

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Stabilisation De L 'equation Des Ondes avec des
Coefficients Constantes.*

Présentée par :

BOUSSADIA NOUARI

Soutenu le :10/06/2024

Devant le jury composé

| | | |
|---|----------------------|-------------------|
| <i>M^r Saadi Abderachid</i> | Université de M'sila | President. |
| <i>M^r Khadraoui Abdelmalek</i> | Université de M'sila | Encadreur. |
| <i>M^r Seghiri Fakhreddine</i> | Université de M'sila | Examineur. |

Année universitaire2023/2024

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement, à Allah le tout puissant de m'avoir donné courage et patience au cours de cette année pleine d'évènements passionnants . Je suis heureux d'exprimer au Dr. Khadraoui Abdelmalek, ma gratitude pour la convenance qu'il m'a accordé. Je remercie pour sa disponibilité et pour ses conseils très éclairés. Aux membres de jury :Mr Saadi Abderachid etMr Seghiri Fakhreddine .

nous vous remercions de l'honneur que vous nous avez fait en acceptant de siéger dans le jury de notre mémoire. Enfin, je ne saurais jamais suffisant remercie. à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail

Dédicace

Ce travail n'est pas encore arrivé, les prières de l'honorable père, que Dieu prolonge sa vie, honore la mère, que Dieu ait pitié d'elle et aide l'honorable épouse.

ainsi que mes fils Ikram Saif Al-Din, Tariq, et Ahmed Moataz Billah et mon collègue Mouafak Azedine, et merci à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin

boussadia nouari

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Dédicace | ii |
| Notation | v |
| Introduction générale | 1 |
| 1 Préliminaires | 2 |
| 1.1 Espaces Fonctionnels | 2 |
| 1.1.1 Espaces des fonctions continues et l^p | 2 |
| 1.1.2 Les espaces Sobolov | 3 |
| 1.2 Quelques inégalités et formules utiles | 4 |
| 2 Quelque méthodes pour démontre l'existence et l'unicité d'une solution | 5 |
| 2.1 Théorème de Lax-Milgram [17] | 5 |
| 2.2 Opérateur maximal monotone | 8 |
| 2.3 Théorie de semi-groupes | 10 |
| 3 Inégalités intégrales et stabilité | 15 |
| 3.1 Cas dissipatif | 15 |
| 3.2 Cas non dissipatif | 18 |
| 3.3 Problème de l'équation des ondes | 20 |
| 3.4 Existence et unicité de solution du (P) | 21 |
| 3.5 Stabilité de (P) | 25 |
| Conclusion | 28 |
| Résumé | 1 |
| Bibliographie | 2 |

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

| | |
|--------------------------------|---|
| H | espace de Hilbert. |
| P | problème de l'équation des ondes . |
| $\ u\ _{L^\infty}$ | $= \inf\{C : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$. |
| $D(A)$ | : domaine de définition d'un opérateur A . |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | : Définit un produit scalaire. |
| \mathbb{N} | ensemble des entiers naturels. |
| \mathbb{N}^* | ensemble des entiers naturels non nuls. |
| \mathbb{R} | ensemble de réels. |
| \mathbb{R}_+ | ensemble de réels positifs. |
| $\overline{\mathbb{R}}$ | droite réels achevée, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. |
| \mathbb{R}^n | espace euclidien de dimension n . |
| x | vecteur de \mathbb{R}^n , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. |
| $ x $ | norme euclidienne de x , $ x = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. |
| Ω | ouvert borné de \mathbb{R}^n . |
| $\Gamma = \partial\Omega$ | frontière de Ω |
| ν | le vecteur unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω . |
| ∇u | gradient de u , $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$. |
| $divv$ | divergence du vecteur v , $divv = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n}$. |
| Δu | laplacien de u , $\Delta u = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2})$. |
| $\partial_\nu u$ | $= \frac{\partial u}{\partial \nu}$ la dérivée normale de u . |
| $C^0(\Omega)$ | espace de fonctions continue sur Ω |
| $C^k(\Omega)$ | espace de fonctions continues sur Ω dont les dérivée partielles. |
| | d'ordre $\leq k$ sont continues sur Ω , k entier positif . |
| $C^\infty(\Omega)$ | l'espace $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$ |

- $L^0(\Omega)$ ensemble des fonctions mesurable sur Ω .
 $L^p(\Omega)$ $L^p(\Omega) = u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable ; $\int_{\Omega} |u(x)|^p < \infty$ ($1 \leq p < \infty, constant$).
 $L^\infty(\Omega)$ $L^\infty(\Omega) = u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable ; $\exists c \geq 0$ tel que $|u(x)| \leq c \forall x \in \Omega$
 p' conjugué de Hölder de $p, p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$.
 $D(\Omega)$ espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω à support compact dans Ω
 $D'(\Omega)$ espace des distributions dans Ω .
 $W^{m,p}(\Omega)$ espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens des distributions
 $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.
p.p presque partout .
 $\|\cdot\|_E$ la norme dans l'espace E.

