الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

كلية: العلـــــــــوم.

قسم : الفيـــــــــزياء.

رقم: ..../2024

ميدان: عـــلـــــــــوم المادة

فرع: الفـــيزيـاء.

تخصص: الفيزياء النظرية

مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماستر أكاديمــي

إعداد الطالبتين: بوجمعة فاطمة الزهراء و مومن زينب

تحت عنوان

مفعول اهارونوف_ بوم في فضاء دوسيتر المضاد

تمت المناقشة يوم 11 /2024/06 أمام اللجنة المكونة من:

كريم بوفراش	جامعة المسيلة	رئيســا
صابري يوسف	جامعة المسيلة	مشرفا و مقررا
سليم مجبر	جامعة المسيلة	مناقشا

السنة الجامعية: 2023/2024

بسم الله الرحمن الرحيم

شكر وعرفان

قال رسول الله ﷺ

"من لم يشكر الناس لم يشكر الله"

صدق رسول الله ﷺ

نحمد الله عز وجل الذي وفقنا في إتمام هذا البحث العلمي والذي ألهمنا الصحة والعافية والعزيمة فالحمد لله حمدا كثيرا .

نتقدم بجزيل الشكر والتقدير الى من شرفنا بإشرافه على مذكرة بحثنا الأستاذ الدكتور يوسف صابري والذي لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه على كل ما قدمه لنا من توجيهات علمية ومعلومات قيمة ساهمت وبشكل كبير في إثراء موضوع دراستنا في جوانبها المختلفة و لم يبخل علينا بوقته الثمين كما نتقدم بجزيل الشكر إلى أعضاء لجنة المناقشة الموقرة:

الدكتور الفاضل رئيس اللجنة كريم بوفراش والدكتور الفاضل المناقش سليم مجبر والدكتور المشرف والمقرر صابري يوسف لحضورهم وتقييمهم عملنا المتواضع

كما نتقدم بالشكر الجزيل إلى كل أساتذة قسم الفيزياء النظرية بجامعة محمد بوضياف المسيلة .

إهـــــــداء

الحمد لله وكفى والصلاة على الحبيب المصطفى ومن وفى إما بعد :

الحمد لله الذي وفقنا لتثمين هذه الخطوة في مسيرتنا الدراسية بمذكرتنا هذه ثمرة الجهد والنجاح بفضله تعالى, مهداة إلى الوالدين الكريمين حفظهما الله وأدامهما نورا لدربي.

الى كل العائلة الكريمة التي ساندتني ولا تزال من أخوة و أخوات

إلى سندي زوجي علي

رعاهم الله وحفظهم إلى أولادي قرة عيني حنين و شهد و غيث

الى كل العاملين في قسم الفيزياء وجميع دفعة 2024 بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة

زيــنب

إهـــــــداء

الحمد لله وكفى والصلاة على الحبيب المصطفى ومن وفى أما بعد :

الحمد لله الذي وفقنا لتثمين هذه الخطوة في مسيرتنا

الدراسية بمذكرتنا هذه ثمرة الجهد والنجاح بفضله تعالى,

مهداة إلى الوالدين الكريمين

حفظهما الله وأدامهما نورا لدربي.

لكل العائلة الكريمة التي ساندتني ولا تزال من أخوة و أخوات

إلى أولادي قرة عيني عبد الجليل و عبد المجيب و رتال رعاهم الله وحفظهم

إلى كل قسم فيزياء نظرية وجميع دفعة 2024 بجامعة محمد بوضياف المسيلة

إلى كل من كان لهم اثر على حياتي

والى كل من أحبهم قلبي ونسيهم قلمي

فـطـيـمـة

يعتبر مفعول اهرنوف – بوم احد اهم الظواهر التي اثبتتها نظرية ميكانيك الكم . حيث تم اكتشافها من طرف العالمان اهرنوف وبوم [1] حين اثبتا أن الالكترونات ممكن أن تتأثر فيزيائيا بالحقل الكهربائي او الحقل المغناطيسي رغم انها لا تخضع لهما بشكل مباشر هدا الاكتشاف لم ينل اهتمام الباحثين أنداك إلا في عام 1960 حيث اثبت الباحثان Furry و Romsey [2] ان مفعول اهارونوف بوم هو ظاهرة كمية بحتة وليس لها أي مكافئ كلاسيكي. ميلر[3](1961) أيضا قام بدراسة تأثير تقلبات الفراغ على قابلية حساب مفعول BA, حيث وجد أن مفعول BA موجود حتى عندما تكون هذه الاضطرابات موجودة. بعد دلك اثبتا بشيكينوتامي و تاسي [4] (1961) بان مفعول BA ضروري للتوافق مع مبدأ الارتياب. اخد فاينمان، لايتون وساندز [4] (1964) مفعول BA في كتابهم «محاضرات فاينمان في الفيزياء», حيث شرحوا هذا المفعول جيدا واعتبروه كإثبات لحقيقة الكمون الشعاعي. في تلك الوقت، تم الحصول على بعض النتائج التجريبية المتوافقة مع نظرية BA، وبدا أن الناس يؤمنون بوجود مفعول BA. ومع ذلك أشار اهارونوف وبوم في ورقتهما[5]، انه لا يمكن اعتبار أي من هذه التجارب تأكيدا صحيحا لنظريتهما. كان من الضروري انتظار التجارب الرائعة لتونومورا [8,7,6] و التي تعتبر على الدليل التجريبي الوحيد الذي يؤكد وجود مفعول اهارونوف –بوم.

من ناحية أخرى، في الكثير من ورقهم الأصلية، ركز اهارونوف وبوم [9]على حساب انتشار الجسيمات بواسطة سوليونويد قطره صغير جدا ودلك باستعمال معادلة شرود ينغر. بما انه في العادة تستعمل في هده التجارب الجسيمات الأولية التي لها سبين2 /1، فمن المنطقي التساؤل كيف ياثر ادخال السبين على النتائج؟ للإجابة على هدا السؤال, قام الفورد و فيلساك بدراسة التفاعل بين الخيوط الكسمولوجية و الضوء حيث وجد ان سعة الانتشار لم تتأثر بوجود السبين. هذا العمل ، شجع هاجن [11,10] على اقتراح نموذجا للحقل المغناطيسي مناسبا لمفعول BA حيث قام بإدخال دلتا ديراك لدراسة انتشار جسيمات سبينها يساوي 1/2 . لقد اثبت هاغن أن تأثير دالة ديراك لا يمكن إهماله في وجود السبين, حيث اثبت ان بعض الحلول التي تكون شاده عند المركز تصبح مسيطرة بعيدا عنه وبالتالي تصبح مقبولة فيزيائيا. وبالتالي, فان هده الحلول تؤثر على زاوية الطور ومنه تغير المقطع الفعال لهدا الانتشار.

في السنوات الأخيرة، تمت دراسة العديد من نماذج ميكانيكا الكم المبنية على أساس علاقات التبديل المعدلة من قبل العديد من الفيزيائيين. هذا التعديل لعلاقة التبديل يؤدي إلى ظهور ارتياب صغيري في الموضع مما يؤدي إلى حد أدنى للطول [12] ، [13]. هناك أيضًا علاقات تبديل معدلة تؤدي إلى ظهور قيم قصوى في كمية الحركة [14-21].

بعد إدخال الثابت الكوني في نظرية النسبية العامة لأينشتاين للحصول على حلول كونية ثابتة ، اقترح ديراك [22] دراسة معادلات الفيزياء الذرية في الزمكان بثابت كوني وهو ما يسمى فضاء دي سيتر. كنتيجة لدلك، في ظل وجود ثابت كوني، يجب استبدال النسبية الخاصة العادية لـ Poincaré بنسبية الخاصة de Sitter. ومن المثير للاهتمام، أن جبر DeSitter المشوه له مقياسان ثابتان [23]، سرعة الضوء c ونصف القطر $R = \pm 3 / \Lambda$، حيث ترمز علامة ± لـ AdS و dS، على التوالي. في الآونة الأخيرة ، تم برهن Guo ورفاقه[24] أن هناك تطابقًا بين نموذج سنايدر والنسبية الخاصة DS. علاوة على ذلك، أظهر Mignemi [25] أنه في background لـdS (A) ، يجب تعديل علاقة التبديل بإدخال تعديلات تتناسب مع الثابت الكوني.

