Remerciement

Premièrement et particulièrement, je tiens à remercier vivement mon promoteur **Mr Bachir GAGUI** pour sa guidance et son soutient indéfectible durant la préparation de ce mémoire, dès le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Mostefa NADIR, Professeur à l'Université de M'SILA.

Abdelkader GASMI, Professeur à l'Université de M'SILA.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et à tous les membres du département des mathématiques.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction

La mesure de non compacité est une utile très utilise dans un espace de Banach il sont largement utilisés sur le théorème de points fixe,équation différentielle,équation fonctionnelle,intégrale et intégro- diférentielle,dans ce dernière années,plusieurs travaux on fait la mise au point sur l'étude des équations différentielles fractionnaires

Dans ce mémoire on va étudier la notion la mesure de non compacité, cette étude dans le cadre théorique ayant plusieurs applications dans la topologie, l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs. Elle est apparue la première fois par le mathématicien Kuratowski en 1930. Notre objectif dans ce sujet comment utilisé la notion de mesure de non compacité pour prouver l'existence d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire (équation différentielle d'ordre fractionnaire)

$$^{c}D^{r}y(t) = f(t, y)$$

avec les conditions

$$y(0) = y_0, \ y(T) = y_T$$

à l'aide d'une théorie importante, i.e ; la théorie du point fixe notamment le théorème du point fixe de Darbo et de Mönch.

Ce mémoire est composé en trois chapitres :

Le premier chapitre, consacré sur les définitions d'une équation différentielle ordinaire et d'ordre fractionnaire et la théorie de l'existence et l'unicité, ainsi les définitions des fonctions spéciales et leurs propriétés.

Le deuxième chapitre, étude détaillé sur la notion de la mesure de non compacité (mesure de Kuratowski et de Hausdorff) et leurs propriétés ainsi la relation entre les ensembles compacts, relativement compacts au sens topologique et au sens mesure et finir par les prpriétés des opérateurs compacts par la vision de la mesure de non compacité.

Dans le dernier, on va essayer d'appliquer la notion de la mesure de non compacité sur les problèmes différentiels précisément sur les équations différentielles d'ordre fractionnaires.

Enfin, le mémoire sera clôturé par une Bibliographie.

Chapitre 1

Equations différentielles Ordinaires et Fractionnaires

1.1 Notations et définitions:

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations, définitions nécessaires pour cette étude.

Soit $I = [0, T]$, $T > 0$. On note par $C(I, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues y définies de I dans E, muni de la norme:

$$\| y \|_{\infty} = \sup \{ \| y(t) \| : t \in I \} .$$

Ou $\| \, . \, \|$est la norme sur E .

Définition 1.1.1 *Une fonction $y : I \to E$ est dite intégrable au sens de Bochner si il existe une suite $\{y_n\}$ de fonctions en escalier qui converge vers y presque partout et telle que :*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \| y_n(s) - y(s) \| \, ds = 0.$$

Si y est intégrable au sens de Bochner, on a :

$$\int_0^T y(s) \, ds = \lim_{n \to \infty} \int_0^T y_n(s) \, ds$$

On note par $L^1(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \to E$ qui sont Bochner intégrables,muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T \| y(t) \| \, dt$$

L'espace de Banach des fonctions mesurables $y : I \to E$ qui sont bornées est noté par $L^\infty(I,E)$, il est muni de la norme:

$$\|y\|_{L^\infty} = \inf \{c > 0; \| y(t) \| < c, \ pp \ t \in J\}.$$

On note par $AC^1(I,E)$ l'espace de Banach des fonctions dérivables $y : I \to E$ ayant la première dérivée absolument continue.

Définition 1.1.2 *L'application $f : I \times E \to E$ est dite de carathéodory si:*

1. *$t \to f(t,u)$ est mesurable pour tout $u \in E$,*

2. *$u \to f(t,u)$ est continue presque pour tout $t \in I$;*

   De plus,si:

3. *$\forall\ r > 0$,il existe une fonction $\Phi_r \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$ avec $\| u \| \leq r$:*

$$\| f(t,u) \| \leq \Phi_r(t)$$

   Alors l'application f est dite L^1- carathéodory.

1.2 Equation différentielle ordinaire(EDO_s)

On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante t et la fonction inconnue $x = \varphi(t)$ et ses dérivées $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$

symbolique,une équation différentielle est représentée comme suit

$$F(t, , x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}) = 0 \tag{1.2.1}$$

Si la fonction $x = \varphi(t)$ est d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle (1.2.1) est dite ordinaire.

Est appelle ordinaire car la fonction a déterminer est une fonction d'une variable

1.2.1 Ordre de l'équation différentielle

Définition 1.2.1 *On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans cette équation.*

Equation différentielle de premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$F(t, x, \dot{x}) = 0 \quad . \tag{1.2.2}$$

Exemple 1.2.1 *Equation de premier ordre*

$$\dot{x} = \sin(x + t).$$

Equation différentielle de second ordre

Une équation différentielle du second ordre es de la forme

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0. \tag{1.2.3}$$

Exemple 1.2.2 *Equation de second ordre*

$$\ddot{x} - t^2 x + \lambda = 0.$$

Equation de quatrième ordre

$$x^{(4)} + x \cos t = 0.$$

1.2.2 Forme normale d'un équation différentielle

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équations de la forme

$$\dot{x} = f(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}) \quad . \tag{1.2.4}$$

1.2.3 Equation différentielle autonome

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n-1)}).$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t

1.2.4 Equation différentielle linéaire:

Une EDO de type (1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme:

$$a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2\ddot{x}(t)(t) + ... + a_n(t)x^{(n)}(t) = g(t).$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t.

1.2.5 Solution d'une équation différentielle

On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle tout fonction $x = \varphi(t)$ de la variable indépendante t, défini sur un intervalle $I =]t_1, t_2[$ et vérifiant idenitiquement cette équation en tout points de cet intervalle.

L'intervalle $]t_1, t_2[$ est dit intervalle de définition de la solution $x = \varphi(t)$

(Les cas $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$ ne sont pas exclus).

Solutions maximales et globales:

Définition 1.2.2 *Soient I_1et I_2,deux intervalles sur $\mathbb{R}$,et (x, I) et $(\widetilde{x}, \widetilde{I})$ deux solution d'une même équation différentielle ordinaire ,on dire que $(x, \widetilde{I})$ est une prolongement de (x, I) et $I \subset \widetilde{I}$ et $\widetilde{x}|_I = x$*

Définition 1.2.3 *Soient I_1et I_2,deux intervalles sur $\mathbb{R}$, tels que $I_1 \subset I_2$,On dit qu une solution (x, I_1)est maximale dans I_2, si et seulement si n'admet pas de prolongement $(\widetilde{x},\widetilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subsetneqq \widetilde{I} \subset I_2$ on verra que même plus tard que I_1 est nécessairement ouvert).*

Problème de Cauchy général

On appelle problème initial ou problème de Cauchy pour l'équation différentielle (1.2.4) le problème suivant

parmi toutes les solutions de l'équation (1.2.4) la solution satisfaite à la condition initial (1.2.5)

et on écrite:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \qquad t = t_0 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

