MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED MOHAMED BOUDIAF
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Thèse de doctorat en mathématiques

EDPs non linéaires

Par

ARIOUA Yacine

THÈME

Existence globale et explosion de solutions d'équation de réaction-diffusion-approche ondelette

Soutenu publiquement, le jj/mm/anne devant le jury composé de :

DAHMANE Achour	(Prof. UNIV. de M'sila)	Président
BENHAMIDOUCHE Nouredine	(Prof.. UNIV .de M'sila)	Rapporteur
MOULAY M. Said	(Prof. USTHB)	Examinateur
BENDJEDOU Ahmed	(Prof. UNIV de Sétif)	Examinateur
BENTERKI Djamel	(Prof. UNIV de Sétif)	Examinateur
GASMI Abdelakader	(Prof.. UNIV de M'sila)	Examinateur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **N.** ***Benhamidouche*** *Professeur à l'universite de M'sila pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur ***D. Achour,*** *Professeur à l'universite de M'sila pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.*

Je remercie vivement Messieurs ***A. Bendjedou,*** *Professeur à l'universite de sétif et* ***D. Benterki****, Professeur à l'universite de sétif et Monsieur* ***M. Said. Moulay,*** *Professeur à l'USTHB, et Monsieur* ***A. Gasmi,*** *Professeur à l'universite de M'sila.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, pour leur soutient tout au long de mes études.

Résumé

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle méthode inspirée de la méthode des ondelettes mobiles (1990), pour chercher des nouvelles solutions exactes sous forme auto similaire générale pour des équations aux dérivées partielles non linéaires d'évolution, ces solutions qu'on a appelé "traveling profiles solutions".

En particulier on a trouvé de nouvelles solutions qu'on connait pas auparavant, pour l'équation de diffusion non-linéaire, qui appelée également "porous medium equation". Nous avons démontré aussi l'existence de ce type de solutions et leurs unicité sous certaines conditions. En particulier des solutions faibles continues et bornées.

Mots clés : Equation de diffusion non-linéaire, Méthode des profils mobiles, Solution auto similaire.

Table des matières

Introduction

Les équations de réaction diffusion sont liées à plusieurs phénomènes physiques et chimiques, telles que la propagation d'épidémie par exemple, l'équation de diffusion non-linéaire appartient à cette classe d'équations aux dérivées partielles qui modélise de nombreux phénomènes, on peut citer en particulier: la filtration d'un gaz à travers un milieu poreux, la dynamique des populations, l'hydrologie, etc..(cf [22] , [23] , [25], l'équation de diffusion non-linéaire s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle (u^m), \text{ où } m > 0$$

Mathématiquement, elle peut être classée comme équation aux dérivées partielles de second ordre de type parabolique, (Basak et Murty, 1977, 1978 [6, 7]; Nakano, 1979, 1980 [29, 30]) . Ces derniers temps, il a été constaté récemment un regain d'intérêt dans l'étude de l'existence et le comportement des solutions exactes (V´azquez, J.L [31] , Sachdev [28]. A ce jour, au moins quatre solutions en fonction du temps ont été découvertes, en est généralement attribuée à Zel'dovich et Kompaneets (1950 [33]) et à Pattle (1959 [24]), et les autres à Barenblatt (1953 [10]). Barenblatt et Zel'dovich (1957 [13]) et Kalashinikov (1967 [22]), respectivement.

Pour la recherche de solutions exactes pour une équation aux dérivées partielles non linéaires, il existe plusieurs formes de solutions particulières qui sont proposées, on peut citer les deux formes suivantes :

1. Solutions de la forme "Travelling-wave" (voir par exemple [4, 10]) :

Le principe de cette méthode est de rechercher une solution sous la forme :

$$u(x,t) = f(\eta), \ \eta = x - \lambda t$$

dans ce type de solutions, on cherche le profil f et la vitesse λ.
Le premier qui a étudié ce type de solutions des équation aux dérivées partielles c'était Kolmogorov en 1937 [23].

2. Solutions auto-similaires : proposées par Barenblatt (voir [9,10,11,12,13]), elle prennent les formes suivantes :
a) Forme dite "very singular solution" de type :

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha}} f\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$$

b) Solution de type "blow-up" :

$$u(x,t) = (T-t)^{\alpha} f\left(\frac{x}{(T-t)^{\beta}}\right)$$

dans les deux cas, le profil f est inconnu et $\alpha,\ \beta$, sont des exposants à déterminer.

Gilding et Peletier [18,19,20] , ont prouvé en détail l'existence de trois types de solutions auto similaires :

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= (t+\tau)^{\alpha} f_1(\eta), \quad \eta = x(t+\tau)^{-\frac{1}{2}\{1+(m-1)\alpha\}}, \text{ pour } \tau > 0 \\
u_2(x,t) &= (\tau-t)^{\alpha} f_2(\eta), \quad \eta = x(\tau-t)^{-\frac{1}{2}\{1+(m-1)\alpha\}}, \text{ pour } \tau > T \\
u_3(x,t) &= e^{\alpha(t+\tau)} f_3(\eta), \quad \eta = x\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha(m-1)(t+\tau)\right\}, \text{ pour tout } \tau
\end{aligned}$$

Barenblatt a ensuite dans [10] et [12], discuté les solutions sous cette forme auto-similaire, pour $\alpha \geq 0$ et $m = 2$. Plus tard, plusieurs auteurs ont étudié cette équation, pour un certain nombre de valeurs de α, des solutions explicites ont été trouvées [7, 9, 22, 24, 33].

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle approche pour trouver des solutions exactes pour l'équation de diffusion non linéaire sous la forme auto similaire générale suivante :

$$u(x,t) = c(t) f(\eta), \ \eta = \frac{x - b(t)}{a(t)}$$

où f est le "profil de base" et $c(t),\ a(t),\ b(t)$ sont des fonctions dépendant du temps t, à déterminer.

L'approche qu'on va présenter ici sera appelée "Traveling profil method" [15], elle est inspirée de la méthode dite "Ondelette mobile" qui a été proposée par Basdevant en 1990 [8], dont l'objectif est de chercher des solutions approchées.

Notre approche permet d'obtenir des solutions exactes pour certaines classes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, en les transformant en équations différentielles non linéaires dont on a démontré également l'existence et l'unicité de telles solutions.

Dans le premier chapitre, on présente le principe d'auto similarité pour des équations non linéaires, on présente en particulier les solutions de l'équation de diffusion non-linéaire, découvertes par Barenblatt [9], Zel'dovich et Kompaneec (1950 [33]), Pattle (1959 [24]), et Kalashinikov (1967 [22]), respectivement.

Dans le second chapitre, nous présentons la nouvelle approche pour trouver des solutions exactes des équations aux dérivées partielles sous forme d'auto similarité générale, en appliquant la méthode dite "profils mobiles" qui été inspirée de la technique des ondelettes mobiles. Cette méthode a fait l'objet d'une publication dans "International Journal of Nonlinear Science" [15] , une première application intéressante de cette méthode a concerné la classe d'équation de diffusion non-linéaire appelée aussi "Equation de la chaleur avec une loi de puissance non linéaire" qui a été réalisée, dans le cas unidimensionnel. Ce travail a été accepté pour être publié dans "Journal of Advanced Research in Applied Mathematics" [1] .

Dans le troisième chapitre, nous étudions les solutions obtenues dans le chapitre précédent mais avec certaines conditions au bord, nous discutons l'existence et l'unicité du profil de base de cette solution, on trouve également des solutions exactes particulières.