في هده المدكرة سنقوم بدراسة تاثير مفعول اهرنوف – بوم على الجسيمات نسبية وعلى وهزاز ديراك ودلك في الفضاء العادي و في فضاء ضد دو سيتر حيث

في الفصل الاول و نقوم بدراسة الجسيمات نسبية في وجود السبين وهزاز ديراك في الفصل الثاني ودلك باستعمال معادلة ديراك في الفضاء العادي حيث نقوم بحلها ثم نستخرج طيف الطاقة.

في الفصل الثالث و الرابع نقوم بإعادة دراسة الفصلين السابقين لكن هده المرة في فضاء ضد دو سيتر. اين تكون علاقة الارتياب لهايزنبرغ معدلة.

الفصل الاول:

تأثير مفعول اهارونوف ـ بوم

على جسيم دو سبين$\frac{1}{2}$

الفصل الأول: تأثير مفعول اهرنوف- بوم على جسيمات ذات سبين$\frac{1}{2}$

في هذا الفصل سنقوم بدراسة مفعول اهارونوف بوم بالنسبة لجسيم دو سبين $\frac{1}{2}$. حيث سنقوم بحل معادلة ديراك واستخراج طيف الطاقة.

1. معادلة ديراك

عند تطبيق مفعول اهرانوف - بوم على جسيم كتلته m في دو سبين $\frac{1}{2}$ أي نطبق حقل مغناطيسي معرف بالعبارة:

$$\vec{B}(r) = \frac{\Phi}{2\pi}\frac{\delta(r-R)}{R}\vec{e}_z \tag{1-1}$$

هدا الحقل مشتق من الكمون الشعاعي التالي

$$\vec{\mathrm{A}} = \frac{\Phi}{2\pi r}\Theta(r-R)\vec{e}_\theta \tag{1-2}$$

حيث$\delta(r-R)$ ويمثلان Θ دالتا Dirac و Heviseid على التوالي . في هده الحالة نحصل على معادلة ديراك بتطبيق مبدأ الارتباط الاصغري فنحصل على المعادلة التالية

$$B.(M+\vec{\gamma}.\vec{\pi}).\Psi = \mathrm{E}.\Psi \tag{1,3}$$

حيث $\vec{\pi} = \vec{\mathrm{p}} - \mathrm{e}.\vec{\mathrm{A}}$ وكداك فرضنا $\hbar = c = 1$. نعرف أن المصفوفات $\beta\gamma^i$,β تعرف بدلالة مصفوفات باولي كما يلي

$$\beta = \sigma_z, \beta.\gamma^i = (\sigma_x, \mathrm{s}.\sigma_y) \tag{1-4}$$

حيث **s** يساوي (1+) بالنسبة للنسبيين UP و يساوي (1-) بالنسبة لسبين down.

بضرب طرفي المعادلة (1-3) في $(M+\beta E-\vec{\gamma}.\vec{\pi}).\beta$ نحصل على المعادلة التالية

$$[E^2-M^2+(\vec{\gamma}.\vec{\pi})(\vec{\gamma}.\vec{\pi})]\Psi=0 \qquad (1\text{-}5)$$

الحد $(\vec{\gamma}.\vec{\pi})(\vec{\gamma}.\vec{\pi})$ يمكن تبسيطه باستخدام الخاصية

$$(\vec{\sigma}.\vec{A}).(\vec{\sigma}.\vec{B})=\vec{A}.\vec{B}+i\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\vec{B}) \qquad (1\text{-}6)$$

حيث

$$\begin{aligned}(\vec{\gamma}\vec{\pi})(\vec{\gamma}\vec{\pi}) &= \pi^2+i\sigma(\vec{\pi}\wedge\vec{\pi})\\ &=(\vec{p}-e\vec{A})^2+(\vec{p}-e\vec{A})\times(\vec{p}-e\vec{A})\\ &=p^2-e(\vec{p}\vec{A}+\vec{A}\vec{p})+(e^2\vec{A}^2)-e\vec{A}\wedge\vec{p}-e\vec{p}\wedge\vec{A} \qquad (1\text{-}7)\\ &=-\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{d\theta}+\nu.\Theta(r-R)\right)^2+\sigma_z\frac{\nu s}{R}\delta(r-R)\end{aligned}$$

نعوض هده العبارة في المعادلة (1-5) احصل على المعادلة التالية

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^2}\left((\frac{d}{d\theta}+\nu\Theta(r-R)\right)^2+k^2-\sigma_z\frac{\nu s}{R}\delta(r-R)\right)\Psi=0 \qquad (1\text{-}8)$$

حيث $k^2=M^2-E^2$ و السبينور

نكتب الآن المركبة الأولى Ψ_1 على شكل السلسة التالية

$$\Psi_1=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f_m(r)e^{im\theta} \qquad (1\text{-}9)$$

بالتعويض في المعادلة (1-8) نجد معادلة الجزء القطري التالية

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}(m+\nu.\theta(r-R))^2+k^2-\sigma_z\frac{\nu s}{R}\delta(r-R)\right)f_m(r)=0 \qquad (1\text{-}10)$$

باستعمال خواص الدالتين Dirac و Heviseid نجد المعادلتين التاليتين

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{(m+\nu)^2}{r^2}+k^2\right)f_m(r)=0 \quad r>R$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m^2}{r^2}+k^2\right)f_m(r)=0 \quad r<R \tag{1-11}$$

بادخال المتغير الجديد نحصل على المعادلتين التاليتين المعادلة بالشكل التالي:

$$\left(y^2.\frac{d^2}{dr^2}+y.\frac{d}{dy}+y^2-(m+\nu)^2\right)f_m(y)=0 \quad r>R$$
$$\left(y^2.\frac{d^2}{dr^2}+y.\frac{d}{dy}+y^2-m^2\right)f_m(y)=0 \quad r<R \tag{1-12}$$

حلول هتان المعاداتين هي

$$f_m(r)=\begin{cases}A_m.j_{|m+\nu|}(kr)+B_m.j_{-|m+\nu|}(kr), & r>R\\ C_m.j_{|m|}(kr), & r<R\end{cases} \tag{1-13}$$

حيث $j_{|m|}(kR)$ تمثل دالة بيسال.

تعديل الحلول :

لاحظنا أن المعادلة تحتوي على دالة ديراك في الحين أن الحلول في المنطقتين لا تتأثران بها. لكن عند البحث عن ثوابت التكامل عند الشروط الابتدائية فان تأثير دالة ديراك يدخل كما يلي:

$$f_m(R-\varepsilon)_{in}=f_m(R-\varepsilon)_{out} \tag{1-14}$$

$$\left[\frac{df_m}{dr}\right]_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}=\frac{\alpha s}{R}f_m(r) \tag{1-15}$$

بتطبيق هدين الشرطين على المعادلة (1-13) نحصل علة المعادلتين التاليتين

$$C_m.j_{|m|}(kR)=A_m\,.j_{(m+\nu)}(kR)+B_m\,.j_{-|m+\nu|}(kR)$$
$$\frac{\alpha s}{R}.j_{|m|}(R)=A_m\,.\partial_R j_{|m+\nu|}(kR)+B_m\,.\partial_R j_{-|m+\nu|}(kR)-C_m\,.\partial_R j_{|m|}(kR) \tag{1-16}$$

للحصول على الحلول نقوم بنشر الدوال حتى الرتبة الاولى حيث دوال بيسال تاخد الشكل التالي

$$j_\nu(kR)\sim\frac{(k.R)^\nu}{2^\nu.\Gamma(\nu+1)}+O(R^{\nu+2})$$
$$\frac{\partial j_\nu(kR)}{\partial R}\sim\frac{k.\nu.(k.R)^{\nu-1}}{2^\nu.\Gamma(\nu+1)}+O(R^{\nu+1}) \quad (1\text{-}17)$$

بتعويض هاتان العبارتان في المعادلتين (1-16) نج

$$\frac{B_m}{A_m}=\frac{|m+\nu|-|m|-\nu s}{|m+\nu|+|m|+\nu s}.\frac{\Gamma(1-|m+\nu|)}{\Gamma(|m+\nu|+1)}.\left(\frac{kR}{2}\right)^{2|m+\nu|}+O\left(R^{|m+\nu|+1}\right) \quad (1\text{-}18)$$

