الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف - المسيلة

كلية: العلـــــــوم.
قسم : الفيـــــــزياء.
رقم: Ph/TH/08/2022.

ميدان: عـــلـــــــوم المادة
فرع: الفـــيزيـاء.
تخصص: الفيزياء النظرية

مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماستر أكاديمـــي

إعداد الطالب(ة): قايد دلال

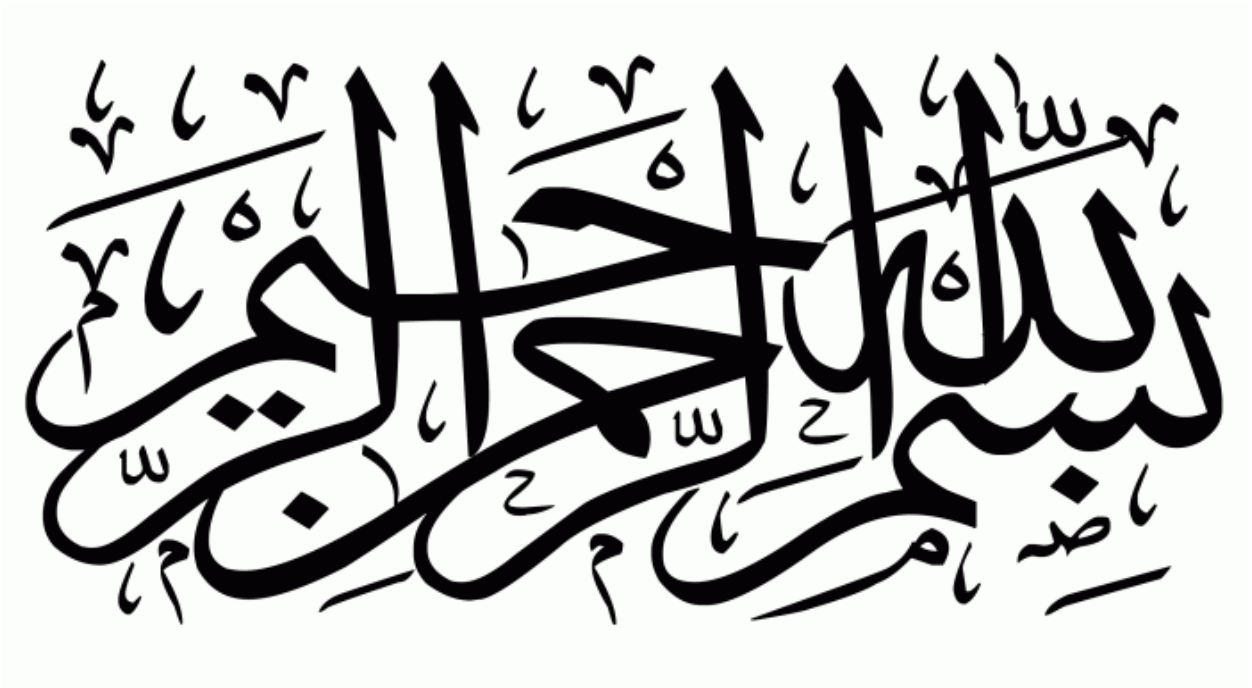
تحت عنوان

مكانيك الكم في نموذجي ضد دو سيتر ودو سيتر

تمت المناقشة يوم /09 /2023 أمام اللجنة المكونة من:

د. صهيب مجدل	جامعة المسيلة	رئيســـا
د. صابري يوسف	جامعة المسيلة	مشرفا و مقررا
د. بوفراش كريم	جامعة المسيلة	مناقشا

السنة الجامعية: 2023/2022


بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

إلى نفسي أنا

إلى من لم أنسى فضلهما طول عمري. " والداي " قرة عيني أطال الله عمرهما

إلى إخوتي الذين كانوا سندا لي " نصر الدين ' محمد' هديل' أمال ' جيهان "

إلى كل أحبائي وأصدقائي وزملائي .

نسأل الله أن يوفقنا في تحقيق الأماني والأهداف

كلمة شكر

نشكر الله تعالى على فضله لمنح العون لنا في إنجاز هذا العمل .

فالحمد له أولا وأخيرا

كما أتقدم بجزيل الشكر إلى أستاذي صبري يوسف الذي تفضل بالإشراف على هذا البحث

كما أشكر صديقتي صبرين بوضياف التي إ جتهدت في تقديم يد العون لي وغاليتي نبيلة.

وأخير شكرا جزيلا لجميع أفراد العائلة وكل من هو قريب على قلوبنا .

الفهرس

مقدمة 2

الفصل الأول : مدخل عام حول معادلة شرودينغر .

1- تمهيد 8

2- معادلة شرودينغر في الإحداثيات الكروية 9

3- فضاء دوسيتر وفضاء ضد دوسيتر.....14

الفصل الثاني : حل معادلة شرودينغر وهزاز توافقي ذات بعد واحد

1 - تمهيد 16

2- حل معادلة شرودينغر الشعاعية لبئر كمومي في بعد واحد 21

3 - حل معادلة شرودينغر الشعاعية لهزاز توافقي في بعد واحد 26

الفصل الثالث : حل معادلة شرودينغر الشعاعية في ثلاث أبعاد

1- حل معادلة شرودينغر لجسم حر في فضاء ثلاثي الأبعاد.....34

2 -حل معادلة شرودينغر لهزاز توافقي في فضاء ثلاث الأبعاد 37

الخاتمة.....40

ملخص.....

مقدمة عامة

مقدمة :1.

في السنوات الأخيرة، تمت دراسة العديد من نماذج ميكانيكا الكم المبنية على أساس علاقات التبديل المعدلة من قبل العديد من الفيزيائيين. هذا التعديل لعلاقة التبديل يؤدي إلى ظهور ارتياب صغيري في الموضع مما يؤدي إلى حد أدنى للطول [1] ، [2]. هناك أيضًا علاقات تبديل معدلة تؤدي إلى ظهور قيم قصوى في كمية الحركة [[3]. [10]].

بعد إدخال الثابت الكوني في نظرية النسبية العامة لأينشتاين للحصول على حلول كونية ثابتة ، اقترح ديراك [11] دراسة معادلات الفيزياء الذرية في الزمكان بثابت كوني وهو ما يسمى فضاء دي سيتر. كنتيجة لدلك، في ظل وجود ثابت كوني، يجب استبدال النسبية الخاصة العادية لـ Poincaré بنسبية الخاصة De Sitter. ومن المثير للاهتمام، أن جبر DeSitter المشوه له مقياسان ثابتان [12]، سرعة الضوء c $R = \pm 3 / \Lambda$، حيث ترمز علامة ± لـ AdS و dS، على التوالي. في الآونة الأخيرة ، تم برهن Guo ورفاقه[13] أن هناك تطابقًا بين نموذج سنايدر والنسبية الخاصة DS. علاوة على ذلك، أظهر Mignemi [14] أنه في background لdS (A) dS ، يجب تعديل علاقة التبديل بإدخال تعديلات تتناسب مع الثابت الكوني.

