qu'il m'a prodigués. Je suis sincèrement reconnaissant pour ses efforts déployés tout au long de ce projet.

J'aimerais également exprimer ma gratitude envers les membres du comité d'évaluation, le professeur **Djaidja Noui et Bachir Gagui**, qui m'ont honoré en faisant partie du comité d'évaluation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes parents, mes frères et sœurs, mes collègues et mes amis pour leur aide et leur soutien.

Enfin, je n'oublierai pas de remercier toutes les personnes qui ont contribué de quelque manière que ce soit à l'achèvement de ce travail. je vous remercie sincèrement.

Dédicace

Mon Dieu, fais de ce travail une aumône pour l'âme de mon défunt père, qu'Allah ait son âme, qui était mon soutien, ma source de force, ma fierté et ma fierté.

À celle à qui le Tout Miséricordieux a réservé une place préservée.

À la lumière de mes yeux, celle qui m'a élevé, entouré de ses prières, m'a enveloppé de son amour et de sa tendresse... Ma mère bien-aimée, qu'Allah la protège et prolonge sa vie, et la maintienne comme une couronne sur ma tête.

À ceux avec qui j'ai partagé tous les détails de la vie, ses douceurs et ses amertumes, mes frères, la source de tout mon bonheur et la lumière de mes yeux : **Mourad, Saïd, Bouzid**, ainsi que l'épouse de **Boussakra Nessima, Rbiha**, son mari **Karim** et leurs enfants **Diaa** et **Anis**, ma sœur **Naïma** et son mari **Boukhors Massaoud**.

À mes amis dans la recherche scientifique et à mes frères qui n'ont pas été engendrés par ma mère : **Touatit Oussama, Rabia Abdel-Raouf, Zouaoui Ramadan, Sassi RabeH**.

À tous les amis et collègues avec qui j'ai partagé le parcours scolaire, en particulier : **Amran Khaled, Zouad Nabil, Hamoudi Aziz**.

À tous ceux avec qui je suis lié par l'affection et l'amour,

À tous ceux que mon cœur se souvient et que ma plume a oubliés,

À tous ceux-là, je dédie les fruits de mes efforts,

Et ma dernière supplication est que louange soit à Allah, le Seigneur de l'univers.

Table des matières

Introduction	iii
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	1
1.1 Opérateurs linéaires bornés	1
1.1.1 Opérateur linéaire	1
1.1.2 Opérateur continu	1
1.1.3 Opérateur borné	2
1.1.4 Opérateur compact	2
1.2 Equations aux opérateurs compacts	3
1.2.1 Equations de second espèce	3
1.3 Rappel d'analyse fonctionnelle	4
1.3.1 Le principe de contraction de Banach	5
1.3.2 Le théorème du point fixe de Schauder	6
1.3.3 Le théorème du point fixe de Weissinger	6
2 Equations intégrales et leurs classification	7
2.1 Classification des équations intégrales	7
2.1.1 Equations intégrales linéaires de Fredholm	7
2.1.2 Equations intégrales linéaires de Volterra	8
2.1.3 Equation intégrales de volterra-fredholm	8
2.1.4 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale de Volterra- Fredholm	8
2.2 Polynômes orthogonaux	11

2.2.1	Polynômes de Tchebychev	11
3	Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm	15
3.1	Méthode de Galerkin	15
3.1.1	Méthode de Galerkin-Chebyshev	17
3.1.2	Méthode de collocation	19
3.1.3	Méthode de collocation Tchebyshev	21
3.2	Exemples Numériques	22
	Conclusion	29
	Bibliographie	29

Introduction

Les chercheurs en mathématiques ont contribué à résoudre de nombreux problèmes scientifiques qui étaient autre fois insolubles, mais la technologie a été l'un des principaux soutiens pour créer de nouvelles méthodes scientifiques telles que les équations intégrales. Les solutions numériques des équations intégrales jouent un rôle crucial dans divers domaines scientifiques, facilitant la détection des erreurs et améliorant la précision des résultats expérimentaux dans certaines sciences, notamment la physique et la chimie.

Aujourd'hui, nous présentons une étude sur la résolution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm. Cette étude est divisée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons quelques notions d'analyse fonctionnelle

Le Deuxième chapitre: Ce chapitre propose des définitions des termes de l'équation intégrale pour le lecteur. Il comprend le concept de l'équation intégrale ainsi qu'une étude sur l'existence des solutions pour les types de Volterra-Fredholm. Il y a également une étude sur les polynôme de Chebyshev.

Le Troisième chapitre: Ce chapitre présente une étude sur les applications scientifiques de la résolution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm en utilisant les séries de Chebyshev et les méthodes de Collocation ou de *Galerkin*. Des exemples différents sont présentés pour illustrer la précision de la méthode proposée

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Opérateurs linéaires bornés

1.1.1 Opérateur linéaire

Définition 1.1.1 Soit E et F deux espaces vectoriel sur le corps \mathbb{k} , et $A : E \rightarrow F$ un opérateur. On dit que A est linéaire si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$$

$$1) \quad A(x + y) = A(x) + A(y)$$

$$2) \quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

1.1.2 Opérateur continu

Définition 1.1.2 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de S si on a la propriété suivante:

Pour toute suite x_n de S converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = A(x_0) \quad (1.1.1)$$

Remarque 1.1.1 L'opérateur linéaire A est dit continu sur S , s'il est continu en chaque point de l'ensemble S .

Théorème 1.1.1 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu partout sur S s'il est continu au point x_0 de S .

1.1.3 Opérateur borné

Définition 1.1.3 Soient E et F deux espaces normés $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire A est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \quad \forall x \in E \quad (1.1.2)$$

Théorème 1.1.2 Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Remarque 1.1.2 Soit E et F deux espaces normés, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de E dans F est notée $L(E, F)$

1.1.4 Opérateur compact

Soient X un espace normé et Y un espace de Banach.

Définition 1.1.4 Un opérateur linéaire $T \in L(X, Y)$ est compact ou complètement continu si l'image de chaque ensemble borné de X est relativement compact dans Y .

Notons par $Lc(X, Y) \subset L(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de X dans Y .

Remarque 1.1.3 Si $T \in Lc(X, Y)$ alors $T \in L(X, Y)$ i.e. Un opérateur linéaire compact est continu.

Exemple 1.1.1 On définit l'opérateur T comme suit $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ telque

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$$

où $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est continu.

On montre :

1) T est un opérateur linéaire compact.

Solution 1.1.1 1) La boule unité dans $C([0, 1])$ est $B_F(0, 1) = \{f \in C([0, 1]); \|f\|_\infty \leq 1\}$.

Pour montrer que $TB_F(0, 1)$ est relativement compact dans $C([0, 1])$ on utilise le théorème d'Arzela-Ascoli

i) $TB_F(0, 1)$ est uniformément borné : En effet pour tout $f \in B_F(0, 1)$ on a

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left| \int_0^1 k(x, t) f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |k(x, t)| |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x, t)| dt \leq \int_0^1 |k(x, t)| dt \\ \implies \sup_{f \in B_F(0, 1)} |Tf(x)| &\leq \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |k(x, t)| dt \end{aligned}$$

d'où $TB_F(0, 1)$ est uniformément borné.

ii) $TB_F(0, 1)$ est équicontinu : En effet pour tout $f \in B_F(0, 1)$ et pour tout $x, y \in [0, 1]$

on a

$$\begin{aligned} |Tf(y) - Tf(x)| &= \left| \int_0^1 k(y, t) f(t) dt - \int_0^1 k(x, t) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |k(y, t) - k(x, t)| |f(t)| dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^1 |k(y, t) - k(x, t)| dt \\ &\leq \int_0^1 \varepsilon dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\exists \delta = \varepsilon$ tel que $|y - x| < \delta$, d'où $TB_F(0, 1)$ est équicontinu.