لما R⟶ 0, هذه النسبة تؤول إلى الصفر بسرعة اكبر من$R^{2|m+\nu|}$,الا اذا تحقق الشرط:

$$|m+\nu|=-|m|-\nu s \quad (1\text{-}19)$$

بالإضافة إلى العلاقة ,(1-19) يجب أن نلاحظ أن أس الحد KR في المعادلة (1-18) يجب أن تحقق المتراجحة التالية:

$$2|m+\nu|<|m+\nu|+1 \quad (1\text{-}20)$$

اي:

$$|m+\nu|<1 \quad (1\text{-}21)$$

الدالة $f_m(r)$ في الحالة $r>R$ يمكن كتابتها على الشكل التالي

$$f_m(r)=C_m(\mathrm{kR})^{|m|}\left[\frac{2^{|m+\nu|-m}\,\Gamma(|m+\nu|+1)}{\Gamma(|m|+1)}.\frac{|m+\nu|+|m|+\nu s}{2|m+\nu|}.(\mathrm{kR})^{-|m+\nu|}.j_{|m+\nu|}(\mathrm{kR})\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(1-|m+\nu|)}{2^{|m+\nu|+m}\,\Gamma(|m|+1)}.\frac{|m+\nu|-|m|-\nu s}{2|m+\nu|}.(\mathrm{kR})^{|m+\nu|}.j_{-|m+\nu|}(\mathrm{kR})\right] \quad \mathbf{(1\text{-}22)}$$

من المهم التأكيد هنا أن حل المعادلة (1-12) يكون دائما منتظما إذا تحقق الشرطين(1-19) و (1-21) في وقت واحد. في هذه الحالة يصبح الحل غير المنتظم $j_{-|m+\nu|}(k\mathrm{R})$ مقبول فيزيائيا. يمكن ان نتحقق ان هذين الشرطين يتحققان اذا كان:

$$m=-N,\ N\ \geq 0,\ \ s=-1 \qquad \text{او}$$
او
$$m=-N-1,\ N+1<0,\ \ s=+1 \qquad (1\text{-}23)$$

نلاحظ أن الشرط (1-20) يفرض المتراجحة $\alpha s<0$.مما يجعل دالة دلتا في المعادلة (1-10) كمؤثر جدب, هذا يعني أن الدالة $j_{-|m+\nu|}(k\mathrm{R})$ اكثر تاثيرا من الدالة $j_{-|m+\nu|}(\mathrm{kR})$ في المركز.

المركبة الاولى Ψ_1 تعطى ب:

$$\Psi_1=\sum e^{i\frac{\pi}{2}|m+\nu|}j_{|m+\nu|}(\mathrm{kR})e^{im\theta}+\Theta(s)\Theta(-\alpha)e^{-i(N+1)\theta}e^{i\frac{\pi}{2}(1-\beta^2)}j_{\beta-1}(\mathrm{kR})+\Theta(-\mathrm{s})\Theta(\alpha)e^{-iN\theta}e^{i\frac{\pi}{2}}j_{\beta}(\mathrm{kR}) \qquad (1\text{-}24)$$

الفصل الثـــــاني:

تأثير مفعول اهارونوف - بوم لهزاز ديراك

1. حل معادلة ديراك

معادلة ديراك لجسيم كتلته M بدلالة مركبتي السبينور Ψ تكتب كما يلي :

$$(B\vec{\gamma}\vec{\pi} + BM)\Psi = E\Psi \qquad (1\text{-}1)$$

يمثل الارتباط الاصغري و $\vec{\pi} = (\vec{p} - e\vec{A})$ حيث هو الكمون الشعاعي $\vec{A}$ وهو نفس المعرف في الفصل الاول.

للحصول على معادلة ديراك لهزاز ديراك ثنائي البعد, نقوم تغيير $\vec{p}$ في معادلة ديراك السابقة بالكمية التالية:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - iM\omega\beta\vec{r} \qquad (2\text{-}2)$$

وبالتالي فان معادلة ديراك لهزاز ديراك ثنائي البعد في وجود مفعول AB تكتب كما يلي:

$$E\Psi = [\beta\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r}) + \beta M]\Psi \qquad (2\text{-}3)$$

باستعمال الخاصية $^2 = 1$, فانه يمكننا كتابة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$\beta\,[\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r}) + M - \beta E]\Psi = 0 \qquad (2\text{-}4)$$

بضرب المعادلة في المؤثر

$$[\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r}) - M - \beta E]\beta$$

نحصل على المعادلة التالية

$$[\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r})\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r}) - M^2 + E^2]\Psi = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

نحسب اولا الحد الأول في الجانب الأيس

$$\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r})\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r}) = \vec{\gamma}.\vec{\pi}.\vec{\gamma}.\vec{\pi} - iM\omega\vec{\gamma}.\vec{\pi}.\vec{\gamma}.\beta\vec{r} - iM\omega\vec{\gamma}.\beta\vec{r}.\vec{\pi}.\vec{\gamma} - M^2\omega^2\vec{\gamma}\beta\vec{r}.\vec{\gamma}.\beta\vec{r}$$

$=$

بتطبيق خواص المصفوفات Gamma التالية

$$\gamma_x\gamma_y - \gamma_y\gamma_x = \tfrac{i}{2}\delta^{xy}$$
$$\gamma_x\gamma_y - \gamma_y\gamma_x = \tfrac{i}{2}\delta^{xy} \qquad (2\text{-}8)$$

وكذاك عبارة الكون الشعاعي في الإحداثيات الكارتيزية التالية

$$eA = \begin{Bmatrix} eA_x = \dfrac{-\alpha y}{x^2+y^2} \\ eA_y = \dfrac{\alpha x}{x^2+y^2} \end{Bmatrix}$$

نجد عبارة الحد الأول التالية

$$\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r})\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\beta\vec{r}) = \vec{\gamma}.\vec{\pi}.\vec{\gamma}.\vec{\pi} - M\omega^2 r^2 + 2M\omega s[L_z + \alpha] \qquad (2\text{-}7)$$

حيث $L_z = xp_y - yp_x$

بتعويض (2-7) في المعادلة(2-5), نحصل على المعادلة التالية:

$$[\vec{\gamma}.\vec{\pi}.\vec{\gamma}.\vec{\pi} \ - M^2\omega^2 r^2 + 2M\omega[1 - s(L_z + \alpha)]\ \beta + E^2 - M^2]\ \Psi = 0 \qquad (2\text{-}8)$$

كما رأينا في الفصل الأول, فان

$$\vec{\gamma}.\vec{\pi}.\vec{\gamma}.\vec{\pi} = \ -\pi^2 + es\sigma_z H\ , L_z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (2\text{-}9)$$

بالتعويض المعادلة السابقة نحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} + i\right)^2 - M^2\omega^2 r^2 + E^2 - M^2 + 2M\omega\ \left(1 - s(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial r} + \nu)\right)\sigma^3\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha s}{R}\ \delta(r - R)\ \sigma^3\right]\ \Psi = 0 \qquad (2\text{-}10)$$

نلاحظ أن المعادلة الأخيرة تحتوي على حد يعبر عن ارتباط السبين بالعزم المغناطيسي.

نعرف المركبة الأولى كالتالي:

$$\Psi_1 = \ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m\,(r)e^{im\theta} \qquad (2\text{-}11)$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل معادلة الجزء القطري التالية:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - M^2\omega^2 r^2 - \frac{(m+\nu)^2}{r^2} + E^2 - M^2 + 2M\omega\ \big(1 - s(m+\nu)\big)\right.$$
$$\left. - \frac{\nu s}{R}\ \delta(r - R)\ \right] f_m(r) = 0 \qquad (2\text{-}12)$$

هده المعادلة تكتب في المنطقتين كالتالي:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\lambda^2r^2-\frac{m^2}{r^2}+k_{int}{}^2\right]f_m(r)=0 \qquad , \quad r< R \tag{2-13}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\lambda^2r^2-\frac{(m+\nu)^2}{r^2}+k_{int}{}^2\right]f_m(r)=0 \quad , \quad r> R \tag{2-14}$$

حيث:

$$k_{out}{}^2=E^2-M^2+2M\omega[1-s(m+\nu)] \tag{2-15}$$

$$k_{int}{}^2=E^2-M^2+2M\omega(1-sm), \qquad \lambda^2=\ M^2\omega^2 \tag{2-16}$$

الحل العام للمعادلة القطرية في المنطقتين يعطى بدلالة الدالة الفوق هندسية المتقاربة, حيث يعطى في المنطقة ب $r>R$

$$f_m(r)=\ \exp\left(-\frac{M\omega}{2}r^2\right).\left[A_m.r^{|m+\nu|}._1F_1\left(\frac{|m+\nu|+1-\frac{k_{out}{}^2}{2M\omega}}{2},|m+\nu|+1,M\omega r^2\right)\right.$$
$$\left.+B_mr^{-|m+\nu|}{}_1F_1\left(\frac{1-[m+\nu]-\frac{k_{out}{}^2}{2M}}{2},1-\ |m+\nu|\ ,M\omega r^2\right)\right] \tag{2-17}$$

و في المنطقة $r<R$ ب

$$f_m(r)=C_m.\exp\left(-\frac{M\omega}{2}r^2\right).r^{|m|}._1F_1\left(\frac{|m|+1-\frac{k_{out}{}^2}{2M\omega}}{2},|m|+1,M\omega r^2\right) \tag{2-18}$$

حيث C_m وA_mB_m ثوابت

كما راينا في الفصل السابق فان تأثير دالة دلتا يأخذ في عين الاعتبار في علاقات الاستمرارية (1-14) و (1-15).