Les résultats obtenus ont été soumis à la revue "Mathematical Research Letter" pour leur eventuelle publication.

Le quatrième chapitre, nous présentons la généralisation de la méthode du "profils mobiles" c'est à dire à n dimensions, et nous appliquons à l'équation de diffusion non-linéaire.

Chapitre 1

Les équations de réaction-diffusion non-linéaires

Introduction

Les équations de réaction-diffusion s'écrivent sous la forme :

$$u_t = \triangle u + F(u), \tag{1.1}$$

où $u(x,t)$ est une fonction des variables d'espace ($x \in \mathbb{R}^n$), et de temps ($t > 0$) et Δ désigne l'opérateur de Laplace*,* F est une fonction non linéaire.
Elles ont été introduites à la fin des années 30 dans des travaux de Fisher (1937) [16] et Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov (1937) [23], pour des modèles de génétique des populations. Les non-linéarités F considérées alors étaient du type $F(u) = u(1-u)$ (loi logistique) ou ses extensions (ex. : $F(u) = u(1-u^2)$).

Ces équations, avec de telles non-linéarités, se retrouvent également en écologie et en combustion.

En absence de la réaction, on obtient d'autre modèles qui s'écrivent sous la forme :

$$u_t = \triangle(\phi(u)) \tag{1.2}$$

où ϕ est une fonction non linéaire tel que $\phi(0) = 0$, appelés "modèles de diffusion non-linéaires".

En constatant l'intérêt donné à ces modèles et notamment leurs applications dans divers domaines scientifiques, compte tenu de l'importance de ce type de modèles, nous allons concentrer notre travail sur ce type de modèles.

Nous nous intéressons dans cette thèse aux modèles de diffusion non-linéaire (1.2) pour $\phi(u) = u^m$ qui s'écrivent dans le cas unidimensionnel sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^m) \tag{1.3}$$

qui s'écrivent aussi sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{m}\left(u^{m-1}u_x\right)_x \tag{1.4}$$

où $m > 1$.

1.1 L'équation de diffusion non-linéaire

Rappelons tout d'abord quelques résultats dans le cas n dimensions [31].

Considérons l'équation de diffusion non-linéaire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta(u^m(x,t)), \tag{1.5}$$

où $u(x,t)$ est une fonction des variables d'espace ($x \in \mathbb{R}^n$), et de temps ($t > 0$) et ($m > 1$), $\Delta(u^m(x,t)) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2(u^m(x,t))}{\partial x_j^2}$ (où Δ désigne l'opérateur de Laplace).

Propriétés de l'équation de diffusion non-linéaire :

Translations :

L'équation de la chaleur et l'équation de diffusion non-linéaire, sont invariantes par le déplacement de l'axe des coordonnées.

Ainsi, si $u(x,t)$ est une solution de l'équation de diffusion non-linéaire définie dans un domaine $Q = (\mathbb{R}^n \times [0,+\infty[)$, puis pour chaque $h \in \mathbb{R}^n$ et $\tau \in \mathbb{R}$ la fonction :

$$\tilde{u}(y,s) = u(y-h, s-\tau)$$

est aussi une solution définie dans le domaine

$$Q^{'} = Q + (h, \tau) = \{(x + h, t + \tau) \, ; (x, t) \in Q\} \, .$$

L'espace symétrie :

L'équation de diffusion non-linéaire est invariante par la symétrie par rapport à l'espace des coordonnées hyperplan.
Ainsi, si $u(x, t)$ est une solution dans un domaine Q, la fonction :

$$\hat{u}\,(y, t) = u\,(-y_1, y_2, ..., y_d, t)$$

l'est également.

Echelle :

L'équation de diffusion non-linéaire est invariante sous un groupe de transformation généralement connu comme sous le nom "sous groupe d'échelle".
En effet, si $u(x, t)$ est une solution de l'équation de diffusion non-linéaire, la fonction :

$$\tilde{u}\,(y, t) = Ku\,(Ly, Tt)$$

est aussi une solution si les trois paramètres réels $K, L, T > 0$ sont liés par la relation :

$$K^{m-1} L^2 = T.$$

Nous obtenons de cette façon une famille à deux paramètres des solutions transformées.

Conservation de la masse :

Soit $u(x, t)$ une solution classique du problème de Cauchy pour l'équation de diffusion non-linéaire, nous pouvons multiplier l'équation par une fonction test $\varphi(x)$ et intégrer, on trouve que :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u\,(x.t)\,\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \triangle\,(u^m)\,\varphi\,(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u^m)\,\triangle\varphi dx.$$

si u est intégrable dans l'espace et tend vers zéro à l'infini, alors nous pouvons laisser $\varphi \to 1$, et obtenir la limite :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\,(x.t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\,(x.0)\,dx,$$

qui s'appelle la conservation de la masse pour l'équation de diffusion non-linéaire.

1.2 Solution auto-similaire "Solution de Barenblatt"

Dans cette section, nous étudions une solution particulière de l'équation de diffusion non-linéaire. Nous étudions certaines propriétés de la solution dite "Solution de Barenblatt" détaillé dans les travaux de V´azquez [31].

Définition 1.2.1 *Soit* $Q \subseteq (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ *un ouvert. Pour* $m > 1$, *on définit l'espace*

$$C^1_{2,(m)}(Q) = \left\{ u : Q \to [0,\infty) \,\middle|\, u,\ \partial_t u,\ D^2_x u^m \in C(Q) \right\}$$

Une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire (1.5) *sur* Q *est une fonction* $u \in C^1_{2,(m)}(Q)$ *qui satisfait* (1.5) *pour tout* $(t,x) \in Q$.

L'invariance d'échelle :

Pour obtenir une solution explicite de l'équation de diffusion non-linéaire, nous voulons utiliser la notion des solutions auto-similaires.
Supposons que u est une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Si $m > 1$. Nous définissons une famille $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ d'invariance d'échelle de u donnée par :

$$u_\lambda (t,x) = \lambda^\alpha u\left(\lambda t, \lambda^\beta x\right)$$

en cherchant les valeurs constantes de α et β pour les quelles u_λ est une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire pour tout $\lambda > 0$.
On remplace u dans l'équation de diffusion non-linéaire, on a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x.t) = \lambda^{\alpha+1} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\lambda t, \lambda^\beta x\right) \\ \triangle\left(u^m(x.t)\right) = \lambda^{\alpha m+2\beta} \triangle\left(u^m\left(\lambda t, \lambda^\beta x\right)\right) \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x.t) - \triangle\left(u^m(x.t)\right) &= \lambda^{\alpha+1} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\lambda t, \lambda^\beta x\right) - \lambda^{\alpha m+2\beta} \triangle\left(u^m\left(\lambda t, \lambda^\beta x\right)\right) \\ &= \lambda^{\alpha+1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\left(\lambda t, \lambda^\beta x\right) - \lambda^{\alpha(m-1)+2\beta-1} \triangle\left(u^m\left(\lambda t, \lambda^\beta x\right)\right)\right) \end{aligned}$$

pour $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Cela veut dire que si u est solution de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, alors u_λ est aussi une solution de l'équation de diffusion non-linéaire si $\alpha(m-1) + 2\beta - 1 = 0$.