1.2 Equations aux opérateurs compacts

1.2.1 Equations de second espèce

soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ définit l'équation de second espèce donné par:

$$\varphi - A\varphi = f \tag{1.2.1}$$

où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue.

Théorème 1.2.1 *le noyau de l'opérateur T défini par:*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\}. \tag{1.2.2}$$

est un sous espace fermé et de dimension finie.

Théorème 1.2.2 *L'image de l'opérateur T défini par*

$$\text{Im } T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi, \varphi \in X\} \tag{1.2.3}$$

est un espace fermé.

1.3 Rappel d'analyse fonctionnelle

On considère dans tout ce qui suit X et Y des espaces de Banach munis de la norme $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ respectivement.

On désigne par $C(X, Y)$ l'espace des fonctions continues de X dans Y muni de la norme uniforme :

$$\forall f \in C(X, Y) : \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y \tag{1.3.1}$$

Définition 1.3.1 *Soit M un sous-ensemble de $C(X, Y)$. On dit que M est équicontinue en $u \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$*

tels que pour tout $f \in M$ et tout $v \in X$

Si

$$\|u - v\|_X < \eta \tag{1.3.2}$$

on a

$$\|f(u) - f(v)\|_Y < \varepsilon \tag{1.3.3}$$

- *On dit que M est équicontinue sur X , si M est équicontinue en tout $u \in X$.*

Cas particulier, si $X = [a, b]$, $Y = \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$, un sous ensemble M de $C([a, b])$ est équicontinu si

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in M$ et tout $x, x^* \in [a, b]$

$$\text{Si } |x - x^*| < \delta \text{ on a } |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon \quad (1.3.4)$$

Définition 1.3.2 Un sous ensemble M de $C([a, b])$ muni de la norme usuelle $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$, est uniformément borné s'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\|f(x)\|_\infty \leq C \text{ pour tout } f \in M \quad (1.3.5)$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des parties relativement compactes dans l'espace $C([a, b])$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|, \quad (1.3.6)$$

Théorème 1.3.1 (Arzelà-Ascoli). Soit F un sous ensemble de $C([a, b])$ muni de la norme de sup alors, F est relativement compacte dans $C([a, b])$ si les conditions suivantes sont vérifiées

- L 'ensemble F est uniformément borné.
- F est équicontinu.

1.3.1 Le principe de contraction de Banach

Le résultat suivant (dû à Banach) est le principe de base dans la théorie du point fixe.

Théorème 1.3.2 (de Banach). Soit X un espace de Banach muni de la norme, et $A : X \rightarrow X$ un opérateur contractant c -à- d

$$\exists k \ 0 \leq k < 1 : \|Ax - Ay\|_X \leq k \|x - y\|_X, \ \forall x, y \in X. \quad (1.3.7)$$

Alors, A admet un point fixe unique, i.e $\exists u \in X$ tel que

$$Au = u. \quad (1.3.8)$$

1.3.2 Le théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe suivant déterminé seulement l'existence d'un point fixe.

Théorème 1.3.3 (de Schauder). Soit (E, d) un espace métrique complet, soit U une partie convexe et fermée de E , et soit $T : U \rightarrow U$ une application telle que l'ensemble $\{Tu : u \in U\}$ est relativement compact dans E . Alors, T possède au moins un point fixe.

1.3.3 Le théorème du point fixe de Weissinger

Théorème 1.3.4 (de Weissinger). Soit (U, d) un espace métrique non vide et complet et soit $\alpha_j \geq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ converge. De plus soit $A : U \rightarrow U$ un opérateur satisfaisant l'inégalité

$$d(A^j u, A^j v) \leq \alpha_j d(u, v). \quad (1.3.9)$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $u, v \in U$. Alors, A admet un point fixe unique u^* et pour tout $u_0 \in U$ la suite $(A^j u_0)_{j=0}^{\infty}$ converge vers ce point fixe.

Remarque 1.3.1 Sous les hypothèses du Théorème 1.3.4, on peut vérifier facilement par récurrence que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|A^j u - A^j v\| \leq k^j \|u - v\| \quad (1.3.10)$$

Donc $d(A^j u, A^j v) \leq \alpha_j d(u, v)$ est vérifié avec $\alpha_j = k^j$, de plus $\sum_{j=0}^{\infty} k^j$ est convergente puisque $0 < k < 1$.

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Equations intégrales linéaires de Fredholm

Définition 2.1.1 *On appelle équation intégrale de Fredholm du premier espèce une équation de la forme:*

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.1.1)$$

où φ est la fonction inconnue, f et k sont des fonctions connues.

Définition 2.1.2 *On appelle équation intégrale de Fredholm de second espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.1.2)$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions donnés, λ est un paramètre non nul.

2.1.2 Equations intégrales linéaires de Volterra

Les équations de volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est telque $k(x; t) = 0$ pour $x < t$

Définition 2.1.3 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de premier espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme:

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.3)$$

Définition 2.1.4 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de second espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.1.4)$$

2.1.3 Equation intégrales de volterra-fredholm

Définition 2.1.5 On appelle équation intégrale de volterra -Fredholm une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.1.5)$$

où φ est la fonction inconnue, k_1, k_2 et f sont des fonctions connues.

Définition 2.1.6 On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t)\varphi(t)dt ds \quad (2.1.6)$$

où les fonctions k_1, k_2 et f sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

2.1.4 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité de la solution de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.1.7)$$

Définition 2.1.7 Soit X un espace normé et $T : X \rightarrow X$ un opérateur, T est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi) = \varphi \quad (2.1.8)$$

pour tout $\varphi \in X$.

Théorème 2.1.1 (principe de contraction). Soit X un espace normé. Si $T : X \rightarrow X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ_0 alors T est un opérateur de Picard et

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - T(\varphi)\| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \alpha < 1$$

Théorème d'existence et d'unicité :

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.1.9)$$

où

1- $f \in C[a, b]$ $k_1 \in C(D_1)$, $k_2 \in C(D_2)$ tel que $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq x \leq b\}$ et $D_2 = [a, b] \times [a, b]$

2- $M_1 = \max_{(x,t) \in D_1} |k_1(x, t)|$ et $M_2 = \max_{(x,t) \in D_2} |k_2(x, t)|$

Théorème 2.1.2 Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{c}(M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) < 1 \quad (2.1.10)$$

Alors l'équation (2.1.9) a une solution unique $\varphi \in C[a, b]$

Preuve. :

Soit l'opérateur intégral $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.1.11)$$

Posons

$$\max_{x \in [a, b]} |(\varphi(x) - \psi(x))| e^{c(x-a)} = \|\varphi - \psi\|$$

On a

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt + \int_a^b k_2(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |\varphi(t) - \psi(t)| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |\varphi(t) - \psi(t)| dt \\ &\leq M_1 \int_a^x |\varphi(t) - \psi(t)| e^{c(t-a)} e^{-c(t-a)} dt + M_2 \int_a^b |\varphi(t) - \psi(t)| e^{c(t-a)} e^{-c(t-a)} dt \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} (e^{c(x-a)-1} + \frac{M_2}{c} e^{c(b-a)-1}) \right] \|\varphi - \psi\|, \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} e^{c(x-a)} + \frac{M_2}{c} e^{c(b-x+x-a)} \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{e^{c(x-a)}}{c} (M_1 + M_2 e^{-c(b-x)}) \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{e^{c(x-a)}}{c} (M_1 + M_2 e^{-c(b-a)}) \|\varphi - \psi\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|T\varphi(x) - T\psi(x)| e^{-c(x-a)} \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|$$