في التقريب الاصغري, الدالة الفوق هندسية المتقاربة ومشتقها الأول يكتبان كالتالي:

$$F_1[(\alpha,c,M\omega r^2)]_{r=R}\ \approx 1 \tag{2-19}$$

$$\left[\frac{d_1F_1(a,c,M\omega r^2)}{dr}\right]_{r=R}=\frac{2a}{c}M\omega R \tag{2-20}$$

وبالتالي فان المعادلة (1-14) تصبح:

$$C_mR^{|m|}=\ A_mR^{|m+\nu|}+\ B_mR^{-|m+\nu|} \tag{2-21}$$

بتطبيق المعادلتين (1-14 و(1-15) نحصل على الدالة الغير مقننة $f_m(r)$ للحالة $R<r$ (عند الرتبة الأولى بدلالة R)

$$f_m = R^{|m|} e^{-\frac{M\omega}{2}r^2} \left(R^{-|m+\nu|} \frac{|m| + |m+\nu| + \nu s + R^2 M\omega \left[\frac{|m|+1 \frac{K^2{}_{in}}{2M}\ 1-|m+\nu| - \frac{K^2{}_{out}}{2M\omega}}{|m|+1 \quad 1-|m+a|} \right]}{2|m+\nu| + R^2 M\omega \left[\frac{-\frac{K^2}{2M\omega} - \frac{K^2}{2M\omega}}{|m+\nu|+1 \quad 1-|m+\nu|} \right]} \right.$$

$$\times r^{|m+\nu|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}\left[|m+\nu| + 1 - \frac{K^2{}_{out}}{2M\omega} \right], |m+\nu| + 1, M\omega r^2 \right)$$

$$+ R^{|m+\nu|} \left[1 - \frac{(|m| + |m+\nu| + \nu s) + R^2 M\omega \left[\frac{|m|+1 \frac{K^2{}_{in}}{2M\omega}\ 1-|m+\nu| - \frac{K^2{}_{out}}{1-|m+\nu|}}{|m|+1 \quad 1-|m+\nu|} \right]}{2|m+\nu| + R^2 M\omega \left[\frac{-\frac{K^2}{2M\omega} - \frac{K^2}{2M\omega}}{|m+\nu|+1 \quad 1-|m+\nu|} \right]} \right]$$

$$\left. \times r^{|m+\nu|} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}\left[1 - |m+\nu| - \frac{K^2{}_{out}}{2M\omega} \right], 1 - |m+\nu|, M\omega r^2 \right) \right) \tag{2-22}$$

عند النهاية R=0 نحصل على

$$f_m = R^{|m|} \left[\left(\frac{R}{r}\right)^{-|m+\nu|} \left(\frac{1}{2} + \frac{|m|+\nu s}{2|m+\nu|} \right)_1 F_1 \left(\frac{1}{2}\left[|m+\nu| + 1 - \frac{K^2{}_{out}}{2M\omega} \right], |m+\nu| + 1, M\omega r^2 \right) \right. \tag{2-23}$$
$$\left. + \left(\frac{R}{r}\right)^{|m+\nu|} \left(\frac{1}{2} - \frac{|m|+\nu s}{2|m+\nu|} \right)_1 F_1 \left(\frac{1}{2}\left[1 - |m+\nu| - \frac{K^2{}_{out}}{2M} \right], 1 - |m+\nu|, M\omega r^2 \right) \right] . exp(-\frac{M\omega}{2} r^2)$$

نلاحظ ان المعاملات المحسوبة في المعادلة الاخيرة هي نفسها في [12] الحل الوحيد الممكن هو الحل الشاذ

نستنتج ان الحل الشاذ يحدث عندما تكون

$$m = -N, \qquad N \geq 0, \qquad s = -1 \tag{2-24}$$

او

$$m = -N - 1, \quad N + 1 \leq 0, \qquad s = +1 \tag{2-25}$$

وبالتالي فان الدالة Ψ_1 تعطى ب:

$$\Psi_1(r, \theta) = \theta(s)\theta(-a)_{a-N-1} e^{-i(N+1)\theta_r \text{ع}-1} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}\left[\text{ع} - \frac{K^2{}_{out}}{2M\omega} \right], \text{ع}, M\omega r^2 \right) e^{-(\frac{M\omega}{2} r^2)}$$

$$+ \theta(-s)\theta(a)_{a-N} e^{-iN\theta_r \text{ع}} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}\left[1 - \text{ع} - \frac{K^2{}_{out}}{2M\omega} \right], 1 - \text{ع}, M\omega r^2 \right) e^{-(\frac{M\omega}{2} r^2)} \tag{2-26}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m r^{|m+\nu|} e^{-(\frac{M\omega}{2} r^2)} e^{im\theta} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}\left[|m+\nu| + 1 - \frac{K^2{}_{out}}{2M\omega} \right], |m+\nu| + 1, M\omega r^2 \right)$$

حيث

$$\alpha = N + \varepsilon \,,\; 0 \leq \varepsilon < 1 \qquad \text{N عدد صحيح ثابت} \tag{2-27}$$

السلسة المقاربة تؤول عند القيم الموجبة الكبيرة إلى العبارة التالية

$$F(a,c,z) = \frac{r(c)}{r(a)} e^{z} z^{a-c} \tag{2-28}$$

وبالتالي تصبح دالة الموجية Ψ_1 كما يلي :

$$\begin{aligned}\Psi_1 \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m\, r^{|m+\nu|} e^{\frac{M\omega}{2}r^2} r^{-\frac{\frac{K^2 out}{M\omega}+|m+\nu|+1}{2}} \\ +\theta(-s)\theta(\alpha)_{a-N} e^{-iN\theta} r^{-\varepsilon} e^{\frac{M\omega}{2}r^2} r^{-\frac{1\frac{K^2 out}{M\omega}+1-\varepsilon}{2}} \\ +\theta(s)\theta(-\alpha)_{a-N-1} e^{-i(N+1)\theta} r^{\varepsilon-1} e^{\frac{M\omega}{2}r^2} r^{-\frac{1}{2}\frac{K^2 out}{M\omega}+\varepsilon}\end{aligned} \tag{2-29}$$

حيث a_mعبارة عن ثابت .

