

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique



Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de master

Domaine : Mathématique et Informatique

Filière : Mathématique

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Présentée par :

Chetta madiha

**Analyse des conditions aux limites pour un
écoulement d'un fluide parfait**

Soutenue devant le jury composé de :

Khirani Amina	MCA	Président	université de M'sila
Serguine Houria	MCB	Rapporteur	université de M'sila
Delloum Wahiba	MAA	Examineur	université de M'sila

2023/2024

Remerciements

En premier lieu, nous remercions ALLAH, notre créateur, qui nous a donné la force, le courage et la volonté pour achever ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande fierté à mes chers parents, que Dieu prolonge leur vie J'adresse mes sincères remerciements à mon cher mari, qui a été mon soutien tout au long de la période de recherche.

Je remercie également toute ma famille et mes chères amies.

Je tiens à remercier ma encadreur Mme.Serguine Houria qui a supervisé ce travail, l'a guidé tout au long de ses remarques attentives.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury d'avoir accepté d'examiner et évaluer mon travail et pour l'intérêt qu'ils ont porté mon travail et de l'enrichir par leur propositions. Je remercie également tous les enseignants et les étudiants De département mathématique de l'université Mohamed Boudiaf de M.SILA et sans oublier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à notre formation dans ce département. Enfin, je voudrais remercier tout particulièrement ma distinguée amie : Dilmi Hasna.

Merci

Dédicaces

Je tiens à dédier cet effort scientifique à :

ma chère mère Sabah
et mon cher père Lakhdar
et mon cher mari Nadir

A mes sœurs Lamy, Khadidja, Tassnim, Anfal, Maryam

La famille : Chette, Kara, Safi

Tous mes amis : Nouicer Madiha, BenDaoud Aicha, Aissaoua Anfal Hadjab Khawla

A tous mes amis de la promotion

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.

Résumé

Ce travail consiste à étudier un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux à surface libre où les effets de gravité et de tension de surface sont négligés. Alors, on va étudier un problème d'un écoulement autour d'un obstacle de forme triangulaire. Et pour résoudre ce problème, on a utilisé la technique des transformations conformes pour simplifier notre travail. On trouve la solution exacte du problème posé, qui donne la forme de la surface libre de cet écoulement.

Mots clés : écoulement potentiel, surface libre, transformation conforme.

Abstract

The aim of this work is to study two-dimensional potential flow of an incompressible, non-viscous fluid with a free surface, where the effects of gravity and surface tension are neglected. Therefore we will study the problem of fluid flow in front of a triangular-shaped obstacle. To solve this problem, we used the conformal transformation technique to simplify our work. We find the exact solution to the problem at hand, which gives the shape of the free surface of this flow.

Key words : potential flow, free surface, conformal transformation.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة تدفق كموني ثنائي الابعاد لسائل غير قابل للانضغاط وغير لزج ذو سطح حر حيث يتم إهمال تأثيرات الجاذبية والتوتر السطحي.

لذلك سوف ندرس مشكلة تدفق السائل أمام عائق مثلث الشكل. ولحل هذه المشكلة استخدمنا تقنية التحويل المطابق لتبسيط عملنا. نجد الحل الدقيق للمشكلة المطروحة والذي يعطي شكل السطح الحر لهذا التدفق.

الكلمات المفتاحية : تدفق كموني ، السطح الحر ، التحويل المطابق

Table des Matières

Notation	4
Introduction Générale	5
1 Concepts de base de la mécanique des fluides	8
1.1 Définition d'un fluide [2]	8
1.2 Propriétés des fluides [2]	9
1.2.1 Compressibilité	9
1.2.2 Masse volumique et densité	9
1.2.3 Poids volumique (poids spécifique)	10
1.2.4 Volume massique (volume spécifique)	10
1.2.5 Viscosité	10
1.3 Classification des écoulements des fluides	11
1.3.1 Écoulement stationnaire [11]	11
1.3.2 Écoulement incompressible	11
1.3.3 Écoulement irrotationnel	12
1.3.4 Écoulement uniforme	12
1.3.5 Écoulement potentiel	12
1.3.6 Écoulement bidimensionnel	12
1.4 Description d'un fluide en mouvement	12
1.4.1 Description de Lagrange [8]	13
1.4.2 Description d'Euler	13
1.5 Quelques équations dans la mécanique des fluides	14
1.5.1 Équation de conservation de la masse [5]	14
1.5.2 Équation de continuité	14
1.5.3 Équation d'Euler [7]	15
1.5.4 Équation de Bernoulli [12]	16
1.5.5 Ligne et fonction de courant, trajectoire	16
1.6 Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible à la base de la théorie de la variable complexe [4]	18
2 Transformations conformes	19

2.1	Introduction	19
2.2	Généralités sur les transformations conformes	19
2.2.1	Représentation conforme [21]	20
2.3	Quelques transformations classiques	21
2.3.1	Méthode d'hodographe	21
2.3.2	Transformation de Schwarz-Christoffel	22
2.3.3	Transformation de Möbius [12]	23
2.4	Exemple de transformation conforme	24
3	Écoulement à surface libre sans tension de surface autour d'un triangle	25
3.1	Introduction	25
3.2	Formulation du problème	26
3.3	Résolution du problème	29
	Conclusion Générale	37
	Bibliographie	38

Table des figures

1.1	Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme	12
1.2	tube de courant	16
2.1	transformation conformes	20
2.2	transformation d'hodographe	21
2.3	transformation d'une ligne brisée en axe horizontal	22
2.4	passage du plan $x - y$ au $X - Y$	24
3.1	La description du problème.	27
3.2	plan de la variable Z	28
3.3	plan de la variable Γ	33
3.4	plan de la variable f	34
3.5	plan de la variable β	35
3.6	La forme de la surface libre.	36

Notation

ρ	:= Masse volumique
\vec{u}	:= Le vecteur vitesse
m	:= La masse
\vec{a}	:= L'accélération
p	:= pression de fluide
S	:= La surface
V	:= Le volume
n	:= La normale
f	:= Fonction potentielle complexe
C	:= Une courbe
(x, y)	:= Le plan
i	:= Le nombre complexe
z	:= La variable complexe
T	:= Tension de surface
(u, v)	:= Composantes du vecteur
g	:= L'accélération de la pesanteur
ψ	:= Fonction de courant
σ	:= Le tenseur des contraintes
$M_0(x_0, y_0, z_0)$:= Position initial
$\vec{r}(M_0, t)$:= Le vecteur position
$\emptyset(x, t)$:= La fonction potentielle de la vitesse
plan Z	:= Le domaine d'écoulement réel

Introduction Générale

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui concerne le comportement des liquides et des gaz au repos ou en mouvement. Cette branche de la mécanique englobe une variété de problèmes allant de l'étude de l'écoulement sanguin dans des capillaires déformables (vaisseaux sanguins de diamètre de quelques microns) à l'écoulement de pétrole brut dans des conduites de l'ordre du mètre de diamètre avec des longueurs pouvant aller jusqu'à 13000km . Les principes de la mécanique des fluides sont nécessaires pour expliquer pourquoi les avions volent et quel est le profil d'aile idéal pour avoir un vol le plus efficace possible en termes de coûts liés au kérosène et de vitesse d'avion alors que les balles de golf à aspérités servent à lancer la balle plus loin grâce au décollement tardif de la couche limite dans le cas d'un écoulement turbulent. Bien que la structure moléculaire des fluides soit très importante afin de distinguer un fluide d'un autre, il n'est pas possible d'étudier le comportement de chaque molécule lorsqu'on essaie de décrire le comportement des fluides au repos ou en mouvement. On considère plutôt la valeur moyenne ou macroscopique de la quantité pour laquelle la moyenne est évaluée sur un petit volume contenant un grand nombre de molécules. Par exemple, lorsqu'on dit que la vitesse en un point donné vaut telle valeur, nous indiquons en fait une vitesse moyenne des molécules prise dans un petit volume entourant le point donné. Ce volume est en fait très petit comparé aux dimensions physiques du système étudié mais très grand comparé à la distance moyenne entre les molécules.

Par exemple pour les gaz aux conditions standards, l'espacement entre les molécules est de l'ordre de 10^{-6}mm et pour les liquides il est de l'ordre de 10^{-7}mm . Par conséquent, le nombre de molécules par millimètre cube est de l'ordre de 10^{18} pour les gaz et 10^{21} pour les liquides. Il est alors clair que le nombre de molécules dans un volume minuscule est très grand et l'idée d'utiliser des valeurs moyennes sur ce petit volume est raisonnable. Nous supposons donc que toutes les grandeurs du fluide (pression, vitesse ...) varient de façon continue dans le fluide, c'est-à-dire que l'on traitera le fluide comme un milieu continu. En revanche, cette hypothèse ne sera plus valide dans le cas des gaz raréfiés que l'on trouve, par exemple, dans les très

hautes altitudes. Dans ce cas, l'espacement entre les molécules d'air peut devenir très grand et le concept de milieu continu ne peut plus être valable.

En mécanique des fluides, cette discipline étudie les principes suivants :

- Comportement des fluides : il étudie le comportement des fluides au repos, le courant, la pression et les forces agissant sur eux.
- Lois de la flottabilité : Il étudie les lois de la flottabilité, connues sous le nom de principe d'Archimède, qui expliquent qu'un corps immergé dans un fluide subit une force de poussée égale au poids du fluide déplacé.
- Mouvement des fluides : étudie la façon dont les fluides se déplacent et les forces exercées sur eux, et apprend les effets des forces affectant la vitesse de mouvement et l'équilibre des fluides..
- Conception de projets d'ingénierie : étudie la conception de projets d'ingénierie utilisant des fluides, tels que la conception de flèches, de lances

et de bateaux, en particulier dans les projets d'ingénierie hydraulique pour la prévention des inondations, l'irrigation, le drainage de l'eau et l'approvisionnement en eau.