Nous avons démontré ainsi la proposition suivante :

Proposition 1.2.1 *(L'invariance d'échelle de l'équation de diffusion non-linéaire).*
Soit u une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.
Si $\alpha,\beta>0$ sont des constantes satisfaisants :

$$\alpha\,(m-1)+2\beta-1=0,$$

et si pour $\lambda>0$, on définit :

$$u_\lambda\,(t,x)=\lambda^\alpha u\left(\lambda t,\lambda^\beta x\right),$$

Alors u_λ est une solution classique de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$.

Calcul de la solution de Barenblatt [31] **:**

On donne maintenant le calcul de la solution u dite "solution de Barenblatt" de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, qui est invariante par échelle d'après la proposition précédente.

Pour (t,x) fixé, nous cherchons la solution pour $\lambda=\frac{1}{t}$, on a donc la forme :

$$u\,(x.t)=t^{-\alpha}u\left(1.t^{-\beta}x\right)=t^{-\alpha}v\left(t^{-\beta}x\right)$$

où $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est donnée par $v(x)=u(1,x)$.

On remplace u dans l'équation de diffusion non-linéaire (1.5), on déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-\triangle\left(u^m\right) &= -\alpha t^{-\alpha-1}v\left(t^{-\beta}x\right)+t^{-\alpha}\nabla v\left(t^{-\beta}x\right).\left(-\beta t^{-\beta-1}x\right)-\triangle\left(t^{-\alpha m}v^m\left(t^{-\beta}x\right)\right)\\ &= t^{-\alpha-1}\left(-\alpha v\left(t^{-\beta}x\right)-\nabla v\left(t^{-\beta}x\right).\left(\beta t^{-\beta}x\right)\right)-t^{-\alpha m-2\beta}\left(\triangle v^m\left(t^{-\beta}x\right)\right)\\ &= t^{-\alpha-1}\left(-\alpha v\left(t^{-\beta}x\right)-\nabla v\left(t^{-\beta}x\right).\left(\beta t^{-\beta}x\right)-t^{-(\alpha(m-1)+2\beta-1)}\triangle v^m\left(t^{-\beta}x\right)\right).\end{aligned}$$

puisque

$$\alpha\,(m-1)+2\beta=1,$$

nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\triangle\left(u^m\right)=t^{-\alpha-1}\left(-\alpha v\left(t^{-\beta}x\right)-\nabla v\left(t^{-\beta}x\right).\left(\beta t^{-\beta}x\right)-\triangle v^m\left(t^{-\beta}x\right)\right)\tag{1.6}$$

Nous multiplions (1.6) par $t^{\alpha+1}$ et utilisons le fait que u est une solution de l'équation de diffusion non-linéaire dans $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ on obtient :

$$\triangle\left(v^m\right)\left(t^{-\beta}x\right)+\nabla v\left(t^{-\beta}x\right).\left(\beta t^{-\beta}x\right)+\alpha v\left(t^{-\beta}x\right)=0$$

notons $y = t^{-\beta}x$ la nouvelle variable, alors :

$$\triangle\left(v^{m}\right)(y) + \beta y.\nabla v\left(y\right) + \alpha v\left(y\right) = 0 \tag{1.7}$$

Jusqu'à présent, nous avons réduit le problème de recherche d'une solution de l'équation de diffusion non-linéaire (qui dépend du temps et de l'espace) à un problème de recherche d'une solution d'une équation qui ne contient que la variable d'espace. Par conséquent, nous essayons de trouver une solution radiale pour (1.7) et régler

$$v(y) = w(|y|) \ \text{ pour } w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Soit $y \neq 0$, nous obtenons

$$\nabla v\left(y\right).y = w^{'}\left(|y|\right)\frac{y}{|y|}.y = w^{'}\left(|y|\right)|y|\,. \tag{1.8}$$

Rappelons la formule donnant le Laplacien d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^{n}$:
Pour tout $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_{+}^{*})$, on a :

$$\Delta_{y}\left(\phi\left(|y|\right)\right) = \phi^{``}\left(|y|\right) + \frac{n-1}{|y|}\phi^{`}\left(|y|\right),\ y \in \mathbb{R}^{N}.$$

ainsi

$$\triangle\left(v^{m}\right)(y) = \left(w^{m}\right)^{''}\left(|y|\right) + \frac{n-1}{|y|}\left(w^{m}\right)^{'}\left(|y|\right) \tag{1.9}$$

par la représentation du Laplacien en coordonnées polaires. Soit $r = |y|$. Insérer (1.8) et (1.9) dans (1.7), nous avons :

$$\left(w^{m}\right)^{''} + \frac{n-1}{r}\left(w^{m}\right)^{'} + \beta r w^{'} + \alpha w = 0. \tag{1.10}$$

Supposons que $\alpha = n\beta$; multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par r^{n-1}, on met l'égalité ci-dessus sous la forme :

$$\left(r^{n-1}\left(w^{m}\right)^{`}\right)^{`} + \left(\beta r^{n} w\right)^{`} = 0,\ r > 0.$$

on en déduit que :

$$r^{n-1}\left(w^{m}\right)^{`} + \beta r^{n} w = \text{Const},\ r > 0.$$

et en supposant que $w(r) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{n}$ tel que $|y|$ soit assez grand, on trouve que la constante d'intégration ci-dessus est nulle.
L'équation différentielle devient ainsi :

$$\left(w^{m}\right)^{`} + \beta r w = 0,\ \text{pour tout } r > 0,\ \text{avec } \lim_{r\to+\infty} w(r) = 0 \tag{1.11}$$

Il est facile de résoudre cette équation différentielle. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\beta r w &= \left(w^m\right)' = \left(\left(w^{m-1}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)' \\ &= \frac{m}{m-1}\left(w^{m-1}\right)^{\frac{m}{m-1}-1}\left(w^{m-1}\right)' \\ &= \frac{m}{m-1} w \left(w^{m-1}\right)'. \end{aligned}$$

Si $w > 0$ nous pouvons diviser par w pour obtenir :

$$\left(w^{m-1}\right)' = -\frac{m-1}{m}\beta r$$

et puisque les conditions sur le côté droit ne dépendent pas de w nous pouvons résoudre pour w^{m-1} :

$$w^{m-1} = C - \frac{m-1}{2m}\beta r^2. \tag{1.12}$$

où C est une constante obtenue à partir de l'intégration. En définition 1.2.1 nous avons $u \geq 0$. Ainsi, $w \geq 0$. On prend la partie positive des deux côtés de (1,12). Nous obtenons :

$$w(r) = \left(C - \frac{m-1}{2m}\beta r^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad r > 0, \tag{1.13}$$

où C est une constante positive quelconque.