العبارة الأخيرة متباعدة أسيا. لا يمكن تجنب هذا التباعد إلا بوضع$a = -n$ حيث n= ...,2,1 وبالتالي تتحول السلسلة إلى كثير حدود من الدرجة n (كثيرالحدود Laguerre). إذن

$$\begin{aligned}\Psi_1(r\,,\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} [a_{m,n}\, r^{|m+\nu|} L_n^{|m+\nu|}(M\omega r^2) e^{-\left(\frac{M\omega}{2}r^2\right)} e^{im\theta}] \\ +\theta(-s)\theta(\alpha)_{a-N,n} r^{-\varepsilon} L_n^{-\varepsilon}(M\omega r^2) e^{-\left(\frac{M\omega}{2}r^2\right)} e^{-iN} \\ +\theta(s)\theta(-\alpha)_{a-N-1,n} r^{\varepsilon-1} L_n^{\varepsilon-1}(M\omega r^2) e^{-\left(\frac{M\omega}{2}r^2\right)} e^{-i(N+1)\theta}\end{aligned} \tag{2-30}$$

حيث الثوابت $a_{m,n} = a_m \frac{n!\,r(|m+\nu|+1)}{r(|m+\nu|+n)}$

2. طيف الطاقة

عندما يكون الشرط (2-27) غير محقق, فإننا نحصل على طيف الطاقة للحل غير الشاذ من الشرط :

$$\frac{1}{2}\left[|m+\nu| + 1 - \frac{K^2 out}{2M\omega}\right] = -n \tag{2-31}$$

وبالتالي , نحصل على عبارة الطاقة التالية:

$$E = \pm\sqrt{M^2 + 2M\omega\,[|m+\nu| + s\,(m+\nu) + 2n]} \qquad (2\text{-}32)$$

بالنسبة للحل الشاذ لدينا حالتين.في الحالة الأولى $(m = -N, N+1 \leq 0,\ s = -1)$ فان طيف الطاقة يتم استنتاجه من الشرط :

$$\frac{1}{2}\left[1 - \varepsilon - \frac{K^2{}_{out}}{2M}\right] = -n \qquad (2\text{-}33)$$

و منه نستنتج

$$E = \pm\sqrt{M^2 + 4M\omega\,[n - \varepsilon]} \qquad (2\text{-}34)$$

اما بالنسبة للحالة الثانية اين يكون $(m = -N-1, N+1 \leq 0,\ s = +1)$ فطيف الطاقة يستنتج من الشرط

$$\frac{1}{2}\left[\varepsilon - \frac{K^2{}_{out}}{2M\omega}\right] = -n \qquad (2\text{-}35)$$

ومنه

$$E = \pm\sqrt{M^2 + 4M\omega\,[n + \varepsilon - 1]} \qquad (2\text{-}36)$$

نلاحظ ان مستويات الطاقة (2-32) و (2-36) يتعلقان فقط ب معامل AB فقط والمعرفب (2-27).

سنقوم الآن بتحليل عبارة طيف الطاقة (2-32) **حيث** نلاحظ أنه طيف الطاقة مرتبط بالسبين و بمعامل التدفق المغناطيسي AB. نلاحظ انه يوجد حالتين يمكن مناقشتهما:

(a) لما $m + \alpha > 0$: عبارة طيف الطاقة تصبح

$$E = \pm\sqrt{M^2 + 2M\omega\,[(m+\alpha)(s+1) + 2n]} \qquad (2\text{-}37)$$

لما $s = 1$ نلاحظ ان كل حالة (m,n) لهما نفس طاقة الحالة $(m\pm l,\ n\pm l)$ حيث I عدد صحيح. لما $s = -1$ الطاقة تتعلق فقط بالعدد الطبيعي n.

(b) لما $m + \alpha < 0$ عبارة طيف الطاقة تصبح :

$$E = \pm\sqrt{M^2 + 2M\omega\,[(m+\nu)(s-1) + 2n]} \qquad (2\text{-}38)$$

لما $s = -1$ نلاحظ ان كل حالة (m,n) لهما نفس طاقة الحالة ($m\pm l, n\pm l$) حيث I عدد صحيح. لما $s = 1$ الطاقة تتعلق فقط بالعدد الطبيعي n.

الفصل الثـــالث

تأثير مفعول أهارونوف بوم على جسيم دو سبين $\frac{1}{2}$ في فضــــــاء دوسيتر المضـــاد

1. ميكانيك الكم على فضاء دي سيتر المضاد :

ميكانيك الكم في نمودج ضد دو سيتر هو عبارة عن إعادة صياغة ميكانيك الكم في جبر هايزنبرغ التالية:

$$[X_i, P_j]= i\hbar(1 + \alpha X_i, X_j) \qquad (1\text{-}3)$$

حيث α معامل موجب صغير جدا متعلق بثابت الجادبية. لما $\alpha = 0$ نحصل على ميكانيك الكم العادية.

باستعمال نفس الطريقة المستعملة في ميكانيك الكم العادية, نمكن أن نثبت ان العلاقة (1-3) تعطينا علاقة الارتياب الممدة التالية

$$(\Delta X)(\Delta \mathrm{P}) \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \alpha.(\Delta X)^2) \qquad (3\text{-}2)$$

حل هذه المتراجحة بدلالة الارتياب في الموضع ΔX_i يعطى ب:

$$-\frac{(\Delta P_i)}{\alpha\hbar} - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha + \frac{(\Delta P_i)^2}{\hbar^2}} \leq \Delta X_i \leq -\frac{(\Delta P_i)}{\alpha\hbar} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha + \frac{(\Delta P_i)^2}{\hbar^2}} \qquad (3\text{-}3)$$

في تمثيل الإحداثيات فإن المؤثران X_iوP_i اللذان يحققان العلاقة (1-3) يعرفان بالشكل التالي

$$X_i = x_i$$

$$P_i = \frac{\hbar}{2}(\delta_{ij} + \alpha.x_i, x_j)\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (3\text{-}4)$$

كذلك الجداء السلمي يتغير إلى الشكل التالي:

$$< \varphi \mid \Psi > = \int \frac{d_{\vec{r}}^{D}}{(1+\alpha r^2)^{\frac{1+D}{2}}} \phi^*(\vec{r})\, \Psi(\vec{r}) \qquad (3\text{-}5)$$

2. حل معادلة ديراك

كما رأينا في الفصل الأول فان معادلة ديراك لجسيم كتلته M ودو سبين $\frac{1}{2}$ تكتب كما يلي :

$$[(\pi^2 + i\sigma(\vec{\pi} \wedge \vec{\pi}) - E^2 + M^2)\Psi = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

اي

$$[((\vec{P} - e\vec{A})^2 + (\vec{\mathrm{P}} - e\vec{A}) \times (\vec{\mathrm{P}} - e\vec{A}) - E^2 + M^2)\Psi = 0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{P}^2 - +2e.\vec{A}.\vec{\mathrm{p}} + (e^2.\vec{A}^2) - e\vec{A} \wedge \vec{\mathrm{P}} - e\left(\vec{P} \wedge \vec{A}\right) - E^2 + M^2\right)\Psi = 0 \qquad (3\text{-}7)$$

مؤثرا كمية الحركة تمثيل الإحداثيات في فضاء ضد ديسيتر يعرفان ب:

$$P_x = -i\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$$
$$P_y = -i\left(\frac{\partial}{\partial y} + \alpha\left(y^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \quad (3\text{-}8)$$

لتبسيط حل المعادلة نستعمل الإحداثيات القطبية حيث:

$$P_x = -i[\cos\theta\,(1+\alpha r)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}]$$
$$P_y = -i[\sin\theta\,(1+\alpha r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}] \quad (3\text{-}9)$$

بتعويض (3-9) في المعادلة (3-7) نجد:

$$\left((1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + iv\theta(r-R)\right)^2}{r^2} - \frac{vs(1+\alpha r^2)}{R}\delta(r-R)\sigma_z + K^2\right)\Psi = 0$$

(3-10)

حيث$K^2 = E^2 - M^2$

باستعمال خواص دالتي ديراك وهفسايد نكتب هده المعادلة في المنطقتين $R > 0$ و $R < 0$ كما يلي

$$\left((1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + iv\right)^2 + K^2\right)\Psi = 0 \quad r>R \quad (3\text{-}11)$$

$$\left((1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 + K^2\right)\Psi = 0 \quad r<R \quad (3\text{-}12)$$

للحصول معادلة الجزء القطري, نضع:

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m f_m(r) e^{im\theta} \quad (3\text{-}13)$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد

$$[(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + K^2]f_m(r) = 0 \quad r<R \quad (3\text{-}14)$$

$$[(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(m+v)^2}{r^2} + K^2]f_m(r) = 0 \quad r>R \quad (3\text{-}15)$$

نحل المعادلة الثانية ونستنتج حل المعادلة الأولى. من اجل أيجاد الحل ندخل متغير جديد

$$q = \frac{\arctan(\sqrt{\beta}r)}{\sqrt{\beta}} \Longrightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\tan(\sqrt{\beta}q) \quad (3\text{-}16)$$

نعوض في المعادلة الحيرة فنحصل على

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^2} - \frac{\alpha(m+v)^2}{\tan^2(\sqrt{\beta}\mathrm{q})} + K^2\right) f_m(r) = 0 \qquad (3\text{-}17)$$