1.2.6 Existence et unicité pour le problème de Cauchy

Proposition 1.2.1 *Si la fonction f est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$, tout solution de problème (1.2.5) est une solution du problème (1.2.6) suivant et réciproquement $x \in C^0(I \times \mathbb{R}^n)$ et*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)ds \tag{1.2.6}$$

Existence et unicité locale

Définition 1.2.4 *la fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est Lipshitizienne en X s'il existe une constante L appelée la constante de Lipshitize de f,telle que*

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \| \quad \forall t \in I \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Théorème 1.2.1 ($Cauchy - Lipschiz - f\ Lispchizienne$)

Soit la fonction f a valeur dans $\mathbb{R}^n$,continue sur$[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ et Lipschitizenne par rapport à x alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$,Alors il existe une unique fonction $x \in C^1([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}^n)$ qui vérifie

$$\begin{cases} \quad x' = f(t,x) \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + a] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Corollaire 1.2.1 (*f Lipschitizienne sur tout compact*)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$,borné ou non borné et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et Lipschitzienne sur tout compact $k \subset I$ (c'est à dire qu'il existe $L(k)$ telle que $\forall t \in k$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L(k) \| x - y \|$$

Alors pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$,il existe une unique fonction $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ solution de problème(1.2.7).

Définition 1.2.5 *Soit la fonction $f : A \to \mathbb{R}^n$continue Lipschitzienne par rapport à x sur le cylindre A*

$$A = \{(t,x) \mid t - t_0 \mid \leq a \parallel x - x_0 \| \leq b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

alors l'équation

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a une unique solution sur $[t_0 + \alpha \ ,t_0 - \alpha]$ avec $\alpha = \min(a, \frac{b}{m})$,où $m = \sup_{(t,x)\in A} \| f(t,x) \|$.

Existence et unicité global

Définition 1.2.6 *On suppose f:$I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et globalement Lipschitzienne par rapport à X alors,$\forall t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ solution de problème (1.2.7)*

1.3 Equations différentielles fractionnaires(EDF$_s$)

1.3.1 Fonctions Spéciales

Définition 1.3.1 *On appelle fonction Gamma eulériènne (ou intégrale eulériènne de seconde espèce) la fonction notée Γ définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad x \in \mathbb{C} \ \text{Re}(x) > 0.$$

Gamma est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$; (resp. holomorphe sur le demi plan $z \in C$; $Re(z) > 0$) et

$$\forall K \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^* (resp\ x \in \mathbb{C}\ Re(x) > 0; \Gamma^k(x) = \int (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

Lemme 1.3.1 *pour tout $x \in \mathbb{C}$, $Re(x) > 0, n \in \mathbb{N}$,on a*

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Définition 1.3.2 *La fonction Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par*

$$\begin{aligned} \beta(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dx,\ (p,q \in \mathbb{C}\ \ \mathrm{Re}(p) > 0\ \ \mathrm{Re}(q) > 0) \\ \beta(p,q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \end{aligned}$$

1.3.2 Intégrale fractionnaires

Définition 1.3.3 *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $h \in C[a,b]$ d'ordre $r \in \mathbb{R}^+$, est définie par*

$$I_a^r h(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{r-1} h(s) ds$$

où Γ est la fonction Gamma ,Lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^r h(t) = h(t) * \varphi_r(t)$
où $\varphi_r(t) = \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)}$ pourt > 0 , $\varphi_r(t) = 0$ pour $t \leq 0$,et $\varphi_r \to \delta$,quand $r \to 0$.

Proposition 1.3.1 *Nous avons les propriétés suivantes:*

1. $I_a^0 h(t) = h(t)$.
2. *l'opérateur intégral $I_0^r h(t)$ est linéaire.*

Exemple 1.3.1 *Soit* $h(t) = (t-a)^m$

$$\begin{aligned} I_a^r h(t) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{r-1} h(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t (t-s)^{r-1} (s-a)^m ds \end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ *on obtient,*

$$\begin{aligned} I_a^r h(t) &= \frac{(t-a)^{m+r}}{\Gamma(r)} \int_a^t (1-x)^{r-1} x^m dx \\ &= \frac{(t-a)^{m+r}}{\Gamma(r)} \beta(r, m+1) \\ &= (t-a)^{m+r} \frac{\Gamma(r)\Gamma(m+1)}{\Gamma(r)\Gamma(r+m+1)} \end{aligned}$$

D'ou

$$I_a^r h(t) = (t-a)^{m+r} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(r+m+1)}.$$

1.3.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.3.4 *Soit* f *une fonction intégrable sur* $[a, b]$ *alors la dérivée fractionnaire d'ordre* r *,*$(n-1 < r < n)$ *au sens de Rieman-Liouville est défini par*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^r f(t) &= (\frac{-d}{dt})^n \circ I^{n-r} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-r-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-r} f(t)) \end{aligned}$$

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire:

   - L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est l'inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire

$$^{RL}D^{r}(I^{r}f(t)) = f(t),$$

en générale, on a

$$^{RL}D^{r_1}(I^{r_2}f(t) =^{RL} D^{r_2-r_1}f(t)$$

et si $r_2 - r_1 < 0$, $D^{r_2-r_1}f(t) = I^{r_2-r_1}f(t)$.

- En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commettent pas

$$^{RL}D^{-r_1}(D_t^{r_2}f(t) =^{RL} D^{r_2-r_1}f(t) - \sum_{k=1}^{m} Df(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{r_1-k}}{\Gamma(r_1-k+1)}$$

avec $m-1 \leq r_2 < m$.

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier:

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commettent que si:

$$f^{(k)}(a) = 0 \; pour \; tout \; k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

mais

$$D^{r}(\frac{d^n}{dt^n}f(t)) = D^{n+r}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r-n}}{\Gamma(k-r-n+1)}$$

3. Composition avec les dérivées fractionnaires:

Soit $n-1 < r_1 < n \; et \; m-1 < r_2 < m$, alors:

$$^{RL}D^{r_1}(D_t^{r_2}f(t) = D^{r_2+r_1}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[D_t^{r_2-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-r_1-k}}{\Gamma(r_1-k+1)}$$

et

$$^{RL}D^{r_2}(D_t^{r_1}f(t) = D^{r_2+r_1}f(t) - \sum_{k=1}^{n} D_t^{r_1-k}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-r_{21}-k}}{\Gamma(-r_2-k+1)}$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire $^{RL}D^{r_1} et \; ^{RL}D^{r_2} (r_1 \neq r_2)$ ne commettant que si $[^{RL}D^{r_2-k}f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, ..., n$ et $[^{RL}D^{r_1-k}f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, ..., m$.

Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.3.5 *Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a,b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire*

au sens de Caputo de f d'ordre $r>0$ est définie par

$$^{c}D^{r}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-r-1}f^{(n)}(s)ds.$$

ici $n=[r]+1$ et $[r]$ desigmant la partie entière de r.

1. Relation avec la dérivée de Rimann-Liouville

Soit $r>0$ avec $n-1<r<n$ $(n\in\mathbb{N}^{*})$ supposons que f est une fonction telle que $^{C}D_{t}^{r}f(t)$ et $^{RL}D^{r}f(t)$ existent, alors

$$^{c}D_{t}^{r}f(t)=^{RL}D^{r}f(t)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-r}}{\Gamma(k-r+1)}.$$

On déduit que, si $f^{(k)}(a)=0$ pour $k=0,1,2,...,n-1$ on aura $^{c}D_{t}^{r}f(t)=^{RL}D^{r}f(t)$

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire:

   Si f est une fonction continue on a

$$^{c}D^{r}I_{a}^{r}f=f \text{ et } I_{a}^{r\,C}D^{r}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!},$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas l' inverse à droite.