on trouve que la fonction :

$$v(y) = \left(C - \frac{m-1}{2m}\beta |y|^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \tag{1.14}$$

est solution de l'équation :

$$\triangle\left(v^m\right)(y) + \beta y.\nabla v(y) + \alpha v(y) = 0. \text{ sur } \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Comme la fonction w ci-dessus est clairement de classe C^1 au voisinage de $y = 0$, l'EDP :

$$\Delta\left(v^m\right)(y) + \beta y.\nabla v(y) + \alpha v(y) = 0,$$

est valable au sens des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

Enfin, pour $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ la solution $u(t, x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= t^{-\alpha} v\left(t^{-\beta}x\right) = t^{-\alpha} w\left(\left|t^{-\beta}x\right|\right) \\ &= \frac{1}{t^\alpha}\left(\left(C - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)^+\right)^{\frac{1}{m-1}}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Dans le calcul de u, on obtient les conditions :

$$\alpha\,(m-1)+2\beta=1 \quad \text{et} \quad \alpha=n\beta,$$

c'est-à-dire :

$$\alpha=\frac{n}{2+n\,(m-1)}, \quad \beta=\frac{1}{2+n\,(m-1)}. \tag{1.16}$$

Les formules (1.15) et (1.16) sont la solution de Barenblatt de l'équation de diffusion non-linéaire (1.5). On résume l'analyse faite ci-dessus dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.1 [31] *(Solution de Barenblatt). Soient $C>0$ une constante et :*

$$\alpha=\frac{n}{2+n\,(m-1)}, \quad \beta=\frac{1}{2+n\,(m-1)}.$$

La solution de Barenblatt de l'équation de diffusion non-linéaire (1.5) définie par :

$$U_{m,C}(t,x):(0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

s'écrit comme :

$$U_{m,C}(t,x)=\frac{1}{t^\alpha}\left(C-\frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Proposition 1.2.2 *(L'invariance d'échelle). Soit :*

$$\alpha=\frac{n}{2+n\,(m-1)}, \quad \textit{et} \quad \beta=\frac{1}{2+n\,(m-1)}.$$

Alors pour tout $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ et $\lambda>0$ nous avons :

$$U_{m,C}(t,x)=\lambda^\alpha U_{m,C}(\lambda t,\lambda^\beta x).$$

Preuve. Pour tout $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ et $\lambda>0$. On a :

$$\begin{aligned}
U_{m,C}(t,x) &= \frac{1}{t^\alpha}\left(C-\frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}} \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda t)^\alpha}\left(C-\frac{m-1}{2m}\beta\frac{\left|\lambda^\beta x\right|^2}{(\lambda t)^{2\beta}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}} \\
&= \lambda^\alpha U_{m,C}(\lambda t,\lambda^\beta x).
\end{aligned}$$

■

Ensuite, nous prouvons une propriété importante de la solution de Barenblatt de l'équation de diffusion non-linéaire.

Théorème 1.2.2 *(Vitesse de propagation finie).*
Pour $t > 0$ le support de $U_{m,C}(t,.)$ est borné. Plus précisément, nous avons :

$$suppU_{m,C}(t,.) = \overline{B(0, r_{m,C}(t))},$$

où $r_{m,C}(t)$ est définie par :

$$r_{m,C}(t) : (0,\infty) \to (0,\infty), \quad r_{m,C}(t) = \left(\frac{2Cm}{\beta(m-1)}\right) t^{\beta}.$$

De plus, $U_{m,C}(t,.)$ est strictement positif sur $B(0, r_{m,C}(t))$ et nous avons les limites :

$$\lim_{t\to 0} r_{m,C}(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} r_{m,C}(t) = \infty.$$

Preuve. Si $t > 0$. puisque $U_{m,C}$ est positif

$$\text{supp } U_{m,C}(t,.) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / \ U_{m,C}(t,x) > 0\}},$$

maintenant, $U_{m,C}(t,x) > 0$ si et seulement si

$$C - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}} > 0.$$

Ce qui équivalent à

$$|x| < \left(\frac{2Cm}{\beta(m-1)}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\beta} = r_{m,C}(t).$$

Donc

$$\text{supp}U_{m,C}(t,.) = \overline{B(0, r_{m,C}(t))}.$$

■

Théorème 1.2.3 *(Conservation de la masse totale).*
Si $C > 0$. La norme $\|U_{m,C}(t,.)\|_1$ est indépendante de $t > 0$.

Preuve. Soient $t_1, t_2 > 0$ et $\lambda = \frac{t_2}{t_1}$.
pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'invariance d'échelle de la solution de Barenblatt (proposition 1.2.2) donne :

$$U_{m,C}(t_1,x) = \lambda^{\alpha} U_{m,C}(\lambda t_1, \lambda^{\beta} x) = \lambda^{\alpha} U_{m,C}(t_2, \lambda^{\beta} x).$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |U_{m,C}(t_1,x)|\, dx = \lambda^{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \left|U_{m,C}(t_2, \lambda^{\beta} x)\right| dx = \lambda^{\alpha - n\beta} \int_{\mathbb{R}^n} |U_{m,C}(t_2,x)|\, dx.$$

Alors

$$\|U_{m,C}(t_1,.)\|_1 = \|U_{m,C}(t_2,.)\|_1$$

car $\alpha = n\beta$. ■

Compte tenu du théorème 1.2.3 nous définissons

Définition 1.2.2 *(la masse totale).*
Si $C > 0$. Alors $\|U_{m,C}(t,.)\|_1$ est appelée masse totale de $U_{m;C}$.

De la représentation de la solution de Barenblatt, il est claire que la masse totale de $U_{m;C}$ peut être contrôlée par le paramètre libre C. Nous avons une relation explicite entre ces quantités et ce paramètre dans le lemme suivant.

Lemme 1.2.1 *Si $C > 0$ et $\gamma = \frac{1}{m-1} + \frac{n}{2}$.*
Il existe une constante $a(m,n)$ telle que :

$$\|U_{m,C}(t,.)\|_1 = a(m,n)C^\gamma$$

où

$$a(m,n) = \pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m-1}{2m}\beta\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}+\frac{n}{2}\right)}.$$

où Γ est la fonction Gamma.

Preuve. Soit $M = \|U_{m,C}(1,.)\|_1$.
Grâce au Théorème 1.2.3 il suffit de montrer qu'il existe une constante $a(m,n)$, telle que :

$$M = a(m,n)C^\gamma$$

On définit $k = \frac{m-1}{2m}\beta$. Par conséquence

$$U_{m,C}(1,x) = \left(C - k|x|^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}},$$

d'où

$$M = \int_{\mathbb{R}^n} \left(C - k|x|^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} dx = nV_n \int_0^\infty \left(C - kr^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} r^{n-1} dr \tag{1.17}$$

Ici V_n est le volume de la boule unité de dimension n.

Nous avons utilisé $U_{m,C}(1,.)$ qui est radiale. En substituant $s = rC^{-\frac{1}{2}}$ dans (1.17), on obtient :

$$\begin{aligned} M &= nV_n \int_0^\infty \left(C - Cks^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} C^{\frac{n-1}{2}} s^{n-1} C^{\frac{1}{2}} ds \\ &= C^\gamma n V_n \int_0^\infty \left(1 - ks^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}} s^{n-1} ds \end{aligned} \tag{1.18}$$

On remarque que la dernière intégrale s'annule pour $s > k^{-\frac{1}{2}}$. En posant le changement de variable $t = ks^2$ dans (1.18), on obtient :

$$\begin{aligned} M &= C^\gamma n V_n \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{m-1}} \left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2k^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= C^\gamma \frac{n}{2} V_n k^{-\frac{n}{2}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m}{m-1}-1} t^{\frac{n}{2}-1} dt \\ &= C^\gamma \frac{n}{2} V_n k^{-\frac{n}{2}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{m-1}\right) \end{aligned}$$

où B est la fonction bêta d'Euler, de la définition de k et des relations :

$$B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{m-1}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m-1} + \frac{n}{2}\right)} \quad \text{et } V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler définit par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

nous constatons :

$$M = a(m,n) C^\gamma$$

avec

$$\begin{aligned} a(m,n) &= \frac{n}{2} V_n k^{-\frac{n}{2}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{m-1}\right) \\ &= \frac{n}{2} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left(\frac{m-1}{2m}\beta\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}+\frac{n}{2}\right)} \\ &= \pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m-1}{2m}\beta\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}+\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la relation $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ dans la dernière étape. ∎

Définition 1.2.3 *Si $M > 0$. la solution $U_{m,M}$, est dite solution de Barenblatt avec masse totale M.*

Théorème 1.2.4 *Si $M > 0$.*
Alors $U_{m,M}$ converge vers $M\delta_0$ au sens des distributions quand $t \to 0$, i.e.