نلاحظ ان المعادلة مازالت معقدة, لذلك ندخل متغير الجديد $y=\cos^2\sqrt{\alpha}\, q$ وبالتالي المشتقات الجزئية تصبح

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} = -2\sqrt{\beta}.\sin(\sqrt{\beta}\mathrm{q}).\cos(\sqrt{\beta}\mathrm{q}) \ \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} = \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(-2\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\beta}\mathrm{q}) \ q \ \cos(\sqrt{\beta}\mathrm{q})\right) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$= -2\alpha \left[(2y-1)\frac{\partial}{\partial y} - 2\mathrm{y}(1-\mathrm{y})\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]$$

$$= 4\alpha \left[\mathrm{y}(1-\mathrm{y})\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{2} - y\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

بالتعويض في المعادلة الاخيرة نجد

$$\left(\mathrm{y}(1-\mathrm{y})\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{2} - \mathrm{y}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{(m+v)^2}{4}\frac{\mathrm{y}}{1-y} + \frac{K^2}{4\alpha}\right) f_m(r) = 0$$

او

$$\left(\mathrm{y}(1-\mathrm{y})\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{2} - \mathrm{y}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\frac{(m+v)^2}{4}}{1-y} + \frac{\frac{K^2}{\alpha} + (m+v)^2}{4}\right) f_m(r) = 0 \qquad (3\text{-}18)$$

نلاحظ أن هده المعادلة تحتوي على طرف شاد. لتفادي النقطقة الشادة, نقوم بإدخال الدالة الجديدة والمتغير الجديد التالية

$$f = (1-y)^{\frac{1}{4}}.\mathrm{g} \qquad (3\text{-}19)$$

المشتق الأول والثاني للدالة الجديدة g يساويان:

$$f' = (1-y)^{\frac{1}{4}}\mathrm{g}' - \frac{1}{4}(1-y)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{g}$$

$$f'' = (1-y)^{\frac{1}{4}}\mathrm{g}'' - \frac{1}{2}(1-y)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{g}' - \frac{3}{16}(1-y)^{-\frac{7}{4}}\mathrm{g}\ ]$$

بالتعويض في المعادلة (3-18) والقسمة على $(1-y)^{\frac{1}{4}}$نحصل على المعادلة التالية:

$$y(y-1)g'' + \frac{1}{2}(1-y)g' + \left(-\frac{m^2-\frac{1}{2}}{4(1-y)} + \frac{\frac{K^2}{2}+m^2+1}{4}\right)g = 0 \qquad (3\text{-}20)$$

للحصول علو معادلة لكثير حدود متعامد ندخل المتغير الجديد $y = x^2$, وبالتالي المشتقات تصبح

$$\frac{d}{dy} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d}{dx} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2}{dy^2} = \frac{-1}{4x^3} \cdot \frac{d}{dx} + \frac{1}{4x^2}\frac{d^2}{dx^2}$$

نحصل على معادلة من شكل Legendre associeé

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{K^2}{\alpha} + (m+v)^2 + 1 - \frac{(m+v)^2-\frac{1}{2}}{(1-x^2)}\right)g = 0 \qquad (3\text{-}21)$$

بالمطابقة مع معادلة Legendre associeé

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial g}{\partial x} + \left(l(l+1) - \frac{n^2}{(1-x^2)}\right)g = 0 \qquad (3\text{-}22)$$

والتي حلها $P_l^n\ (x)$

الحل العام في المنطقة $r > R$ لهذه المعادلة يعطى بدلالة دوال Legendre associeé

$$g = C_m . P^{\sqrt{(m+v)^2-\frac{1}{2}}}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K^2}{\alpha}+(m+v)^2+\frac{5}{4}}}(x) + B_m Q\ P^{\sqrt{(m+v)^2-\frac{1}{2}}}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K^2}{\alpha}+(m+v)^2+\frac{5}{4}}}(x) \quad , \quad r > R \qquad (3\text{-}23)$$

أما حل المعادلة الاولى يكون كالتالي

$$g = A_m . P^{\sqrt{m^2-\frac{1}{2}}}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K^2}{\alpha}+m^2+\frac{5}{4}}}(x) \quad , \quad r < R \qquad (3\text{-}24)$$

باسترجاع المتغير و الدالة الأصليين نجد الحل التالي

$$f_m = C_m\left(\frac{\alpha r^2}{1+\alpha r^2}\right)^{\frac{1}{4}} . P^{\sqrt{m^2-\frac{1}{2}}}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K^2}{\alpha}+m^2+\frac{5}{4}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha r^2}}\right) \quad ; \quad r > R \qquad (3\text{-}25)$$

$$f_m = \left(\frac{\alpha r^2}{1+\alpha r^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left[A_m . P_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K^2}{\alpha}+(m+v)^2+\frac{5}{4}}}^{\sqrt{(m+v)^2-\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha r^2}}\right) + B_m Q_{\sqrt{\frac{K^2}{\alpha}+(m+v)^2+\frac{5}{4}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{(m+v)^2-\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha r^2}}\right) \right]$$

$$\mathrm{r} < R \qquad (3\text{-}26)$$

وبالتالي فان المركبة الأولى لدالة السبينور تعطى ب:

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m a_m e^{im\theta} \left(\frac{\alpha r^2}{1+\alpha r^2}\right)^{\frac{1}{4}} . P_{\sqrt{m^2-\frac{K^2}{\alpha}-\frac{1}{2}}}^{\sqrt{m^2+\frac{1}{4}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha r^2}}\right) \quad , \quad \mathrm{r} < R \qquad (3\text{-}27)$$

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\theta} \left(\frac{\alpha r^2}{1+\alpha r^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left[A_m . \mathrm{P}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K^2}{\alpha}+(m+v)^2+\frac{5}{4}}}^{\sqrt{(m+v)^2-\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha r^2}}\right) + B_m \mathrm{P}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{K^2}{\alpha}+(m+v)^2+\frac{5}{4}}}^{\sqrt{(m+v)^2-\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha r^2}}\right) \right] \quad , \quad \mathrm{r} > R \qquad (3\text{-}28)$$

3. طيف الطاقة

بالمطابقة بين المعادلتين (3-21) و(3-22) نجد

$$\frac{K^2}{\alpha} + (m+v)^2 + 1 = l(l+1) \Rightarrow \frac{K^2}{\alpha} = l(l+1) - (m+v)^2 - 1$$

و منه نستنتج عبارة طيف الطاقة التالية

$$E^2 = M^2 + \alpha(l(l+1) - (m+v)^2 - 1) \qquad (3\text{-}29)$$

الفصل الرابع :

تأثير مفعول اهارونوف ـ بوم على هزاز ديراك في فضـــــــــاء ضد دو سيتر

حل معادلة ديراك

رأينا في الفصل الثاني أن معادلة ديراك للهزاز التوافقي ثنائي البعد في وجود مفعول AB تكتب كما يلي:

$$E\Psi = [\vec{\beta}\vec{\gamma}(\vec{\pi} - iM\omega\vec{\beta}.\vec{r}) + \vec{\beta}M]\,\Psi \qquad (4\text{-}1)$$

والتي يمكن تبسيطها لتصبح كالتالي

$$\left(\vec{\gamma}\vec{\pi}\vec{\gamma}\vec{\pi} + 2M\omega\vec{\beta}(1 + s(\vec{\pi} \wedge \vec{r})_z) - M^2\omega^2 r^2 + E^2 - M^2\right)\Psi = 0 \qquad (4\text{-}2)$$

بإتباع نفس خطوات الفصل السابق نجد:

$$\Big[(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\upsilon\right)^2 + 2M\omega\left(1 - s\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + \upsilon\right)\sigma_z + E^2 - M^2 - M^2\omega^2 r^2 - \upsilon.s\,\frac{\delta(r-R)}{R}\sigma_z\right)\Big]\Psi = 0 \qquad (4\text{-}3)$$

من هده المعادلة نستخرج معادلة المركبة الأولى Ψ_1 هي

$$[(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\frac{\upsilon}{\hbar}\right)^2 - \frac{M^2\omega^2}{\hbar^2}r^2 + K^2 = 0 \qquad (4\text{-}4)$$

حيث

$$K^2 = E^2 - M^2 + 2M\omega[1 - s\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} + \upsilon\right) - \upsilon.s.\frac{\delta(r-R)}{R}] \qquad (4\text{-}5)$$