+

Introduction générale

La compréhension des phénomènes du monde réel ainsi que le développement de la technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles (E.D.P) et un problème d'équations aux dérivées partielles consiste à se donner, en plus des équations proprement dites, soit des conditions initiales soit des conditions aux limites, soit les deux. Dans ce mémoire on étudie le Problème de la stabilité de l'équation des ondes suivant :

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + bu + g(u_t) = 0, & t \geq 0, \quad a > 0, \quad b \geq 0, \quad x \in \Omega \quad , \\ u = 0, & t \geq 0, \quad x \in \Gamma \quad , \\ u(0, x) = u_0, \quad u_t(0, x) = u_1. \end{cases}$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné de frontière Γ de classe $C^2(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ des donnée initiale.

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue, croissante et linéaire
et vérifie : $\exists c_1, c_2 > 0; c_2 |s| \leq |g(s)| \leq c_1 |s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

et cet problème a été étudié par Patrick Marinez [19], Aïssa Guesmia [2] et Salim Moussaoudi [20] et autre. Ce mémoire comprend trois chapitres ordonné comme suit, le premier chapitre contient les notions et rappelons quelque définition et théorèmes d'analyse fonctionnelle que nous utiliser dans cette mémoire. dans le deuxième chapitre on donne quelque méthodes pour démontré l'existence et l'unicité d'un solution et le troisième chapitre on donne quelques inégalité intégrales appliquées dans les deux cas (dissipative et non dissipative) et montrons l'insistance et l'unicité du Problème (P) ainsi que la stabilité exponentielle

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on présente quelques notions fondamentales, espaces de Sobolev et des inégalités qui sera utilisées dans ce mémoire

1.1 Espaces Fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions continues et l^p

Définition 1.1 (*espace $C^k(\Omega)$*)

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $k \in \mathbb{N}$ On désigne par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω dans \mathbb{R} , k fois continument dérivables ,

et par $C^\infty(\Omega)$ on désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

On désigne par $C_c^k(\Omega)$ les éléments de $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω

On désigne par $C_c^\infty(\Omega)$ les éléments de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω

Définition 1.2 (*espaces $L^p(\Omega)$*)

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $p \in [1, +\infty[$. On définit $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{mesurable tel que } \int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty : L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ verifiant } |f| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$.

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{c \in \mathbb{R}^+ : |f| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach, et l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

1.1.2 Les espaces Sobolov

Les espaces Sobolov $W^{m,p}(\Omega)$

Soient Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$).

On note : $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

$W^{m,p}(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ virifiant}$

$$\int_{\Omega} v(x)\varphi(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha(x)D^\alpha \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

On pose $g_\alpha = D^\alpha v$ et on note

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

,

ou de la norme équivalente : $\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}$, si $1 \leq p < \infty$,

et $\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}$, si $p = +\infty$.

Remarque 1.1 .

1. $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$

2. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

On munit l'espace $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \dots$$

On a : $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport é la norme engendrée.

On définit l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. par la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Si Ω est de classe C^1 , alors :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

1.2 Quelques inégalités et formules utiles

Inégalité de Hölder

Soient $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in L^1(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)ds \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Pour $p = p' = 2$, on obtient l'inégalité en de **Cauchy-Schwarz**, si, $u \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)ds \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inégalité de Young

Supposons que $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué en de p , i.e, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Rappelons **inégalité en de Young**

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \forall a \geq 0, \forall b \geq 0.$$

Exemple 1.1 Pour $p = p' = 2$, inégalité précédente s'écrit sous la forme

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

Exemple 1.2 Pour $p = \frac{4}{3}$ et $p' = 4$ on obtient

$$ab \leq \frac{3}{4}a^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}b^4.$$

Inégalité de Poincaré

soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Il existe une constante $c > 0$ vérifiant :

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \text{ où } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Cette inégalité montre que $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme $H_0^1(\Omega)$ équivalente la norme de $H^1(\Omega)$, et par conséquent $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx,$$

où le \cdot signifie le produit scalaire dans \mathbb{R}^n ($X \cdot Y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$).

Définition 1.3 Formule de Green

Soient $f, g \in H^1(\Omega)$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné) de frontière Γ de classe C^1 . Alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} f(x) g(x) v_i(x) dx.$$

QUELQUE MÉTHODES POUR DÉMONTRE L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ D'UNE SOLUTION

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques méthodes pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution.

2.1 Théorème de Lax-Milgram [17]

Nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V. \quad (2.1)$$

Les hypothèses sur a et L sont

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} et il existe $C > 0$ tel que

$$|L(v)| \leq C \|v\| \text{ pour tout } v \in V$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est-à-dire que $w \rightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $v \in V$, et $v \rightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $w \in V$
3. $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a(w, v)| \leq M \|w\| \|v\| \text{ pour tout } w, v \in V$$

4. $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $c > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq c \|u\|^2 \text{ pour tout } u \in V$$

Théorème 2.1 Lax-Milgram :

Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V , $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V . Alors la formulation variationnelle 2.1 admet une solution unique. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L .