L'étude de la mécanique des fluides remonte aux Grecs de l'Antiquité.

Là où les civilisations anciennes étudiaient les propriétés des composés liquides et leur écoulement, ils étaient utilisés dans la conception de flèches, de lances et de bateaux, ainsi que dans des projets d'ingénierie hydraulique pour la prévention des inondations, l'irrigation, le drainage de l'eau et l'approvisionnement en eau.

Cependant, le développement de la mécanique des fluides dans ce que nous connaissons aujourd'hui comme une section de la physique et du génie mécanique a commencé au XVIIe siècle avec des scientifiques tels que Bernoulli et Torricelli.

L'utilité pratique de la mécanique des fluides se manifeste par ses applications technologiques couvrant toute une gamme de domaines : aérodynamique, énergie, environnement, exploration pétrolière, aérospatial, biotechnologies, hydraulique, génie des procédés, propulsion, météorologie, tribologie, turbomachines, etc... [8], [13]. La mécanique des fluides a connu un développement très rapide grâce à l'apport de puissants moyens informatiques et au développement de méthodes numériques.

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre, autour des objets de différentes formes sont étudiés pour leurs applications industrielles et scientifiques. La surface libre est l'interface entre deux fluides non miscibles, généralement un liquide et un gaz. En état statique, la surface

libre est plane et horizontale. Dans le cas dynamique, la surface libre à une forme inconnue et elle est déterminée comme solution du problème donne. Les écoulements bidimensionnels de type jet peuvent être et souvent observés dans nombreux phénomènes naturels ou physiques qui interviennent dans le domaine industriel. Ainsi de son importance majeure, ce type d'écoulement fait l'objet de plusieurs travaux de recherche scientifique.

Il est bien connu que son intérêt dans le domaine des milieux continus est très indispensable. Ces écoulements sont basés sur les aspects principaux de la mécanique des fluides comme la loi de quantité de mouvement des milieux continus et les tensions superficielles qui sont des forces existant au niveau de toute interface entre deux milieux différents (le fluide et l'air), ces forces proviennent de la variation de pression entre deux milieux et elles sont gouvernées par la loi de Laplace, cette loi liant la courbure locale de l'interface séparant ces deux milieux à la différence de pression (aussi appelée pression de Laplace) entre ces deux milieux.

L'analyse d'un écoulement plan avec une surface libre a été l'objet d'intérêt pour beaucoup de scientifiques et d'industriels pour une longue période. La détermination de certaines caractéristiques de l'écoulement tel que le coefficient de décharge, le coefficient de contraction et la position de la surface libre sont d'un intérêt particuliers aux ingénieurs à nos jours, très peu de problèmes ont été résolus d'une façon explicite. Même les méthodes numériques sont assez difficiles à élaborer à cause de la condition aux limites imposée sur la frontière "libre", inconnue a priori.

Notre travail de recherche entre dans le cadre général d'une étude d'un écoulement potentiel, bidimensionnel à surface libre devant un obstacle de forme triangulaire. Dans cette étude, le fluide est considéré comme incompressible, non visqueux et les effets de la gravité et de tension de surface sont négligés. Avec ces hypothèses, nous obtenons des simplifications sur les équations qui gouvernent ce problème. Ainsi nous pouvons appliquer la théorie des fonctions de la variable complexe telles que les propriétés des fonctions analytiques et les transformations conformes.

Notre travail est composé d'une introduction générale, trois chapitres et une conclusion. Le premier chapitre exprime les concepts de base de la mécanique des fluides.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les transformations conformes, en expliquant leur utilité dans notre travail par un exemple.

Dans le troisième chapitre, nous résolvons notre problème en utilisant la méthode d'hodographe introduite par Khirchoff et les transformations conformes.

Nous achevons cette thèse par une conclusion générale.

Chapitre 1

Concepts de base de la mécanique des fluides

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et notions de base pour la mécanique

1.1 Définition d'un fluide [2]

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

Fluide parfait [1]

les fluides en mouvement sans frottement qu'on appelle fluides parfaits ou non visqueux.

$$\mu = 0$$

Fluide réel

les fluides en mouvement avec frottement qu'on appelle fluides réels ou fluides visqueux.

$$\mu \neq 0$$

Fluide incompressible [3]

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure ($\rho = Cte$, masse volumique constante). Les liquides peuvent

être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, ... etc.)

Fluide compressible [3]

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure ($\rho \neq Cte$ masse volumique variable). Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

1.2 Propriétés des fluides [2]

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

1.2.1 Compressibilité

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression (dp), le volume de fluide subit une diminution de volume (dV).

L'augmentation de pression entraîne une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est :

$$\beta = -\frac{dV/V}{dp} = -\frac{dV}{dpV} \quad (Pa^{-1}), (m^2/N) \quad (1.1)$$

- β : coefficient de compressibilité (m^2/N)
- V : volume de fluide (m^3)
- dV : variation de volume (m^3)
- dp : variation de pression (N/m^2)

1.2.2 Masse volumique et densité

a) Masse volumique :

La masse volumique ρ d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en kg/m^3

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique

$$\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{M}{V} \quad (1.2)$$

- M : masse du fluide (kg)
- V : volume du fluide (m^3)
- ρ : masse volumique (kg/m^3)

b) Densité :

La densité : elle mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un corps de référence. C'est une grandeur sans unité définie par :

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{Réf}}} \quad (1.3)$$

Le corps de référence dépend de l'état physique du corps

- Eau : pour les solides et les liquides
- Air : pour les gaz
Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante ;
- $\rho_{\text{liquide}} \gg \rho_{\text{gaz}}$
Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression.

1.2.3 Poids volumique (poids spécifique)

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume.

$$\varpi = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V} = \frac{\rho Vg}{V} \quad \varpi = \rho g \quad (N/m^3) \quad (1.4)$$

1.2.4 Volume massique (volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique

$$V = \frac{V}{M} = \frac{V}{\rho V} = \frac{1}{\rho} \quad (m^3/kg) \quad (1.5)$$

1.2.5 Viscosité

La viscosité d'un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en

couches parallèles; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, (μ) et on écrit alors :

$$\tau = \mu \frac{du}{dv} \quad (1.6)$$

La viscosité cinématique, ν , est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.7)$$

Dans le système SI, l'unité de la viscosité dynamique est le (Pa.s) ou (kg/ms) ou Pl

- Pa.s : Pascal seconde
- Pl : Poiseuille avec $1Pa.s = 1Pl = 1 \text{ kg/ms}$
- Dans le système CGS l'unité est le Poise (Po) avec $1Po = 10^{-1} Pl$
- Dans le système SI, l'unité de la viscosité cinématique, est le (m^2/s); dans le système CGS l'unité est le Stokes où $1\text{Stokes} = 1 \text{ cm}^2/s = 10^{-4} \text{ m}^2/s$

1.3 Classification des écoulements des fluides

1.3.1 Écoulement stationnaire [11]

Les écoulements stationnaires, sont les écoulements dont les composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps. Dans ce type des écoulement on a :

$$\partial_t U = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t P = 0$$

Un tel écoulement est possible lorsque le domaine, les forces massiques appliquées, les sources de chaleur et les conditions de bord sont elles aussi indépendantes du temps. Par exemple Les équations de Navier-Stokes stationnaires s'écrivent

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \rho(u \cdot \nabla)u = f \\ \text{div} u = 0 \end{cases}$$

1.3.2 Écoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure sa masse volumique est constante $\rho = Cte$

1.3.3 Écoulement irrotationnel

Dans les régions d'écoulement, loin des parois solides ou le fluide peut être considéré comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition :

$$\overrightarrow{rot}u = 0$$

1.3.4 Écoulement uniforme

Un écoulement bidimensionnel a surface libre est dit uniforme si l'écoulement est de vitesse constante $A_1 = A_2 = A$

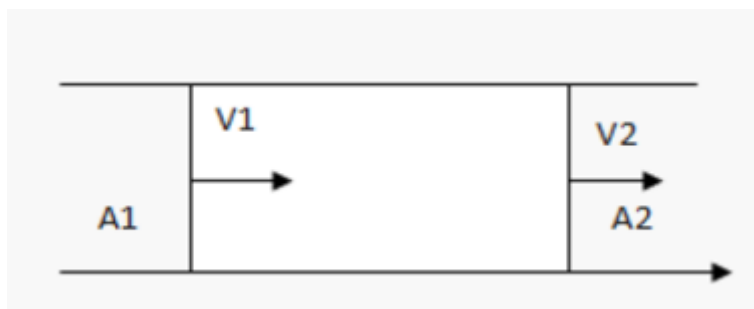


FIG. 1.1: Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

1.3.5 Écoulement potentiel

On dit qu'un écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est dérivé d'un potentiel c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{u} = \nabla\phi$$

La fonction $\phi(x; t)$ est le potentiel des vitesses.

1.3.6 Écoulement bidimensionnel

Un écoulement est dit bidimensionnel ou un écoulement plan, si toutes ses caractéristiques sont dépendantes de deux variables spatiales (x, y) et du temps t .

1.4 Description d'un fluide en mouvement

En mécanique, il y a deux façons pour décrire les mouvements des particules :

1.4.1 Description de Lagrange [8]

Cette méthode consiste à étudier les différentes quantités (P , ρ température T .. etc.) pour chaque particule individuellement lors de son mouvement.