Exemple 1.3.2 *1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo:*

$$^{c}D^{r}C=0$$

2. La dérivée de $f(t)=(t-a)^{p}$au sens de Caputo:

Soit r un entier $0<n-1<r_1<n$, avec $r>n-1$. Alors on a:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(\tau) &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-n+1)}(\tau-a)^{p-n}\\
{}^{c}D^{r}(t-a)^{p} &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(r-n+1)}\int_a^t(\tau-a)^{n-r-1}(\tau-a)^{p-n}d\tau
\end{aligned}$$

éffectuant le changement de la variable $\tau = a + s(t-a)$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
{}^{c}D^{r}(t-a)^{p} &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)}\int_a^t(t-\tau)^{n-r-1}(\tau-a)^{p-n}d\tau\\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-r}\int_0^1(1-s)^{n-r-1}s^{p-n}ds\\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-r}B(n-r,p-n+1)\\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(p-n+1)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-r}\\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-r}
\end{aligned}$$

1. La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville:

   En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$^{RL}D^{r}C = \frac{C}{\Gamma(1-r)}(t-a)^{-r}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Riemann-Liouville:

$$^{RL}D^{r}(t-a)^{p} = \frac{1}{\Gamma(n-r)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t(t-\tau)^{n-r-1}(\tau-a)d\tau$$

   En faisant le changement de la variable $\tau = a + s(t-a)$

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^r(t-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-r)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+p-r}\int_0^1(1-s)^{n-r-1}s^p ds \\
&= \frac{\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-r)}B(n-r,p+1) \\
&= \frac{\Gamma(n+p-r+1)\Gamma(n-r)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(n-r+1)\Gamma(n+p-r+1)}(t-a)^{p-r} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-r}
\end{aligned}$$

Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov:

Cette définition se basé sur l'obtention de dérivées par différences finies.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pour $h>0$, on a

$$f^{'}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(t)-f(t-h)]$$

et la dérivée second

$$\begin{aligned}
f^{''}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f^{'}(t)-f'(t-h)] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{1}{h}f(t)-f(t-h)-\frac{1}{h}f(t-h)-f(t-2h)] \\
&= \lim\frac{1}{h^2}[f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)]
\end{aligned}$$

Plus généralement, la dérivée n^{ième}de f et donnée par :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(t) &= \lim\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(t-kh) \\
où\ C_k^n &= \frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!}
\end{aligned}$$

Il est possible d'étendre C_k^n à $k>n$,en posant $C_k^n=0$

$$f^{(n)}(t)=\lim\frac{1}{h^r}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^r f(t-kh)$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour $r\in\mathbb{R}^+$ et $k\in\mathbb{N}$

$$C_k^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(r-k+1)}$$

Notons cette fois que $C_k^r \neq 0$ même si $k > n$.

On obtient

$$D^r f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^r} \sum (-1)^k C_k^r f(t-kh)$$

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $\frac{1}{h^r} \sum (-1)^k C_k^r f(t-kh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire(de Liouville) sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.3.1 *On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions :*

$$\begin{aligned} D^r(fg) &\neq (D^r f)g + f(D^r g) \\ D^r(\frac{f}{g}) &\neq \frac{(D^r f)g - f(D^r g)}{g^2} \\ D^r(f \circ g) &\neq (D^r f)(g).g' \end{aligned}$$

1.3.4 Equation différentielle de type Riemann-Liouville

Définition 1.3.6 *Soit $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$ $n = [r] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors:*

$$^{RL}D^r y(t) = f(t, y)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville les conditions initiales pour ce type d'EDF ,on utilise

$$^{RL}D^{r-k} y(0) = b_k \;\; k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1 \;\; \underset{t \to 0}{lim} I^{n-r} = b_n.$$

De la même manière

$$^{c}D^r y(t) = f(t, y)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo, et dans ce cas on utiles comme $y^{(k)}(0) = b_k$.

Existence de solutions

Premièrement, on va définir ce qu'est une solution du problème aux limites

Lemme 1.3.2 *Soit $r > 0$, si nous supposons que $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ Alors l'équaion différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville:*

$$^{RL}D^r u(t) = 0 \ , \ 0 < t < 1$$

admet une solution unique

$$u(t) = c_1 t^{r-1} + c_2 t^{r-2} + c_3 t^{r-3} + ... + c_n t^{r-n}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$ avec $m = 1, 2, ..., n$

Lemme 1.3.3 *Supposant que $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ et $^{RL}D^r u \in C(0,1) \cap L(0,1)$*

Alors

$$I^r D^r u(t) = u(t) + c_1 t^{r-1} + c_2 t^{r-2} + c_3 t^{r-3} + ... + c_n t^{r-n}$$

Lemme 1.3.4 *Soit $1 < r \leq 2$ et $y \in C([0,1])$ Alors l'unique solution de problème au limites*

$$\begin{cases} ^{RL}D^r u(t) + y(t) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

est donné par

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) y(s) ds,$$

tel que

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(r)} \begin{cases} t(1-s)^{r-1} - (t-s)^{r-1} & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s)^{r-1} & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

1.3.5 Equation différentielle de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo

Existence de solution

Lemme 1.3.5 *Soit $r > 0$,si nous supposons que $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ Alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo:*

$$^{c}D^{r}u(t) = 0 \quad 0 < t < 1$$

admet une solution unique.

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$ avec $m = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Lemme 1.3.6 *Supposons que $u \in C^m([0,1])$. Alors*

$$I^r \ {}^{c}D^{r}u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$ avec $m = 1, 2, ..., n-1$.

Lemme 1.3.7 *Soit $1 < r \leq 2$ et $y \in C([0,1])$. Alors l'unique solution du problème au limites*

$$\begin{cases} {}^{c}D^{r}u(t) = y(t) \quad 0 < t < 1 \\ u(0) + u'(0) = 0 \quad u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

est donné par

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) y(s) ds$$

tel que

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{r-1} + (t-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} + \frac{(1-t)(1-s)^{r-2}}{\Gamma(r-1)} & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \frac{(1-t)(1-s)^{r-1}}{\Gamma(r)} + \frac{(1-t)(1-s)^{r-2}}{\Gamma(r-1)} & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires:

Corollaire 1.3.1 *Soit* $r = n$ $n \in \mathbb{N}$ *ou* $r \in \mathbb{C}$ *tel que* $n-1 < r < n$ *et* $g(t) \in L[a,b]$, *si* $a(t) \in L^{\infty}[a,b]$ *est borné dans* $[a,b]$,*alors le problème de Cauchy pour les équations différentiels linéaires suivant d'ordre* r *et* $b_k \in \mathbb{C}$

$$D^r y(t) = a(t)y(t) + g(t) \qquad D_{+a}^{r-k} y(a+) = b_k$$

admet une unique solution $y(t)$ *dans l'espace* $L^r(a,b)$

on pratique, il existe une unique solution y(t) dans l'espace $L^r(a,b)$ pour le problème:

$$D^r y(t) = \lambda(t-a)^{\beta} y(t) + g(t), D_{+a}^{r-k} y(a+) = b_k \qquad \lambda, \beta \in \mathbb{C}$$

Corollaire 1.3.2 *Soit* $r = 1$,$r \in \mathbb{C}$,$0 < r < 1$ *et* $b_0 \in \mathbb{C}$ *et* $g(t) \in L(a,b)$,*si* $a(t) \in L^{\infty}([a,b])$*est borné dans* $[a,b]$,*alors le problème de Cauchy*

$$D^r y(t) = a(t)y(t) + g(t) \quad I_{+a}^{1-r} y(a+) = b_0$$

et le problème de Cauchy

$$D^r y(t) = a(t)y(t) + g(t), \lim_{t \to a} [(t-a)^{1-r} y(t) = c$$

admet une unique solution$y(t)$ *dans l'espace* $L^r([a,b])$.