في هذه الأطروحة ، سنقوم بدراسة بعض تطبيقات مكانيك الكم في فضاء دوسيتر وكذلك في فضاء ضد دوسيتر ودلك في بعد واحد وكذلك في ثلاث أبعاد.

في الفصل الأول سوف نعطي تذكيرًا حول معادلة شرودينغر ثم سنقوم بصياغة ميكانيكا الكم بناءً على نموذج ضد دي سيتر وكذلك بناءا على نموذج دوسيتر.

في الفصل الثاني ، سنقوم بدراسة البئر الكموني وكذلك الهزاز التوافقي في بعد واحد ودلك في ضد درسيتر وكذلك في الفضاء دوسيتر. بعد إيجاد الحل نستنتج طيف الطاقة لكل الحالات

في الفصل 3 ، سنبحث عن الحلول التحليلية للجسيم الحر والهزاز التوافقي في ثلاث أبعاد ودلك في الفضائيان ضد دوسيتر ودو سيتر

الفصل الأول:

1.مدخل لمعادلة شرودينغر :

يرتكز ميكانيك الكم على معادلة شرودينغر والتي هي عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية تصف كيفية تغير الحالة الكمية لنظام فيزيائي مع الزمن ، وقد صاغها عالم الفيزياء النمساوي ارفين شرودينغر في نهاية عام 1925 و نشرت في عام 1926 . .الصيغة الرياضية لمعادلة شرودينغر هي :

$$H\psi = E\psi \qquad (1.1)$$

حيث يمثل كل من E وψ على الترتيب الطاقة ودالة الموجة للجسيم أما H *فيمثل* الطاقة الكلية ، والمعرف في الفيزياء الكمية بالمؤثر الهاميلتوني ويكتب :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \qquad (1.2)$$

تعطى p و m يمثلان كمية الحركة و كتلة الجسيم على التوالي. مؤثر كمية الحركة يكتب كالتالي :

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad (1.3)$$

حيث ħ هو ثابت بلانك ، و $\vec{\nabla}$ مؤثر نبلا المعرف في الإحداثيات الكارتيزية ب : $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

بالتعويض في المعادلة (1.4) نجد :

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \qquad (1.4)$$

حيث المؤثر لابلاسيان هو مربع المؤثر نبلا :

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

أغلب الكمونات التي يتم دراستها هي كمونات مركزية حيث أنها تتعلق فقط بالمسافة بين الجسيم ونقطة المرجع $V(\vec{r}) = V(r)$. في هده الحالة نقوم باستعمال الإحداثيات الكروية المعرفة كالتالي:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{r}\sin\theta\cos\varphi \\ \mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\theta\sin\varphi \\ \mathrm{z} = \mathrm{r}\cos\theta \end{cases} \qquad (1.5)$$

في هده الحالة يأخذ مؤثر "لابلاسيان " الشكل التالي :

$$\Delta = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\mathrm{r}^2\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} + \frac{1}{\mathrm{r}^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\mathrm{r}^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad (1.6)$$

نقوم بتعويض العبارة (1.6) في المعادلة (1.4) نتحصل على معادلة شرودينغر في الإحداثيات الكروية:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\right)+V\right)\psi=E\psi \qquad (1.7)$$

حل هده المعادلة نقوم باستعمال طريقة " **فصل المتغيرت**, حيث نكتب دالة الموجة على الشكل التالي : $\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$. بالتعويص في المعادلة السابقة نجد

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}R(r)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(r)]\right)R(r)Y(\theta,\varphi)=0$$

بالقسمة على $R(r)\ Y(\theta,\varphi)$ والضرب في r^2 نتحصل على :

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\frac{2mr^2}{\hbar^2}(E-V(r))=-\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)\sin\theta} \qquad (1.8)$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر يتعلق ب" r " والطرف الأيمن يتعلق ب "θ,φ " ومنه نستنتج أن الطرفان عبارة عن ثابت عبارته λ^2 .وبالتالي يصبح لدينا معادلتين : الأولى هي معادلة الطرف القطري

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2mE}{\hbar^2}\big(E-V(r)\big)R(r)=\lambda^2R(r) \qquad (1.9)$$

والثانية تمثل الطرف الزاوي و تعطى ب

$$-\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y(\theta,\varphi)=\lambda^2\,Y(\theta,\varphi) \qquad (1.10)$$

نعرف ان عبارة λ^2 هي:

$$\lambda^2=-\hbar^2\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \qquad (1.11)$$

و كذلك نعلم:

$$\lambda^2Y(\theta,\varphi)=l(l+1)\hbar^2Y(\theta,\varphi) \qquad (1.12)$$

وبالتالي نستنتج أن $\lambda^2=l(l+1)$

بتعويض عبارة λ^2 وتبسيط المعادلة (1.9) نتحصل على :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r)=0 \qquad (1.13)$$

باستخدام طريقة فصل المتغيرات أيضا نقوم بحل المعادلة (1.12) حيث نضع :

$$Y(\theta,\varphi) = T(\theta)F(\varphi) \qquad (1.14)$$

بتعويض المعادلة (1.14)في المعادلة (1.12) نجد :

$$F(\varphi)\left(\frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{tan\theta}\frac{\partial\, T(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{T(\theta)}{F(\theta)sin^2\theta}\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\mathrm{T}(\theta)\mathrm{F}(\varphi) = 0 \quad (1.15)$$

بالقسمة على $F(\varphi).T(\theta)$ ، والضرب في $si^2\theta$، نتحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{sin^2\theta}{\mathrm{T}(\theta)}\left(\frac{\partial^2\mathrm{T}(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial\mathrm{T}(\theta)}{\partial\theta}\right) + \lambda^2 sin^2\theta = -\frac{1}{\mathrm{F}(\varphi)}\frac{\partial^2\mathrm{F}(\varphi)}{\partial\varphi^2} \qquad (1.16)$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر يتعلق ب θ بينما الطرف الأيمن يتعلق بالزاوية φ ، ومنه نستنتج ان الطرفان يساويان ثابت. اي

$$\begin{cases} \frac{sin^2\theta}{\mathrm{T}(\theta)}\left(\frac{\partial^2\mathrm{T}(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial\mathrm{T}(\theta)}{\partial\theta}\right) + \lambda^2 sin^2\theta = m^2 \\ -\frac{1}{\mathrm{F}(\varphi)}\frac{\partial^2\mathrm{F}(\varphi)}{\partial\varphi^2} = m^2 \end{cases} \qquad (1.17)$$