Exemple 2.1 :

Soit $f \in L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n et sa frontière Γ de classe C^1

on considère le problème : (1)
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Soit u une solution de (1) Alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)\varphi = \int_{\Omega} f\varphi dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

En utilisant la formule

$$\int_{\Omega} (\Delta u)\varphi = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx$$

on obtient : $-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi + \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) = \int_{\Omega} f\varphi, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

d'où la formule variationnelle

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) = \int_{\Omega} f\varphi, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

on pose $H = H^1(\Omega), V = H_0^1(\Omega)$

$$a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + uv) dx$$

$$\ell : H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \ell(v) = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx.$$

on voit que a est bien défini, bilinéaire .

Continue :

$$\begin{aligned}
|a(u, \varphi)| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi) \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \right| + \left| \int_{\Omega} u \cdot \varphi \right| \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \varphi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) (\|\nabla \varphi\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2}) \\
&\leq \|u\|_H \|\varphi\|_H, \forall u, \varphi \in H \text{ (donc } M=1 \text{ la continuité énoncée)}.
\end{aligned}$$

coercive :

$$|a(u, u)| = \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + u^2 dx \right| = \|u\|_H^2, \forall u \in H$$

D'autre part ℓ est bien défini, linéaire et continue :

$$\begin{aligned}
|\ell(\varphi)| &= \left| \int_{\Omega} f\varphi dx \right| = |f, \varphi|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_H = B \|\varphi\|_H \forall \varphi \in H.
\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de Lax-Milgram ;

$\exists ! u \in H$ vérifiant (1), c-a-d

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi) dx = \int_{\Omega} f\varphi dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

2.2 Opérateur maximal monotone

Soit H une espace de Hilbert et $A : D(A) \longrightarrow H$ un opérateur donné ou $D(A)$ est son domaine de définition défini par $D(A) = \{u \in H \quad tq \quad Au \in H\}$.

Définition 2.1 :

On dit que A est monotone si

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq 0, \quad \forall u, v \in D(A).$$

Remarque 2.1 :

Si A est linéaire, alors A est monotone si $\langle Au, u \rangle_H \geq 0, \quad \forall u \in D(A)$.

Définition 2.2 :

On dit que A est maximal si $I_d + A : D(A) \longrightarrow H$ est surjectif; c'est-à-dire

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \quad tq : u + Au = f.$$

Proposition 2.1 :

Soit H un espace de Hilbert (réel). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est maximal monotone dans H .
2. $(I + \lambda A)^{-1}$ est de contraction pour tout $\lambda \geq 0$.
3. A est monotone est il existe λ positif tel que $(I + \lambda A)$ est surjectif.

Théorème 2.2 :

Supposons que A est maximal monotone Alors :

1. Pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, le système

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

admet une solution unique $u \in C(\mathbb{R}_+, H)$ (c'est dire $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+ : \|u(t) - u(t_0)\|_H \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow t_0$). la solution u est dite faible (u n'est pas dérivable au sens classique mais vérifie 2.2 au sens des distributions $\langle u'(t) + Au(t), v \rangle_H = 0, \forall v \in H$).

2. Si A est linéaire et $u_0 \in D(A)$, alors $u \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$ la solution u est dite classique .

Remarque 2.2 *Si A est linéaire, alors $\overline{D(A)} = H$.*

Remarque 2.3 :

Si A est linéaire, alors on a le résultat plus général que (3) suivant :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u_0 \in D(A^n), u \in \bigcap_{k=0}^n C^{n-k} R_+, D(A^k)$ ou $D(A^0) = H, D(A^1) = D(A),$

$D(A^n) = \{u \in D(A^{n-1}) \quad tq \quad Au \in D(A^{n-1})\}, \quad \forall n \geq 1$ et

$$\|u\|_{D(A^n)} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2 + \|A^2u\|_H^2 + \dots + \|A^nu\|_H^2}.$$

2.3 Théorie de semi-groupes

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni de la norme $x \rightarrow \|x\|_H$. On désigne par $L(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H en lui même .

$L(H)$ est un espace de Banach pour la norme $S \rightarrow \|S\|$ définie par :

$$\|S\| = \sup_{\|x\|_H=1} \|Sx\|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|_H}{\|x\|_H}. \quad (2.3)$$

Définition 2.3 On appelle l'application $S : [0, +\infty[\rightarrow L(H)$ *semi-groupes fortement continu dans H* si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $S(0) = I_d$.
2. $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t \geq 0, \forall s \geq 0$.
3. $\forall x \in H$, l'application $S(\cdot)x$ est continue sur $S : [0, +\infty[$ dans H .

Dans la suite, on appelle une telle application *semi-groupes de classe C_0* et on la note par C_0 -semi-groupe .

Proposition 2.2 Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupes dans H , alors l'opérateur adjoint $(S^*(t))_{t \geq 0}$ est aussi semi-groupes de classe C_0 dans H .

Lemme 2.1 Soit $S(t)$ un C_0 -semi-groupes alors

$$\exists M \geq 1, \exists \omega \in \mathbb{R} \quad \text{telle que :} \quad \|S(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

Démonstration. Considérons le compact $[0, 1]$, comme $(S(t))_{t \geq 0}$ est fortement continue, alors l'application $t \mapsto S(t)x$ est continue. Donc l'image de $[0, 1]$ par cette application est compacte, et par conséquent

$$\exists M_x \text{ telle que : } \|S(t)x\| \leq M_x, \quad \forall t \in [0, 1].$$

D'après le théorème de **Banach-Steinhaus** :

$$\exists M \text{ tel que : } \|S(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, 1].$$

On remarque que la constante $M \geq 1 (1 = \|S(0)\| \leq M)$.