Chapitre 2

Mesure de non compacité

2.1 Notations et définitions

Dans cette section,nous rassemblons quelques définitions et notations que nous utilisons par la suite

Soit$(X, \|.\|)$ un espace de Banach, notons par A un sous -ensemble de X,et ∂A la frontière de A

De plus,rappelons le diamètre da A

$$diam(A) = \sup\{\| x - y \|; x, y \in A\}$$

$$dist(x, A) = \inf\{\| x - y \|; x, y \in A\}$$

Si A est un sous-ensemble de X,alors $\overline{A}$ est $\overline{convA}$ sont la fermeture et l'adhérence de l'enveloppe convexe de A respectivement notons par

$$B_r(X, A) = B_r = B_r(X, A) = \{x \in X \ ; \| x - a \| \leq r\} \qquad B_1(X) = B(X) \ = B_X$$

la boule fermée dans X de centre a et de rayon r et

$$B_r(X) = \partial B_r = \{x \in X \ ; \| x \| = r\} \qquad S_1(X) = S(X) = S_X$$

la sphère dans X

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infini et on noté l'ensemble des opérateur linéaire de X dans Y par $L(X, Y)$,nous mettons $\mathcal{L}(X) = L(X, X)$.

2.2 Compacité(Rappel)

Définition 2.2.1 *Une classe de sous-ensemble de E, S'appelle une couverture d'un ensemble G de E, si nous avons*

$$G \subset \underset{j}{\cup} U_j$$

Définition 2.2.2 *Soit U un ensemble d'un espace normes X, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e,*

$$\begin{aligned} \forall V_j \ ,j \quad &\in \quad J \ (ouverts), \ U \subset \cup V_j \ \exists V_j(k) \quad j(k) = 1, 2, ..., n \\ tel \ que \ \ U \quad &\subset \quad \overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} V_{j(k)} \end{aligned}$$

Définition 2.2.3 *Un ensemble U est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dans U contient une sous-suite converge vers un élément dans U.*

Théorème 2.2.1 *Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.*

Définition 2.2.4 *Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.*

Définition 2.2.5 *Un sous ensemble G d'un espace normé est totalement borné si il existe une suite finie i,e:*

$$\forall \epsilon > 0, \ G \subset \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} B(\varphi_j, \epsilon).$$

Théorème 2.2.2 *Tout ensemble borné de dimension finie d'un espace normes est relativement compact.*

2.3 Compacité dans $C(G)$

Théorème 2.3.1 (*Arzela-Ascoli*)

Un ensemble $U \subset C(G)$est relativement compact si et seulement si les conditions suivantes sont vérifie i.e:

1. L'ensemble U est borné.S'il existe une constante M telle que:

$$| \varphi(x) | \leq M, \ \textit{Pour tout } x \in K \textit{ et } \varphi \in U.$$

2. L'ensemble U est équicontinu pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$tel que

$$| x - y | < \delta \Rightarrow | \varphi(x) - \varphi(y) | \leq \epsilon \quad x, y \in \mathbb{C} \ et \text{ pour tout } \varphi \in U.$$

Définition 2.3.1 *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normes X dans un espace normes Y , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans X un ensemble relativement compact $A(G)$ dans Y .*

Théorème 2.3.2 *Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$ de X, la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous-suite convergente dans Y, Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.*

Définition 2.3.2 *Un ensemble $G \subset X$ est relativement compact si pour tout suite $\{\varphi_n\}$ il existe une sous suite $\{\varphi_{n(k)}\}$ qui converge dans Y.*

2.4 Mesure de non compacité

La mesure de non compacité est un outil très utile dans les espaces de Banach. Ils sont largement utilisé dans la théorie du point fixe, les équations différentielles, les équations fonctionnelles, les intégrales et équations integro-différentielles, optimisation, et la théorie des opérateurs,..., etc. Au cours des dernières années.

2.4.1 Mesure de non compacité en général

Avant de rappeler la mesure de non compacité,on note par $(X, \|.\|)$ un espace de Banach ,nous désignous par M_X la famille des sous-ensembles bornés non vide de X,et par N_X la famille des sous ensemble relativement compacts de X, et lenveloppenent convexe d'un ensemble $A \subset X$ notons par $conv(A)$.

Définition 2.4.1 *Une application $\mu : M_X \rightarrow [0,+\infty[$ est appellée la mesure de non-compacité dans l'espace X, qui satisfait les conditions suivantes:*

la famille $ker(\mu) := \{D \in M_X$ tel que $\mu(D) = 0\} \neq \emptyset$,et $ker(\mu) \subset N_x$(est appelé le noyau de MNC)

Pour $A, B \in M_X$,satisfait les propriétés suivantes :

1. Si $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$
3. $\mu(\overline{convA}) = \mu(A)$
4. $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B)$, $\lambda \in [0,1]$
5. μ est dit semi- norme si $\begin{cases} \mu(\lambda A) =\mid \lambda \mid \mu(A) & (\mu \textit{ est dit homogène}) \\ \mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B) & (\mu \textit{ est dit subadditif}) \end{cases}$
6. Si (A_n) ensemble de suites de M_X tel que $A_{n+1} \subset A_n(n = 1, 2, ...n)$et $limite_{n\rightarrow\infty}$ $\mu(A_n) = 0$, alors $A_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *et* $A_\infty \in \ker(\mu)$

Définition 2.4.2 *Une mesure de non compacité est appelée une mesure avec propriété maximale si* $\max(\mu(A), \mu(B)) = \mu(A \cup B)$.

Définition 2.4.3 *Une mesure de non compacité est dite régulière si $Ker(\mu) = N_X$,subliné et possède une propriété maximale.*

Définition 2.4.4 *Une mesure de non compacité est dit Lipschitzienne si elle satisfait la condition de Lipschitz*

$$\begin{aligned} & \mid \quad \mu(A) - \mu(B) \mid\leq \mu(\ B(X))d_H(A,B) \\ avec\ d_H(A,B) &= \max\{\sup_{x\in A} d(x,A), \sup_{a\in A} d(y,B)\} \\ & \quad et\ B(X)\ la\ boule\ fermée\ dans\ X\ et\ de\ centre\ X\ et\ de\ rayon\ 1 \end{aligned}$$

2.4.2 Mesure de non compacité de Kuratowskii

Nous présentons dans cette section quelques propriétés fondamentales de la MNC de Kuratowskii et Hausdorff.