بتبسيط المعادلتين نتحصل على:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial\mathrm{T}(\theta)}{\partial\theta} - \frac{m^2}{sin^2\theta} + \lambda^2\right)\mathrm{T}(\theta) = 0 \qquad (1.18)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + m^2\right)\mathrm{F}(\varphi) = 0 \qquad (1.19)$$

حل المعادلة (1.19) من الشكل التالي :

$$\mathrm{F}(\varphi) = \mathrm{A}e^{-\mathrm{m}\varphi} \qquad (1.20)$$

في حين حل المعادلة (1.19) من الشكل :

$$T(\theta) = AP_l^m(\cos\theta) \qquad (1.21)$$

حيث :

$\boldsymbol{P_l^m}$ هي معادلة "**l ″le gendre associée**" هو عدد صحيح :

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_l(x) \qquad (1.22)$$

حيث كثير الحدود "**le gendre**" يتم تعريفه بواسطة صيغة " **Rodrigues** " **كما يلي:**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l \qquad (1.23)$$

وفي الأخير نستطيع أن نسمي الجزء الزاوي لدالة الموجة بالتوافقيات الكروية:

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \epsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi\ \ (l+|m|)!}} e^{im\varphi}\ P_l^m(\cos\theta) \qquad (1.24)$$

2. مكانيك الكم في فضاء ضد دوستير

مبدا الارتياب المعدل والدي يصف فضاء ضد دوسير يعطى ب

$$[X,P] = i\hbar(1+\alpha X^2) \qquad (1.25)$$

حيث α وسيط صغير جدا و موجب ويتعلق بثابت الكوسمولوجيا. ادا كان $\alpha = 0$, فإننا نحصل على مكانيك الكم العادي.

باستعمال نفس طريقة مكانيك الكم العادي, يمكن أن نبرهن أن علاقة التبادل هده تعطينا مبدأ الارتياب المعدل العادي

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}(1+\alpha(\Delta X)^2) \qquad (1.26)$$

حل هده المعادلة بدلالة (ΔP)

$$\Delta P = \frac{\alpha\hbar}{2}\left(\alpha(\Delta X) + \frac{1}{\Delta X}\right) \qquad (1.27)$$

هدا الحل يثبت وجود ارتياب صغيري غير معدوم معطى ب

$$(\Delta X)_{min} = \frac{\hbar\sqrt{\alpha}}{2} \qquad (1.28)$$

يمكن تفسير هدا الحل بوجود تأثير أشعة تحت الحمراء, ناتجة عن تأثير الجاذبية على الجملة الكمية.

المؤثرين X و P يعطى ب :

$$X = X \qquad (1.29)$$

$$P = \frac{\hbar}{i}(1+\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x}$$

القيمة الذاتية لمؤثر كمية الحركة في فضاء الإحداثيات هو حل للمعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{\hbar}{i}(1+\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi_\lambda(x) \qquad (1.30)$$

حل هده المعادلة هو

$$\varphi_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}}.e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{\alpha}\hbar}arctan(\sqrt{\alpha}.x)} \qquad (1.31)$$

علاقة الانغلاق, الجداء السلمي و علاقة الإسقاط يكتبون كالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+\alpha x^2)}|x\rangle\langle x| = 1 \qquad (1.32) \qquad \langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+\alpha x^2)}\psi^*(x)\varphi(x) \qquad (1.33)$$

$$\langle x|x'\rangle = (1+\alpha x^2)\delta(x-x') \qquad (1.34)$$

في فضاء ثلاثي الابعاد, مؤثر كمية الحركة يعطى ب

$$p_i = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha\, x_i\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right) \qquad (1.35)$$

3.1 مكانيك الكمي في فضاء ضد دوستير

نموذج دوسيتر يرتكز على جبر هايزنبرغ المعدل

$$[X,P] = i\hbar(1-\alpha X^2) \qquad (1.36)$$

بنفس الطريقة المتبعة في الفقرة السابق, يمكن أن نستنتج علاقة الارتياب من علاقة التبادل فنحصل على

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}(1-\alpha(\Delta X)^2) \qquad (1.37)$$

حل هده المعادلة هو

$$-\frac{(\Delta P)}{\alpha\hbar}-\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha+\frac{(\Delta P)^2}{\alpha\hbar^2}}\leq(\Delta X)\leq-\frac{(\Delta P)}{\alpha\hbar}+\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha+\frac{(\Delta P)^2}{\alpha\hbar^2}} \qquad (1.38)$$

المؤثرين X وP اللذان يحققان علاقة التبادل يعطيان ب

$$X=\mathrm{x} \qquad (1.39)$$

$$P=\frac{1}{i}(1-\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x} \qquad (1.40)$$

في هدا النمودج يعطى, الجداء السلمي و علاقة الانغلاق ب

$$\int\frac{dx}{(1-\alpha x^2)}|x\rangle\langle x|=1 \qquad (1.41)$$

$$\langle\varphi|\psi\rangle=\int\frac{dx}{(1-\alpha x^2)}\varphi^*(x)\psi(x) \qquad (1.42)$$

في فضاء ثلاثي الابعاد, مؤثر كمية الحركة يعطى ب

$$p_i=-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_i}-\alpha\,x_i\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right) \qquad (1.43)$$

الفصل الثاني :

1.2. بئر كمومي في بعد واحد :

في ميكانيك الكم مسألة جسيم يتحرك في بئر كمومي لا نهائي هي مسألة تصف جسيم يتحرك في حيز ضيق يحيطه حاجز غير نفاذ ,ويستخدم هذا النموذج لإيضاح الفرق بين ميكانيك الكلاسيكي وميكانيك الكم الذي يطبق على أللأنظمة الكمومية .تنجح ميكانيك الكم في وصف الأنظمة الكمومية أي الصغيرة جدا في حجم الذرات والجسيمات الأولية ,حيث تبدأ الظواهر الكمومية في الظهور في حين فشل الميكانيكي التقليدي في وصفها لأنه يطبق على أللأجسام الكبيرة فقط .