نكتب المركبة الأولى كما يلي:

$$\Psi_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(r)e^{im\theta} \qquad (4\text{-}6)$$

ومنه المعادلة (4-4) تصبح كالتالي

$$\left[(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(m+\upsilon)^2}{r^2} + M^2\omega^2 r^2 + K^2\right]f_m = 0 \qquad (4\text{-}7)$$

لكن هذه المعادلة في المنطقتين $R > r$ و $R < r$ تصبح

-

$$\left[(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}-\frac{M^2\omega^2}{\hbar^2}r^2+K^2{}_{int}\right]f_m=0, \quad R<r$$
$$\left[(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}-\frac{(m+\upsilon)^2}{r^2}-\frac{M^2\omega^2}{\hbar^2}r^2+K^2{}_{out}\right]f_m=0, \quad R>r \tag{4-8}$$

حيث

$$K^2{}_{int}=\frac{E^2-M^2}{\hbar^2}+\frac{2M\omega}{\hbar^2}(1-ms)$$
$$K^2{}_{out}=\frac{E^2-M^2}{\hbar^2}+\frac{2M\omega}{\hbar^2}(1-s(m+\upsilon)) \tag{4-9}$$

نحل المعادل الثانية من جملة المعادلات (4-8) ونستنتج حل المعادلة الاولى, حيث نتبع نفس خطوات الفصل الثالث, حيث نقوم بإدخال المتغير الجديد التالي:

$$q=\arctan(\sqrt{\alpha}\,r)\Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tan(\sqrt{\alpha}\,q) \tag{4-10}$$

فنحصل على المعادلة التالية

$$\left[y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\frac{d}{dy}-\frac{\frac{M^2\omega^2}{4\alpha^2}}{y}-\frac{\frac{(m+\upsilon)^2}{4}}{1-y}+\frac{k^2}{4\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{4\alpha^2}+\frac{(m+\upsilon)^2}{4}\right].f_m(y)=0 \tag{4-11}$$

يمكن كتابة هده المعادلة على شكل معادلة فوق هندسية ودلك بإدخال الدالة الجديدة:

$$f=y^{\frac{l_1}{2}}.(1-y)^{\frac{l_2}{2}}.g \tag{4-12}$$

حيث المشتق الاول والثاني يعطيان ب..:

$$f'=\left[\frac{l_1}{2}y^{\frac{l_1}{2}-1}(1-y)^{\frac{l_2}{2}}-\frac{l_2}{2}y^{\frac{l_1}{2}}(1-y)^{\frac{l_1}{2}-1}\right]g+y^{\frac{l_1}{2}}(1-y)^{\frac{l_2}{2}}g'$$

$$f''=y^{\frac{l_1}{2}}(1-y)^{\frac{l_2}{2}}g''+\left[l_1y^{\frac{l_1}{2}-1}(1-y)^{\frac{l_2}{2}}-l_2y^{\frac{l_2}{2}}(1-y)^{\frac{l_2}{2}-1}\right]g'$$
$$+[\frac{l_1}{2}(\frac{l_1}{2}-1)y^{\frac{l_1}{2}-2}(1-y)^{\frac{l_2}{2}}-\frac{l_1l_2}{2}y^{\frac{l_1}{2}-1}(1-y)^{\frac{l_2}{2}-1}+\frac{l_2}{2}(\frac{l_2}{2}$$
$$-1)y^{\frac{l_1}{2}}(1-y)^{\frac{l_2}{2}-2}]g$$

نعوض في المعادلة السابقة نجد:

$$y(1-y)g''+[l_1+\frac{1}{2}-(l_1+l_2+1)y]g'+[\frac{\frac{l_1}{2}\left(\frac{l_1}{2}-1\right)+\frac{l_1}{4}-\frac{M^2\omega^2}{4\alpha^2}}{y}+\frac{\frac{l_2}{2}\left(\frac{l_2}{2}-1\right)+\frac{l_2}{4}-\frac{(m+\upsilon)^2}{4}}{1-y}+\frac{k^2}{4\alpha}-$$
$$\frac{l_1}{2}\left(\frac{l_1}{2}-1\right)-\frac{l_2}{2}\left(\frac{l_2}{2}-1\right)-\frac{l_1l_2}{2}-\frac{l_1}{2}-\frac{l_2}{2}+\frac{k^2}{4\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{4\alpha^2}+\frac{(m+\upsilon)^2}{4}]g=0 \quad (4\text{-}12)$$

لتفادي النقاط الشاذة نضع:

$$\begin{aligned} l_1(l_1-1)&=\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2} \\ l_2(l_2-1)&=(m+\upsilon)^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} l_{1\pm}&=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}} \\ l_{2\pm}&=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2} \end{aligned} \quad (4\text{-}13)$$

وبالتالي المعادلة تصبح على شكل معادلة فوق هندسية:

$$y(1-y)g''+[l_1+\frac{1}{2}-(l_1+l_2+1)y]g'+(\frac{k^2}{4\alpha}\frac{l_1l_2}{4}-\frac{l_1l_2}{2})g=0 \quad (4\text{-}14)$$

معادلة فوق هندسية تقبل حلين

$$g_\pm=A_+.F_{21}(a_+,b_+;c_+,\ \mathrm{y})+A_-.F_{21}(a_-,b_-;c_-,\ \mathrm{y}) \quad (4\text{-}15)$$

حيث

$$\mathrm{a}_\pm=\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}\ \pm\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+2\sqrt{\frac{k^2}{\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+(m+\upsilon)^2}}\right)$$

$$\mathrm{b}_\pm=\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}\ \pm\sqrt{1+4\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2}-2\sqrt{-\frac{k^2}{\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+(m+\upsilon)^2}}\right)$$

$$\mathrm{c}_\pm=1\pm2\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}} \quad (4\text{-}16)$$

بتعويض (4-12) في (4-15) نجد الدالة f(r) خارج المنطقة:

$$f=(1-y)^{\frac{1-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}}{4}}.\left[A_+.F_{21}(a_+,b_+;c_+,\ \mathrm{y})+A_-.F_{21}(a_-,b_-;c_-,\ \mathrm{y})\right],\ \mathrm{r}<R \quad \textbf{(4-17)}$$

بوضع $\upsilon=0$ نجد الدالة خارج المنطقة

$$f=(1-y)^{\frac{1-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}}{4}}.B.F_{21}(a',b';c',\ \mathrm{y}),\qquad \mathrm{r}<R \quad \textbf{(4-18)}$$

حيث

$$\mathrm{a}'=\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{1+4m^2}\ \pm\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+2\sqrt{\frac{k^2}{\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+m^2}}\right)$$

$$\mathrm{b}'=\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{1+4m^2}\ \pm\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}-2\sqrt{-\frac{k^2}{\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+m^2}}\right)$$

$$\mathrm{c}'=1\pm2\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}} \quad (4\text{-}19)$$

وبالتالي فانه بتعويض هده الدوال في العبارة (4-6) نحصل فان دالة المركبة الأولى لسبينور داخل المنطقة التالية:

$$\Psi=\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m\,e^{im\theta}(1-y)^{\frac{1-\sqrt{1+4m^2}}{4}}y^{\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2\hbar^2}}\right)}.F_{21}(a',b';c',\mathrm{y})\quad \mathrm{r}<R \quad (4\text{-}20)$$

و خارج المنطقة

$$\Psi=\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m\,e^{im\theta}(1-y)^{\frac{1-\sqrt{1+4m^2}}{4}}.\left[A_+.\,y^{\frac{1+\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}}{2}}.\quad {}_2F_1(a_+,b_+;c_+,\ \mathrm{y})+\right.$$

$$\left.+A_-.\,y^{\frac{1-\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}}{2}}.\quad {}_2F_1(a_-,b_-;c_-,\ \mathrm{y})\right] \quad (4\text{-}21)$$

باسترجاع المتغيرات الأصلية نجد

$$\Psi=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(\alpha r^2)^{\frac{1-\sqrt{1+4m^2}}{4}}\Bigg[A_+.(1+\alpha r^2)^{\frac{3+2\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}-\sqrt{1+4m^2}}{4}}.\quad {}_2F_1\left(a_+,b_+;c_+,\ \frac{1}{1+\alpha r^2}\right)+$$

$$+A_-.(1+\alpha r^2)^{\frac{3-2\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}-\sqrt{1+4m^2}}{4}}.\quad {}_2F_1\left(a_-,b_-;c_-,\ \frac{1}{1+\alpha r^2}\right)\Bigg]\ a_m\, e^{im\theta}\quad .\ r< R \qquad (4\text{-}22)$$