,pour tout $x \in [a, b]$

Alors

$$\|T\varphi - T\psi\| \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur T est Lipschitzien de constante k

$$k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 e^{c(b-a)}) \|\varphi - \psi\|$$

La condition supposée garantit que T est une contraction. Alors on applique principe de contraction. ■

2.2 Polynômes orthogonaux

les polynômes orthogonaux sont des outils mathématiques importants qui présentent des propriétés spéciales d'orthogonalité, et leur étude joue un rôle fondamental dans diverses applications mathématiques et scientifiques. Il existe plusieurs familles de polynômes orthogonaux bien connues, telles que les polynômes de Legendre, les polynômes de Chebyshev, les polynômes de Hermite et les polynômes de Laguerre, etc.... Chaque famille est associée à une fonction de poids spécifique et est définie sur un intervalle particulier.

2.2.1 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev sont largement utilisés dans le domaine de l'analyse numérique, notamment pour l'interpolation, l'approximation de fonctions et les méthodes numériques basées sur les quadratures.

Il existe deux principales familles de polynômes de Tchebychev : les polynômes de Tchebychev de première espèce et les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce.

Polynômes de Tchebychev de première espèce

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ et notés $T_n(x)$, Ils sont définis récursivement comme suit :

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad \text{pour } n > 1$$

Ces polynômes sont orthogonaux par rapport au produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce

Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce sont également définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ et notés $U_n(x)$. Ils sont définis récursivement comme suit :

$$\begin{aligned}
 U_0(x) &= 1, U_1(x) = 2x \\
 U_n(x) &= 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \text{ pour } n > 1
 \end{aligned}$$

Ces polynômes sont également orthogonaux par rapport au même produit scalaire que les polynômes de Tchebychev de première espèce.

Polynômes de Chebyshev du troisième espèce

Les polynômes de Chebyshev $V_n(x)$ du troisième espèce sont définis par la relation

$$V_n(x) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos(\frac{1}{2}\theta)}, \quad x = \cos \theta$$

qui devient

$$\begin{aligned}
 V_0(x) &= 1, V_1(x) = 2x - 1 \\
 V_n(x) &= 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \text{ pour } n > 1
 \end{aligned}$$

Polynômes de Tchebychev du quatrième espèce

Définition 2.2.1 *Les polynômes de Chebyshev $W_n(x)$ du quatrième espèce sont des polynômes de degré n en x définis respectivement par*

$$W_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}, \quad x = \cos(\theta) \tag{2.2.1}$$

lorsque $x = \cos(\theta)$

$$W_1(x) = 2 \cos(\theta) + 1 = 2x + 1 \tag{2.2.2}$$

et la relation (2.2.1) devient

$$\begin{aligned}
 W_0(x) &= 1, W_1(x) = 2x + 1, \\
 W_n(x) &= 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), n = 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Les premiers polynômes de Tchebychev du quatrième espèce

$$W_0(x) = 1$$

$$W_1(x) = 2x + 1$$

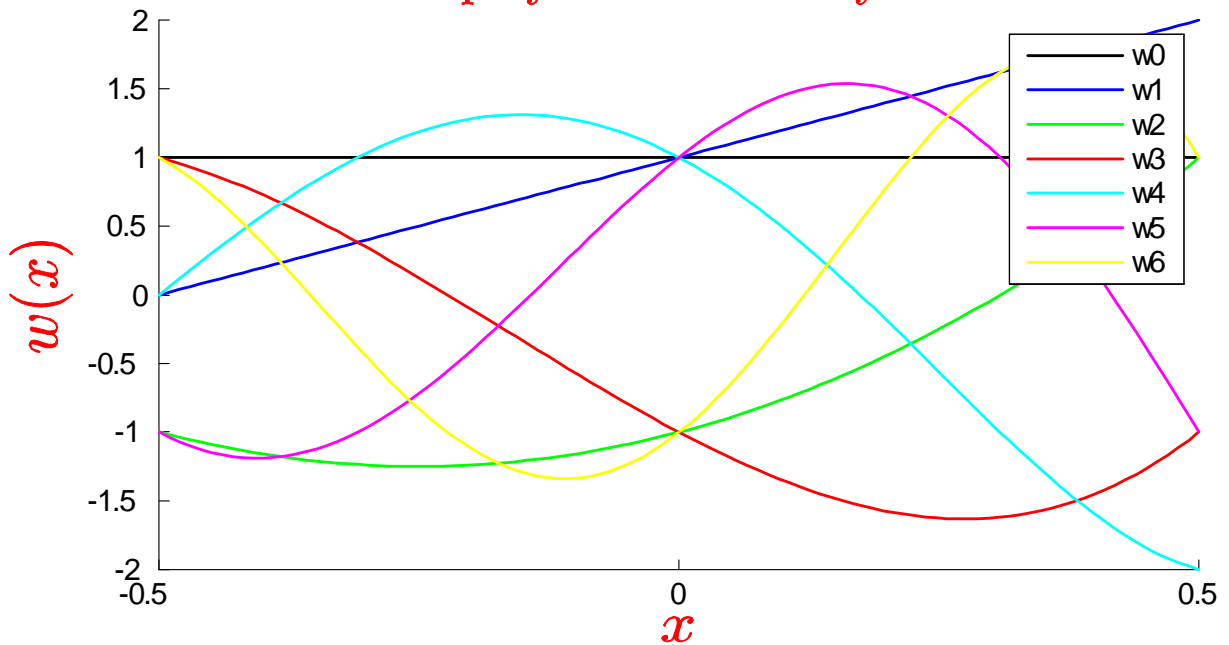
$$W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1$$

$$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

$$W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1$$

$$W_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1$$

les polynomes de chebyshev



Le polynôme de Chebyshev de quatrième espèce sur $[a, b]$ de degré n est noté W_n^* et est défini par

Définition 2.2.2 $W_n^*(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$, où $\cos(\theta) = \frac{2x - (a+b)}{b-a}$, $\theta \in [0, \pi]$.

pour $x \in [a, b]$, si l'on pose $s = \frac{2x - (a+b)}{b-a}$ alors $s \in [-1, 1]$ et $W_n^*(x) = W_n(s)$

Liens entre les quatre types de polynômes:

$$W_n(x) = U_{2n}(x)$$

$$U_n(x) = \frac{1}{2} [W_n(x) + V_n(x)]$$

$$W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x)$$

$$W_n(x) - W_{n-1}(x) = V_n(x) - V_{n-1}(x) = 2T_{2n}$$

Chapitre 3

Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm

3.1 Méthode de Galerkin

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^x k_2(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.1.1)$$

Généralement, le principe de la méthode de Galerkin appliqué à l'équation(3.1.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de Galerkin.