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} U_{m,M}(t,x)\,\varphi(x)\,dx = M\varphi(0)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$. Par la continuité de φ on peut choisir $\delta > 0$ telle que

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon \text{ pour } x \in B(0,\delta).$$

Ensuite, posons C telle que :

$$a(m,n)C^\gamma = M,$$

avec $a(m,n)$ et γ sont les constantes introduites dans le lemme 1.2.1.
D'après le théorème 1.2.2, nous avons pour $t > 0$

$$\operatorname{supp}(U_{m,M}(t,.)) = \operatorname{supp}(U_{m,C}(t,.)) = \overline{B(0, r_{m,C}(t))}$$

avec $r_{m,C}(t) \to 0$ si $t \to 0$.
Par conséquent, nous pouvons choisir $t_0 > 0$, telle que :

$$\operatorname{supp}(U_{m,M}(t,.)) \subseteq B(0,\delta) \text{ pour } t < t_0.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} U_{m,M}(t,x)\,\varphi(x)\,dx - M\varphi(0)\right| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |U_{m,M}(t,x)|\,|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx \\ &\leq \int\limits_{B(0,\delta)} \varepsilon\,|U_{m,M}(t,x)|\,dx = M\varepsilon.\end{aligned}$$

la preuve est complète. ■

1.3 Auto-similarité générale

Nous allons maintenant étudier la classe des solutions sous forme auto-similaire générale [31] :

$$u(x,t) = A(t)\,F(B(t)\,x) \tag{1.19}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions à valeurs réelles de t, à déterminer et $F(\eta)$ le profil de la solution, on pose :

$$u(x,t) = A(t)\,F(\eta), \quad \eta = B(t)\,x$$

nous remplaçons cette forme de solutions dans l'équation (1.5), nous trouvons :

$$A^{'}(t)\,F(\eta) + \frac{A(t)}{B(t)}\left(\nabla F(\eta).\eta\right) B^{'}(t) = A^{m}(t)\,B^{2}(t)\,\triangle\left(F^{m}(\eta)\right).$$

Puisque nous voulons des solutions non triviales, nous supposons $A(t) \neq 0,\ B(t) \neq 0.$ Dans ce cas, une simple séparation des variables implique que :

$$\begin{cases} A^{'}(t) = -\lambda A^{m}(t)\,B^{2}(t) \\ B^{'}(t) = -\mu A^{m-1}(t)\,B^{3}(t) \end{cases}, \tag{1.20}$$

avec les paramètres $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, et le profil doit satisfaire l'équation :

$$\triangle\left(F^{m}(\eta)\right) + \lambda F(\eta) + \mu\left(\nabla F(\eta).\eta\right) = 0. \tag{1.21}$$

Il faut résoudre le système (1.20) pour trouver les fonctions $A(t)$ et $B(t)$. Il existe des solutions sous la forme des fonctions puissance

$$A(t) = (a+bt)^{-\alpha},\ B(t) = (a+bt)^{-\beta},$$

avec $\lambda = \alpha b$, $\mu = \beta b$, si

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1. \tag{1.22}$$

Cherchons la solution générale du système (1.20). on pose :

$$X = A^{1-m}, \quad Y = \frac{1}{B^{2}},$$

nous avons :

$$X^{'} = \lambda(m-1)\,Y^{-1}, \quad Y^{'} = 2\mu X^{-1}.$$

Cela implique enfin

$$\lambda\,(m-1)\,XX'' = -2\mu\left(X'\right)^2.$$

Une intégration immédiate de cette équation donne :

$$X = cX^a \quad \text{où } a = -\frac{2\mu}{\lambda(m-1)}$$

où c une constante arbitraire.

Auto-similarité exponentielle :

Nous avons encore la possibilité de trouver une autre solution sous forme d'auto-similarité exponentielle en posant $a = 1$ dans l'analyse précédente, puis $X(t) = Ce^{ct}$, donc :

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{ct}{m-1}}, \quad B(t) = B_0 e^{\frac{ct}{2}}.$$

Il est plus pratique d'écrire :

$$A(t) = A_0 e^{-2\sigma t}, \quad B(t) = B_0 e^{(m-1)\sigma t}.$$

avec $\sigma \in \mathbb{R}$. La forme d'auto-similarité exponentielle est donc :

$$u\,(x,t) = e^{-\alpha t} F\left(xe^{-\beta t}\right), \tag{1.23}$$

avec $\alpha = 2\sigma$ et $\beta = -(m-1)\sigma$.

La relation entre les exposants de similarité s'écrit comme :

$$\alpha\,(m-1) + 2\beta = 0 \tag{1.24}$$

Nous avons observé les constantes A_0 et B_0 dans F. L'équation du profil est :

$$\triangle\left(F^m(\eta)\right) + \frac{2\beta}{m-1}F(\eta) + \beta\left(\nabla F(\eta).\eta\right) = 0. \tag{1.25}$$

1.4 Classe des solutions auto-similaires dans le domaine $\left(\mathbb{R}_+^* \times]0,T[\right)$

Nous présentons dans cette section les différents types des solutions auto-similaires introduites par Gilding et Peletier [18, 19, 20] dans le domaine $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,T[$, qui s'écrivent comme :

$$\begin{aligned}
\textbf{I}.\ u_1(x,t) &= (t+\tau)^{\alpha} f_1(\eta),\ \eta = x(t+\tau)^{-\frac{1}{2}\{1+(m-1)\alpha\}},\ \text{pour } \tau>0 \\
\textbf{II}.\ u_2(x,t) &= (\tau-t)^{\alpha} f_2(\eta),\ \eta = x(\tau-t)^{-\frac{1}{2}\{1+(m-1)\alpha\}},\ \text{pour } \tau>T \\
\textbf{III}.\ u_3(x,t) &= e^{\alpha(t+\tau)} f_3(\eta),\ \eta = x\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha(m-1)(t+\tau)\right\},\ \text{pour tout } \tau
\end{aligned}$$

on remplace $u_1,\ u_2$, et u_3 dans (1,5), puis on déduit les équations différentielles des fonctions $f_1,\ f_2$, et f_3 :

$$\left(f_1^m\right)'' + \frac{1}{2}\{1+(m-1)\alpha\}\eta f_1' = \alpha f_1, \quad 0<\eta<\infty \tag{1a}$$

$$\left(f_2^m\right)'' - \frac{1}{2}\{1+(m-1)\alpha\}\eta f_2' = -\alpha f_2, \ 0<\eta<\infty \tag{1b}$$

$$\left(f_3^m\right)'' + \frac{1}{2}\alpha(m-1)\eta f_3' = \alpha f_3, \quad 0<\eta<\infty \tag{1c}$$

les équations $(1a)-(1b)-(1c)$ soient des cas particuliers de l'équation différentielle suivante :

$$\left(f^m\right)'' + p\eta f' = qf, \qquad 0<\eta<\infty \tag{1.26}$$

$$f(0) = U \quad \text{et} \quad f(\infty) = 0 \tag{1.27}$$

où p, q et $U>0$ sont des constantes arbitraires.