Maintenant si $t \notin [0, 1]$, on écrit $t = n + \theta$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, 1[$ donc

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n + \theta) \\ &= S(n)S(\theta) \\ &= (S(1))^n S(\theta) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|S(t)\| &= (S(1))^n S(\theta) \leq \|S(1)\|^n \|S(\theta)\| \\ &\leq M^n M \\ &\leq M e^{n \log M}\end{aligned}$$

On pose $\log M = \omega$, donc

$$\|S(t)\| \leq M e^{n\omega} \leq M e^{t\omega} \blacksquare$$

Remarque 2.4 Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu à l'origine vérifiant la majoration 2.4, alors il est fortement continu.

Démonstration.

– Si $s \geq 0$:

$$\|S(t+s)x - S(t)x\|_H = \|S(t) \cdot S(s)x - S(t)x\|_H.$$

On pose $y = S(t)x$ donc

$$\|S(t+s)x - S(t)x\|_H = \|S(s)y - y\|_H \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$$

(car $(S(t))_{t \geq 0}$ est fortement continue à l'origine).

– Si $s < 0$:

$$\begin{aligned}\|S(t+s)x - S(t)x\|_H &= \|S(t+s)x - S(-s)S(t+s)x\|_H \\ &= \|-S(t+s)[S(-s)x - x]\|_H \\ &\leq \|S(t+s)\|_H \|S(-s)x - x\|_H \\ &\leq M e^{\omega(t-s)} \|S(-s)x - x\|_H \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0.\end{aligned}$$

Maintenant on va voir que l'estimation 2.4 peut être améliorée. En effet, posons

$$\omega(t) = \log \|S(t)\|, \forall t > 0 \text{ et } \omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{\omega(t)}{t}.$$

Soit $\epsilon \geq 0$ suffisamment petit, alors il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que :

$$\frac{\omega(\alpha)}{\alpha} \leq \omega_0 + \epsilon$$

Soit $t = k\alpha + r$ avec $k \in \mathbb{N}^*, 0 < r < \alpha$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{\omega(t)}{t} &= \frac{\omega(k\alpha + r)}{k\alpha + r} \\ &\leq \frac{k\omega(\alpha) + \omega(r)}{k\alpha + r} \\ &\leq \omega_0 + \epsilon + \frac{\omega(r)}{t}\end{aligned}$$

d'où

$$\|S(t)\| \leq Me^{t(\omega_0+\epsilon)}.$$

Si en plus $\omega_0 = -\infty$, alors il existe $N > 0$ telle que $\|S(t)\| \leq Me^{-tN}$. ■

Définition 2.4 On dit que $S(t)$ est un semi-groupes borné si

$$\exists M \geq 0 \text{ telle que } \|S(t)\| \leq M, \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.5 :Si $M \leq 1$, $S(t)$ est dit de contraction.

Définition 2.5 Soit $S(t)$ est C_0 -semi-groupes, et soit $Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}$. L'opérateur A est un opérateur linéaire et continue. On défini son domaine A par :

$$D(A) = \left\{ x \in H, \text{telque : } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}.$$

L'opérateur A est appelle générateur infinitésimal de semi-groupe $S(t)$ sur H .

Proposition 2.3 Pour tout $x \in D(A)$, vérifiant $S(t)x \in D(A)$, on a :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Démonstration. Soit $x \in D(A)$. Posons $y(t) = S(t)x, \forall t \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t) \frac{S(h)x - x}{h} \\ &= S(t)Ax. \end{aligned}$$

De même manière on a aussi :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t) - S(t)}{h} x \\ &= AS(t)x. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3 Si A est un générateur infinitésimal de semi-groupe $S(t)$, alors est un opérateur fermé.

Démonstration. Pour la démonstration, voir [10]. ■

Proposition 2.4 *Le domaine $D(A)$ d'un générateur infinitésimal A de semi-groupe $S(A)$ est un espace vectoriel dense dans H .*

Démonstration. Pour la démonstration, voir [10]. ■

Corollaire 2.1 *Soit $S(t)$ est C_0 -semi-groupe sur H de générateur infinitésimal A . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, le système :*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

admet une solution unique $u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ donnée par

$$u(t) = S(t)u_0. \quad (2.6)$$

Démonstration. Pour la démonstration, voir [7]. ■

Corollaire 2.2 *Supposons que u_0 dans $D(A)$ et f est continue sur \mathbb{R}_+ , alors*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^{+\infty} S(t-s)f(s)ds \quad (2.7)$$

est la solution du système non homogène suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), & \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Exemple de semi-groupes

Exemple 2.2 : Soit H espace de Hilbert, soit A un opérateur linéaire continue sur H . Alors

$$S(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i A^i}{i!}$$

est un C_0 -semi-groupes puisque :

$$S(0) = I, S(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} = S(t)S(s) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{At}x - x}{t} = Ax$$