On applique la méthode de Galerkin lorsque les conditions aux limites sont périodiques ou homogènes. En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a, b])$ ou de $L^2([a, b])$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base de X_n On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, tel que

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \psi_i(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.1.2)$$

Pour déterminer les coefficients c_i , on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1.2), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu soit nul

$$r_n(x) = \varphi(x) - \int_a^b k_1(x,t) \varphi(t) dt - \int_a^x k_2(x,t) \varphi(t) dt - f(x), \quad x \in [a, b]$$

d'où

$$\sum_{i=0}^n c_i \psi_i(x) = f(x) + \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b k_1(x,t) \psi_i(t) dt + \sum_{i=0}^n c_i \int_a^x k_2(x,t) \psi_i(t) dt \quad x \in [a, b] \quad (3.1.3)$$

Pour déterminer les coefficients c_i , on utilise l'idée de Galerkin par multipliant les deux cotés de l'équations(3.1.3) par $w_i(x)$ et intégrant par rapport à x de -1 à 1 , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 \psi_i(x) \psi_i(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) \psi_i(x) dx + \int_{-1}^1 \left(\sum_{j=0}^n c_j \int_a^b k_1(x,t) \psi_j(t) dt \right) \psi_i(x) dx + \\ &\int_{-1}^1 \left(\sum_{j=0}^n c_j \int_a^x k_2(x,t) \psi_j(t) dt \right) \psi_i(x) dx \quad x \in [a, b] \\ \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 \psi_i(x) \psi_i(x) dx - \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_1(x,t) \psi_i(t) dt \right) \psi_i(x) dx \\ &- \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 \left(\int_a^x k_2(x,t) \psi_i(t) dt \right) \psi_i(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \psi_i(x) dx \\ \sum_{i=0}^n c_i \left(\int_{-1}^1 \psi_i(x) \psi_i(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_1(x,t) \psi_i(t) dt \right) \psi_i(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^x k_2(x,t) \psi_i(t) dt \right) \psi_i(x) dx \right) \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \psi_i(x) dx \end{aligned}$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$; (i.e, aux points de Galerkin) ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i \left[\begin{array}{c} \int_{-1}^1 \psi_i(x_j) \psi_i(x_j) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_1(x_j,t) \psi_i(t) dt \right) \psi_i(x_j) dx \\ - \int_{-1}^1 \left(\int_a^{x_j} k_2(x_j,t) \psi_i(t) dt \right) \psi_i(x_j) dx \end{array} \right] \\ = \int_{-1}^1 f(x_j) \psi_i(x_j) dx \end{aligned}$$

qui s'écrit sous la forme $AC = F$, où

$$A = \int_{-1}^1 \psi_i(x) \psi_j(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_1(x,t) \psi_i(t) dt \right) \psi_j(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^x k_2(x,t) \psi_i(t) dt \right) \psi_j(x) dx, i, j = 1, \dots, n$$

$$F = \int_{-1}^1 f(x_j) \psi_i(x_j) dx, j = 1, \dots, n$$

$$C = c_i, i = 1, \dots, n$$

ce système admet une solution unique si $\det(A) \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de Galerkin

3.1.1 Méthode de Galerkin-Chebyshev

On considère l'équations intégrales de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k_1(x,t) \varphi(t) dt + \int_a^x k_2(x,t) \varphi(t) dt, x \in [a,b] \quad (3.1.4)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k_1(x,t)$, $k_2(x,t)$ et f sont des fonctions données. On suppose que

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i W_i(x) \quad (3.1.5)$$

où $W_i(x)$ est le polynôme de Chebyshev du quatrième espèce sur $[a,b]$ Alors, on a en substituant (3.1.5) dans (3.1.4), on obtient

$$\sum_{i=0}^n c_i W_i(x) = f(x) + \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b k_1(x,t) W_i(t) dt + \sum_{i=0}^n c_i \int_a^x k_2(x,t) W_i(t) dt x \in [a,b] \quad (3.1.6)$$

Pour déterminer les coefficients c_i , on utilise l'idée de Galerkin par multipliant les deux cotés de l'équations(3.1.6) par $W_i(x)$ et intégrant par rapport à x de -1 à 1 . Alors, on a

$$\sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 W_i(x) W_i(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) W_i(x) dx + \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^n c_i \int_a^b k_1(x,t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx +$$

$$\int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^n c_i \int_a^x k_2(x,t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx \quad x \in [a,b]$$

D'où

$$\sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 W_i(x) W_i(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) W_i(x) dx + \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_1(x, t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx + \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^x k_2(x, t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx \quad x \in [a, b] \\ & \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 W_i(x) W_i(x) dx - \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_1(x, t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx \\ & - \sum_{i=0}^n c_i \int_{-1}^1 \left(\int_a^x k_2(x, t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) W_i(x) dx \\ & \sum_{i=0}^n c_i \left(\int_{-1}^1 W_i(x) W_i(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_1(x, t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx \right. \\ & \left. - \int_{-1}^1 \left(\int_a^x k_2(x, t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx \right) \\ & = \int_{-1}^1 f(x) W_i(x) dx \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Les équations (3.1.7) forment un système de $(n + 1)$ équations algébriques linéaires. On calcule les constantes c_i par la résolution de ce système.

Enfin la solution approchée de l'équation (3.1.4), est donnée par la formule (3.1.5) d'une manière analogue, on peut appliqué cette approche pour l'équations intégrales de Volterra-Fredholm de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^x k_2(x, t) \varphi(t) dt \quad x \in [a, b]$$

l'équation (3.1.8) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^n c_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\int_{-1}^1 W_i(x) W_i(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^b k_1(x, t) W_i(t) dt \right) W_i(x) dx - \int_{-1}^1 \left(\int_a^x k_2(x, t) w_i(t) dt \right) w_i(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) w_i(x) dx$$

Alors les équations de Galerkin sont obtenues en prend des points x_j

$$\sum_{i=0}^n c_i \psi_i(x_j) = f(x_j) \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.1.9)$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \psi_{i,j} = f_j \quad i, j = 1, \dots, n$$

L'équation (3.1.9) représente un système linéaires de (n) inconnue qui s'écrit sous la forme

$$Ac = F$$

où

$$A = \psi_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$C = (c_1, \dots, c_n)^t$$

$$F = (f_1, \dots, f_n)^t$$

$$C = A^{-1}F$$

3.1.2 Méthode de collocation

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.1.10)$$

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1.10) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant

que l'équation (3.1.10) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation. En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension

finie, généralement des sous espaces de $C([a, b])$ ou de $L^2([a, b])$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base de X_n . On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, tel que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n C_j \psi_j(x), x \in [a, b]$$

Pour déterminer les coefficients (C_j), on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1.10), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x, t) \varphi_n(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x), x \in [a, b] \\ &= \sum_{j=1}^n C_j \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) dt \sum_{j=1}^n C_j \psi_j(t) - \int_a^b k_2(x, t) dt \sum_{j=1}^n C_j \psi_j(t) - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^n C_j (\psi_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) \psi_j(t) dt) - f(x) \quad x \in [a, b] \end{aligned}$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, (i.e, aux points de collocation) ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n (\psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x_i, t) \psi_j(t) dt) C_j = f(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

qui s'écrit sous la forme $AC = F$, où

$$\begin{aligned} A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x_i, t) \psi_j(t) dt \quad i, j = 1, \dots, n \\ C &= C_j, \quad j = 1, \dots, n \\ F &= f(x_i) \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si $\det A \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

3.1.3 Méthode de collocation Tchebyshev

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, x \in [a, b] \quad (3.1.11)$$

On définit les polynômes de Tchebychev $w_i^*(x)$ de degré i sur $[a, b]$ comme suit

$$W_i^*(x) = W_i\left(\frac{2x - (a + b)}{b - a}\right)$$

où $W_i(x)$ sont les polynômes de Chebyshev de degré i définis sur $[-1, 1]$

On utilise la méthode de Collocation pour approximer la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.1.11).