في الأنظمة الكلاسيكية مثل جسيم منحصر داخل بئر كمومي يكون الجسيم يتحرك بأي سرعة ويكون احتمال وجوده في أي نقطة من الفضاء متساوي ولكن عندما يصغر البئر في حيز عدة نانومترات فانه تصبح التأثيرات الكمومية مهمة ويبدأ الجسم باتخاذ مستويات طاقة معينة في البئر وفي نفس الوقت فانه يستحيل أن تكون طاقة الجسيم صفرا بمعنى أن الجسيم لا يمكن أن يكون في حالة سكون تام .
ضف إلى ذالك فان الجسيم يمكنه التواجد في أماكن محددة من البئر و هناك بعض المواضع لا يمكنه التواجد بها .
في الفصول التالية سندرس تطبيق البئر الكمومي في حالة سيتر وفي حالة سيتر المضاد

نعتبر جسيم كمومي بدون سبين كتلته m يتحرك في بئر كمومي أحادي بعد بالشكل التالي :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < a \\ \infty & , \quad ailleurs \end{cases} \qquad (2.1)$$

تعطى معادلة شرود نغر بالشكل :

$$\left(\frac{P^2}{2m} + V(x)\right) \psi(x) = \mathrm{E}\ \psi(\mathrm{x}) \qquad (2.2)$$

في الفصول القادمة نريد الحصول على عبارة الطاقة في حالة دي سيتر وفي حالة دي سيتر المضاد

2. في حالة $F(x) = 1 \pm \alpha x^2$:

من التمثيل الموضعي لدينا عبارة بالشكل :

$$\hat{P} = -(i\hbar(1 \pm \alpha x^2)\frac{d}{dx} \qquad (2.3)$$

نعوض قيمة (2.3) في المعادلة (2.2) :

$$\left(\frac{\left(i\hbar(1\pm\alpha x^2)\frac{d}{dx}\right)^2}{2m}+V(x)\right)\psi(x)=E\psi(x) \qquad (2.4)$$

ولتحقيق شرطي البئر الكمومي يجب أن تؤول الدالة الموجية $\psi(x)$ الى الصفر عند جدران البئر , لأن عدم اختراق الجسيم للجدران الكمونية يعني انعدام الدالة التي تصف حركتها . ولصياغة الشروط الحدودية للمسألة المطروحة نكتب معادلة شرودنغر التفاضلية المعبرة عن حركة الجسيم داخل البئر كالتالي : من اجل $x\in$: $]0,\alpha[$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left((1\pm\alpha x^2)\frac{d}{dx})^2-E\right)\right)\psi(x)=0 \qquad (2.5)$$

باستخدام تغيير المتغير التالي :

$$\frac{d}{ds}=(1\pm\alpha x^2)\frac{d}{dx}\ \rightarrow\ \frac{ds}{dx}=\frac{1}{(1\pm\alpha x^2)} \qquad (2.6)$$

نكتب المعادلة التفاضلية بدلالة ds فنحصل على المعادلة :

$$\left(-\hbar^2\frac{d^2}{ds^2}-2mE\right)\psi(s)=0 \qquad (2.7)$$

إيجاد الحالة الكمومية العامة للجسيم داخل بئر كمون لانهائي :المعادلة السابقة هي معادلة شرودنغر لها حل من الشكل الآسي التالي :

$$\psi(s)=Ae^{iks}+Be^{-iks} \qquad (2.8)$$

حيث :

$$K=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad (2.9)$$

باستخدام الشرطين الحديين (2.1) على العلاقة (2.8) نجد :

$$\begin{cases}\psi(0)=0\ \rightarrow B=-A\\ \psi(a)=0\ \rightarrow\ \psi(s)=2iA\sin(ks)\end{cases} \qquad (2.10)$$

وعليه تكون عبارة الحل بالشكل :

$$\psi(s) = 2iA\sin(ks) \qquad (2.11)$$

بتعويض العلاقة (2.10) في العلاقة (2.11) نجد :

$$2iA\sin\big(ks(a)\big) = 0 \qquad (2.12)$$

من اجل a=x نستخرج عبارة s(a) :

$$ds = \frac{dx}{1\pm\alpha x^2} \qquad (2.13)$$

$$s = -\frac{\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow s(a) = -\frac{\tan^{-1}\sqrt{\alpha}a}{\sqrt{\alpha}} \qquad (2.14)$$

انعدام الدالة sin يعطي الشرط:

$$\left(k\frac{\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}}\right) = n\pi \ \rightarrow k = \frac{n\pi}{\frac{\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}\,a)}{\sqrt{\alpha}}} \quad n = 1,2,3,.. \qquad (2.15)$$

ومنه تكون عبارة الحلول من الشكل :

$$\Phi_n(s) = 2iAsin\left(\frac{n\pi}{\frac{\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}\,a)}{\sqrt{\alpha}}}\ s\right), \quad n = 1,2,3,. \qquad (2.16)$$

بتعويض قيمة $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ في شرط الدالة sin نجد :

$$\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar}}\frac{\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}\,a)}{\sqrt{\alpha}} = n\pi \qquad (2.17)$$

ومنه تكون عبارة الطاقة بالشكل :

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}.\left(\frac{n\pi\sqrt{\alpha}}{\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}\,a)}\right)^2 \qquad (2.18)$$

تؤول الطاقة E_n الخاصة بالبئر الكمومي الى طاقة الجسيم غير نسبي وبدون سبين محصور في صندوق احادي البعد عرضه a المعرفة ب :

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad (2.19)$$

1.2 .هزاز توافقي في بعد واحد :

أن مسألة المتذبذب التوافقي من المسائل المهمة في ميكانيكا الكم حيث ترتبط هذه المسألة في تطبيقات عملية عديدة مثل اهتزاز الجزيئات وذرات المواد الصلبة ,التي تقرب عادة من اهتزازات توافقية بسيطة وكذالك المجال الكهرومغناطيسي والذي يمكن اعتباره في تطبيقات كثيرة كعدد من الاهتزازات التوافقية البسيطة .

لدينا عبارة هاميلتون الهزاز التوافقي بالشكل :

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad (2.20)$$

4.1 في حالة دي سيتر $F(x) = (1-\alpha x^2)$

لدينا معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن بالشكل :

$$\left[\frac{-h^2}{2m}D_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\psi(x) = E\psi(x) \qquad (2.21)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}(1-\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x}\,(1-\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x) \qquad (2.22)$$

ندخل المتغير الجديد:

$$q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{d(\sqrt{\alpha}x)}{1-(\sqrt{\alpha}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tanh^{-1}(\sqrt{\alpha}x\,). \qquad (2.23)$$

اي

$$x = \frac{\tanh\sqrt{\alpha}q}{\sqrt{\alpha}} \qquad (2.24)$$

إذن تصبح المعادلة (2.22) من الشكل :

$$(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\tanh(\sqrt{\alpha}q)^2}{2\alpha}\psi(q) = E\psi(q) \qquad (2.25)$$