Donc A est générateur infinitésimal d'un semi-groupes $S(t)$

Exemple 2.3 : Soit $H = C([-\infty, +\infty])$ l'espace des fonctions uniformément continues muni de la norme $\|x(t)\| = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$. Soit $(S(t)x)(s) = x(t+s)$. Alors $S(t)$ est un opérateur linéaire de C_0 -semi-groupes, et son générateur infinitésimal est défini par :

$$Ax = \frac{d}{ds}x.$$

Exemple 2.4 : Soit $H = C([-\infty, +\infty])$ et $\|x(t)\| = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$. Soit $K_t(y) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$ pour tous $y \in]-\infty, +\infty[$ et $t > 0$. On pose $S_s(t)x = \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(s-y)x(y)dy, \quad \forall t \succ 0$. L'opérateur $S(t)$ est un semi-groupes de classe C_0 et A son g générateur infinitésimal est donné par : $Ax = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2}x$.

Exemple 2.5 : Soit ℓ_2 l'espace défini par :

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty \right\}$$

$(S(t)x)_n = \left(e^{-\frac{t}{n}} x_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un C_0 -semi-groupes et $(Ax)_n = \left(-\frac{x_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est son g générateur infinitésimal.

INÉGALITÉS INTÉGRALES ET STABILITÉ

Dans ce chapitre, on donne quelques inégalité intégrales appliquées dans les deux cas (dissipatif et non dissipatif).

3.1 Cas dissipatif

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement appliquées à la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs.

Les résultats des nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants, dérivés de A. Haraux, V. Komornik et P. Martinez.

Lemme 3.1 (Haraux 1978, Komornik 1994 et Martinez 1998 [2]) Soit $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ tel que : $\phi(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$.

Supposons que : $\exists p \geq 0$ et $d > 0$ tel que :

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t) E^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0) E(s), \forall s \geq 0.$$

Alors :

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0)e^{1-d\phi(t)} & \forall t \geq 0 \text{ si } p = 0 \\ E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+p\phi(t)} \right)^{\frac{1}{p}} & \forall t \geq 0 \text{ si } p > 0 \end{cases}$$

Cas particuliers

1. $\phi(t) = t$ et $p = 0$:

$$E(t) \leq E(0)e^{1-dt}, \quad \forall t \geq 0$$

estimation exponentielle (voir Haraux [6]).

2. $\phi(t) = t$ et $p > 0$:

$$E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+pd} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t \geq 0$$

estimation polynomiale (voir Komornik [18]).

Lemme 3.2 (M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise 2003 [2])

Soit $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante vérifiant :

$$\int_s^{+\infty} \varphi(E(t)) \leq \frac{1}{d}E(s), \quad \forall s \geq 0.$$

où d est un réel strictement positif et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$.

Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 et c_1 tels que

$$E(t) \leq \varphi^{-1} \left(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t} \right), \quad \forall t \geq t_0$$

où $\psi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par :

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\varphi(t)} dt, \quad \forall s > 0.$$

Lemme 3.3 (F. Alabau-Boussouria 2005 [2])

Soit $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante vérifiant :

$$\int_s^{+\infty} E(t)F^{-1}(E(t)) \leq \frac{1}{d}E(s), \quad \forall s \geq 0$$

où $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, b[$ est une fonction strictement croissante vérifiant, pour un réel $b > E(0)$,

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = b$$

Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 et c_1 tels que :

$$E(t) \leq F\left(\frac{1}{\psi^{-1}(c_0 t)}\right), \quad \forall t \geq t_0$$

où $\psi : [c_0 t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\psi(s) = s + \int_{F(\frac{1}{s})}^{c_1} \frac{1}{\varphi(t)} dt, \quad \forall s \geq c_0 t_0$$

3.2 Cas non dissipatif

On rappelle ici quelques inégalités intégrales appliquées à la stabilisation des systèmes d'évolution non dissipatifs.

Lemme 3.4 (Aïssa Guesmia [2])

Soient $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_3, r, p, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Supposons que :

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t) dt \leq a_1 E(s) + a_2 E^{p+1}(s) + a_3 E^{r+1}(t), & \forall 0 \leq s \leq T, \\ E'(t) \leq \lambda E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Si $a_3 \lambda (r+1) < 1$, alors il existe deux constantes strictement positives w et c telles que, $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq ce^{-wt} && \text{si } r = 0, \\ E(t) &\leq c(1+t)^{-\frac{1}{r}} && \text{si } r > 0 \quad \text{et } \lambda = 0, \\ E(t) &\leq c(1+t)^{\frac{-1}{r(r+1)}} && \text{si } r > 0 \quad \text{et } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Lemme 3.5 (Aïssa Guesmia [2])

Soit $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction convexe et strictement croissante vérifiant : $\varphi(0) = 0$.