Définition 2.4.5 *La MNC de Kuratowskii est l'application α définie sur M_X dans $\mathbb{R}^+$par*

$$\alpha(B) = \inf\{\forall\varepsilon > 0\ ,B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i\ ;\ diam(B_i) < \varepsilon\}$$

Où:

$$\alpha(B) = \inf\{\epsilon > 0 : B\ admet\ une\ recouvrement\ fini\ par\ des\ ensemble\ de\ diamètre < \epsilon\}$$

avec B est sous ensemble de X et $B \in M_x$

Lemme 2.4.1 *La mesure de non compacité de Kuratowskii satisfait les propriétés suivantes:*

1. Pour $A, B \in M_x$ dans une espace métrique (X, d)

   (a) $\alpha(B) = 0 \Leftrightarrow \overline{B}$ *compact.*

   (b) $\alpha(B) = \alpha(\overline{B})$.

   (c) $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$.

   (d) $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

   (e) $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

2. Pour $A, B \in M_x$ dans une espace normes (X, d)

   (a) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.

   (b) $\alpha(B + x) = \alpha(B)$ *pourchaque* $x \in X$.

   (c) $\alpha(\lambda B) = |\lambda|\, \alpha(B)$ *pourchaque* $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (d) $\alpha(B) = \alpha(co(B))$.

Preuve.

1. Si (X, d) espace complet B relativement compact$\Leftrightarrow$ B totalement borné d'ou

$$\forall\varepsilon > 0,\ B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i\ ;\ diam(B_i) < \varepsilon$$

1. d'où l'égalité (a).

2. Tout recouvrement de B est un recouvrement de A

   d'où l'égalité (c)

3. i) de (c) $B \subset \overline{B} \Rightarrow \alpha(B) \leq \alpha(\overline{B})$

   ii)$\forall \epsilon > 0$,$\exists B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ $\quad et\ diam B_i \leq \alpha(B) + \epsilon$

   comme $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ .Alors $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{B}_i\ et\ diam(B_i) = diam(\overline{B}_i)$.

   $Alors\ \alpha(\overline{B}) \leq \alpha(B)$

   de i) et ii) donc l/égalité (b)

4. i)de (c) ,on a $B \subset A \cup B$ et $A \subset A \cup B \rightarrow \alpha(B) \leq \alpha(A \cup B)\ et\ \alpha(A) \leq \alpha(A \cup B)\ et\ si$

   $$\max\{\alpha(A), \alpha(B)\} \leq \alpha(A \cup B)$$

   ii)Si $\max\{\alpha(A), \alpha(B)\} = s\ et\ \epsilon > 0$ nous savons que A et B *admet une recouvrement fini par des ensembles de diamétre plus petit* que $s + \epsilon, B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ et $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_i$ De toute évidence, l'union de ces couvertures est une couverture finie de $A_j \cup B_i = C_{ij}$ diam$(C_{ij}) < s + \epsilon$ par conséquent $\alpha(A \cup B) \leq s + \epsilon$

   de i) et ii) *donc l/égalité* (d)

5. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ de (a) on a $\alpha(A \cap B) \leq \alpha(A)$ et $\alpha(A \cap B) \leq \alpha(B)$ et donc

   $$\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$$

   d'où l'égalité (e)

6. Soit $A_i$sous suite borné de X diam$(A_i) < \epsilon$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.en outre soit B_j sous suite borné de X $diam(B_j) < d$ pour tout $j = 1, ..., m$ et $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_i.on$ a

   $$\alpha(A + B) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i + B_j) \text{ et } diam(A_i + B_j) < \epsilon + d$$

   les ensemble $(A_i + B_j)$ recouverment la somme $(A + B)$; d'où *l/égalité* (a)

7. Pour $x \in X$ et de (a) on a i)

$$\alpha(B+x) \leq \alpha(B) + \alpha(\{x\}) = \alpha(B)$$

et ii)

$$\alpha(B) = \alpha((B+x) + \alpha(-x)) \leq \alpha(B+x) + \alpha(\{-x\}) = \alpha(B+x)$$

de i) et ii) on a (b)

8. pour $\lambda = 0$, *l'égalité est evident* , Si $B_i$sous suite borné de X $diam(B_i) < \epsilon$ pour tout $i = 1, ..., m$ et $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_i.\lambda \in A$, $\lambda B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} \lambda B_i$ et $diam(B_i) = diam(\lambda B_i)$ d'on il suit que $\alpha(\lambda B) \leq\mid \lambda \mid \alpha(B)$,mesures on a

   si $\lambda \neq 0, \alpha(B) = \alpha(\lambda^{-1}(\lambda B)) \leq\mid \lambda^{-1} \mid \alpha(\lambda B)$,c'est $\mid \lambda \mid \alpha(B) \leq \alpha(\lambda B)$ donc l'égalité (c)

9. Clairement $\alpha(B) \leq \alpha(co(B))$ on démontre que $\alpha(co(B)) \leq \alpha(B), pour\ B_i$ sous suite borné de X $diam(B_i) < d$ pour tout $i = 1, ..., n$ et $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ on a:

$$co(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in co(B_i)(i = 1, ..., n) \right\}.$$

$$pour \epsilon > 0 \ et\ B = \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_n) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, (i = 1, ..., n) \right\}.$$

   Puis B sous suit compact de $(\mathbb{R}^n, \| . \|_\infty)$ *où* $\| (\lambda_1, ..., \lambda_n) \| = \max_{1 \leq i \leq n} \mid \lambda_i \mid$.

■

Définition 2.4.6 *Soient X, Y deux espace de Banach,et $\alpha(.)$ la mesure de nous compacité de Kuratowskii,et S, A des opérateurs linéaires définis de X vers Y bornés,$D(A) \subset D(S)$,l'opérateur S est relativement borné par rapport à A(où A_α borné),s'il existe des constante $a_s > 0$ et $b_s > 0$,tel que*

$$\alpha(S(\mathcal{D})) \leq a_s \alpha(\mathcal{D}) + b_s \alpha(A(\mathcal{D})) \tag{2.4.1}$$

Où $\mathcal{D}$ sous suite borné de $D(A)$ .Le minimum des constantes b_s qui satisfaite (2.4.1) pour certains a_s est appelé A_α borné de S.

En général, la somme des opérateurs fermables ou fermés n'est pas fermable ou fermée, respectivement.

2.4.3 Mesure de non compacité de Hausdorff

Définition 2.4.7 *La mesure de non compacité de Hausdorff d'un sous ensemble borné B d'un espace de Banach est définie par :*

$$\chi(B) = \inf\{\varepsilon > 0,\ B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i\ ), x_i \in X,\ r_i < \varepsilon, \quad (i = 1\ , ..., n)\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Où

$$\chi(B) = \inf\{\varepsilon > 0, B\ admet\ un\ recouverement\ fini\ des\ boules\ de\ rayons < \varepsilon\}.$$

Avec M_X est la famille des sous ensembles bornés de X et $B \in M_X$

Lemme 2.4.2 *La MNC de Hausdroff Satisfait les propriétés suivantes:*

Pour $A, B \in M_X$ dans une espace metrique (X, d)

1. $\chi(B) = 0 \Leftrightarrow \overline{B}$ est $Compact$.
2. $\chi(B) = \chi(\overline{B}) = \chi(co(B))$.
3. $A \subset B \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(B)$.
4. $\chi(A \cup B) = \max\{(\chi A), (\chi B)$.
5. $\chi(A \cap B) \leq \min\{(\chi A), \chi(B)\}$.