نستخدم المتغير الجديد :

$$y = \cosh(\sqrt{\alpha}q)^2 \qquad (2.26)$$

حيث

$$\frac{d}{dy} = \frac{dy}{dy}\frac{d}{dy} = 2\sqrt{\alpha}ch.sh\;\frac{d}{dy}. \qquad (2.27)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} = \left[4\alpha(sh^2 + ch^2).\frac{d}{dy} + 4\alpha\; ch\; sh\;\frac{dy}{dy}.\frac{d^2}{dy^2}\right] \qquad (2.28)$$

بالقسمة على $\frac{m}{-2\hbar^2\alpha}$ نتحصل على :

$$\left(y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\frac{d}{dy}+\frac{\frac{m^2\omega^2}{4\alpha\hbar^2}}{y}-\frac{mE}{2\alpha\hbar^2}+\frac{m^2\omega^2}{4\alpha\hbar^2}\right)\psi(y)=0 \qquad (2.29)$$

نحاول كتابة هده المعادلة على شكل معادلة فوق هندسية :

$$\left(y(1-y)\frac{df^2}{dy^2}+(c-(a+b+1)y)\frac{df}{dy}-abf\right)=0 \qquad (2.30)$$

ودلك بكتابة دالة الموجة على الشكل التالي :

$$\Psi(y)=y^{\rho/2}f(y) \qquad (2.31)$$

المشتقات تكتب كما يلي

$$\frac{d}{dy}\psi=y^{\rho/2}f'+\frac{\rho}{2}\,y^{\frac{\rho}{2}-1}f \qquad (2.32)$$

$$\frac{d^2}{dy}\psi=y^{\rho/2}f''+\frac{\rho}{2}y^{\frac{\rho}{2}-1}f'+\frac{\rho}{2}y^{\frac{\rho}{2}-1}f'+\frac{\rho}{2}\left(\frac{\rho}{2}-1\right)f \qquad (2.33)$$

بالتعويض في المعادلة (2.27) نجد

$$y(1-y)f''+\left(\frac{1}{2}+\rho-y(\rho+1)\right)f'+\left(\frac{\rho(\rho-1)-\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2\hbar^2}}{4y}-\frac{\rho^2}{4}-\frac{mE}{2\alpha\hbar^2}+\frac{m^2\omega^2}{4\alpha^2\hbar^2}\right)f=0 \qquad (2.34)$$

لكي نحصل على معادلة فوق هندسية نكتب

$$\rho(\rho-1)-\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2\hbar^2}=0 \qquad (2.35)$$

و بالتالي

$$\rho_{\pm}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2\hbar^2}+\frac{1}{4}} \qquad (2.36)$$

إذن تتحصل على المعادلة :

$$y(1-y)f''+\left(\rho+\frac{1}{2}-y(\rho+1)\right)f'+\left(-\frac{\rho}{4}-\frac{mE}{2\alpha\hbar^2}+\frac{m^2\omega^2}{4\alpha^2\hbar^2}\right)f=0 \qquad (2.37)$$

هده المعادلة ليست لها حل حقيقي وبالتالي لا نستطيع استخراج طيف الطاقة.

في حالة سيتر المضاد $D_x = (1 + \alpha x^2)$

لدينا معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن بالشكل :

$$\left[\frac{-h^2}{2m} D_x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right] \psi(x) = E\psi(x) \qquad (2.38)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}(1+\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x}\,(1+\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x) \qquad (2.39)$$

لدينا

$$\frac{d}{dq} = (1+\alpha x^2)\frac{d}{dx} \qquad (2.40)$$

$$dq = \frac{dx}{1+\alpha x^2} \implies q = \int \frac{dx}{1+\alpha x^2} \qquad (2.41)$$

نضرب المعادلة ونقسم على $\sqrt{\alpha}$ نتحصل على :

$$q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{d(\sqrt{\alpha}x)}{1+(\sqrt{\alpha}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\alpha}x\right). \qquad (2.42)$$

اي

$$x = \frac{\tan\sqrt{\alpha}q}{\sqrt{\alpha}} \qquad (2.43)$$

إذن تصبح المعادلة من الشكل

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\tan\left(\sqrt{\alpha}q\right)^2}{2\alpha}\psi(q) = E\psi(q)\right. \qquad (2.44)$$

باستخدام تغير المتغير كالتالي :

$$y = sin^2(\sqrt{\alpha}q) \qquad (2.45)$$

$$\frac{d}{dq} = \frac{dy}{dq}\frac{d}{dy} = 2\sqrt{\alpha}\sin\cos\frac{d}{dy} \qquad (2.46)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} = 2\alpha(-sin^2 + cos^2)\frac{d}{dy} + 4\alpha sin^2 cos^2\,\frac{d}{dy} \qquad (2.47)$$

$$=4\alpha\left[y(1-y)\frac{d^2}{dy^2} + (\frac{1}{2}-y)\frac{d}{dy})\right]$$

تصبح المعادلة

$$\left(y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\frac{d}{dy}-\frac{\frac{m^2\omega^2}{4\alpha^2\hbar^2}}{1-y}+\frac{mE}{2\alpha\hbar^2}+\frac{m^2\omega^2}{4\alpha^2\hbar^2}\right)\psi(y)\ =0 \qquad (2.48)$$

لتبسيط الحل نكتب الدالة من الشكل :

$$\psi=(1-y)^{\rho/2}f(y) \qquad (2.49)$$

نستخدم المشتقات التالية :

$$\psi'=-\frac{\rho}{2}(1-y)^{\frac{\rho}{2}-1}f(y)+f'(y)(1-y)^{\frac{\rho}{2}} \qquad (2.50)$$

$$\psi''=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\rho}{2}-1\right)(1-y)^{\frac{\rho}{2}-2}f(y)-\rho(1-y)^{\frac{\rho}{2}-1}f'(y)+f''(y)(1-y)^{\rho/2} \qquad (2.51)$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$y(1-y)f''+\left(\frac{1}{2}-(\rho+1)y\right)f'+\frac{\rho(\rho-1)-\left(\frac{m\omega}{\hbar\alpha}\right)^2}{4(1-y)}-\frac{\rho(\rho-1)-2\rho-\left(\frac{m\omega}{\hbar\alpha}\right)^2}{4}$$

للحصول على معادلة من شكل فوق هندسية, ندخل الشرط التالي

$$(\rho^2-\rho)+(\frac{m\omega}{2\alpha\hbar})^2=0 \qquad (2.52)$$

وبالتالي

$$\rho=\frac{1}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}+(\frac{m\omega}{\alpha\hbar})^2} \qquad (2.53)$$

ومنه المعادلة تصبح

$$y(1-y)f''+\left(\frac{1}{2}-(\rho+1)y\right)f-\frac{\rho}{4}+\left(\frac{m\in}{2\alpha\hbar}\right)f=0 \qquad (2.54)$$