Supposons que :

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \varphi(E(t)) dt \leq E(s), & \forall s \geq 0 \\ E'(t) \leq \lambda E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Alors E vérifie l'estimation suivante :

$$E(t) \leq e^{\tau_0 \lambda} g^{-1} [e^{\lambda(t-h(t))} \varphi(\psi^{-1}[h(t) + \psi(E(0))])], \quad \forall t \geq 0 \quad (3.1)$$

où :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_t^1 \frac{1}{\varphi(s)} ds, \quad \forall t > 0, \\ g(t) &= \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } \lambda = 0 \\ \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds & \text{si } \lambda > 0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \begin{cases} 0, & \forall t \in [0, T_0], \\ K^{-1}(D(t)), & \forall t > T_0. \end{cases} \\
D(t) &= \int_0^t e^{\lambda s} ds, \forall t \geq 0 \\
K(t) &= D(t) + \frac{\psi^{-1}[t + \psi(E(0))]}{\varphi(\psi^{-1}[t + \psi(E(0))])} e^{\lambda t}, \quad \forall t \geq 0, \\
\tau_0 &= \begin{cases} 0, & \forall t > T_0, \\ T_0, & \forall t \in [0, T_0] \end{cases} \\
T_0 &= D^{-1} \left(\frac{E(0)}{\varphi(E(0))} \right)
\end{aligned}$$

Remarque 3.1 1. **3.1** $\Rightarrow E(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$

2. Si $\lambda = 0$ ($\Leftrightarrow E$ est décroissante) et $\varphi(t) = dt^{r+1}$ avec $p \geq 0$ et $d > 0$, alors

$$\mathbf{3.1} \Leftrightarrow \begin{cases} E(t) \leq E(0)e^{1-dt}, & p = 0 \\ E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+pd} \right)^{\frac{1}{p}}, & p > 0. \end{cases}$$

Stabilisation dissipative du problème (P)

Dans ce chapitre, on donne le résultat d'existence et régularité de solution et on démontre la stabilité du Problème (P) en utilisant la méthode de multiplicateurs et les inégalités intégrales concernant le cas dissipatif données dans le chapitre précédent.

L'objectif de cette partie est d'étudier la question de la stabilité, i.e :

montrer que $E(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ et donner une estimation sur sa vitesse de convergence. E est l'énergie du problème (P) (définie ci-après).

3.3 Problème de l'équation des ondes

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + bu + g(u_t) = 0, & t \geq 0, x \in \Omega \\ u = 0, & t \geq 0, x \in \Gamma \\ u(0, x) = u_0, \quad u_t(0, x) = u_1. \end{cases}$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné de frontière Γ de classe $C^2(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ des donnée

initiale. $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue, croissante et linéaire

et vérifie : $\exists c_1, c_2 > 0; c_2 |s| \leq |g(s)| \leq c_1 |s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

3.4 Existence et unicité de solution du (P)

On pose $z = u' = u_t$

Alors $z' = u'' = u_{tt} = a\Delta u - bu - g(z)$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -a\Delta u + bu + g(z) \end{pmatrix}.$$

$$\text{On pose } U' = \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix}' \text{ et } AU = \begin{pmatrix} -z \\ -a\Delta u + bu + g(z) \end{pmatrix}.$$

on a $U' + AU = 0$.

D'autre pas, on pose :

$$U_0 = U(0, x) = \begin{pmatrix} u(0, x) \\ z(0, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } (P) \Leftrightarrow \begin{cases} U' + AU = 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

et où A un opérateur linéaire tq :

$$D(A) = \{U \in H. tq : AU \in H\}, \text{ Où } H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Domaine de définition $D(A)$

$$\text{On a : } D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tq : } - \begin{pmatrix} z \\ a\Delta u - bu - g(z) \end{pmatrix} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \right\},$$

$$= \{u \in H_0^1(\Omega) \text{ et } z \in L^2(\Omega) ; z \in H_0^1(\Omega) \text{ et } (a\Delta u - bu - g(z)) \in L^2(\Omega)\}.$$

$$\Rightarrow D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

On montre que A est maximal monotone :

1. A est monotone :

$$\text{On a : } \langle Au, u \rangle \geq 0, \forall u \in H.$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \left\langle \begin{pmatrix} -z \\ -a\Delta u + bu + g(z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_H &= \langle -z, u \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle -a\Delta u + bu + g(z), z \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u + \int_{\Omega} [-a\Delta u + bu + g(z)]z \\ &= - \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u + a \int_{\Omega} -\Delta u \cdot z + \int_{\Omega} g(z)z + b \int_{\Omega} uz \\ &= - \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u + a \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} + b \int_{\Omega} uz \\ &= \langle Au, u \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

car (g croissante et on considère la norme équivalent $\int_{\Omega} (a|\nabla u|^2 + bu^2)dx$)

Alors A est monotone .