On suppose

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i W_i^*(x) \quad (3.1.12)$$

où $w_i(x)$ sont les polynômes de Chebyshev de degré i définis sur $[a, b]$ et c_i des coefficients à déterminer.

Substituant (3.1.11) dans (3.1.12) on obtient

$$\sum_{i=0}^n c_i W_i^*(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n c_i W_i^*(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{i=0}^n c_i W_i^*(t) dt$$

d'où

$$\sum_{i=0}^n c_i (W_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) W_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) W_i^*(t) dt) = f(x) \quad (3.1.13)$$

l'équation (3.1.13) peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^n c_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\psi_i(x) = W_i^*(x) - \int_a^x k_1(x,t) W_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x,t) W_i^*(t) dt$$

Soit $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$, $i = 1, \dots, n$, les points de Tchebychev. Alors les équations de collocation sont obtenues en prend des points x_i

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x_j) = f(x_j) \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1.14)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_{ij} = f_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1.15)$$

L'équation (3.1.15) représente un système linéaires de (n) inconnue qui s'écrit sous la forme

$$AC = F$$

où

$$A = \psi_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^t$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t$$

$$C = A^{-1}F$$

3.2 Exemples Numériques

Exemple 01. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & x(\exp(x)(x-1)+1) - \exp(x) - \frac{x^3}{2} + \cos(x)(\exp(1)-2) + 1 \\ & + \int_0^x xt\varphi(t) dt + \int_0^1 \cos(x)\varphi(t) dt \end{aligned}$$

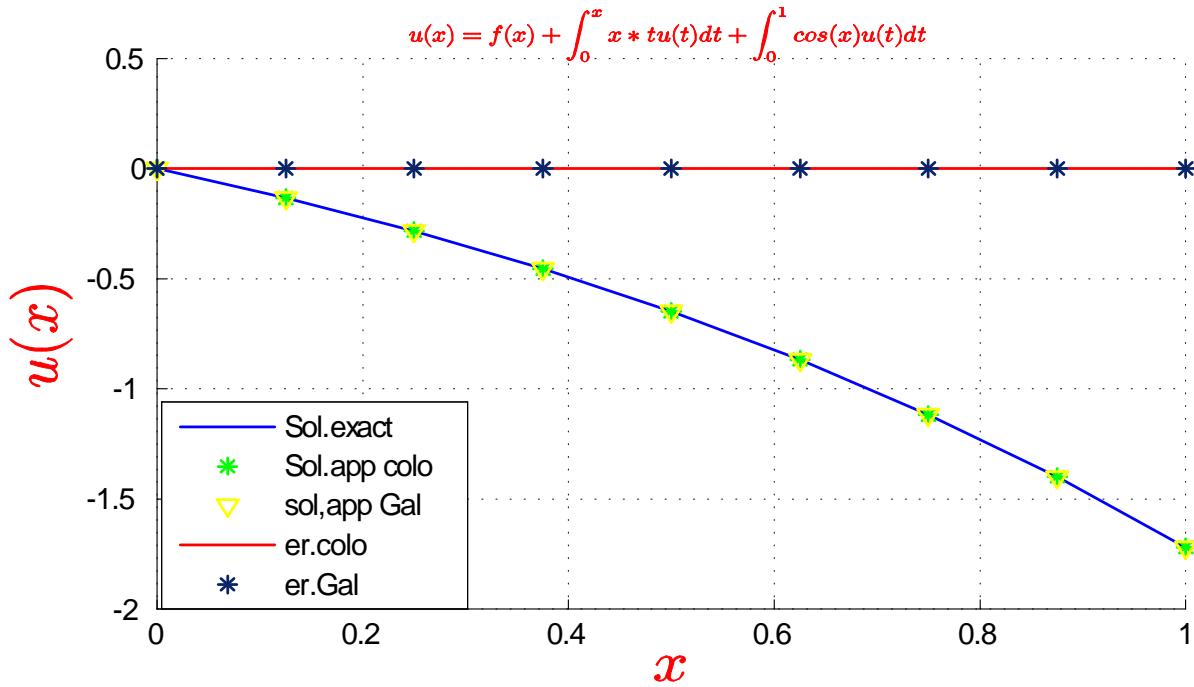
$$f(x) = x(\exp(x)(x-1)+1) - \exp(x) - \frac{x^3}{2} + \cos(x)(\exp(1)-2) + 1 \quad (3.2.1)$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = 1 - \exp(x) \quad (3.2.2)$$

Table 1 Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app.col}$ et $\varphi_{app.Gal}$ de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev et la méthode de Galerkin-Chebyshev, l'erreur est calculée pour $N = 8$

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app.col $\varphi_{app.col}$	Sol app.Gal φ_{Gal}	Erreur.Col	Erreur.Gal
0.0000e ⁰⁰⁰	0.0000e ⁰⁰⁰	-1.6677e ⁻⁰¹¹	-2.1128e ⁻⁰⁰⁸	1.6677e ⁻⁰¹¹	2.1128e ⁻⁰⁰⁸
1.2500e ⁻⁰⁰¹	-1.3315e ⁻⁰⁰¹	-1.3315e ⁻⁰⁰¹	-1.3315e ⁻⁰⁰¹	2.0144e ⁻⁰¹¹	1.9925e ⁻⁰⁰⁷
2.5000e ⁻⁰⁰¹	-2.8403e ⁻⁰⁰¹	-2.8403e ⁻⁰⁰¹	-2.8402e ⁻⁰⁰¹	2.4676e ⁻⁰¹¹	4.5319e ⁻⁰⁰⁷
3.7500e ⁻⁰⁰¹	-4.5499e ⁻⁰⁰¹	-4.5499e ⁻⁰⁰¹	-4.5499e ⁻⁰⁰¹	2.9643e ⁻⁰¹¹	4.7221e ⁻⁰⁰⁷
5.0000e ⁻⁰⁰¹	-6.4872e ⁻⁰⁰¹	-6.4872e ⁻⁰⁰¹	-6.4872e ⁻⁰⁰¹	3.4662e ⁻⁰¹¹	1.5519e ⁻⁰⁰⁷
6.2500e ⁻⁰⁰¹	-8.6825e ⁻⁰⁰¹	-8.6825e ⁻⁰⁰¹	-8.6825e ⁻⁰⁰¹	3.8209e ⁻⁰¹¹	2.3740e ⁻⁰⁰⁷
7.5000e ⁻⁰⁰¹	-1.1170e ⁰⁰⁰	-1.1170e ⁰⁰⁰	-1.1170e ⁰⁰⁰	3.9744e ⁻⁰¹¹	1.5968e ⁻⁰⁰⁷
8.7500e ⁻⁰⁰¹	-1.3989e ⁰⁰⁰	-1.3989e ⁰⁰⁰	-1.3989e ⁰⁰⁰	3.4845e ⁻⁰¹¹	5.9447e ⁻⁰⁰⁷
1.0000e ⁰⁰⁰	-1.7183e ⁰⁰⁰	-1.7183e ⁰⁰⁰	-1.7183e ⁰⁰⁰	3.7250e ⁻⁰¹¹	3.9160e ⁻⁰⁰⁷



Exemple 02. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \sin x + (x + 2) \cos 1 - 2 \sin 1 - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x - x \\ & + \int_0^x \cos(x+t) \varphi(t) dt + \int_0^1 (x+2t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