حل هده المعادلة هو

$$f(y)=(1-y)^{-\frac{1}{4}\sqrt{1+(\frac{m\omega}{\alpha\hbar})^2}}.\left(A.P_b^a\left(\sqrt{y}\right)+B.Q_b^a\left(\sqrt{y}\right)\right)$$

بالرجوع إلى المتغير الأصلي نجد دالة الموجة للهزاز التوافقي في فضاء دوسيتر

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{4}}}.\left(A.P^{(a,b)}\left(\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{1+\alpha x^2}}\right) + B.Q^{(a,b)}\left(\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{1+\alpha x^2}}\right)\right)$$

حيث

$$a = \frac{-1+\sqrt{\frac{8mE}{\alpha\hbar^2}+\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2\hbar^2}}}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{1+(\frac{m\omega}{\alpha\hbar})^2}$$

الفصل الثالث

3. جسم حر:

نعتبر معادلة شرودينغر لجسم حر في في فضاء دوسيتر ثلاثي الابعاد

$$H\psi = \frac{\vec{p}^2}{2m} = E\psi \qquad (3.1)$$

حيث $\vec{p}^2 = \vec{p}_x{}^2 + \vec{p}_y{}^2 + \vec{p}_z{}^2$

$$p_i = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha\, x_i\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right) \qquad (3.2)$$

حل هده المعادلة في الإحداثيات الكارتيزية صعب جدا, لدلك سوف نستعمل الإحداثيات الكروية حيث

$$\begin{aligned} x &= r.\sin\theta\,.\cos\varphi \\ y &= r.sin\theta\,.\sin\varphi \\ z &= r.cos\theta \end{aligned} \qquad (3.3)$$

بالتعويض في العبارات (3.2) ثم في (3.1) نجد معادلة شرودينغر في الاحداثيات الكروية

$$(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + 2\,\frac{1+\alpha r^2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2.r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2})\,\psi(r,\theta,\varphi) = 0 \qquad (3.4)$$

حيث $\vec{L}$ يمثل موثر العزم الحركي ويعطى ب

$$\vec{L}^2 Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar^2.l.(l+1).Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (3.5)$$

بما الكمون معدوم, فانه يمكننا فصل الطرف الزاوي عن الطرف القطري بكتابة

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r).Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (3.6)$$

بالتعويض في المعادلة (3.4) نحصل على

$$\left((1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + 2.\frac{1+\alpha r^2}{r}.\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mE}{r^2}\right)R(r) = 0 \qquad (3.7)$$

لتبسيط هده المعادلة, نقوم بإدخال المتغير الجديد التالي

$$q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}arctan\left(\sqrt{\alpha}r\right) \qquad (3.8)$$

فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$\left(\frac{d^2}{dq^2}+\frac{2\sqrt{\alpha}}{tanh(\sqrt{\alpha}q)}\frac{d}{dq}-\frac{\alpha l(l+1)}{tanh^2(\sqrt{\alpha}q)}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)R(q)=0 \qquad (3.9)$$

نلاحظ ان هده المعادلة تحتوي على دوال مثلثيه مما يصعب حلها. للتخلص من هدا المشكل ندخل الدالة الجديدة التالية

$$R=\sin\sqrt{\alpha}q\,.f(q) \qquad (3.10)$$

المشتق الأول و الثاني لهده الدالة يساويان

$$R'=l.\sqrt{\alpha}.cos\sqrt{\alpha}q.sin^{l-1}\left(\sqrt{\alpha}q\right).f(q)+sin^{l}\left(\sqrt{\alpha}q\right).f'(q)$$

$$R''=\left(-l\alpha\,sin^{l}\sqrt{\alpha}q+\alpha\,l(l-1)cos^2\sqrt{\alpha}q\,sin^{l-2}\sqrt{\alpha}q\right)f \qquad (3.11)$$

$$+2\sqrt{\alpha}\,.\mathrm{l}.\cos\,.\sin^{\mathrm{l}-1}.\mathrm{f}'+sin^{l}\left(\sqrt{\alpha}q\right).\mathrm{f}''$$

بالتعويض في المعادلة (3.9) نجد

$$f''+2\sqrt{\alpha}.\frac{l+1}{tanh\sqrt{\alpha}q}.f'-\left(\alpha l+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)f=0 \qquad (3.12)$$

الآن نحاول كتابة هذه المعادلة على شكل معادلة فوق هندسية. لذالك ندخل المتغير الجديد

$$y=\frac{1-cos\sqrt{\alpha}\,q}{2} \qquad (3.13)$$

و بالتالي

$$\frac{d}{dy}=\frac{dy}{dy}.\frac{d}{dy}=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}.\sin\sqrt{\alpha}q.\frac{d}{dy}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}=\frac{\alpha}{2}.cos\sqrt{\alpha}\,q\,\frac{d}{dy}+\frac{\alpha}{4}\,sin^2\sqrt{\alpha}q\,\frac{d^2}{dy^2}$$

بالتعويض في المعادلة (3.12) نجد

$$\left(y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}+\left(l+\frac{3}{2}-(2l+3)y\right)\frac{d}{dy}-l+\frac{2mE}{\alpha\hbar^2}\right)f(y)=0 \qquad (3.14)$$

نلاحظ أنها معادلة تفاضلية فوق هندسية لدينا حلين احدهما معتدل و الأخر شاد.

$$f = N_1 .\ \ {}_2F_1(A.B.C.Y) + 1 - C + N_2 . y^{1-c}\ \ {}_2F_1(A - C + 1; B - C + 1; 2 - C; y) \quad (3.15)$$

حيث

$$A = l + 1 + \sqrt{1 + l(l+1) + \frac{2mE}{\alpha\hbar^2}}\ , B = l + 1\sqrt{1 + l(l+1) + \frac{2mE}{\alpha\hbar^2}}\ , C = l + \frac{3}{2} \qquad (3.16)$$

لكي نحصل على مستويات الطاقة نستعمل خاصية التقارب الدالة الفوق الهندسية. نعلم ان سلسلة الدالة الفوق الهندسية تكتب كما يلي :

$${}_2F_1\,(A, D, C, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (B)_n}{(n+1)(C)_n} Y^n \qquad (3.17)$$

لكي تكون هده السلسلة متقاربة يجب أن يكون

$$A = -n = l + 1 + \sqrt{1 + l(l+1) + \frac{(n)^2}{\alpha\hbar^2}}$$

بتربيع الطرفين نجد

$$(n + l + 1)^2 = 1 + l(l+1) + \frac{2mE}{\alpha\hbar^2}$$

وبالتالي نجد عبارة مستويات الطاقة لجسيم حر في فضاء دوستير ثلاثي الابعاد

$$E_n = \frac{\alpha\hbar^2}{2m}(n^2 + (l+1)(2n+1) \qquad (3.18)$$

كذلك دالة الموجة لهدا ا لجسيم تعطى ب

$$\psi = N . y_l^m(\theta, \varphi) . sin^l\left(\sqrt{\alpha}\, q\right) . F_{21}(n + 2(l+1), -n, \frac{1-\cos\sqrt{\alpha}\,.q}{2} \qquad (3.19)$$

حيثN هو ثابت التقنين.