2. A est maximal :

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

$$\text{on cherche } \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \in D(A) = (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap H_0^1(\Omega) \text{ tq : } U + AU = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}.$$

on a :

$$\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in H \text{ et } \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \in D(A).$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ -a\Delta u + bu + g(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u - z = f, & \dots\dots (1) \\ z - a\Delta u + bu + g(z) = h. & \dots\dots (2) \end{cases}$$

De l'équation (1), nous trouvons

$$\boxed{z = u - f.} \dots (3)$$

En remplaçant (3) dans (2), on trouve :

$$u - f - a\Delta u + bu + g(u - f) = h.$$

$$\Rightarrow \boxed{a\Delta u = u - f + bu + g(u) - g(f) - h.}$$

$$\Rightarrow a\Delta u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$\text{et } z = \underbrace{u}_{\in H_0^1(\Omega)} - \underbrace{f}_{\in H_0^1(\Omega)} \Rightarrow \boxed{z \in H_0^1(\Omega).}$$

$\boxed{\text{alors } A \text{ est maximal.}}$

$$\text{Alors } \forall \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \overline{D(A)} = H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

$$\Rightarrow \exists! U = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \in C(\mathbb{R}_+, H)$$

$\Leftrightarrow \exists! U$ tq :

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \\ \text{et} \\ u' \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \end{cases} \quad \text{solution de (p).}$$

$\Leftrightarrow \exists! u \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ (solution faible).

$$\text{Si } \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega),$$

$$\text{alors } \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}_+, H).$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \in C^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \\ \text{et} \\ u' \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ (une solution classique).

3.5 Stabilité de (P)

On définit une énergie $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de (p) qui doit définir une norme sur H .

Soit $(u_0, u_1) \in H$ et u la solution correspondante

$$u \in C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$$

.

Méthodes de Multiplicateurs :

La méthode des multiplicateurs Consiste en générale à multiplier l'équation Considérée dans système par des fonctions bien choisies (qui dépendent de la solution). Intégrer par parties Sur le Domaine pour montrer que la norme (dans l'espace considéré) de la solution vérifie une inégalité intégrale de type des inégalités et donc pouvoir en déduire une estimation de la stabilité Sur la solution..

$$\text{On a : } \int_{\Omega} [u'' - a\Delta u + bu + g(u')] u' dx = 0$$

d'après la formule de green on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u''u' - a\nabla u \nabla u' + buu' + u'g(u')] dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u' dx &= 0. \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{2}(u')^2\right)' + a\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right)' + b\left(\frac{1}{2}\right)' \right] dx &= - \int_{\Omega} u'g(u') dx \\ \Rightarrow \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} ((u')^2 + a|\nabla u|^2 + bu^2) dx \right]' &= - \int_{\Omega} u'g(u') dx \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u')^2 + a|\nabla u|^2 + bu^2 dx$$

$$\text{et on a : } E'(t) = - \int_{\Omega} u'g(u') dx \leq 0.$$

donc $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante.

Et d'autre côté on a : Soit $0 \leq s \leq T$.

alors :

$$\int_s^T \int_{\Omega} (u'' - a\Delta u + bu + g(u')) u dx dt = 0 \quad 0 \leq S \leq T.$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} [u'u]_s^T dx - \int_s^T \int_{\Omega} (u')^2 dx dt + a \int_s^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt - \int_s^T \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dx dt + b \int_{\Omega} u^2 dx dt = - \int_s^T \int_{\Omega} u g(u') dx dt$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_s^T \int_{\Omega} ((u')^2 + a|\nabla u|^2 + bu^2) dx dt}_{2E(t)} = 2 \int_s^T \int_{\Omega} (u')^2 dx dt - \int_s^T \int_{\Omega} u g(u') dx dt - \int_{\Omega} [u'u]_s^T dx.$$

$$\begin{aligned}
\text{On a : } 2 \int_s^T \int_{\Omega} u' dx dt &\leq \frac{2}{c_2} \int_s^T \int_{\Omega} u' g(u') dx dt \\
&\leq -\frac{2}{c_2} \int_s^T E'(t) dt \\
&\leq -\frac{2}{c_2} [E(T) - E(S)].
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{2 \int_s^T \int_{\Omega} (u')^2 dx dt \leq \frac{2}{c_2} E(s)}. \dots\dots (*)$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
-\int_s^T \int_{\Omega} u g(u') dx dt &= -\int_s^T \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{c_0}} u \right) (\sqrt{c_2} g(u')) dx dt \quad (\text{car } xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \forall x, y \in \mathbb{R}) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_s^T \int_{\Omega} \frac{1}{c_0} u^2 + c_0 g^2(u') dx dt \quad (\text{car } \int_{\Omega} \varphi^2 \leq c_0 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)). \\
&\leq \frac{1}{2} \int_s^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + c_0 c_2 u' g(u') dx dt. \\
&\leq \int_s^T E(t) - c_0 c_2 \int_s^T E'(t) dt
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\int_s^T \int_{\Omega} u g(u') dx dt \leq \int_s^T E(t) dt + C_0 C_2 E(s)}. \dots\dots (**)$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} [u'u]_s^T dx &= \int_{\Omega} u'(s)u(s) dx - \int_{\Omega} u'(T)u(T) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(u')^2(s) + (u')^2(T) + u^2(s) + u^2(T)] dx \\
&\leq E(s) + E(T) + c_0 \int_{\Omega} (|\nabla u(s)|^2 + |\nabla u(T)|^2) dx. \\
&\leq E(s) + E(T) + c_0(E(s) + E(T)). \quad \text{et car : } E(T) \leq E(s)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\int_{\Omega} [u'u]_s^T dx \leq 2(c_0 + 1)E(s)}. \dots\dots (***)$$

donc $\int_s^T E(t) dt \leq \left(\frac{2}{c_0} + c_0 c_2 + 2(c_0 + 1) \right) E(s) + \int_s^T E(t) dt$