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées. L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale $M0(x0; y0; z0)$. La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position $\vec{r}(M0, t)$ à tout instant t pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M0, t) \quad \text{où} \quad \vec{r} = \vec{r}(x0, y0, z0, t)$$

C'est-à-dire :

$$x_i = x_i(x0, y0, z0, t)$$

Et

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}(M0, t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(M0, t) \\ \vec{a} &= \vec{a}(M0, t) = \frac{d\vec{u}}{dt}(M0, t) \end{aligned}$$

1.4.2 Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant les composantes de la vitesse et autres quantités physiques en chaque point de l'espace i.e. on fixe un point dans l'espace et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

A l'instant $t1$, on détermine en M une particule $P1$ de Vitesse \vec{u} et d'autres caractéristiques physique k .

A l'instant $t2 = t1 + dt1$, on trouve au même point M de l'espace, une autre particule $p2$ de vitesse et des caractéristiques physique différentes.

Donc on a en M et à l'instant $t1$

$$\vec{u} = \vec{u}(P1, t1) = \vec{u}(x, y, z, t1)$$

Et

$$K = k(P1, t1) = k(x, y, z, t1)$$

Et à l'instant $t2$, on a au même point M

$$\vec{u} = \vec{u}(P2, t2) = \vec{u}(x, y, z, t2)$$

Et

$$K = k(P2, t2) = k(x, y, z, t2)$$

1.5 Quelques équations dans la mécanique des fluides

1.5.1 Équation de conservation de la masse [5]

Écrivons le bilan de quantité de fluide entrant et sortant d'un volume de référence Ω , fixe par rapport au système de coordonnées dans lequel est exprimée la vitesse eulérienne u . La variation par unité de temps de la masse contenue dans le volume Ω est égale à la masse traversante, par unité de temps, la surface $\partial\Omega$ qui délimite le volume Ω , soit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\tau = - \int_{\partial\Omega} \rho u \cdot n \, d\sigma$$

ou ρ est la masse volumique du fluide, n est le vecteur unitaire normal à la surface $\partial\Omega$ et orienté vers l'extérieur de celle-ci. En utilisant le théorème de la divergence pour transformer le second membre en intégrale de volume, et en intervertissant la différentiation temporelle et l'intégration dans le premier membre, on obtient :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right] d\tau = 0$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume Ω considéré et l'intégrand est nul, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

Soit, en développant le second terme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot u = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0$$

La somme des deux premiers termes du membre de gauche est la dérivée "particulaire" (en suivant le mouvement du fluide) de la masse volumique. Si le fluide est incompressible, la masse volumique n'évolue pas au cours du temps et l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\nabla \cdot u = 0$$

1.5.2 Équation de continuité

Établissons la première équation fondamentale de la mécanique des fluides. Il s'agit d'une contrainte imposée à $\vec{v}(M, t)$ et $\rho(M, t)$ qui repose sur une loi de conservation, celle de la masse.

Prenons un volume de contrôle fixe (V) dans un fluide, délimité par une surface fictive (S). Soit $m(t)$ la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée à l'instant t . Par définition de la masse volumique

$$m(t) = \iiint_{M \in (v)} \rho(M, t) d\tau$$

Cette masse varie à cause du flux de matière à travers (S) :

$$\frac{dm(t)}{dt} = - \iint_{M \in (s)} \rho \vec{v} \cdot \vec{ds} \text{ ext}$$

où $\vec{ds} \text{ ext}$ est dirigé vers l'extérieur de la surface fermée (S) ce qui explique l'origine du signe - devant l'intégrale. Or, on a également

$$\frac{dm(t)}{dt} = \iiint_{M \in V} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau$$

D'après le théorème de la divergence on obtient :

$$\iiint_{M \in V} \left[\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] d\tau = 0 \quad \forall V$$

d'où l'équation de conservation de la masse, dite aussi équation de continuité

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{partout et à chaque instant}$$

1.5.3 Équation d'Euler [7]

On considère que l'élément de volume du fluide est soumis à la force ($\overrightarrow{\text{grad}p}$) exercée par le fluide environnant, où P est la pression. Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}P} \quad (*)$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ (champ de pesanteur, champ magnétique e...etc), Chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force \vec{F}_{champ} , cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation (*) de sorte que cette dernière s'écrit sous la forme

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}P} + \vec{F}_{\text{champ}}$$

Cette équation est dite d'Euler.

1.5.4 Équation de Bernoulli [12]

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Un certain travail est fourni au fluide lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique. Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, on obtient la relation suivante :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \Delta\rho_{1,2}$$

ou p_i est la pression aux points A_i ou $i = 1, 2$. Si le fluide non visqueux dans ce cas $\Delta\rho_{1,2} = 0$. L'équation de Bernoulli se réduit à :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = Const$$

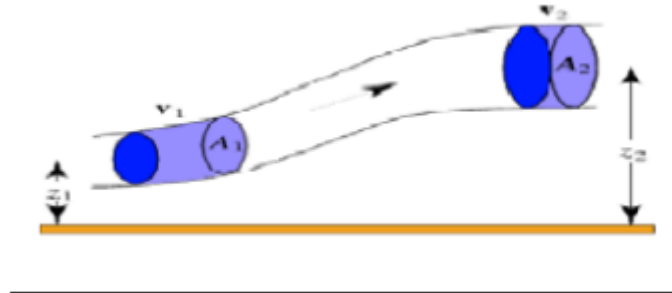


FIG. 1.2: tube de courant

1.5.5 Ligne et fonction de courant, trajectoire

Ligne de courant[9]

on appelle Ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse. Son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x, y, t)} = \frac{dy}{v(x, y, t)}$$

fonction de courant [9]

si on considère l'écoulement est incompressible (i.e. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$) alors l'équation de continuité sera donnée :

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

Ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Nous présentons une nouvelle fonction ψ de x et y que l'on appelle **fonction de courant**, vérifiant

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.8)$$

Les surfaces définies par ($\psi = cte$) sont des lignes de courant, en effet, la différentielle exacte de est donne

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

Puisque $\psi = cte$, alors $\partial \psi = 0$, on trouve l'équation de la **ligne de courant** d'après (1.8)

Soient, C une courbe fine qui part d'un ligne de courant vers autre caractérisée par $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ respectivement.

Soient \vec{n} un vecteur unitaire normale à C et orienté dans le sens de l'écoulement, le flux à travers C donné par :

$$Q = \int_c \vec{u} \cdot \vec{n} = \left(\int_c -u \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \int_c (v dx - u dy) dt$$

D'où

$$Q = \left(\int_c \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_c d\psi$$

Par conséquent

$$Q = \psi_1 + \psi_2$$

Notion de trajectoire[6]

Dans la description de Lagrange, on s'intéresse à l'histoire de chaque particule de fluide. Considérons une particule de fluide \mathcal{P} située en $(x(t), y(t), z(t))$ à l'instant t . Par définition la trajectoire est la courbe paramétrique \mathcal{C} d'équation

$$\mathcal{C} \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x' = v_x(x(t), y(t), z(t), t) \\ y' = v_y(x(t), y(t), z(t), t) \\ z' = v_z(x(t), y(t), z(t), t) \end{cases}$$

La trajectoire retrace l'histoire d'une particule alors que la ligne d'écoulement est un « instantanée » du champ de vitesse. De ce fait, ces deux notions sont différentes. Par contre, lorsque que le régime d'écoulement est stationnaire, une particule suit nécessairement la ligne d'écoulement sur laquelle elle se trouve puisque celle-ci est fixe.

1.6 Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible à la base de la théorie de la variable complexe [4]

Soient ϕ et ψ la fonction potentielle et la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. on rapport le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$, puis on définit la fonction complexe $f(z)$ par

$$f(z) = \phi + i\psi$$

$f(z)$ est appelé le potentiel complexe de l'écoulement .puisque la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ vérifient l'équation de Laplace ,de plus On a :

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

Alors les relations de Cauchy Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

La théorie des variables complexes offre une méthode, très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulement.

Si le plan (x, y) est considéré comme plan de $z = x + iy$ la fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement .de plus la vitesse complexe est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv$$

Sera aussi analytique le plan de l'écoulement. Cette très importante propriété va nous paramétrer d'utiliser, par suite, la théorie des fonctions analytiques complexe pour résoudre notre problème considéré.

Chapitre 2

Transformations conformes

2.1 Introduction

En mathématiques, et plus précisément en géométrie et en analyse complexe, une transformation conforme est une bijection qui conserve localement les angles, c'est-à-dire qui se comporte au voisinage de chaque point où elle est définie presque comme une similitude.

Dans le plan, les transformations conformes qui conservent les angles orientés ont une telle utilité qu'il est fréquent qu'elles soient les seules baptisées du terme de conformes. Elles se confondent alors avec les bijections holomorphes. Les transformations conformes indirectes sont, dans ce cas, appelées transformations anticonformes.

On rencontre les transformations conformes en géométrie différentielle, dans des problèmes d'électrostatique ou dans la résolution de l'équation de Poisson, en mécanique des fluides pour modéliser des écoulements, et en cartographie. La notion de transformation conforme se généralise à des espaces de dimension supérieure à 2, mais elle y perd un peu de sa diversité.

2.2 Généralités sur les transformations conformes

Définition 2.2.1. [13] Soit f une fonction de variable complexe de le plan Z vers le plan W . Une transformation $f(z) = W$ est conforme, si l'angle entre deux courbes du plan Z est égal à l'angle qu'il y a entre les images de ces courbes dans le plan W . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit conforme est que la fonction $f(z)$ soit analytique.