Pour $A, B \in M_x$ dans un espace normé (X, d)

1. $\chi(A + B) \leq \chi(A) + \chi(B)$.
2. $\chi(B + x) = \chi(B)$, pour chaque $x \in X$.

3. $\chi(\lambda B) = |\lambda|\,\chi(B)$, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.4.1 *Si (X, d) un espace métrique et $A, B \in M_X$, N_X^c l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides et compacts de (X, d).tels que*

$$| \chi(A) - \chi(B) | \leq d_H(A, B),$$

$$\chi(A) = d_H(A, N_X^c)$$

Où $d_H : M_X \times M_X \to \mathbb{R}$ défini par

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A} d(x, A), \sup_{y\in B} d(y, B)\right\}.$$

2.4.4 Mesure de non compacité sur les Opérateurs

Jusqu'à présent, la MNC des sous-ensembles bornés dans l'espace métrique.Maintenant on définir la MNC des opérateurs entre les espaces de Banach .

Définition 2.4.8 *Soit $\mu_1$et μ_2 deux mesures de non compacité défini ci-dessus sur les espaces de Banach X et Y, respectivement.Soit $T : X \to Y$ un opérateur.Alors*

- *T est appelé (μ_1,μ_2)-opérateur contracton avec la constatant $k > 0$(ou simplement $k-$(μ_1,μ_2)$-$ contraction) si T continu et*

  $$\mu_2(T(B)) \leq k\mu_1(B) \text{ pourchaque } B \in M_X.$$

  on pratique,si X=Y et μ_1=$\mu_2 = \mu$ Alors nous disons T est un $k-\mu-$opérateure.contraction.

- *T est appelé (μ_1,μ_2)-opérateur condensant avec la constant $k > 0$(ou simplement $k-$(μ_1,μ_2) $-$ condensing) , si T continu et*

  $$\mu_2(T(B)) \leq k\mu_1(B) \text{ pour chaque non précompact } B \in M_X.$$

  On pratique,si $X = Y$ et μ_1=$\mu_2 = \mu$, Alors nous disons que T est un $k - \mu -$ condensing operateur.en outre,si $k = 1$,nous disons que T est un $k-\mu-$condensing opérateur.

  Si un opérateur T est (μ_1,μ_2)-contracton,puis le nombre $\| T \|_{\mu_1,\mu_2}$défini sur

  $$\| T \|_{\mu_1,\mu_2} = \inf\{k \geq 0 : \mu_2(T(B)) \leq k\mu_1(T(B)) \text{ pour chaque } B \in M_X$$

est appelé (μ_1,μ_2) *opérateur normé de* T*, où* $(\mu_1,\mu_2)-$*mesure de non compacité de T, ou simplement mesure de non compacité , si* $\mu_1=\mu_2 = \mu$ *, Alors nous disons que* $\| T \|_\mu$ *au lieu de* $\| T \|_{\mu,\mu}$ *Que nous appelons comme* $\mu -$ *norm de* T.

Dans un espace de dimension infinie X *et* Y *, Pour toute mesure arbitraire de non compacité* μ, $\| T \|_\mu$ *Peut être exprimé par la formule équivalente*

$$\| T \|_\mu = \sup \left\{ \frac{\mu(T(B))}{\mu(B)}, B \in M_X, \mu(B) > 0 \right\}.$$

La définition et le théorème suivant sur la mesure de non compacité de Hausdorff et Kuratowskii sur les opérateurs

Définition 2.4.9 • *Soit* $T : D(T) \subseteq X \to X$ *un opérateur continue et* $\alpha(.)$ *la MNC de Kuratowskii dans* X *,*

i) *soit* $k \geq 0$ T *est dite* $k -$ *ensemble* $-$ *contraction si pour chaque sous ensemble borné de* A *et* $D(T), T(A)$ *sous ensemble borné de* X *et* $\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A)$.

ii) *T est dit Condensation Pour tous le sous-ensemble A de D(T) tel que* $\alpha(A) > 0$, *T(A) est un sous-ensemble borné et*

$$\alpha(T(A)) \leq \alpha(A).$$

- Soit $T : D(T) \subseteq X \to X$ opérateur continu et $\chi(.)$ la (MNC) de Hausdorff dans X ,soit $k \geq 0$ T est dit k-boule-contraction si pour chaque sous ensemble borné de A de $D(T), T(A)$ sous ensemble borné de X et

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A).$$

Théorème 2.4.2 *Soient* X *,*Y *et* Z *des espaces de banach, soient*$T \in B(X,Y)$ *et* $\widetilde{T} \in B(Y,Z)$, *puisque*$\| . \|_\chi$*est un semi-norm sur* $B(X,Y)$ *et*

$$\| T \|_\chi = 0 \Longleftrightarrow T \in C(X,Y).$$

$$\| T \|_\chi \leq \| T \| .$$

$$\| T + K \|_\chi = \| T \|_\chi \quad K \in C(X,Y).$$

$$\| T \circ \widetilde{T} \|_\chi \leq \| T \|_\chi \| \widetilde{T} \|_\chi .$$

Théorème 2.4.3 *Soient X et Y deux espaces de banach et $T \in B(X,Y)$,alors*

$$\| T \|_{\chi} = \chi(T(S_X) = \chi(T(B_X)).$$

Remarque 2.4.1 *i) Si $k < 1$, Alors tous les opérateur $k - ensemble - contracion$ est condense.*

ii)Chaque opérateur de condensation est $1 - ensemble - contraction$.

Soit

$$T \in \mathcal{L}(X), \alpha(T) = \inf\{k \; telqueTestk - ensemble - contraction\}.$$

$$\chi(T) = \inf\{k \;, tel \; queT \; est \; k - ensemble - contraction\}.$$

Lemme 2.4.3 *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$, on a*

(i) $\frac{1}{2}\alpha(T) \leq \chi(T) \leq 2\alpha(T)$.

(ii) $\alpha(T) = 0 \;\Leftrightarrow \chi(T) = 0 \Leftrightarrow T$ *est compact.*

(iii) *Si B un sous ensemble borné de X,$\alpha(T(B)) \leq \alpha(T)\alpha(B)$.*

Chapitre 3

Mesure de non compacité et leur application sur EDF$_S$

Dans ce chapitre on essaye d'applique la notion de la mesure de non compacité sur les problèmes de type d'une équation différentielle d'ordre fractinnaire

3.1 Quelques théorèmes de point fixe

Pour résoudre des équations différentielle d'ordre fractionnaire où le deuxiéme mêmbre est non linéaie, nous besoin des théorie du point fixe

Définition 3.1.1 *L'application $T : C \subset E \to E$ est dite une $\alpha_E -$ contraction s'il existe une constante positive $k < 1$ telle que:*

$$\alpha_E(T(W)) \leq k\alpha_E(W) \qquad \forall (W \ \textit{fermé et borné})$$

Théorème 3.1.1 (Mönch) *Soit D un sous-espace fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E, tel que $0 \in D$ et soit N une application continue de D dans D. Si l'implication*

$$V = \overline{convN(V)} \ \ ou \ V = N(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0$$

est vérifiée pour tout sous ensemble V de D, alors N admet un point fixe dans D.