Nous posons les conditions aux limites pour (1.26), comme suit :

$$f(0) = U \tag{1.28}$$

et

$$f(\lambda) = 0, \ \ \left(f^m\right)'(\lambda) = 0 \tag{1.29}$$

où $\lambda>0$ est un nombre réel.

Cette équation a été étudiée en détail dans les séries d'articles (Gilding and Peletier, 1976,1977 Gilding 1980 [18, 19, 20]). Nous rappelons dans la suite les conditions d'existence et d'unicité des solutions du (1.26) avec les conditions aux limites (1.28) et (1.29) établis dans [18] .

Nous avons les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.4.1 [18]*Supposons que $U>0$. Alors le problème aux limites (1.26) - (1.27) admet une solution faible à support compact si et seulement si $p\geq 0$ et $2p+q>0$. En outre, cette solution faible de (1.26) - (1.27) est unique.*

Théorème 1.4.2 [18]*Supposons que $U > 0$. Alors le problème aux limites (1.26), (1.28) et (1.29) admet une solution unique et il existe un unique $\lambda(U) > 0$ telle que $f(\eta; \lambda(U))$ est positif sur $(0, \lambda)$ si et seulement si $p \geq 0$ et $2p + q > 0$.*

Nous concluons par une discussion sur les conséquences des théorèmes 1.4.1 et 1.4.2 pour les solutions auto-similaires de l'équation (1,1) dans le domaine $(0 < x < \infty,\ 0 < t < T)$.

Solutions auto-similaires de Type I.

Dans ce cas, $p = \frac{1}{2}\left[1 + (m-1)\alpha\right]$, et $q = \alpha$. D'où

$$p + q = \frac{1}{2}\left[1 + (m+1)\alpha\right], \quad 2p + q = 1 + m\alpha.$$

Il résulte du théorème 1.4.2, qu'il existe une solution auto similaire non triviale à support compact si et seulement si $\alpha \geq -\frac{1}{m}$.

Maintenant on va rappeler les différentes solutions explicites connues historiquement.pour différentes de l'exposant α.

(i) Si $\alpha = -\frac{1}{m}$. Cela donne la solution de type "dipôle" (Barenblatt et Zel'dovich, 1957 [13]).
Comme $2p + q = 0$ dans ce cas, l'équation (1.26) devient :

$$f^m(\eta) = \frac{1}{2m}\eta \int_\eta^\lambda f(\eta)\, d\eta$$

on pose $g(\eta) = \int_\eta^\lambda f(\eta)\, d\eta$, on obtient après un calcul simple

$$f(\eta) = \eta^{\frac{1}{m}} \left[\left(\frac{m-1}{2m(m+1)}\right)^m \left(\lambda^{\frac{m+1}{m}} - \eta^{\frac{m+1}{m}}\right)\right]^{\frac{1}{m-1}},\ 0 \leq \eta \leq \lambda.$$

de retour aux variables x et t, nous obtenons :

$$u_1(x,t) = \begin{cases} (t+\tau)^{-\frac{1}{m}} f\left(x(t+\tau)^{-\frac{1}{2m}}\right), & 0 \leq x \leq \lambda (t+\tau)^{\frac{1}{2m}} \\ 0, & \lambda (t+\tau)^{\frac{1}{2m}} < x < \infty \end{cases}.$$

(ii) Si $\alpha = -\frac{1}{m+1}$. Cette solution est appelée " point source instantanée" (Zel'dovich et

Kompaneec 1950; Pattle 1959, [33, 24]), $q<0$ et $p+q=0$, l'équation (1.26) peut être facilement intégrée pour obtenir :

$$f\left(\eta\right)=\left[\frac{m-1}{2m\left(m+1\right)}\left(\lambda^{2}-\eta^{2}\right)\right]^{\frac{1}{m-1}},\quad 0\leq\eta\leq\lambda.$$

et par conséquent

$$u_{1}\left(x,t\right)=\begin{cases}\left(t+\tau\right)^{-\frac{1}{m+1}}f\left(x\left(t+\tau\right)^{-\frac{1}{m+1}}\right), & 0\leq x\leq\lambda\left(t+\tau\right)^{\frac{1}{m+1}}\\ 0, & \lambda\left(t+\tau\right)^{\frac{1}{m+1}}<x<\infty\end{cases}.$$

(iii) Si $\alpha=\frac{1}{m-1}$. Cela donne la solution d'onde (Barenblatt, 1953; Basak et Murty, 1977, [7, 10]). $q>0,\ p=(m-1)q$. Elles s'écrit comme :

$$f\left(\eta\right)=\left[\left(\frac{m-1}{m}\right)\lambda\left(\lambda-\eta\right)\right]^{\frac{1}{m-1}},\quad 0\leq\eta\leq\lambda.$$

avec les variables (x,t) , cela donne :

$$u_{1}\left(x,t\right)=\begin{cases}\left(t+\tau\right)^{\frac{1}{m-1}}f\left(x\left(t+\tau\right)^{-1}\right), & 0\leq x\leq\lambda\left(t+\tau\right)\\ 0, & \lambda\left(t+\tau\right)<x<\infty\end{cases}.$$

Solutions auto-similaires de Type II.

Une application du théorème 1.4.2 à l'équation. (1b), on obtient l'existence d'une solution auto similaire non triviale à support compact de type II si et seulement si $\alpha\leq-\frac{1}{m-1}$. Dans tous les cas, $u_{2}\left(0,t\right)$ est positif sur $(0,T)$.

Si $\alpha=-\frac{1}{m-1}$, l'équation (1b) est un cas particulier de (1.27) avec $p=0$ et $q=\frac{1}{m-1}$. Dans ce cas la solution exacte est donnée par :

$$f\left(\eta\right)=\left\{\frac{(m-1)}{2m\left(m+1\right)}\left(\lambda-\eta\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{m-1}},\quad 0<\eta<\lambda$$

Nous obtenons donc (Kalashinikov, 1967 [22]) :

$$u_{2}\left(x,t\right)=\begin{cases}\left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{m-1}}f\left(x\right), & 0\leq x<\lambda\\ 0, & \lambda\leq x<\infty\end{cases}.$$

Solutions auto-similaires de Type III.

En appliquant le théorème 1.4.2 à l'équation (1c), il existe des solutions auto similaires non triviale de type III à support compact si et seulement si $\alpha > 0$.

1.5 Le phénomène d'explosion de la solution des équations aux dérivées partielles

Explosion dans les équations différentielles ordinaires :

La forme la plus simple de singularité spontanée dans les problèmes non-linéaires apparaît quand la variable ou les variables tendent à l'infini quand le temps approche une certaine limite finie $T > 0$.

Dans la théorie des équations différentielles ordinaires (ODEs), l'exemple le plus simple est le problème suivant :

$$u^{'} = u^2,\ t > 0,\ u(0) = a$$

pour les données $a > 0$, il est immédiat qu'une solution unique existe dans l'intervalle $0 < t < T$, elle est de la forme $u(t) = \frac{1}{(T-t)}$, on voit que c'est une fonction lisse pour $t < T$, et on a $u(t) \to \infty$, quand $t \to T^-$ (limite à gauche). De cet exemple, on peut constater que le concept de l'explosion peut être largement généralisé comme phénomène par lequel les solutions cessent d'exister globalement à temps en raison de la croissance infinie des variables décrivant le processus d'évaluation.