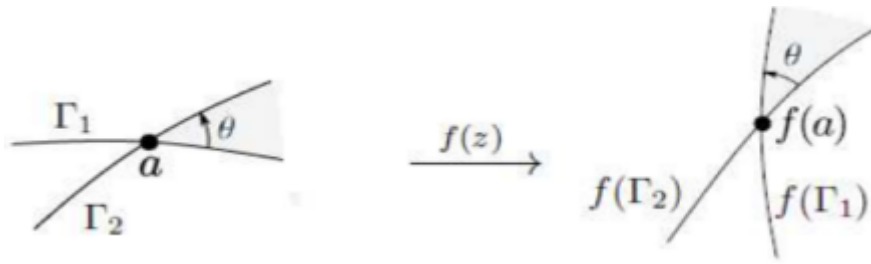


FIG. 2.1: transformation conformes

Propriété 1. [20]

1. On appelle transformation conforme de $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\Omega' \subset \mathbb{C}$ toute fonction holomorphe telle que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer qu'une telle transformation préserve les angles. Pour cela, on pourra montrer que si deux courbes γ_1 et γ_2 incluses dans Ω s'intersectent et forment entre elles un angle α au point d'intersection alors il en va de même pour les courbes images. On pourra adopter la notation $\zeta = f(z)$

2. On rappelle qu'une fonction $F(x, y)$ est dite harmonique si elle est de laplacien nulle, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

Soit $U(\xi, \eta)$ une fonction harmonique et soit f une transformation conforme telle que :

$$\zeta = f(z) = \xi + i\eta = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$$

Montrer que la fonction $u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y))$ est une fonction harmonique. En déduire que les Transformations conformes conservent la propriété "être harmonique".

2.2.1 Représentation conforme [21]

Théorème 2.2.1. (Énoncé dans la thèse de B. Riemann en 1851) Tout ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ est conformétement équivalent au disque unité $D \subset \mathbb{C}$ c'est-à-dire qu'il existe une bijection bi-holomorphe $f : \Omega \rightarrow D$

Remarque 1.

D'après le théorème de Liouville (2^{ème}), le plan \mathbb{C} n'est pas conformétement équivalent à un domaine borné.

Remarque 2.

En particulier on en déduit que tous les ouverts simplement connexes du plan (différents du plan tout entier) sont homéomorphes. Le théorème de Riemann montre donc que la famille des transformations conformes est très riche.

Remarque 3. L'extension du théorème de Riemann à des ouverts non simplement connexes (avec plusieurs trous) n'est pas aussi souple. Par exemple deux anneaux sont conformément équivalents si et seulement si le rapport de leurs rayons est le même (voir plus loin). Il existe cependant des représentants assez simples de chaque classe conforme de domaines "avec trous", voir par exemple le théorème d'uniformisation de Koebe.

2.3 Quelques transformations classiques

2.3.1 Méthode d'hodographe

Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte de problèmes d'écoulement potentiels et bidimensionnels, partiellement bornée par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur lesquelles la pression est supposée constante. L'idée de base de cette transformation est l'introduction de la variable complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log \left(\frac{U}{df/dz} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \log \left(\frac{U}{q} \right) + i\theta \quad (2.1)$$

où $z = x + iy$, $f = \varphi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ avec (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse V , est l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'horizontale.

On remarque que La fonction Ω possède de simples propriétés suivantes :

- La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e.,

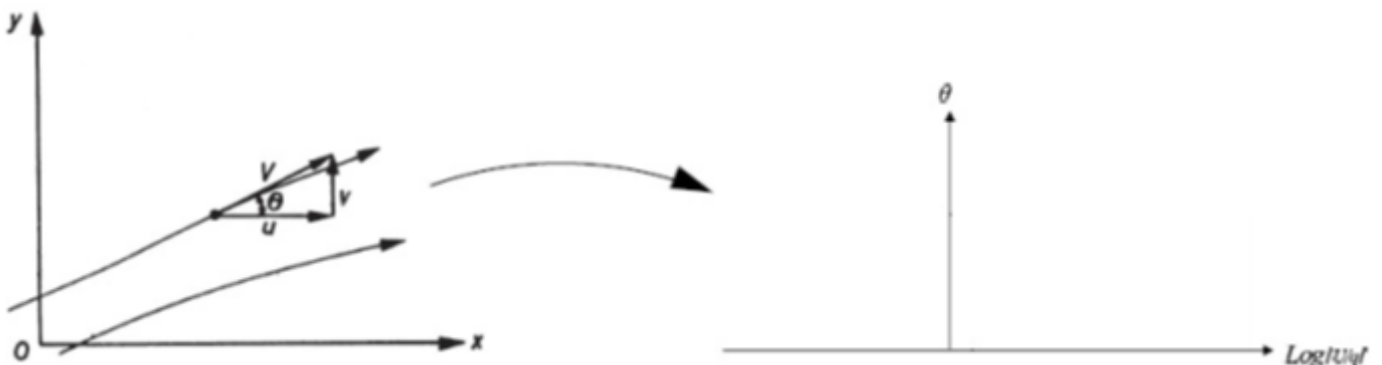


FIG. 2.2: transformation d'hodographe

$$\log\left(\frac{U}{q}\right) = \text{const}$$

- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $\theta = \text{const}$
Par conséquent, l'écoulement est représenté par une figure plane de côté rectiligne (polygone).

C'est aussi le cas de la transformation f , qui transforme le plan physique z en polygone. Il est évident que, si nous pouvons transformer le plan Ω vers la moitié supérieure (resp. inférieure) d'un autre plan d'une certaines variables complexes λ , alors la relation entre z et f ou entre df/dz et f est paramétriquement déterminée.

2.3.2 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel réalise une transformation du demi-plan supérieur(ou inférieur) vers un polygone simple quelconque. On définit la transformation de Schwarz-Christoffel par la formule :

$$\Omega = k \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{p}-1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{p}-1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{p}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{p}-1} d\lambda + M \quad (2.2)$$

Où k et M sont des constants complexes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les angles intérieurs au polygone.

La transformation $\Omega(\lambda)$ est conforme sauf aux points λ_i Le point anguleux est transformé en points non anguleux. Notons que si dans la transformation $\alpha_i \rightarrow \infty$, alors on omet le facteur $(\lambda - \lambda_n)$ dans la transformation puisqu'il serait associé à l'exposant 0, on dit que le polygone est dégénéré en ce point.

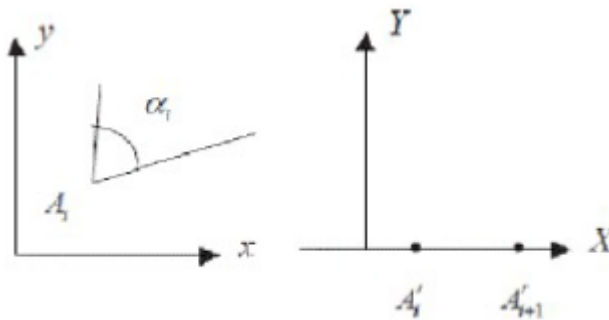


FIG. 2.3: transformation d'une ligne brisée en axe horizontal

2.3.3 Transformation de Möbius [12]

Soient a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$. La fonction complexe définie par :

$$\omega = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

S'appelle une transformation de Möbius ou parfois une transformation bilinéaire, Il nous convient dans ce qui suit de considérer cette fonction comme une de C^∞ et C^∞ . La condition $ad - bc \neq 0$ élimine les cas où T pourrait se réduire à une constante.

Les cas spéciaux à noter sont :

1. Les translations : $T_\alpha(z) = z + b$
2. Les multiplications : $M_\alpha(z) = az$
3. Les rotations : $R_\alpha(z) = \exp(i\alpha)z$
4. Les inverses : $I_\alpha(z) = \frac{1}{z}$

Toute transformation de Möbius peut-être décomposée en un produit de transformations des types A, B et D. En effet, si $c=0$ on a :

$$zT = z m_{\frac{a}{d}} \circ T_{\frac{a}{d}}$$

ou, ce que veut dire la même chose

$$\begin{aligned} T(z) &= T_{\frac{a}{d}}(m_{\frac{a}{d}}(z)) = T_{\frac{a}{d}}\left(\frac{a}{d}z\right) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{az + b}{d}, c \neq 0 \\ zT &= T_{\frac{a}{c}}\left(m_{b-\frac{ad}{c}}(I(T_d(m_c(z))))\right) = T_{\frac{a}{c}}\left(m_{b-\frac{ad}{c}}(I(cz + d))\right) \\ &= T_{\frac{a}{c}}\left(m_{b-\frac{ad}{c}}\left(\frac{1}{cz + d}\right)\right) = T_{\frac{a}{c}}\left(\frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}\right) = \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Les transformations de Möbius sont toujours inversibles. En effet l'inverse de (5) est

$$T^{-1}(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

Théorème 2.3.1.

Les transformations de Möbius préserve la famille qui consiste de toutes les droites et tous les cercles du plan. On note que si l'on considère une droite comme étant un cercle de rayon infini on peut simplement dire ici que les transformations de Möbius préservent la famille de tous les cercles du plan.

2.4 Exemple de transformation conforme

Dans le plan image, A est situé $-\infty$, B en b , C en c , et D en ∞ (voire Figure 2.2). Les angles dans plan $x - y$ son : $\alpha_B = \frac{\pi}{2}, \alpha_C = \frac{\pi}{2}$.