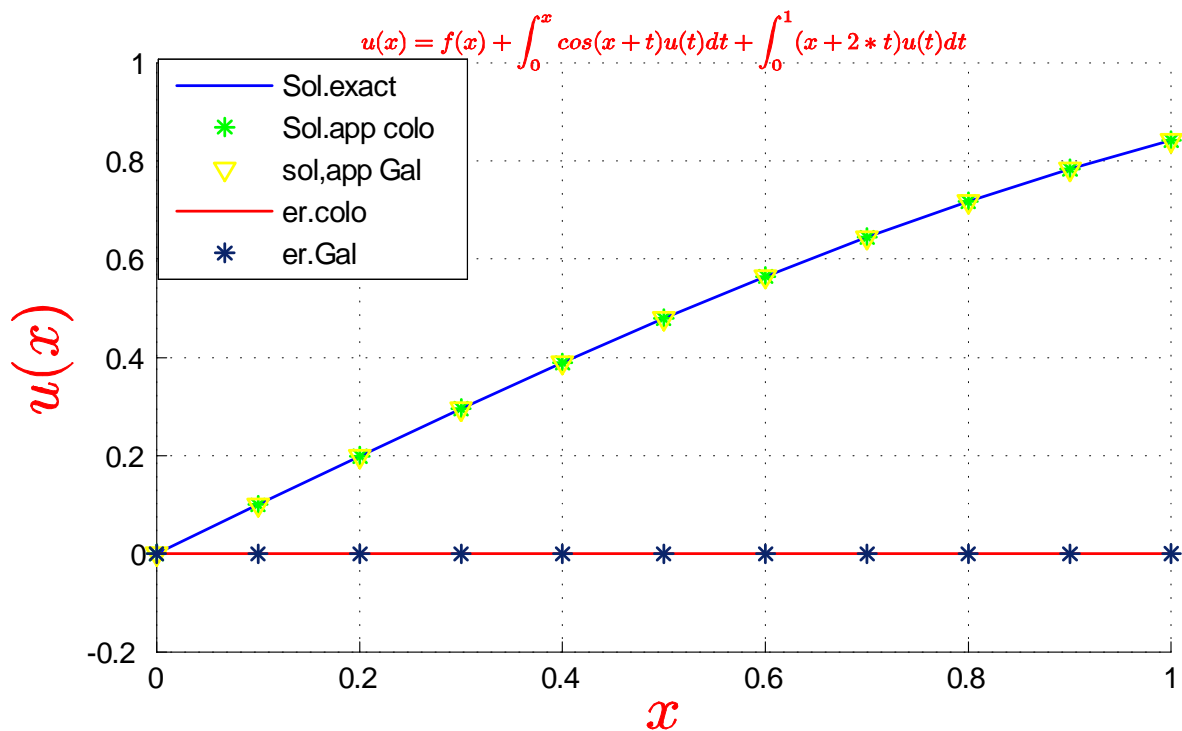
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \sin x + (x + 2) \cos 1 - 2 \sin 1 - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x - x \quad (3.2.3)$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \sin(x) \quad (3.2.4)$$

Table 2 Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app.col}(x)$ et $\varphi_{app.Gal}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev et la méthode de Galerkin-Chebyshev, l'erreur est calculée pour $N = 10$

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app.col. $\varphi_{app.col}$	Sol app.col. φ_{Gal}	Erreur.col	Erreur.Gal
0.0000	0.0000	-6.0123e ⁻⁰¹¹	-3.5278e ⁻⁰⁶	6.0123e ⁻⁰¹¹	3.5278e ⁻⁰⁶
1.0000e ⁻⁰¹	9.9833e ⁻⁰²	9.9833e ⁻⁰²	9.9833e ⁻⁰²	8.0800e ⁻¹¹	8.6083e ⁻⁰⁷
2.0000e ⁻⁰¹	1.9867e ⁻⁰¹	1.9867e ⁻⁰¹	1.9867e ⁻⁰¹	3.8012e ⁻¹¹	1.4802e ⁻⁰⁶
3.0000e ⁻⁰¹	2.9552e ⁻⁰¹	2.9552e ⁻⁰¹	2.9552e ⁻⁰¹	3.2946e ⁻¹¹	2.9495e ⁻⁰⁷
4.0000e ⁻⁰¹	3.8942e ⁻⁰¹	3.8942e ⁻⁰¹	3.8941e ⁻⁰¹	8.1028e ⁻¹¹	3.4563e ⁻⁰⁶
5.0000e ⁻⁰¹	4.7943e ⁻⁰¹	4.7943e ⁻⁰¹	4.7942e ⁻⁰¹	5.0301e ⁻¹¹	4.2822e ⁻⁰⁶
6.0000e ⁻⁰¹	5.6464e ⁻⁰¹	5.6464e ⁻⁰¹	5.6464e ⁻⁰¹	9.8776e ⁻¹¹	1.9624e ⁻⁰⁶
7.0000e ⁻⁰¹	6.4422e ⁻⁰¹	6.4422e ⁻⁰¹	6.4423e ⁻⁰¹	3.5452e ⁻¹⁰	8.4742e ⁻⁰⁶
8.0000e ⁻⁰¹	7.1736e ⁻⁰¹	7.1736e ⁻⁰¹	7.1735e ⁻⁰¹	6.0277e ⁻¹⁰	2.9392e ⁻⁰⁶
9.0000e ⁻⁰¹	7.8333e ⁻⁰¹	7.8333e ⁻⁰¹	7.8330e ⁻⁰¹	5.5649e ⁻¹⁰	2.3458e ⁻⁰⁵
1.0000	8.4147e ⁻⁰¹	8.4147e ⁻⁰¹	8.4159e ⁻⁰¹	3.3554e ⁻¹⁰	1.1418e ⁻⁰⁴



Exemple 03. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\exp(x)(\exp(2) - 1) + \exp(-x)(2x + 2) - x - 1 \\ + \int_0^x (x+t)\varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{1}{2}(\exp(2) - 1)\exp(x+t)\varphi(t) dt$$