Explosion des solutions des équations de type réaction-diffusion :

Problèmes de base :

Le phénomène d'explosion apparaît notamment quand le problème a une structure spatiale, de sorte que les inconnus dépendent non seulement du temps mais également d'une variable de l'espace, $u = u(x,t)$, avec $x \in \Omega$, un domaine de $\mathbb{R}^n$, et en particulier chez les problèmes de réaction diffusion, [17], et dans les théories de propagation et de combustion thermiques qui sont en général de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(u, \Delta u, x, t) + B(u, \Delta u, x, t). \tag{1.30}$$

avec des conditions standard d'ellipticité sur l'opérateur A et des conditions de croissance et de régularité sur A et B. On pense typiquement à (1.30), comme modèle non linéaire de propagation de la chaleur dans un milieu réactif, et alors u est une température, cette équation présente le nouveau dispositif en tenant compte de la structure spatiale des solutions. Le concept de l'explosion est maintenant formulé sous sa forme plus simple dans le cadre suivant.

A savoir, il existe un moment $T < \infty$, appelé le temps d'explosion, telle que la solution est bien définie pour tout $0 < t < T$, tandis que :

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x,t)| \to \infty \text{ } quand \text{ } t \to T^{-}. \tag{1.31}$$

Définition 1.5.1 *Soit $u(x,t)$, une solution de l'équation (1.30), telle que $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. On dit que $u(x,t)$, explose en temps fini T, si*

$$\lim_{t\to T^{-}} |u(x,t)| = +\infty$$

dans ce cas

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| = +\infty, \text{ } quand \text{ } t \to T^{-}.$$

Définition 1.5.2 *Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, est dit point d'explosion de $u(x,t)$ si $u(x,t)$ n'est pas localement bornée au voisinage de (x_0,T), autrement dit s'il existe (x_n,t_n) telle que :*

$$(x_n,t_n) \to (x_0,T) \text{ } tel \text{ } que \text{ } |u(x_n,t_n)| \to +\infty \text{ } quand \text{ } n \to +\infty. \tag{1.32}$$

- *L'ensemble de tous les points d'explosion est appelé ensemble d'explosion de $u(x,t)$.*
- *Il est à noter que pour une solution donnée, le temps d'explosion est unique.*
- *Deux cas se présentent*

$$\begin{cases} T = +\infty, & existence \text{ } globale. \\ T < +\infty, & explosion \text{ } en \text{ } temps \text{ } fini. \end{cases}$$

dans ce cas

$$\lim_{t\to T^{-}} \|u(x,t)\|_{L^\infty} = +\infty \tag{1.33}$$

Chapitre 2

Solutions profils mobiles de l'équation de diffusion non-linéaire

Nous présentons dans ce chapitre une nouvelle méthode dite "The Traveling Profile Method TPM [15]" pour chercher des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Cette méthode nous permet d'obtenir des solutions exactes de grandes classes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Cette méthode a fait l'objet d'une publication dans "International Journal of Nonlinear Science [15]".

On donne également dans ce chapitre une application intéressante de cette méthode sur l'équation de diffusion non-linéaire appelée aussi l'équation de la chaleur avec une loi de puissance non linéaire qui va appeler "solutions profils mobiles".

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans "Journal of Advanced Research in Applied Mathematics [1]".

2.1 La méthode des profils mobiles

Considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_x u \tag{2.1}$$

où A_x est un opérateur différentiel linéaire ou non linéaire de la variable x.

Le principe de cette méthode est de chercher une solution du problème (2.1) sous la forme :

$$u(x,t) = c(t)\, f(\eta)\,, \text{ avec } \eta = \frac{x - b(t)}{a(t)}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

où f est dans L^2, qu'on va appeler "profil de base".

En réalité cette forme de solution est une généralisation de la forme "auto-similaire".

Alors on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c} f(\eta) - c\frac{\dot{a}}{a}\eta f'(\eta) - c\frac{\dot{b}}{a} f'(\eta) \\ A_x u = \frac{c^p}{a^q} A_\eta f, \quad \text{avec} \quad p, q \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Les paramètres $c(t),\ a(t),\ b(t)$ sont des fonctions dépendant du temps t, sont déterminés par la solution de problème du minimisation :

$$\min_{\dot{a},\dot{b},\dot{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u \right|^2 dx, \tag{2.3}$$

par conséquent, nous obtenons le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, f \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \eta f'_\eta \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, f'_\eta \rangle = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

L'EDP (2.1) est transformée alors dans un ensemble de trois EDOs associées :

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c}\langle f, f \rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta f'_\eta, f \rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle\ f'_\eta, f \rangle = \frac{c^{p-1}}{a^q}\langle A_\eta f, f \rangle \\ \frac{\dot{c}}{c}\langle \eta f'_\eta, f \rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta f'_\eta, \eta f'_\eta \rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle \eta f'_\eta, f'_\eta \rangle = \frac{c^{p-1}}{a^q}\langle A_\eta f, \eta f'_\eta \rangle \\ \frac{\dot{c}}{c}\langle f, f'_\eta \rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta f'_\eta, f'_\eta \rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle f'_\eta, f'_\eta \rangle = \frac{c^{p-1}}{a^q}\langle A_\eta f, f'_\eta \rangle \end{cases} \tag{2.5}$$

Approximation à priori :

Soit :

$$V_t = \left\{ f,\ \eta f'_\eta,\ f'_\eta \right\}$$

le sous espace de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions associées à f à l'instant t.

De la relation $(2,4)$ on déduit que $\frac{\partial u}{\partial t} - A_x u$ est orthogonale à V_t.

En particulier comme $\frac{\partial u}{\partial t} \in V_t$, alors

$$\langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = 0,$$

donc si aussi $A_x u$ appartient à V_t, alors la méthode nous fournit une solution exacte faible qui s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = c(t) f\left[\frac{x - b(t)}{a(t)}\right].$$

Maintenant nous voulons établir des conditions sur la méthode pour trouver des solutions exactes de l'équation (2.1).

Le premier résultat de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 [15] *Pour $f \in C^2 \cap L^2$; l'équation (2.1) admet une solution exacte sous la forme*

$$u(x,t) = c(t)\, f\left[\frac{x - b(t)}{a(t)}\right],$$

Si

1- $A_x u = \frac{c^p}{a^q} A_\eta f$, *pour* $p, q \in \mathbb{R}$.