L'équation de Schwartz-Christoffel donne par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - a)^{\frac{\alpha_B}{\pi} - 1}(\lambda - b)^{\frac{\alpha_C}{\pi} - 1} \quad (2.3)$$

Alors

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - b)^{-\frac{1}{2}}(\lambda - c)^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{(\sqrt{\lambda - b})(\sqrt{\lambda - c})} \quad (2.4)$$

Par intégrale

$$\Omega(\lambda) = 2k \ln(\sqrt{\lambda - b} + \sqrt{\lambda - c}) + M \quad (2.5)$$

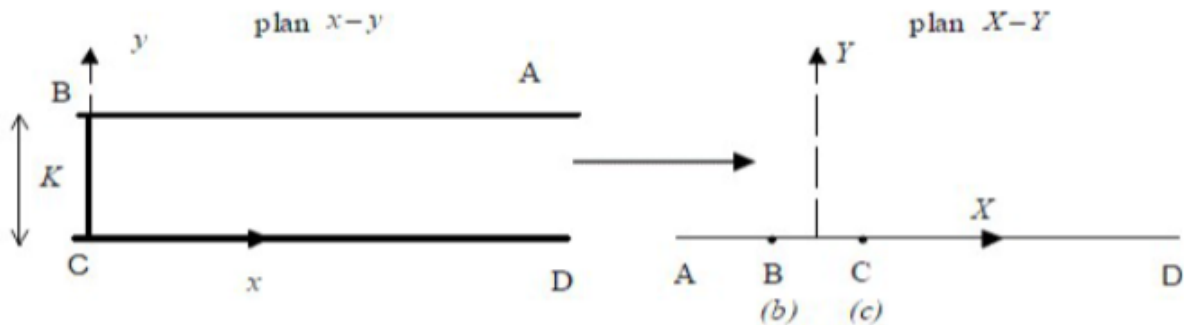


FIG. 2.4: passage du plan $x - y$ au $X - Y$

Chapitre 3

Écoulement à surface libre sans tension de surface autour d'un triangle

3.1 Introduction

Dans l'étude de notre problème, on introduit la théorie des surfaces libres qui considère que l'écoulement est limité partiellement par des parois rigides et par des surfaces libres de formes inconnues. et pour la résolution, on utilise la vitesse introduite par la méthode de Kirchoff. et on définit une nouvelle variable complexe Γ par :

$$\Gamma = \log \left(\frac{dz}{df} \right) = \log(u - iv)^{-1} = \log r^{-1} + i\alpha \quad (3.1)$$

où $z = x + iy$, $f = \phi + i\psi$ et r, α ont été définies par le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale respectivement.

La propriété de cette variable : c'est que sa partie réelle est constante sur chacune des surfaces libres et sa partie imaginaire est constante sur chaque partie droite de la paroi rigide. Alors le domaine de l'écoulement dans le plan physique est transformé en un polygone dans le plan Γ . Sous ces conditions, la solution du problème est exacte. En utilisant la même procédure, le bord du fluide est représenté par une figure droite d'un autre plan d'une certaine variable complexe f .

D'après le théorème de Schwartz-Christoffel, il est toujours possible de trouver une transformation conforme qui applique l'intérieur ou l'extérieur d'un polygone plan en un demi-plan d'un autre plan.

Une autre transformation met en correspondance la région indiquée du plan Γ , ainsi que celle du plan f sur la moitié inférieure du plan d'une certaine variable complexe β . Finalement, on

trouve une relation entre Γ et f, a partir de cette dernière et on trouve une expression de f en fonction de z qui est obtenue par intégration.

3.2 Formulation du problème

On considère un écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux autour d'un obstacle de forme triangulaire (Figure 3.1). Le triangle ABC est isocèle de base AC avec $OA = OB = H = 1$ et les angles aux sommets A et C sont égaux à $\frac{\pi}{4}$. L'angle au sommet B sera donc égale à $\frac{\pi}{2}$. Les côtés AB et BC du triangle sont tels que le coté AB fait un angle $(\frac{\pi}{4})$ avec l'axe des x et BC fait un angle $(-\frac{\pi}{4})$ avec l'axe des x . La courbe $DEBE'D'$ est la surface libre. Loin de l'obstacle triangulaire ABC , l'écoulement est uniforme de vitesse U et de profondeur h (Figure 3.1). Et comme on a une symétrie par rapport à l'axe des y , on va faire notre étude seulement sur le côté qui se trouve à gauche de l'axe des y (Figure 3.2).

Sur la surface libre, puisque la tension de surface et les forces de gravité sont négligées, l'équation de Bernoulli donne :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C^{ste} \dots \quad (3.2)$$

Où p est la pression sur la surface libre, ρ la densité du fluide et v est la vitesse de l'écoulement. On rapporte le plan d'écoulement dans le repère oxy au plan complexe de la variable $z = x + iy$. Dans ce plan la fonction $f = \emptyset + i\psi$ ou \emptyset est la fonction potentielle, ψ est la fonction de ligne de courant et f est une fonction analytique. (Figure 3.2) Le problème d'écoulement décrit au-dessus est donné par un problème aux limites de la fonction \emptyset :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \text{ dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \text{ sur la paroi } BC \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \text{ sur la paroi } AB \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 = cte \text{ sur la surface libre} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

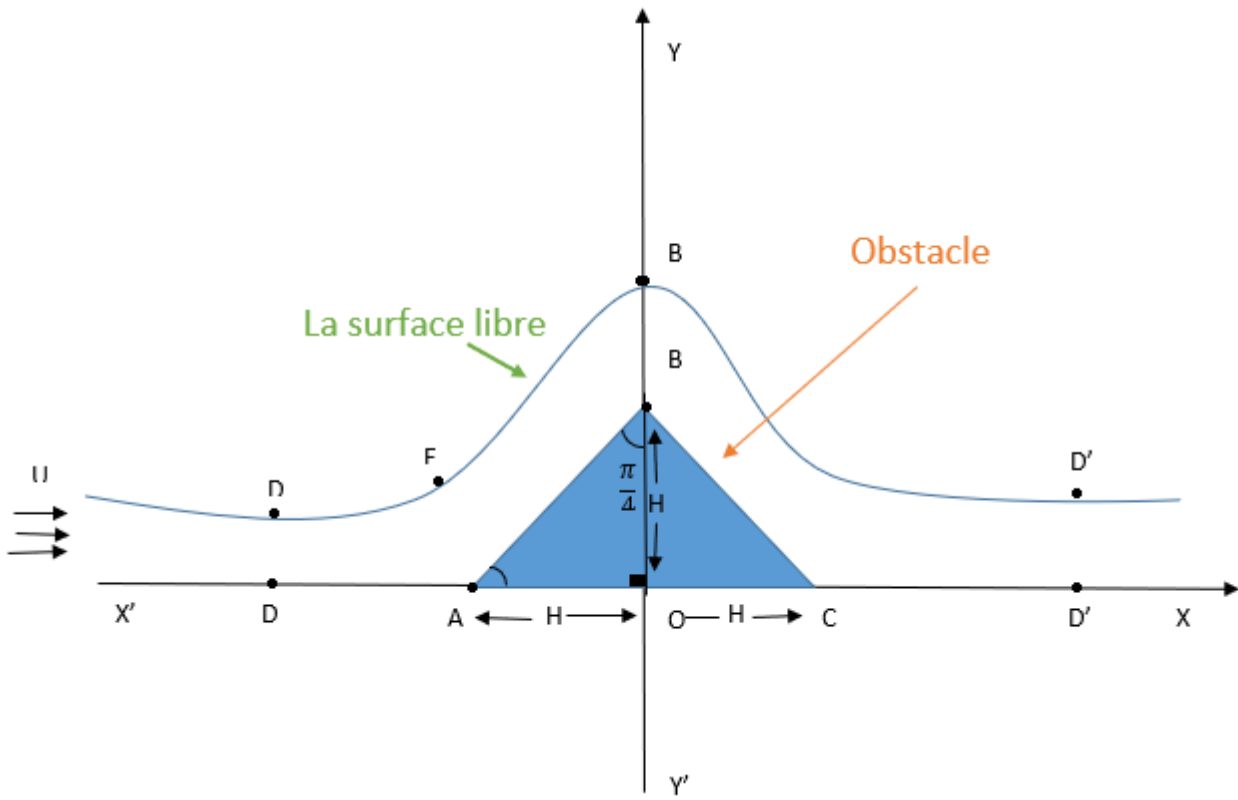


FIG. 3.1: La description du problème.