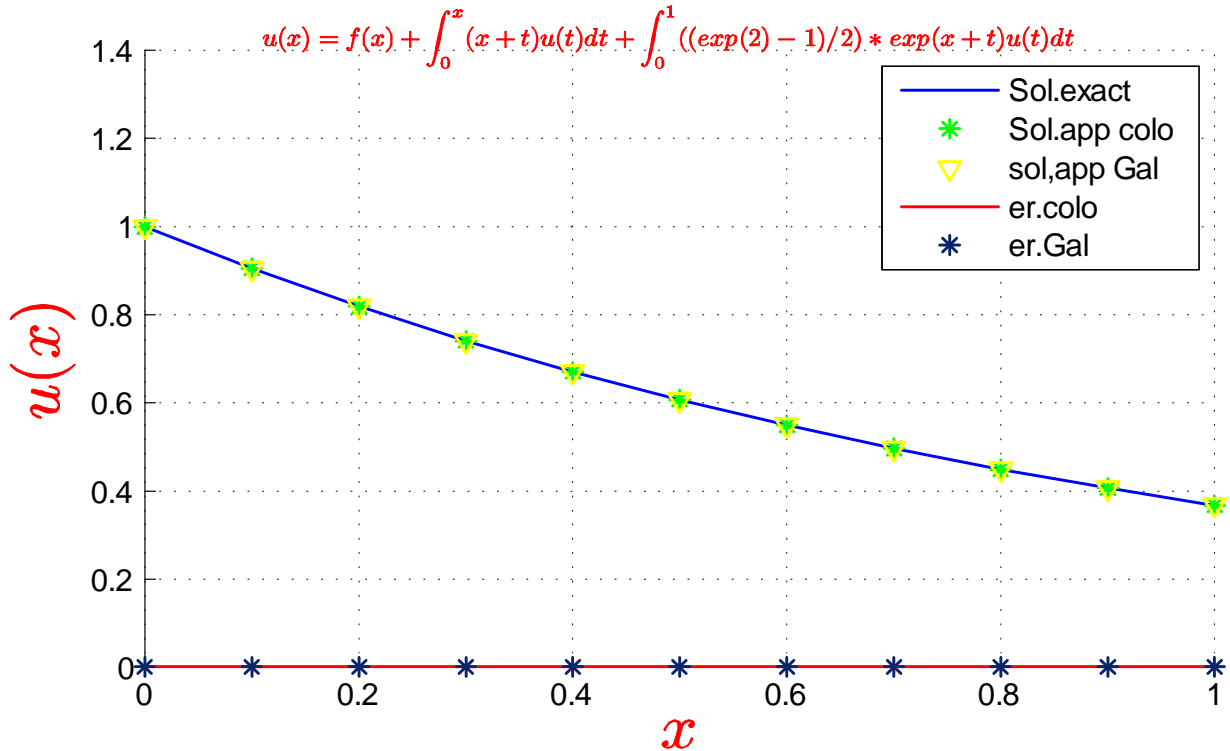
$$f(x) = -\frac{1}{2}\exp(x)(\exp(2) - 1) + \exp(-x)(2x + 2) - x - 1 \quad (3.2.5)$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \exp(-x) \quad (3.2.6)$$

Table 3 Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app.col}$ et $\varphi_{app.Gal}$ de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev et la méthode de Galerkin-Chebyshev, l'erreur est calculée pour $N = 10$

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp.col. $\varphi_{app.col}$	Solapp.Gal. $\varphi_{app.Gal}$	Erreur.Col	Erreur.Gal
0.000000e ⁰⁰⁰	1.000000e ⁰⁰⁰	1.000000e ⁰⁰⁰	9.9999e ⁻⁰⁰¹	8.2093e ⁻⁰¹¹	6.6704e ⁻⁰⁰⁶
1.000000e ⁻⁰⁰¹	9.0484e ⁻⁰⁰¹	9.0484e ⁻⁰⁰¹	9.0482e ⁻⁰⁰¹	2.6094e ⁻⁰⁰⁹	1.4705e ⁻⁰⁰⁵
2.000000e ⁻⁰⁰¹	8.1873e ⁻⁰⁰¹	8.1873e ⁻⁰⁰¹	8.1872e ⁻⁰⁰¹	6.0404e ⁻⁰⁰⁹	1.1112e ⁻⁰⁰⁵
3.000000e ⁻⁰⁰¹	7.4082e ⁻⁰⁰¹	7.4082e ⁻⁰⁰¹	7.4082e ⁻⁰⁰¹	1.0030e ⁻⁰⁰⁸	2.9930e ⁻⁰⁰⁶
4.000000e ⁻⁰⁰¹	6.7032e ⁻⁰⁰¹	6.7032e ⁻⁰⁰¹	6.7034e ⁻⁰⁰¹	1.4350e ⁻⁰⁰⁸	1.5470e ⁻⁰⁰⁵
5.000000e ⁻⁰⁰¹	6.0653e ⁻⁰⁰¹	6.0653e ⁻⁰⁰¹	6.0654e ⁻⁰⁰¹	1.8733e ⁻⁰⁰⁸	1.0371e ⁻⁰⁰⁵
6.000000e ⁻⁰⁰¹	5.4881e ⁻⁰⁰¹	5.4881e ⁻⁰⁰¹	5.4880e ⁻⁰⁰¹	2.2842e ⁻⁰⁰⁸	1.5506e ⁻⁰⁰⁵
7.000000e ⁻⁰⁰¹	4.9659e ⁻⁰⁰¹	4.9659e ⁻⁰⁰¹	4.9655e ⁻⁰⁰¹	2.6187e ⁻⁰⁰⁸	3.6383e ⁻⁰⁰⁵
8.000000e ⁻⁰⁰¹	4.4933e ⁻⁰⁰¹	4.4933e ⁻⁰⁰¹	4.4932e ⁻⁰⁰¹	2.7930e ⁻⁰⁰⁸	6.6811e ⁻⁰⁰⁶
9.000000e ⁻⁰⁰¹	4.0657e ⁻⁰⁰¹	4.0657e ⁻⁰⁰¹	4.0663e ⁻⁰⁰¹	2.6566e ⁻⁰⁰⁸	5.6840e ⁻⁰⁰⁵
1.000000e ⁰⁰⁰	3.6788e ⁻⁰⁰¹	3.6788e ⁻⁰⁰¹	3.6772e ⁻⁰⁰¹	1.9408e ⁻⁰⁰⁸	1.5825e ⁻⁰⁰⁴



Exemple 04. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) = x - \exp(-x)(1/2) - (x^3)\left(\frac{5}{6}\right) + \int_0^x (x+t)\varphi(t) dt + \int_0^1 \exp(-x)\varphi(t) dt \quad (3.2.7)$$

$$f(x) = x - \exp(-x)(1/2) - (x^3)\left(\frac{5}{6}\right) \quad (3.2.8)$$

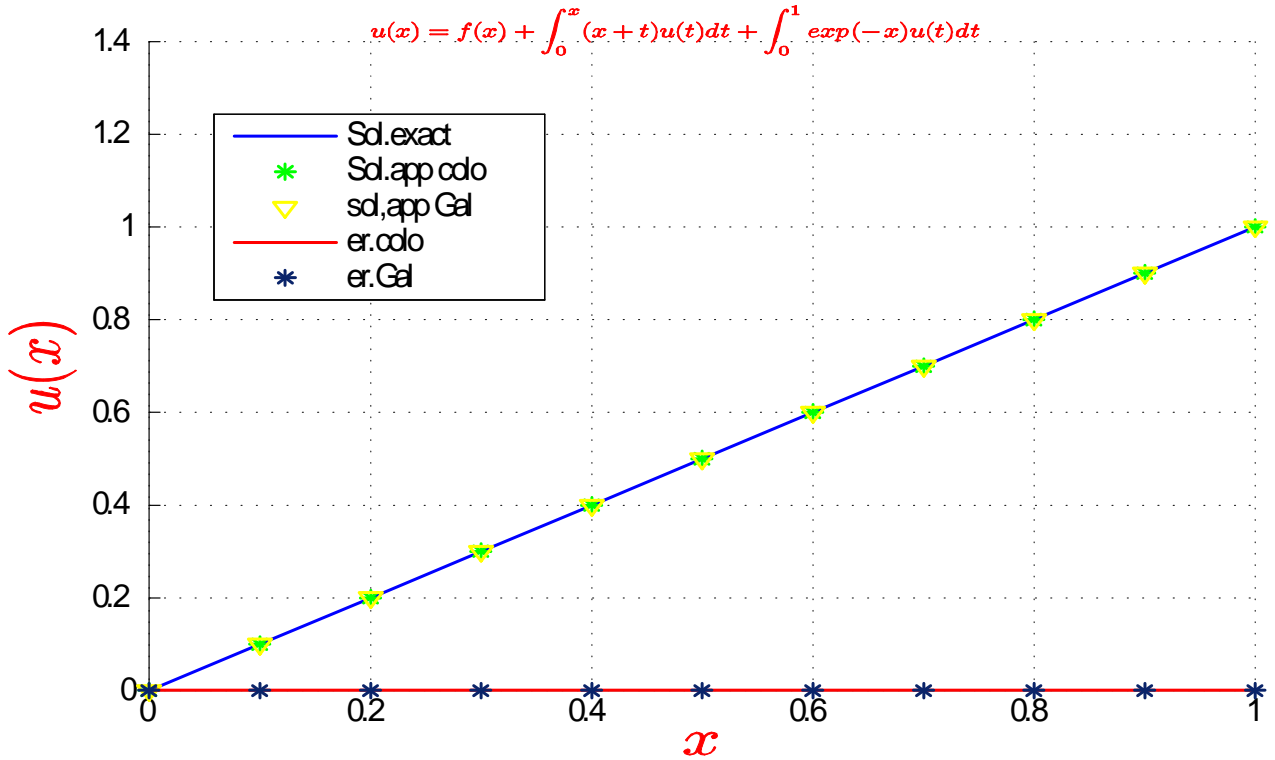
où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = x \quad (3.2.9)$$