Théorème 3.1.2 (Darbo-Sadovskii) *Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E et soit l'application continue $T : C \to C$ une α_E- contraction, alors T admet au moins un point fixe dans C.*

Théorème 3.1.3 (Darbo généralisé) *Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E et soit l'application continue*

$$T : C \to C$$

satisfaisant :

$$\mu(T(W)) \leq \Phi\mu(W), \qquad \forall W \subset C$$

où μ est une mesure de non compacité arbitraire et $\Phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$, une fonction strictement croissante(non nécessairement continue), avec

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(t) = 0 \ , \ \forall t \in [0,\infty[$$

Alors, T admet au moins un point fixe dans C.

Lemme 3.1.1 *Soit D un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach $C(I,E)$ et soit G une fonction continue de $I \times I$ et $f \ : I \times E \to E$ une fonction qui satisfait les conditions de Carathéodory, et il existe $p \in L^1(I;\mathbb{R}+)$ telle que pour tout $t \in I$, et tout sous ensemble borné $B \subset E$, on a*

$$\lim_{h\to 0^+} \alpha(f(I_{t,h} \times B)) \leq p(t)\alpha(B); \ I_{t,h} = [t-h,t] \cap I.$$

Si V un sous ensemble équicontinu de D, alors

$$\alpha\left(\left\{\int_I G(t,s)f(s,y(s))ds : y \in V\right\}\right) \leq \int_I \parallel G(t,s) \parallel p(s)\alpha(V(s))ds.$$

3.2 Application de (MNC) pour l'existance de solution des EDF$_s$

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour les problèmes aux limites.

on considère l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$^{c}D^{r}y(t) = f(t,y), \qquad \forall t \in I = [0,T]\ , 1 < r < 2 \tag{3.2.1}$$

$$y(0) = y_0 \;\; y(T) = y_T \tag{3.2.2}$$

dans lesquel

$^{c}D^{r}$est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ;

$f : I \times E \to E$ est une fonction donnée, satisfaisant quelques hypothèses qui seront spécifiées plus tard, et E est un espace de Banach avec la norme $\| \, . \, \|$.

Cette étude est basé sur les travaux de R.P.Agarwal , la mesure de non compacitté est souvent utilisée dans différentes branches d'analyse non linéaire,spécialement dans l'existence de solution de différentes types d'équations intégrales.la mesure de non compacité associée au théorème de point fixe de Mönch vont nous permettre d'établir l'existence de solution de problem (3.2.1)(3.2.2)

3.2.1 Existence de solutions

Premièrement, on va définir ce qu'est une solution du problème aux limites (3.2.1)(3.2.2)

Définition 3.2.1 *Une fonction $y \in AC(I,E)$ est dite une solution du problème (3.2.1)(3.2.2) si y satisfait l'équation*

$$^{c}D^{r}y(t) = f(t,y)$$

sur I avec les conditions $y(0) = y_0 \;\; y(T) = y_{T.}$

Lemme 3.2.1 *Soit $1 < r < 2$ et h:$I \to E$ une fonction continue. Une fonction y est dite solution de l'équation intégrale fractionnaire :*

$$y(t) = g(t) + \int_0^T G(t,s)h(s)ds$$

où

$$g(t) = (1 - \frac{t}{T})y_0 + \frac{t}{T}y_T$$

et

$$G(t,s) = \frac{1}{T(r)} \begin{cases} (t-s)^{r-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0 \le s \le t \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{r-1} \ , & t \le s \le T \end{cases}$$

si et seulement si y est une solution du problème aux limites

$$^cD^r y(t) = h(t) \quad , t \in J$$
$$y(0) = y_0, \; y(T) = y_T$$

Preuve. On utilise le lemme (1.3.7) on reduit le probleme (3.2.1)(3.2.2) à une équation intégrale équivalente

$$\begin{aligned} ^cD^r y(t) &= h(t) \\ &\Leftrightarrow I^r \, ^cD^r y(t) = I^r h(t) \\ &\Leftrightarrow y(t) + c_0 + c_1 t = I^r h(t) \\ &\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t h(s)(t-s)^{r-1} ds + c_0' + c_1' t, \end{aligned}$$

avec

$$c_0' = -c_0 \; et \; c_1' = -c_1,$$

on a

$$y(0) = c_0' = y_0$$

et

$$y(T) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t h(s)(T-s)^{r-1} ds + c_0' + c_1' T$$

Ce qui implique que

$$c_1' = \frac{y(T)}{T} - \frac{y(0)}{T} - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^T h(s)(T-s)^{r-1} ds.$$

Donc

$$y(T) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^T h(s)(T-s)^{r-1} ds + y_0 + \frac{y_T t}{T} - \frac{y_0 t}{T} - \frac{1}{T\Gamma(r)} \int_0^T h(s)(T-s)^{r-1} ds$$

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\int_0^t h(s)((t-s)^{r-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{r-1}) ds - \frac{t}{T} \int_t^T (T-s)^{r-1}) h(s) ds \right) + (1 - \frac{t}{T}) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

C'est à dire

$$y(t) = \int_0^T G(t,s) h(s) ds + g(t)$$

avec

$$g(t) = (1 - \frac{t}{T}) y_0 + \frac{t}{T} y_T$$

et

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(r)}\begin{cases}(t-s)^{r-1}-\frac{t}{T}(T-s)^{r-1}, & 0<s<t\\ -\frac{t}{T}\int_t^T(T-s)^{r-1}), & t<s<T\end{cases}$$

■

Comme la fonction $G(t,s)$ est continue sur $[0,T]\times[0,T]$,on note par:

$$G^*=\sup\{\parallel G(t,s)\ \parallel,(t,s)\in I\times I\ \}.$$

La fonction g est contiue sur I,donc il existe:

$$g^*=\sup\{\parallel g(t\ )\parallel,t\in I\ \}$$

Pour établir le résultat principal concernant l'existence des solutions de (3.2.1)(3.2.2),considérons les hypothèses suivantes sur f :

(H1) $f:I\times E\to E$ satisfait aux conditions de Carathéodory.

(H2) Il existe $p\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ tel que:

$$\parallel f(t,y)\parallel\leq p(t).\parallel y\parallel,\text{pour tout } t\in I \text{ et pour tout } y\in E.$$

(H3) $\forall t\in I$ et pour tout ensemble borné $B\subset E$, on a

$$\lim\alpha(f(I_{t,h}\times B))\leq p(t)\alpha(B),\ \ I_{t,h}=[t-h,t[\cap I.$$

Théorème 3.2.1 *On suppose que les hypothéses (H1)-(H3) vérifiée,et que:*

$$G^*\int_0^T p(s)ds<1.$$

Alors,le problème aux limites (3.2.1)(3.2.2)admet au moins une solution.

Preuve. On transforme le problème (3.2.1)(3.2.2) au problème du point fixe, on considérons l'opèrateur

$$\begin{aligned}N\quad &:\quad C(I,E)\to C(I,E)\\ y\quad &\to\quad (Ny)(t)=g(t)+\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds\end{aligned}$$

Le point fixe de N est un solution du problème (3.2.1) et (3.2.2).