و

$$\Psi=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(\alpha r^2)^{\frac{1-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}}{4}}\Bigg[A_+.(1+\alpha r^2)^{\frac{3+2\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}}{4}}.\quad {}_2F_1\left(a_+,b_+;c_+,\ \frac{1}{1+\alpha r^2}\right)+$$

$$+A_-.(1+\alpha r^2)^{\frac{3-2\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}}{4}}.\quad {}_2F_1\left(a_-,b_-;c_-,\ \frac{1}{1+\alpha r^2}\right)\Bigg]\ a_m\, e^{im\theta}\quad .\ r> R \qquad (4\text{-}23)$$

استنتاج طيف الطاقة

حتى تكون الدالة فوق الهندسية متقاربة يجب ان يكون $a_+=-n$ ومنه **:**

$$-n=\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}+\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}+2\sqrt{\frac{k^2{}_{out}}{\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+(m+\upsilon)^2}\right) \qquad (4\text{-}24)$$

يمكن متابة هده المعادلة كما يلي

$$-n4-2+\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}-\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}=2\sqrt{\frac{k^2{}_{out}}{\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+(m+\upsilon)^2}$$

بتربيع المعادلة, نستخرج عبارة $k^2{}_{out}$**:**

$$\frac{k^2{}_{out}}{\alpha}+\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+(m+\upsilon)^2$$
$$=(2n+1)^2+(2n+1).\left(\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}+1+4(m+\upsilon)^2-2\sqrt{1+4\frac{M^2\omega^2}{\alpha^2}}\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}\right)$$

اي ان

$$k^2{}_{out}=\sqrt{\alpha^2+4M^2\omega^2}\left((2n+1)-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}\right)$$
$$+\alpha\left(\frac{1}{2}+(2n+1)\left((2n+1)-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}\right)\right)$$

بادخال عبارة $\mathrm{K}^2{}_{out}$ نحصل على عبارة طيف الطاقة

$$\mathrm{E}^2=M^2-2M\omega\big(1-s(m+\upsilon)\big)+\sqrt{\alpha^2+4M^2\omega^2}\left((2n+1)-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}\right)$$
$$+\alpha\left(\frac{1}{2}+(2n+1)\left((2n+1)-\sqrt{1+4(m+\upsilon)^2}\right)\right) \qquad (4\text{-}24)$$

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة تأثير مفعول اهارونوف بوم على الجسيمات دات السبين $\frac{1}{2}$ وأيضا على هزاز ديراك في الفضاء العادي وكذلك في فضاء دوسيتر المضاد.

في الفصل الأول قمنا بدراسة تأثير مفعول AB على الجسيمات ذات السبين $\frac{1}{2}$ وأيضا على هزاز ديراك في الفضاء العادي باستعمال طريقة هاغن حيث قمنا بإدخال دلتا ديراك و قد وجدنا أن تأثير هده الدالة لا يمكن إهماله في وجود سبين حيث أن بعض الحلول التي تكون شاذة عند المركز تصبح مسيطرة بعيدا عنه وبالتالي تصبح مقبولة فيزيائيا. بالنسبة لمستويات الطاقة فقد وجدنا أنها تتعلق بالسبين ومعامل AB للتدفق المغناطيسي.

في الفصل الثالث والرابع قمنا بإعادة دراسة الفصل الأول و الثاني أي دراسة الجسيمات السبينية وهزاز ديراك لكن في فضاء دوسيتر المضاد أين تكون علاقة الارتياب لهايزنبرغ معدلة وقد حصلنا على حلول معدلة حيث وجدنا دوال Legendre عوض دوال Bessel المحصل عليها في الحالة العادية. أما بالنسبة لمستويات الطاقة فقد لاحظنا ظهور طرف زائد متعلقة بمعامل α.

المراجع

1- Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959).W. H. Furray and N. F. Ramsey, Phys. Rev. 118, 623 (1960).

2- H. E. Mitler, Phys. Rev. 124, 940 (1961).

3- M. Peshkin, I. Talmi and L. J. Tassie, Ann. Phys. 16, 426 (1961).

4- R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, "The Feynman Lectures in Physics" (Addison-Wesley, Reading MA, 1964) Vol. 2, p.15.

5- Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. 123, 1511 (1961).

6- M. Peshkin and A. Tonomura, "The Aharonov-Bohm E§ect, Lecture Notes in Physics".340, Springer, Berlin, 1989.

7- A. Tonomura, T. Matsuda, R. Suzuki, A. Fukuhara, N. Osakabe, H. Umezaki, J. Endo, K. Shinagawa, Y. Sugita and H. Fujiwara, Phys. Rev. Lett. 48, 1443 (1982).

8- A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano and H. Yamada, Phys. Rev. Lett. 56, 792 (1986).

9- N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, A. Tonomura, S. Yano a Phys. Rev. A 34, 815 (1986).

10- M. G. Alford and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 62, 1071 (1989).

11- C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. 64, 503 (1990).

12- C. R. Hagen, Int. J. Mod. Phys. A 6, 3119 (1991).

13- A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Phys.Rev.D52, 1108 (1995)

, arXiv :hep-th/9412167 [hep-th].

14- A. Kempf, J.Phys.A30, 2093 (1997), arXiv :hep-th/9604045.

15- J. Magueijo and L. Smolin, Phys.Rev.Lett.88, 190403(2002), arXiv:hep-th/0112090.

16- J. Magueijo and L. Smolin, Phys.Rev.D67, 044017(2003), arXiv:gr-qc/0207085.

17- J. Cortes and J. Gamboa, Phys.Rev.D71, 065015 (2005), arXiv:hep-th/0405285.

18- G. Amelino-Camelia, Phys.Lett.B510, 255 (2001),arXiv :hep-th/0012238.

19- S. Das, E. C. Vagenas, and A. F. Ali, Phys.Lett.B690,407 (2010), arXiv :1005.3368 .

20- P. Pedram, Phys.Lett.B702, 295 (2011).

21- M. Maggiore, Phys.Lett.B319, 83 (1993), arXiv :hep-th/9309034 [hep th].

22- M. V. Battisti, Phys.Rev.D79, 083506 (2009).

23- P.A.M. Dirac, Ann. Math. 35, 657 (1935).

24- S. Mignemi, Ann. Phys. 522, 924 (2010).

25- Han-ying Guo, Chao-guang Huang, Yu Tian, Zhan Xu, Bin Zhou, Front. Phys. China 2, 358 (2007).

26- S. Mignemi, Mod. Phys. Lett. A 25, 1697 (2010).

ملخـص

في هذه المذكرة بدراسة تأثير مفعول أهارونوف-بوم على الجسيمات ذات السبين وكذلك تأثيره على هزاز ديراك في الفضاء العادي وأيضاً في فضاء ضد دي سيتر. لاحظنا مفعول أهارونوف-بوم يزيد من انحلال مستويات الطاقة، ومن ناحية أخرى وجدنا أن الحل الشاد يصبح مقبولا فيزيائيا في الفضاء العادي. وفي فضاء anti de Sitter نلاحظ ظهور حد إضافي في عبارة الطاقة متعلق بالمعامل ألفا.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'influence de l’effet Aharonov-Bohm sur les particules avec spin ainsi que son effet sur l’oscillateur de Dirac dans un l’espace ordinaire et qussi dans l’espace anti de Sitter. Nous avons observé que la présence de l’effet Aharonov-Bohm augmente de la dégradation des niveaux d’énergie .D’autre part, nous avons constaté que la solution singulières deviennent physiquement acceptable dans l'espace normale. Dans l'espace anti de Sitter, on remarque l'apparition d’un terme additionnel dépendant de coefficient alpha dans le l’expression de l’énergie.

Abstract

In this memory, we studied the influence of the Aharonov-Bohm effect on particles with spin as well as its effect on the Dirac oscillator in ordinary space and also in anti de Sitter space. We observed that the presence of the Aharonov-Bohm effect increases the degradation of energy levels. On the other hand, we found that the singular solution becomes physically acceptable in normal space. In the anti de Sitter space, we notice the appearance of additional term depending on coefficient alpha in the energy formula.