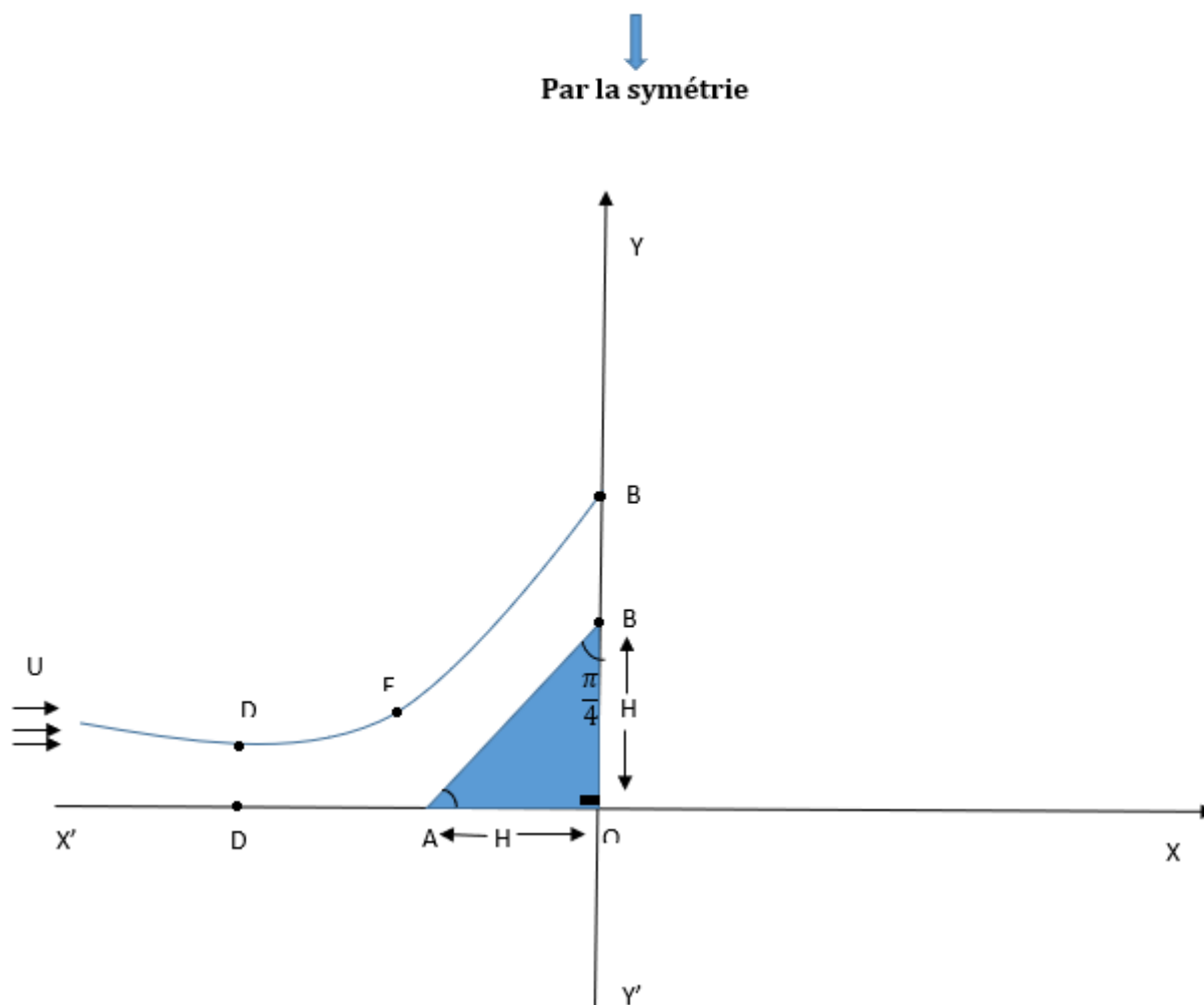


FIG. 3.2: plan de la variable Z .

3.3 Résolution du problème

Dans cette section, l'écoulement est délimité par un fond rigide DAB et une surface libre DEB. Puisque la tension de surface et les effets de la gravité sont négligés, une solution exacte peut être calculée, en utilisant la transformation d'hodographe et la transformation de Schwartz-Christoffel.

Pour trouver la solution, on suit les étapes suivantes : De la transformation (3.1), on a :

$$\Gamma = \ln \left(\frac{Udz}{df} \right) = \ln \left(\frac{U}{u - iv} \right) = \ln \left(\frac{U}{r} \right) + i\alpha \quad (3.4)$$

Par cette transformation, le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable z se transforme en une bande semi-infinie dans le plan Γ (Figure3.3).

Nous choisissons $\emptyset = 0$ au point $(x, y) = (0, 0)$, $\Psi = 0$ sur la ligne DAB et $\Psi = hU$ sur la ligne de courant DEB (Figure3.4).

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan Γ au demi-plan inférieur d'un autre plan complexe β est donnée par le théorème de Schwartz-Christoffel en respectant le sens et l'orientation de l'écoulement. On choisit $D = 0$, $B = 1$ et A à l'infini sur le plan β (Figure3.5), on a alors :

$$\frac{d\Gamma}{d\beta} = A(\beta)^{-\frac{1}{2}}(\beta - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Par intégration, on trouve :

$$\Gamma = A \int \frac{1}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta - 1}} d\beta + B \quad (3.5)$$

$$\Gamma = A \operatorname{argch}(2\beta - 1) + B \quad (3.6)$$

Où A et B sont des constantes à déterminer. Pour cette détermination, on a :

1. Au point B : $\beta = 1, \Gamma = i\frac{\pi}{2}$

$$i\frac{\pi}{2} = A \operatorname{argch}(1) + B \text{ L'équation (3.6) donne } B = i\frac{\pi}{2}$$

2. Au point E : $\beta = \frac{1}{2}, \Gamma = i\frac{\pi}{4}$

$$i\frac{\pi}{4} = A \operatorname{argch}(0) + i\frac{\pi}{2} \text{ L'équation (3.6) donne } A = -\frac{1}{2}$$

Alors :

$$\Gamma = -\frac{1}{2} \operatorname{argch}(2\beta - 1) + i\frac{\pi}{2} \quad (3.7)$$

On obtient

$$\beta = \frac{1 - \text{ch}(2\Gamma)}{2} = \sinh^2(\Gamma) \quad (3.8)$$

D'où

$$\frac{d\Gamma}{d\beta} = -\frac{1}{2\sqrt{\beta(\beta-1)}}$$

On cherche maintenant, une relation entre f et β qui transforme l'intérieur de la bande infinie du plan f vers le demi-plan inférieur du plan β .

En faisant la correspondance entre les points D, B et A définis sur les deux plans.

On utilise encore, le théorème de Schwartz-Christoffel, on trouve :

$$\frac{df}{d\beta} = A'(\beta)^{-1}(\beta-1)^{-1}$$

Par intégration, on trouve :

$$f = A' \int \frac{1}{\beta(\beta-1)} d\beta + B' \quad (3.9)$$

$$f = A' \ln\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) + B' \quad (3.10)$$

On détermine les constantes A' et B' :

1. Au point A : $f = 0, \beta = \infty$ de l'équation (3.10) $0 = A' \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) + B'$, alors $B' = 0$
2. Au point E : $f = ihu, \beta = \frac{1}{2}$ de l'équation (3.10) $ihu = A' \ln(-1)$, Alors $A' = \frac{hu}{\pi}$

Alors :

$$f = \frac{hu}{\pi} \ln\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) \quad (3.11)$$

D'où

$$\frac{df}{d\beta} = \frac{hu}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta(\beta-1)}$$

Alors :

$$\beta = \frac{1}{1 - e^{\frac{\pi f}{hu}}} \quad (3.12)$$

Et on a :

$$\beta = -\sinh^2(\Gamma) = \frac{1}{2}(1 - \text{ch } 2\Gamma) \quad (3.13)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{e^{2\Gamma} + e^{-2\Gamma}}{2} \right] \quad (3.14)$$

En substituant (3.4) dans (3.14), on trouve :

$$\beta = \frac{1}{4} \left[2 - \left(\frac{udz}{df} \right)^2 - \left(\frac{1}{u} \frac{df}{dz} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

On pose $y = \left(u \frac{dz}{df}\right)^2$, l'équation (3.15) devient :

$$y^2 - 2(1 - 2\beta)y + 1 = 0$$

La solution de cette équation est :

$$y = \left(\frac{Udz}{df}\right)^2 = (1 - 2\beta) \pm i\sqrt{1 - (1 - 2\beta)^2}$$

Alors, on prend le signe positif de la racine dans la solution :

$$\left(\frac{Udz}{df}\right)^2 = (1 - 2\beta) + i\sqrt{1 - (1 - 2\beta)^2}$$

Après la résolution de cette équation, on obtient :

$$U \frac{dz}{df} = \sqrt{1 - \beta} + i\sqrt{\beta} \quad (3.16)$$

Au d'autre part, on a :

$$U \frac{dz}{d\beta} = \frac{dz}{df} \frac{df}{d\beta} = (\sqrt{1 - \beta} + i\sqrt{\beta}) \left(\frac{hU}{\pi} \frac{1}{\beta(\beta - 1)}\right) \quad (3.17)$$

$$U \frac{dz}{d\beta} = \frac{hU}{\pi} \left(\frac{-1}{\beta\sqrt{1 - \beta}} + i\frac{1}{\sqrt{\beta}(\beta - 1)}\right) \quad (3.18)$$

Pour faciliter l'intégration, on divise le domaine $[0, 1]$ du plan β en deux parties : $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ et on intègre l'équation (3.18) seulement sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, après on généralise la solution sur l'intervalle $[0, 1]$.

Alors (3.18) devient :

$$z - z_0 = \frac{h}{\pi} \left[\int_{\beta}^{\frac{1}{2}} \frac{-dt}{t\sqrt{1-t}} + i \int_{\beta}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}(t-1)} \right]$$

Après des calculs, on trouve :

$$z - z_0 = -\frac{h}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1-\beta}+1}{\sqrt{1-\beta}-1} \right) - 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \right] + i \frac{h}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{\beta}+1}{\sqrt{\beta}-1} \right) + 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \right] \quad (3.19)$$

Où z_0 est la constante d'intégration : On choisit z_0 au point où $\beta = \frac{1}{2}$. Alors $z_0 = -H + i(H - h)$

En substituant la valeur de z_0 dans (3.19)

Alors la forme de la surface libre est donnée par l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = -H - \frac{h}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} \right) + \frac{2h}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \\ y = (H - h) + \frac{H}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} \right) - \frac{2h}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{cases} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (3.20)$$

L'amplitude du jet à moins l'infini est donnée par :

$$h = \lim_{\beta \rightarrow 0} y(\beta) = H - h - \frac{2h}{\pi} \text{Ln}(1 + \sqrt{2}) \quad (3.21)$$

On calcule le rapport $\frac{h}{H}$. Alors :

$$\begin{aligned} h \left(2 + \frac{2}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \right) &= H \\ h \left(\frac{2\pi + 2 \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi} \right) &= H \\ \frac{H}{h} &= \frac{2\pi + 2 \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi} = 2.56 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Telle que la valeur :

$$C = \frac{h}{H} = 0.39 \quad (3.23)$$

Représente le degré de contraction de l'écoulement. On pose :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x}{H} \\ \bar{y} = \frac{y}{H} \end{cases}$$

Et d'après (3.24), l'équation paramétrique de la surface libre (3.20) qui nous cherche devient :

$$\begin{cases} \bar{x} = -1 - \frac{c}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \beta}}{1 - \sqrt{1 - \beta}} \right) \\ \bar{y} = 1 - \frac{c}{\pi} \left(1 - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} \right) \right) \end{cases} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (3.24)$$

Le graphe de (3.24) est représenté par la figure (3.6).