On pose : $\frac{2}{c_0} + c_0 c_2 + 2(c_0 + 1) = \frac{1}{d}$,

On trouve :

$$\int_s^T E(t) \leq \frac{1}{d} E(s), \quad \forall s \geq 0,$$

on pose $T = +\infty$,

donc : $\int_s^{+\infty} E(t) \leq \frac{1}{d} E(s), \quad \forall s \geq 0.$

D'après le lemme (3.1)(H.K.M)

$$E(t) \leq E(0)e^{1-dt}, \quad \forall t \geq 0$$

.

On dit que (P) est exponentiellement **Stable** .

Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire Concentrez-vous sur la démonstration de l'existence de la solution et prouver qu'elle est unique et la régularité en utilisant le théorème de l'opérateur du maximal monotone. De plus, nous avons pu prouver la stabilité de la solution. Ces résultats améliorent notre compréhension du problème et confirment la force et la validité de la théorie utilisée. Par conséquent, cette étude constitue une contribution importante au domaine de la recherche et fournit une base solide pour les applications futures et les développements théoriques.

+

Les résumé

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence, l'unicité et la régularité des solutions de (P) ainsi que sa stabilité exponentielle dans le cas dissipatif. la méthode appliquée est basée sur des inégalités intégrales concernant le cas dissipatif. :

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + bu + g(u_t) = 0, & t \geq 0, a > 0, b \geq 0, x \in \Omega \\ u = 0, & t \geq 0, x \in \Gamma \\ u(0, x) = u_0, u_t(0, x) = u_1. \end{cases}$$

Mot-clés

Opérateur maximal monotone, Inégalité Intégrale, Stabilité Exponentielle, équation des ondes.

Abstract

In this dissertation, we studied the existence, the uniqueness and the regularity of the solutions of (P) aswell as its in the dissipative. cas the applied method is based on soure integral inequalities concerning the dissipative case.

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + bu + g(u_t) = 0, & t \geq 0, a > 0, b \geq 0, x \in \Omega \\ u = 0, & t \geq 0, x \in \Gamma \\ u(0, x) = u_0, u_t(0, x) = u_1. \end{cases}$$

Key words

Monotonic Maximal Operator, Integral Inequality, Exponential Stability, Wave Equation

Bibliographie

- [1] A.Guesmia ; Inegalit éns et applications a la stabilisation des syst émes distribu éns non dissipatifs, HDR, LMAM, universit éen paul verlaine-metz, (2006).
- [2] A. Guesmia, Inégalité intégrale et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, thèse d HDR, METZ, 2006.
- [3] A.Guesmia ; Nouvelles inégalités et intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués dissipatifs,C.R.Acard. Sci. Paris, Ser.1336(2003),801-804.
- [4] A. Hareux ; Oscillations forcées pour certains système dissipatifs non linéaire, Laboratoire d'analyse Numérique No.78010,Université Paris 7 (1978).
- [5] A. Hareux ; semi-groupes linéaires et équation d'évolutions linéaire périodiques, Publication du Laboratoire d'analyse Numérique No.78011,Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978).
- [6] A. Haraux, Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps, Port. Math., 46 (3) (1989), 245-258.
- [7] A.Pazy ; Semi Groupe of lineare operator and application to partial differenttial equation. Springer (1983).
- [8] F. Alabau-Boussouria, Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear differential equations and applications 14 (2007), 643-669 .
- [9] F. Alabau Boussouira ; On convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, Appl. Math. Optim, 51 (2005),61-105.
- [10] Hiroki Tanabe ; Equation of evolution, Pitman landon sanfrancisco, Melbourne (1979).
- [11] H. Brezis, Analyse fonctionelle, Masson, paris,1993.
- [12] H. Brezis, Op éérateurs maximaux monotones et semi-groupes dans les espaces de Hilbert, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [13] J. U. Kim et Y. Rnardy ; Boundary control of the timoshenko beam, SIAM J. Control Optim,25,no.6(1987),1417-1429.

- [14] M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise; Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping, *Computational. Appl. Math*, 21 (2002), 135-165.
- [15] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des EDP*, Masson, 1992
- [16] P.Martinez; A new methode to abtain decay rate estimations for dissipative systems, *ESAIM. Control Optim. Calcul Varia*, (1999), 419-444.
- [17] S. Abderachid; *Cours 1^{er} ann éne EDP*, 2023.
- [18] V.Komornik; *Exact controllability and stabilization. The multiplier methode*. Masson John Willey.Paris, (1994).
- [19] P.Martinez, *Stabilization for the wave equation with Neuman boundary stabilization by a locally distributed damping* .*ESAIM : Proceeding 8* (2000), 119-136.
- [20] M.I.Mustafa, S.A.Messaoudi, *General energy decay rates for weakly damped wave equation*, *commun. Math.Anal.*9(2)(2010)67-76.