Soit:

$$R \geq \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s)ds}$$

et on considère l'ensemble:

$$D_R = \{y \in C(I, E), \| y \|_\infty \leq R\}$$

D_R est fermé,borné et convexe.

But:

Afin de prouver l'existence de point fixe de N,on doit montrer que N satisfait les hypothèses du théorème (3.1.1). La preuve se fait en trois étapes:

1. *Continuité de N*

   Soit $\{y_n\}$ une suite, telle que:

$$y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y \text{ dans } C(I, E)$$

   Donc $\forall t \in I$, on a

$$\|(Ny_n)(t) - (Ny)(t)\| = \left\| \int_0^T G(t,s)f(s, y_n(s))ds - \int_0^T G(t,s)f(s, y(s))ds \right\|$$

$$\leq \int_0^T \|G(t,s)\| \, \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| \, ds$$

$$\leq G^* \int_0^T \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| \, ds$$

   Comme f est de Carathéodory,on a f mesurable par rapport à y,donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

   Donc:

$$\lim_{n \to \infty} \| (Ny_n)(t) - (Ny)(t) \| \leq G^* \int_0^T \lim_{n \to \infty} \| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \| \, ds \leq 0$$

Donc

$$\| (Ny_n)(t) - (Ny)(t) \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où la continuité de N.

2. *N applique D_R dans D_R*

   Soit $y \in D_R$,pour tout $t \in I$, on a:

$$\begin{aligned}
\| (Ny)(t) \| &= \left\| g(t) + \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) ds \right\| \\
&\leq \| g(t) \| + \int_0^T \| G(t,s) \| \| f(s, y(s)) ds \| \\
&\leq g^* + G^* \int_0^T p(s) \| y \| \, ds \ (par\ (H_2)) \\
&\leq g^* + RG^* \int_0^T p(s) d \\
&\leq R \left(car\ R \geq \frac{g^*}{1 - G^* \int_0^T p(s) ds} \right).
\end{aligned}$$

   Donc

$$\| N(T) \| \leq R.$$

   C'est à dire

$$(Ny)(t) \in D_R \Rightarrow N(D_R) \subset D_R.$$

3. *Bornitude et équicontinuité de $N(D_R)$*

   Par l'étape 2, on a

$$N(D_R) = \{ N(y) \ : y \in \ D_R \} \subset D_R.$$

   Donc $\forall y \in D_R$ on a

$$\| N(y) \|_\infty \leq R.$$

   donc $N(D_R)$ est borné.

   pour l'équicontinuité de $N(D_R)$, soit $t_1, t_2 \in I$ alors:

$$\| N(y)(t_2) - N(y)(t_1) \| \underset{t_1 \to t_2}{\longrightarrow} 0.$$

   Donc, $N(D_R)$ est équicontinue.

   Maintenant, soit V un sous ensemble de D_R tel que:

$$V \subset \overline{conv(N(V)} \cup \{0\}.$$

V est borné et équicontinue.

En plus, la fonction $v \to v(t) = \alpha(V(t))$ est continue sur I.

Puisque g est continue sur I, elle est bornée sur I. Donc l'ensemble $\overline{\{g(t); t \in I\}}$ est compact.

En utilisant $(H3)$, le lemme (3.1.1) et les propriétés de la mesure α on a, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha(V(t)) \\ &< \alpha(N(V)(t) \cup \{0\}) \\ &\leq \alpha(N(V)(t)) \end{aligned}$$

car $\alpha(N(V)(t) \cup \{0\}) = \max\{\alpha(N(V)(t)), \alpha(\{0\})\}$

on a:

$$\begin{aligned} (N(V)(t) &= \left\{g(t) + \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\right\} \\ &= \{g(t), t \in I\} + \left\{\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha((N(V)(t)) &= \alpha\left(\{g(t), t \in I\} + \left\{\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\right\}\right) \\ \alpha((N(V)(t)) &\leq \alpha(\{g(t), t \in I\}) + \alpha\left(\left\{\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\right\}\right) \\ &\leq \alpha\left(\left\{\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds, y \in V\right\}\right) \\ &\leq \int_0^T (\| G(t,s) \| p(s)v(s))ds \\ &\leq G^* \| v \|_\infty \int_0^T p(s)ds \end{aligned}$$

Car $G^* \int_0^T p(s)ds < 1$.

On a alors $\| v \|_\infty = 0$,c'est à dire $v(t) = 0, \ \forall t \in I$

i.e $\alpha(V(t)) = 0$

Donc $V(t)$ est relativement compact dans E.

Par le théorème d'Ascoli-Arzelà,V est relativement compact dans D_R(car $V \subset D_R$.est borné et équicontinue).

Puisque toutes les hypothèses du théorème (3.1.1) sont satisfaites, l'application N admet par conséquent un point fixe qui est solution pour le probléme (3.2.1)(3.2.2).

■

Conclusion

Le travail qu'on a fait dans ce mémoire à un résultat trés important c'est l'etude sur l'existence de solutions d'un équation différentiel d'ordre fractionnaire où le deuxième mêbre est non linéaire. utilisons la théorie de point fixe et de prouver que l'opérateur différentiel est un opérateur contractant utilisons les propriétés de la mesure de non compacité au lieu les propriétés topologiques.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, M.Benchohra, et D.Seba, On the Application of Measure of Noncompactness to the Existence of Solutions for Fractional Differential Equations, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, vol 55 (2009), 221–230.

[2] Y.Arioua, cour sur les equations différentielles fractionnaires,université de M'sila, 2016

[3] J.M. Ayerbe ,T. Dominguez, G. Lopez Acedo, Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Springer BaselAG, 1997

[4] J. Banas's et M.Mursaleen, Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations , Springer India, 2014

[5] M.Nadir, Cours sur les équations intégrales, université de M'sila, 2016

http://www.mostefanadir.com/Integral%20Equations.htm

[6] G. Faccanoni, cour sur les équations différentielles ordinaires, Université de Toulon, Année 2015 – 2016

[7] A. Jeribi,Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices, Springer International Publishing Switzerland, 2015

[8] M.Nadir, Généralité sur les équations différentielles ordinaires, université de M'sila, 2016

http://www.mostefanadir.com/Differential%20Equations.htm

[9] M. M.Gheziel, Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires dans des espaces de Banach, Mémoire de Master, université de Tlemcen, 2015.

[10] S,Mehdi,équations différentielles dans un espaces de Banach,Mémoire de Master, université de Tlemcen, 2012.

[11] L. Pujo-Menjouet, cour sur les Equations différentielles ordinaires et partielles, Université Claude Bernard, Lyon I, 2006

Résumé

Le principe de point fixe est très important dans la résolution d' équations différentiellesd'ordre fractionnaire au sens de Caputo non linéaires, en particulier, dans l'étude del'existence et de l'unicité.

Dans ce mémoire, on va aborder problèmes fractionnaires en démontrant l'existence de solutions via les théorèmes de point fixe de Mönch et combinés avec les mesures de non compacité de Kuratowskii .

Abstract

The fixed point principle is very important in the resolution of nonlinear fractional order differential equations, in the sense of nonlinear Caputo, especially in the study of existence and uniqueness.

In this memory, we consider different fractional problems. We prove theexistence of solutions by using Mönch's fixed point theorem with Kuratowskii measure of non compactness.