في فضاء دوسيتر الطاقة غير مقننة و دالة الموجة تعطى بالعبارة التالية

$$\psi = N . y_l^m(\theta, \varphi) . sin^l\left(\sqrt{\alpha}\, q\right) . F_{21}(A', B', C', \frac{1-\cosh(\sqrt{\alpha}\,.q)}{2}) \qquad (3.20)$$

حيث

$$A = l + 1 + \sqrt{1 + l(l+1) - \frac{2mE}{\alpha\hbar^2}}\ , B = l + 1 - \sqrt{1 + l(l+1) - \frac{2mE}{\alpha\hbar^2}}, C = l + \frac{3}{2} \qquad (3.21)$$

2.3 . الهزاز التوافقي:

معادلة شرودينغر للجزء القطري والخاصة بالهزاز التوافقي في 3 ابعاد في فضاء ضد–دوسيتر تكتب كما يلي :

$$\left((1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1+\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{1+\alpha r^2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) u = 0 \quad (3.22)$$

كما في دراسة الجسيم الحر, لتبسيط هذه المعادلة ندخل المتغير الجديد (5.8) فتصبح هده المعادلة

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + 2\frac{\sqrt{\alpha}}{\tan\sqrt{\alpha}q}.\frac{d}{dy} - \frac{\alpha.l(l+1)}{tan^2\sqrt{\alpha}q} - \frac{m^2\omega^2}{\alpha\hbar^2}tan^2\sqrt{\alpha}q + \frac{2m.E}{\hbar^2}\right) u(q) = 0 \qquad (3.23)$$

نلاحظ أن هذه المعادلة تحتوي على أطراف مثلثية ، لتفادي ذالك ندخل الدالة الجديدة التالية :

$$u(q) = sin^l\left(\sqrt{\alpha}.q\right).cos^k\left(\sqrt{\alpha}q\right).f(q) \qquad (3.24)$$

نستعمل المشتقات التالية :

$$u' = \left[l\sqrt{\alpha}.sin^{l-1}\left(\sqrt{\alpha}q\right).cos^{k+1}\left(\sqrt{\alpha}q\right) - \sqrt{\alpha}.k.sin^{l+1}\left(\sqrt{\alpha}q\right).cos^{k-1}(\sqrt{\alpha}q)\right].f + sin^l\left(\sqrt{\alpha}q\right).cos^k\left(\sqrt{\alpha}.q\right).f'$$

$$u'' = \alpha(l(l-1).sin^{l-2}.cos^{k+2} - l(k+1).sin^l.cos^k - k(l+1)sin^l.cos^k + k(k-1).sin^{l+1}.cos^{k-2})\ f + 2\sqrt{\alpha}(l.sin^{l-1}.cos^{k+1} - k.sin^{l+1}.cos^{k-1}).f' + sin^l cos^k.f''$$

بالتعويض في المعادلة نجد:

$$f'' + 2\sqrt{\alpha}\left((l+1)\frac{\cos}{\sin} - k\frac{\sin}{\cos}\right) f' + \left(-\alpha(2lk + k + l) + 2\alpha k + \alpha\left(k(k-1) - \frac{m^2\omega^2}{\alpha\hbar^2}\right)\frac{\sin^2}{\cos^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) f = 0 \qquad (3.25)$$

للتخلص من الطرف المتناسب مع tan^2 نضع:

$$k(k-1) = \frac{m^2\omega^2}{\alpha\hbar^2} \Rightarrow (k - \frac{1}{2})^2 = \frac{m^2\omega^2}{\alpha\hbar^2} + \frac{1}{4}$$

أي أن :

$$k\pm=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4m^2\omega^2}{\alpha\hbar^2}} \qquad (3.26)$$

k_- يعطينا حلا غير مقبول فيزيائيا . لذالك نأخذ $k=k_+$ وبالتالي تصبح المعادلة :

$$\frac{d^2}{dy^2}f+2\sqrt{\alpha}\left(\frac{l+1}{tan\sqrt{\alpha}.q}-k.tan\sqrt{\alpha}.k\right)\frac{df}{dq}+\left(-2.k.\alpha(l+1)-\alpha l+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)f=0$$
(3.27)

للحصول على معادلة من شكل معادلة فوق هندسية ندخل المتغير الجديد

$$y=sin^2\sqrt{\alpha}.q \qquad (3.28)$$

وبالتالي

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dy}}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}=2.\sqrt{\alpha}.\sin\sqrt{\alpha}.\mathrm{q}\,.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}$$

$$\frac{d^2}{dq^2}=4\alpha\left[y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\frac{d}{dy}\right]$$

بالتعويض في المعادلة (3.27) نجد :

$$y(1-y)f''+\left(l+\frac{3}{2}-(k+l+2)y\right)f'+\left(\frac{mE}{2\alpha\hbar^2}-\frac{l}{4}-\frac{k}{2}(l+1)\right)f=0 \qquad (3.29)$$

حل هذه المعادلة يكتب من الشكل :

$$f=N'_1.F(a,b,c,y)+N'_2.Y^{1-C}.F(a-c,b-c+1,c,y) \qquad (3.30)$$

حيث :

$$a=\frac{1}{2}(k+l+1+\sqrt{\frac{2mE}{\alpha\hbar^2}+k(k-1)+l(l+1)+1}$$

$$b=\frac{1}{2}(k+l+1-\sqrt{\frac{2mE}{\alpha\hbar^2}+k(k-1)+l(l+1)+1}$$

$$\mathrm{c}=\mathrm{l}+\frac{3}{2}$$

حيث $N'_2N'_1$ ثوابت :

إذا كان a أوb يساوي n– تصبح الدالة فوق الهندسية متقاربة وتساوي كثير حدود من الدرجة n .