Table 4 Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app.col}$ et $\varphi_{app.Gal}$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev et la méthode de Galerkin-Chebyshev, l'erreur est calculée pour $N = 10$

3.2. Exemples Numériques

Valdex	Solex φ_{ex}	Solapp.col. $\varphi_{app.col}$	Solapp.Gal. $\varphi_{app.Gal}$	Erreur.Col	Erreur.Gal
0.0000e ⁰⁰⁰	0.0000e ⁰⁰⁰	1.5954e ⁻⁰¹⁰	1.2227e ⁻⁰⁰⁷	1.5954e ⁻⁰¹⁰	1.2227e ⁻⁰⁰⁷
1.0000e ⁻⁰⁰¹	1.0000e ⁻⁰⁰¹	1.0000e ⁻⁰⁰¹	1.0000e ⁻⁰⁰¹	1.3499e ⁻⁰¹⁰	2.2333e ⁻⁰⁰⁷
2.0000e ⁻⁰⁰¹	2.0000e ⁻⁰⁰¹	2.0000e ⁻⁰⁰¹	2.0000e ⁻⁰⁰¹	7.8636e ⁻⁰¹¹	1.6411e ⁻⁰⁰⁷
3.0000e ⁻⁰⁰¹	3.0000e ⁻⁰⁰¹	3.0000e ⁻⁰⁰¹	3.0000e ⁻⁰⁰¹	1.3367e ⁻⁰¹¹	5.3885e ⁻⁰⁰⁸
4.0000e ⁻⁰⁰¹	4.0000e ⁻⁰⁰¹	4.0000e ⁻⁰⁰¹	4.0000e ⁻⁰⁰¹	1.3906e ⁻⁰¹⁰	2.3571e ⁻⁰⁰⁷
5.0000e ⁻⁰⁰¹	5.0000e ⁻⁰⁰¹	5.0000e ⁻⁰⁰¹	5.0000e ⁻⁰⁰¹	2.8962e ⁻⁰¹⁰	1.0504e ⁻⁰⁰⁷
6.0000e ⁻⁰⁰¹	6.0000e ⁻⁰⁰¹	6.0000e ⁻⁰⁰¹	6.0000e ⁻⁰⁰¹	4.4870e ⁻⁰¹⁰	3.8560e ⁻⁰⁰⁷
7.0000e ⁻⁰⁰¹	7.0000e ⁻⁰⁰¹	7.0000e ⁻⁰⁰¹	7.0000e ⁻⁰⁰¹	5.9193e ⁻⁰¹⁰	7.3005e ⁻⁰⁰⁷
8.0000e ⁻⁰⁰¹	8.0000e ⁻⁰⁰¹	8.0000e ⁻⁰⁰¹	8.0000e ⁻⁰⁰¹	6.8616e ⁻⁰¹⁰	6.5558e ⁻⁰⁰⁸
9.0000e ⁻⁰⁰¹	9.0000e ⁻⁰⁰¹	9.0000e ⁻⁰⁰¹	9.0000e ⁻⁰⁰¹	6.8791e ⁻⁰¹⁰	1.0392e ⁻⁰⁰⁶
1.0000e ⁰⁰⁰	1.0000e ⁰⁰⁰	1.0000e ⁰⁰⁰	1.0000e ⁰⁰⁰	5.3999e ⁻⁰¹⁰	4.6084e ⁻⁰⁰⁶



Conclusion

Ce mémoire a exploré les méthodes de Collocation-Tchebychev et Galerkin-Tchebychev pour approximer la solution de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm, nous avons présenté plusieurs exemples avec des solutions exactes connues, et nous avons obtenu des résultats satisfaisants. Il est important de noter que la réussite de ces méthodes dépend fortement du choix du degré "n" et de la distribution des nœuds de Chebyshev.

Bibliographie

- [1] Kai.Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equation, An Application Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Ed Springer,2004.
- [2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006)
- [3] Amina HAIMED, On the Numerical solution of mixed volterra Fredholm intÈgral equations, Mémoire Master, Université de M'sila. 2021
- [4] Lamri Imane,Salhi Amira ,Opérateurs linéaires continus sur les espaces de Hilbert, Théorie et applications Mémoire Master Université EchAahid Hamma Lakhdar D'el Oued , 2021/2022
- [5] SMATI Abdellatif ,Etude des conditions entre les opérateurs compacts, normaux et positifs Doctorat en Mathématiques Université de M'sila. 2017/2018
- [6] M.Nadir, Opérateurs continus, Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017
- [7] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila, 2004
- [8] A. M. Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.
- [9] Wazwaz, A. M. (2015). First Course In Integral Equations, A. Solutions Manual. World Scientific Publishing Company.

- [10] J,C,Mason,D,C,Handscomb,Chebyshev Polynomials , Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [11] M.R. Eslahchi a, Mehdi Dehghanb, Sanaz Amani ,The third and fourth kinds of Chebyshev polynomials and best uniform approximation,ournal homepage: www.elsevier.com/locate/mcm
- [12] J. Biazar and F. Salehi,Chebyshev Galerkin method for integro-differential equations of thesecond kind,Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization Vol. 6, No. 1, (2016), pp 31-42
- [13] Maadadi Asma,Etude et construction de méthodes Numériques pour quelques équations intégro-différentielles,Doctorat en Mathématiques Université de Bordj Bou Ar-
rériidj 2017/2018

المخلص:

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتر التكاملية من النوع الثاني و ذلك باستخدام كثير حدود تايلور بالإضافة إلى ذلك ، تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية:

كثيرات حدود تايلور- المعادلات التكاملية- المعادلات التكاملية لفولتيرا

Résumé :

Le but de ce mémoire, est de trouver des solutions approchées de l'équation intégrale de Volterra du second espèce, en employant le polynôme de Taylor De plus ,on a donné des exemples pour illustrer la précision ,l'efficacité de la méthode proposée

Mots clés :

Polynômes de Taylor- Equations intégrales-Equation intégrale de Volterra

Abstract :

The aim of this thesis, is to find approximate solutions of the Volterra integralequation of the second kind, by using Taylor polynomials .Also, weintroducedmanyexamples to illustrate the precision, the efficiency of the proposedmethod

Key words:

Taylor polynomials- integralequations-Volterra integralequation