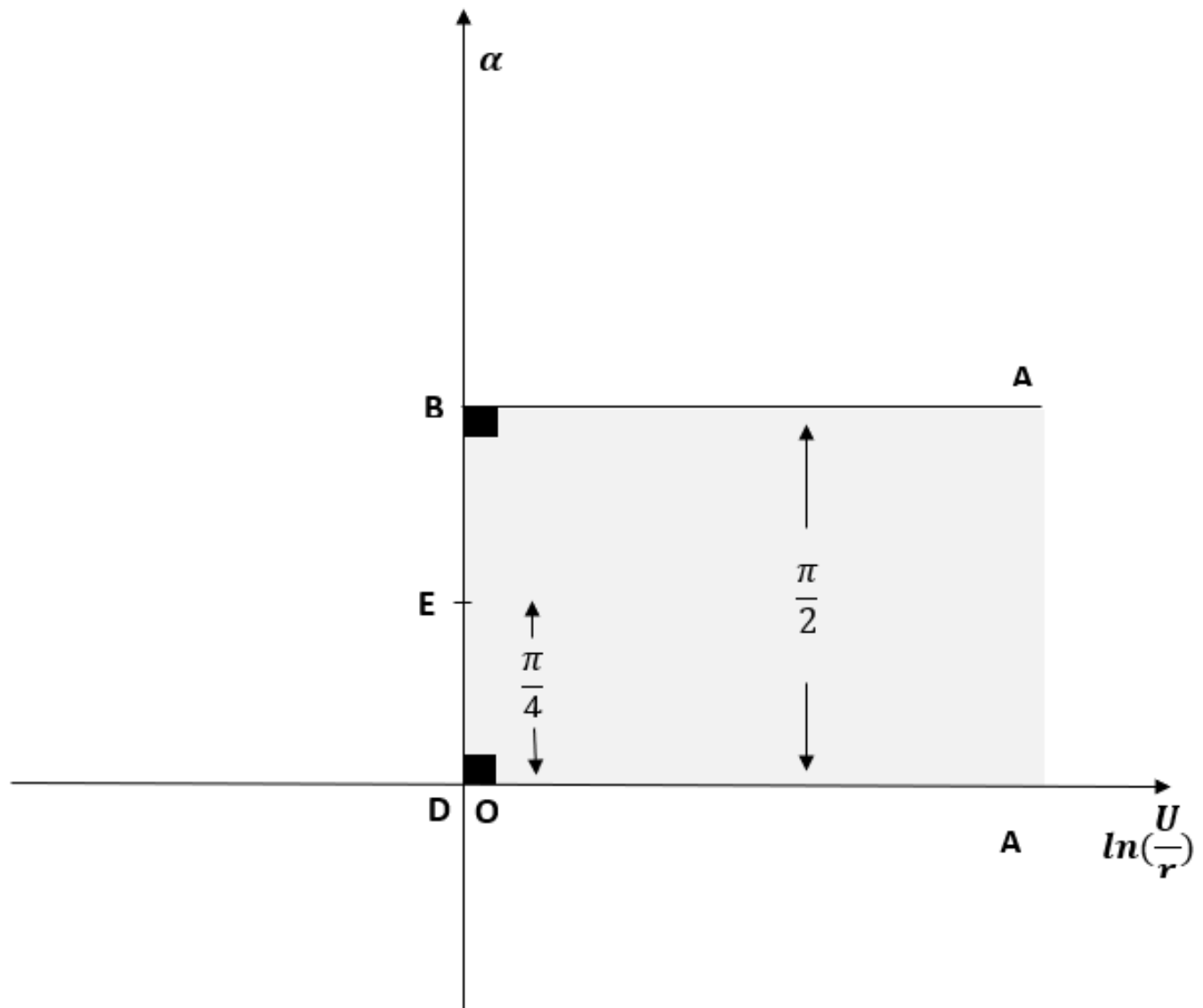


FIG. 3.3: plan de la variable Γ .

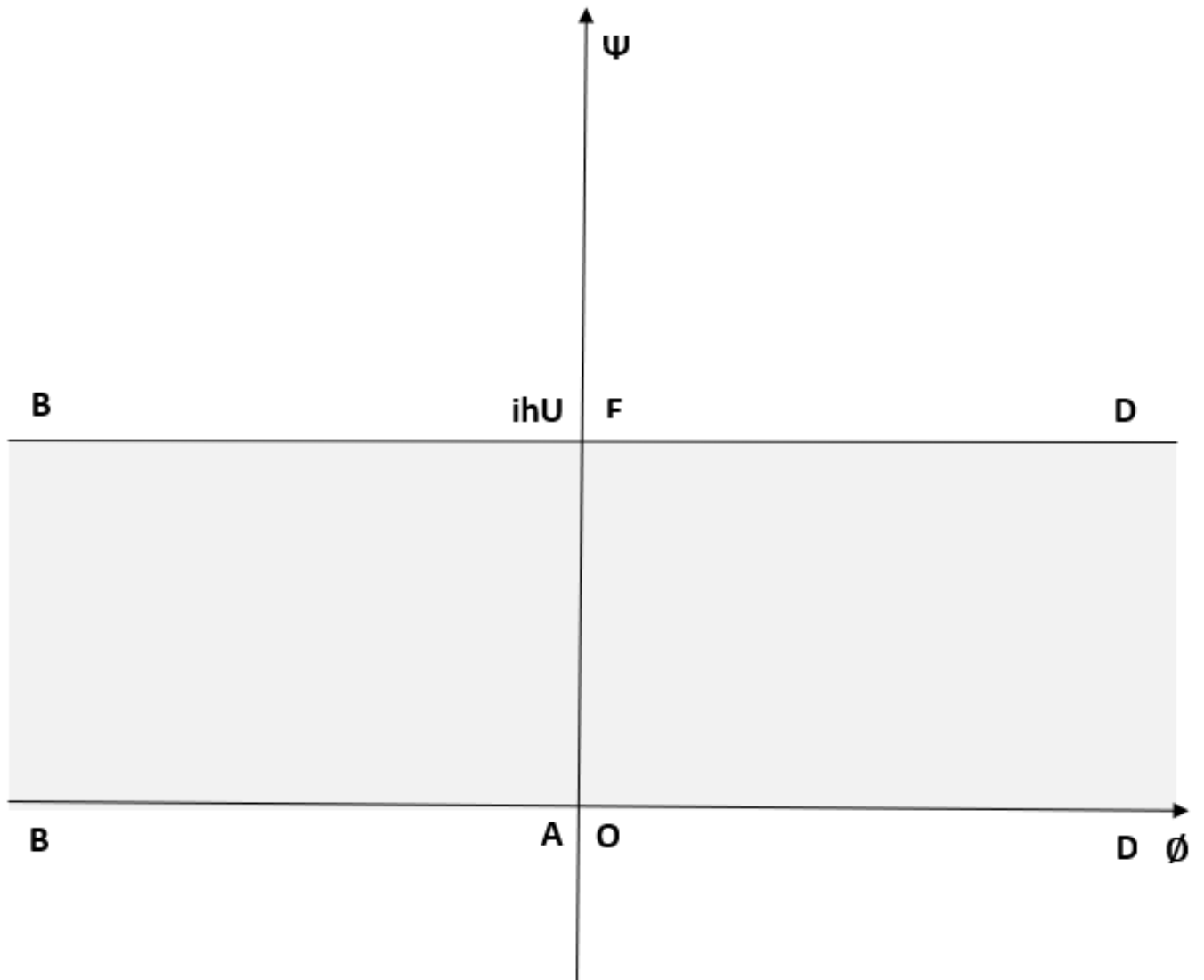


FIG. 3.4: plan de la variable f .