بإستعمال العلاقة التالية :

$$P_n^{(u,v)} = \frac{(-1)^n.\Gamma(\mathrm{n+v+1})}{n!(1+u)!}.F_{21}n\left(+u+v+1; j-n+1; 1+v, \frac{1+y}{2}\right) \qquad (3.31)$$

نكتب الحل على الشكل التالي :

$$\psi_{lm,n}(r,\theta,\varphi) = \Delta.Y_l^m(\theta,\varphi).r^l.(1+\alpha r^2)^{\frac{-k+l}{2}}.P_n^{\left(l+\frac{1}{2},k_++\frac{1}{2}\right)}.\left(\frac{1-\alpha r^2}{1+\alpha r^2}\right) \qquad (3.32)$$

من العلاقة n=–a نجد عبارة طيف الطاقة على الشكل التالي :

$$E_{n,l}^{Ads} = \hbar\omega\left(2n+l+\frac{3}{2}\right).\sqrt{1+\frac{\alpha^2\hbar^2}{4m^2\omega^2}} + \frac{2\alpha\hbar^2}{m}\left(n^2+n\left(l+\frac{3}{2}\right)+\frac{l}{2}+\frac{3}{4}\right) \qquad (3.33)$$

نلاحظ أن طيف الطاقة يتعلق بمربع العدد الكمي n .ونلاحظ كذالك أن التصحيح الناتج عن فضاء

Ads موجب أي أن طيف الطاقة عند الفضاء Ads أكبر من طيف الطاقة في الفضاء العادي. ادا عوضنا القيمة α=0 في عبارة الطاقة فإننا نحصل على عبارة الهزاز التوافقي في الفضاء العادي

$$E_{n,l}^{Ads} = \hbar\omega\left(2n+l+\frac{3}{2}\right) \qquad (3.34)$$

من جهة أخرى, معادلة الجزء القطري لهزاز توفقي في فضاء دوسيتر تكتب كما يلي

$$(1-\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r}(1-\alpha r^2)\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{1-\alpha r^2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2})\,u = 0 \qquad (3.35)$$

باستعمال نفس الطريقة المتبعة في فضاء ضد دوسيتر نحصل على طاقة الهزاز التوافقي في فضاء دوسيتر

$$E_{n,l}^{Ads} = \hbar\omega\left(2n+l+\frac{3}{2}\right).\sqrt{1+\frac{\alpha^2\hbar^2}{4m^2\omega^2}} - \frac{2\alpha\hbar^2}{m}\left(n^2+n\left(l+\frac{3}{2}\right)+\frac{l}{2}+\frac{3}{4}\right) \qquad (3.36)$$

نلاحظ أن طاقت الهزاز التوافقي في فضاء دوسيتر اقل من طاقته في الفضاء العادي.

الخاتمة:

في هده المذكرة تطرقنا لدراسة بعض تطبيقات الميكانيك الكمي في فضاء ضد دوسيتر وفضاء دوسيتر حيث حصلنا على الحلول التحليلية وأطياف الطاقة.

الفصل الأول يحتوي على قسمين, في القسم الأول قدمنا ملخص قصير حول معادلة شرودينغر و في القسم الثاني قدمنا مدخل الى جبر فضائي دوسيتر وضد دوسيتر.

في الفصل الثاني تطرقنا إلى دراسة جسيم داخل بئر كموني في بعد واحد وكذلك الهزاز التوافقي في بعد واحد ودلك في الفضائيان ضد دوسيتر وضد دوسيتر حيث

في الفصل الثالث قمنا بدراسة الجسيم حر والهزاز التوافقي في فضائي ضد دو سيتر ودو سيتر ثلاثي الأبعاد. بالنسبة للجسيم الحر, حصلنا على الحلول التحليلية في الفضائيان وهي عبارة عن دوال فوق هندسية في حين أن طيف الطاقة مقنن في فضاء ضد دوسيتر وهو اكبر من طيف الطاقة في الفضاء العادي في حين انه غير مقنن في فضاء دوسيتر. اما بالنسبة للهزاز التوافقي, فالحل عبارة عبارة عن كثير حدود جاكوبي, والطاقة مقننة في الفضائيان وهي اكبر من طاقة الفضاء العادي في فضاء ضد دوسيتر في حين أنها اقل منها في فضاء دوسيتر.

المراجع

1- A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Phys.Rev.D52, 1108 (1995), arXiv :hep-th/9412167 [hep-th].
2- A. Kempf, J.Phys.A30, 2093 (1997), arXiv :hep-th/9604045 [hep-th].
3- J. Magueijo and L. Smolin, Phys.Rev.Lett.88, 190403(2002), arXiv :hep-th/0112090 [hep-th].
4- J. Magueijo and L. Smolin, Phys.Rev.D67, 044017(2003), arXiv :gr-qc/0207085 [gr-qc].
5- J. Cortes and J. Gamboa, Phys.Rev.D71, 065015 (2005),arXiv :hep-th/0405285 [hep-th].
6- G. Amelino-Camelia, Phys.Lett.B510, 255 (2001),arXiv :hep-th/0012238 [hep-th].
7- S. Das, E. C. Vagenas, and A. F. Ali, Phys.Lett.B690,407 (2010), arXiv :1005.3368 [hep-th].
8- P. Pedram, Phys.Lett.B702, 295 (2011).
9- M. Maggiore, Phys.Lett.B319, 83 (1993), arXiv :hep-th/9309034 [hep th].

10-M. V. Battisti, Phys.Rev.D79, 083506 (2009).

11-P.A.M. Dirac, Ann. Math. **35**, 657 (1935).

12- S. Mignemi, Ann. Phys. **522**, 924 (2010).

13- Han-ying Guo, Chao-guang Huang, Yu Tian, Zhan Xu, Bin Zhou, Front. Phys. China **2**, 358 (2007).

14- S. Mignemi, Mod. Phys. Lett. A **25**, 1697 (2010).

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة بعض التطبيقات المكانيك الكمي في فضائي دو سيتر وضد دو سيتر حيث قمنا أولا بحل معادلة شرودينغر في حالة بئر كمومي وهزاز توافقي في بعد واحد ، بعد ذالك تطرقنا إلى حل معادلة شرودينغر لجسيم حر وهزاز توافقي في ثلاث أبعاد ،حيث تم تحديد طيف الطاقة ودالة الموجة في كل حالة.

Résumé:

Dans ce memoire, nous avons étudié quelques applications de la mécanique quantique dans l'espace de DeSitre et aussi dans l'espace anti DeSitre, où nous avons d'abord résolu l'équation de Schrödinger dans le cas d'un puits quantique et de l'oscillateur harmonique à une dimension, puis nous avons traité la solution de l'équation de Schrödinger pour une particule libre et de l'oscillateur harmonique à trois dimensions, où on a determine le spectre d'énergie et la fonction d'onde dans chaque cas

Abstract:

In this thesis, we have studied some quantum mechanics applications in the de Sitter space and against the anti de Sitter space, where we first solved the Schrödinger equation in the case of a quantum well and a harmonic oscillator in one dimension, after that we dealt with the solution of the Schrödinger equation for a free particle and a harmonic oscillator in three dimensions, where it was determined Energy spectrum and wave function in each case