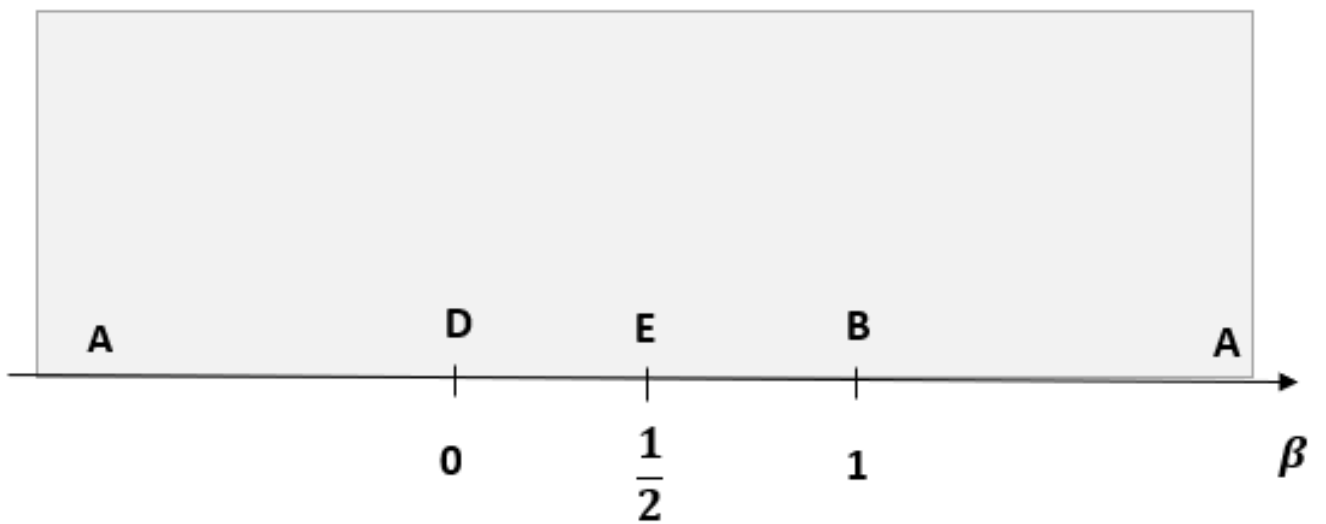


FIG. 3.5: plan de la variable β .

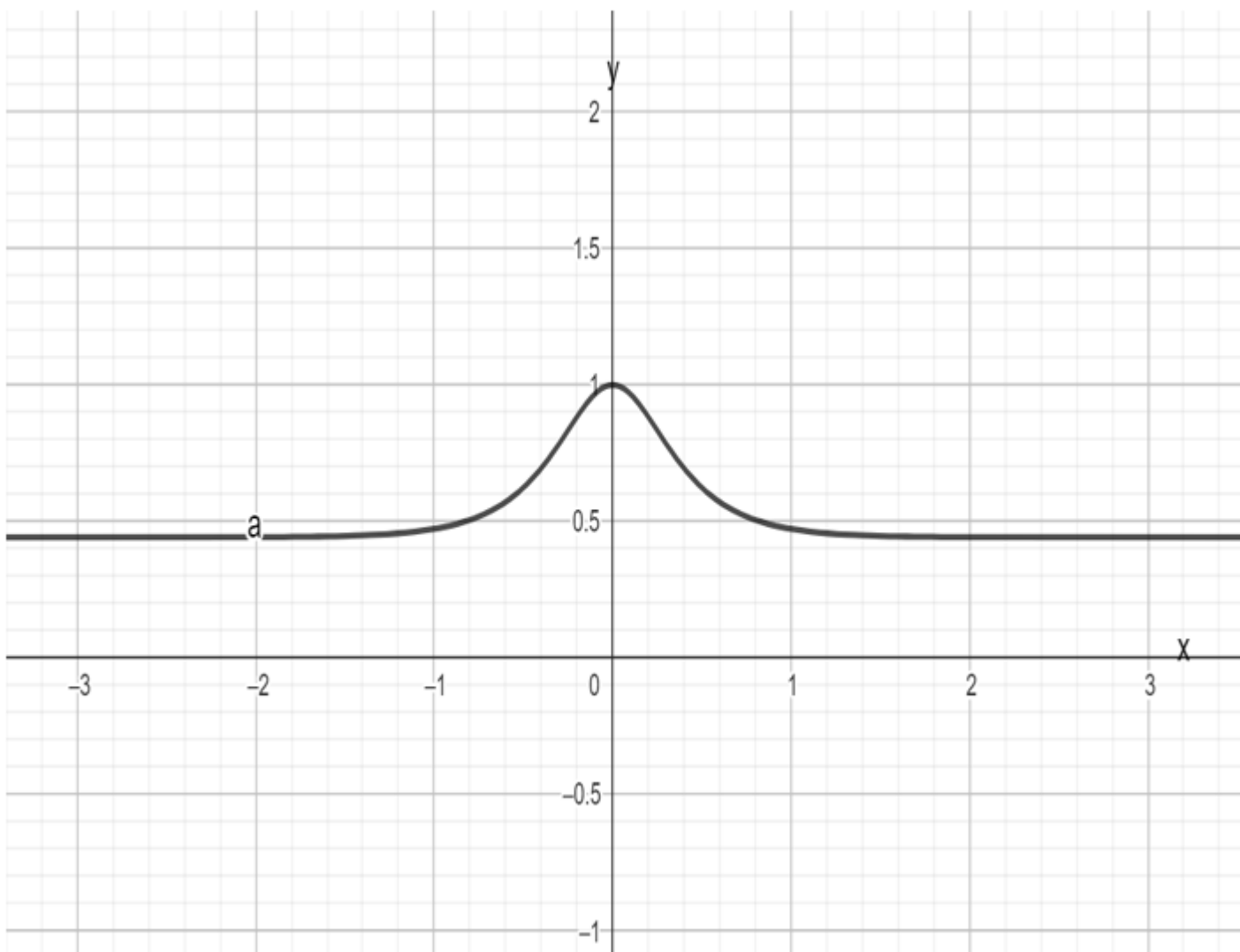


FIG. 3.6: La forme de la surface libre.

Conclusion Générale

Le projet de fin d'étude nécessite de gros effort et collaboration entre l'étudiant et l'encadreur quelque soit le cas étudié. Notre problème est "Analyse des conditions aux limites pour un écoulement d'un fluide parfait " qui explique un écoulement autour d'un obstacle qui est un problème fondamental dans la mécanique de fluide avec une grande importance dans des applications pratiques.

Dans ce mémoire on a étudié un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux autour d'un obstacle de forme triangulaire. Traitement analytique de ce problème dans cas où les effets de la gravité et de la tension de surface sont négligées, en utilisant la transformation conforme d'hodographe du à Kirchhoff (1869) et la transformation de Schwartz-Christoffel pour résoudre ce problème et trouver la solution qui donne la courbe de la surface libre.

Le but de ce travail est de trouver la solution exacte qui est la surface libre sans effet de la tension de surface c'est-à-dire la solution quand le nombre de Weber tend vers l'infini dans l'équation de Bernoulli et si on fait la résolution numérique où en tenant compte les effets de la tension de surface, on peut comparer la solution numérique avec l'analytique pour continuer les solutions avec le nombre de Weber tend vers zéro.

Bibliographie

- [1] M.ABD-LEFDIL, Mécanique Des Fluides, Université Mohamed V-Agdal, Rabat, 2014-2023.
- [2] Youcefi Sarra, Mécanique Des Fluides1 (Cours et Application), Université Mohamed Bou-diaf d'Oran, 2016-2017.
- [3] M'hamed Beriache, Mécanique Des Fluides.1cours, Université Hassiba Benbouali, Chlef, 2012-2016.
- [4] Ancey Christophe, Analyse Différentielle Outils Mathématiques Pour La Dynamique Des Fluides, école Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [5] José Bico et Marc Fermigier et Mathilde Reyssat, Mécanique Des Fluides, Espci, Paris, 2020.
- [6] Jimmy Roussel, Cours De Physique. Mécanique Des Fluides, Rennes, Janv2010.
- [7] Serguine Houria, Etude d'un écoulement potentiel a surface libre sur une plaque avec tension de surface, Thèse Doctorat en-Sciences de Université de Sétif 1,2023.
- [8] Yunus A.Cengel et John M.Cimbala, Mécanique Des Fluides. Fondements et application, De Boeck Supérieur,Italie,2017.
- [9]] Zitouni Asma, L'application de la méthode des volumes finis aux quelques écoulements potentiels bidimensionnels, Thèse master de université de M'sila, 2019.
- [10] Christian.Grossetête, Mécanique des Fluides, Ellipses, Paris, 1991.
- [11] Aiche Zineb, Etude Numérique d'un écoulement potentiel (un jet devant un obstacle), Thèse Master de Université de M'sila, 2017.
- [12] Mame Souhila, Applications des transformations conforme à un problème d'écoulement d'un fluide, thèse master de université de M'sila, 2016.

- [13] M. Lambert et R.Gélinas, *Eléments d'analyse complexe*, Presses de Université du Québec, 1994.
- [14] Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia, *Mécanique Des Fluides*, DUNOD, Paris, 2011.
- [15] Chantal Meuris, *Mécanique Des Fluides. Licence de physique et Applications*, Université libre de Bruxelles, 2020-2021.
- [16] Souigat Nabila, *Interprétation de la forme d'un jet d'eau à surface libre par une équation d'onde*, Thèse Master de Université KASDI MERBAH OUARGLA, 2019.
- [17] Mas Simon Santoso, *Simulation d'écoulements Fluides à partir de données réelles. Analyse numérique [cs.NA]*, école centrale de Nantes, Français, 2018.
- [18] Jean-Pierre DEMAILLY, *Analyse Numérique et équations différentielles*, Université Grenoble Alpes, EDP Sciences, 2016.
- [19] Didier Desjardins et Michel Combarous et Natalie Bonneton, *Mécanique des fluides (Problèmes résolus avec rappels de cours)*, DUOD, Paris, 2006.
- [20] Pierre Illien, *Transformations Conformes*, Laboratoire Phenix.Cnrs et Sorbonne Université, Espci Paris, (2020).
- [21] Nicolas Curien, *Invariants Conformes et Probabilité(mini Cours)*,ENS de Paris-Saclay, seconde année,2011.
- [22] A.Gasmi, *Numerical study of two-dimensional jet flow issuing from a funnel*, Adv.Appl.Math, Vol 87,214,pp161-169.
- [23] H.Serguine, F.Guechi and A.Gasmi, *Numerical study of mathematical model of free-surface potential flow*, Aust.J.Math.Amal, Vol.20, No.1, (2023).