2- *le "profil de base" est une solution de l'équation suivante :*

$$A_\eta f = \alpha f + \beta \eta f_\eta' + \gamma f_\eta', \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t), b(t)$ sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} & = \frac{c^p}{a^q}\alpha \\ \dot{a} & = -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\beta \\ \dot{b} & = -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\gamma \end{cases} \tag{2.7}$$

Preuve. D'après le principe de l'estimation de cette méthode, si $A_x u$ appartient au sous espace V_t; alors la fonction $u(x,t) = c(t) f(\eta)$ est une solution exacte de l'équation (2.1), dans ce cas le terme $A_\eta f$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des fonctions, f, $\eta f_\eta'$ et f_η', donc

$$A_\eta f = \alpha f + \beta \eta f_\eta' + \gamma f_\eta', \text{ pour } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Le système (2.7) est obtenu comme suit :

Quand on remplace $A_\eta f$ par la combinaison $\alpha f + \beta \eta f_\eta' + \gamma f_\eta'$, dans (2,5), nous obtenons le système :

$$MX = \frac{c^{p-1}}{a^q} MF \tag{2.8}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} \langle f, f\rangle & \langle \eta f'_\eta, f\rangle & \langle f'_\eta, f\rangle \\ \langle \eta f'_\eta, f\rangle & \langle \eta f'_\eta, \eta f'_\eta\rangle & \langle \eta f'_\eta, f'_\eta\rangle \\ \langle f'_\eta, f\rangle & \langle \eta f'_\eta, f'_\eta\rangle & \langle f'_\eta, f'_\eta\rangle \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\dot{c}}{c} \\ -\frac{\dot{a}}{a} \\ -\frac{\dot{b}}{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

La matrice M dans le système (2.8) est symétrique et inversible, alors (2.8) devient

$$\begin{aligned} X &= \frac{c^{p-1}}{a^q} M^{-1} M F \\ &= \frac{c^{p-1}}{a^q} F \end{aligned}$$

qui peut être écrite sous la forme (2.7)

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^p}{a^q}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\beta \\ \dot{b} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\gamma \end{cases}.$$

■

Résolution du système différentiel :

Nous pouvons résoudre le système (2.7) comme suit :

De (2.7) nous avons

$$\begin{cases} c(t) = K_0 \ a(t)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta} \ a(t) + K_1 \end{cases}, \text{ avec } K_0, \ K_1 \text{ constants,} \tag{2.9}$$

supposons qu'on a les conditions aux limites suivantes : $a(0) = 1; c(0) = 1; b(0) = 0$, donc $K_0 = 1$, $K_1 = -\frac{\gamma}{\beta}$.

Si nous remplaçons (2.9) en (2.7), Nous obtenons :

$$a^{q+\frac{\alpha}{\beta}(p-1)-1} da = -\beta K_0^{p-1} dt$$

on déduire finalement :

(i) pour $\alpha(p-1)+q\beta>0$:

$$\begin{cases} a(t)=(1-A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t)=(1-A\beta t)^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t)=\frac{\gamma}{\beta}(1-A\beta t)^{\frac{1}{A}}-\frac{\gamma}{\beta} \end{cases} \quad ,\ 0<t<T. \tag{2.10}$$

avec $A=q+\frac{\alpha}{\beta}(p-1)$, et $T=\frac{1}{\alpha(p-1)+q\beta}$.

(ii) pour $\alpha(p-1)+q\beta=0$:

$$\begin{cases} a(t)=\exp\left(-\beta t\right) \\ c(t)=\exp\left(\alpha t\right) \\ b(t)=\frac{\gamma}{\beta}\exp\left(-\beta t\right)-\frac{\gamma}{\beta} \end{cases} \quad ,\ t>0, \tag{2.11}$$

2.2 Application à l'équation de la chaleur avec une loi de puissance non linéaire

Nous présentons maintenant une application intéressante de notre méthode. L'application concerne l'équation de diffusion non linéaire appelée l'équation de la chaleur avec une loi de puissance non linéaire. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans "Journal of Advanced Research in Applied Mathematics [1]".

Soit l'équation de la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(u^{m-1}u_x\right)_x \tag{2.12}$$

elle admet une solution exacte forme "profiles mobiles"

$$u\left(x,t\right)=c(t)f\left[\frac{x-b(t)}{a(t)}\right],\ a,b,c\in\mathbb{R}$$

Si

1- $A_x u=\frac{c^m}{a^2}\left(f^{m-1}f'\right)',\quad (p=m,\ \text{et}\ q=2)$

2- le "profil de base" f est une solution de l'équation suivante :

$$\left(f^{m-1}f'\right)'=\alpha f+\beta\eta f'_\eta+\gamma f'_\eta,\quad \text{où}\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}, \tag{2.13}$$

dans ce cas, les coefficients $c(t)$, $a(t)$, $b(t)$ sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^m}{a^2}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\beta \\ \dot{b} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\gamma \end{cases} \tag{2.14}$$

2.3 Solution exacte sous forme de profils mobiles

Le deuxième résultat de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 [1] *La fonction*

$$u\left(x,t\right) = c\left(t\right) f\left[\frac{x-b(t)}{a(t)}\right],$$

est une solution exacte du problème (2,12), où f est le "profil de base" solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left(f^{m-1}f'\right)' = \alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta, \qquad où \;\; \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},$$

dans ce cas, les coefficients $c\left(t\right), a\left(t\right),$ et $b\left(t\right)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = (1-A\beta t))^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1-A\beta t))^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1-A\beta t))^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < T \tag{2.15}$$

si $(m-1)\alpha + 2\beta > 0$ où $A = 2 + \frac{\alpha}{\beta}(m-1)$ et $T = \frac{1}{(m-1)\alpha+2\beta}$.
et donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = \exp\left(-\beta t\right) \\ c(t) = \exp\left(\alpha t\right) \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\exp\left(-\beta t\right) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < \infty, \tag{2.16}$$

si $(m-1)\alpha + 2\beta = 0$.

Preuve. D'après le principe de l'estimation de cette méthode, si

$$A_x u = \left(u^{m-1}u_x\right)_x$$

appartient au sous espace V_t; alors la fonction $u(x,t) = c(t)f(\eta)$ est une solution exacte de l'équation (2.1), dans ce cas le terme $\left(f^{m-1}f'\right)'$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire des fonctions, f, $\eta f'_\eta$ et f'_η, donc

$$\left(f^{m-1}f'\right)' = \alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta, \text{ pour } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}.$$

Le système (2.7) est obtenu comme suit :

Quand on remplace $\left(f^{m-1}f'\right)'$ par la combinaison $\alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta$, dans (2,5), nous obtenons le système (2.8) :

$$MX = \frac{c^{m-1}}{a^2}MF$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} \langle f,f\rangle & \langle \eta f'_\eta, f\rangle & \langle f'_\eta, f\rangle \\ \langle \eta f'_\eta, f\rangle & \langle \eta f'_\eta, \eta f'_\eta\rangle & \langle \eta f'_\eta, f'_\eta\rangle \\ \langle f'_\eta, f\rangle & \langle \eta f'_\eta, f'_\eta\rangle & \langle f'_\eta, f'_\eta\rangle \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\dot{c}}{c} \\ -\frac{\dot{a}}{a} \\ -\frac{\dot{b}}{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

La matrice M dans le système (2.8) est symétrique et inversible, alors (2.8) peut être écrit sous la forme (2.7) :

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{c^m}{a^2}\alpha \\ \dot{a} = \frac{c^{m-1}}{a}\beta \\ \dot{b} = \frac{c^{m-1}}{a}\gamma \end{cases}.$$

Aux limites, supposons les conditions aux limites latérales $a(0) = 1; c(0) = 1; b(0) = 0$:

On voit que d'après (2.14), nous avons :

$$\begin{cases} c(t) = a(t)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\, a(t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \tag{2.17}$$

si nous remplaçons (2.17) en (2.14) on peut déduire finalement (2.15) :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t))^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < T,$$

pour $(m-1)\alpha+2\beta>0$ où $A=2+\frac{\alpha}{\beta}(m-1)$ et $T=\frac{1}{2\beta+(m-1)\alpha}$.
et (2.16) :

$$\begin{cases} a(t)=\exp\left(-\beta t\right) \\ c(t)=\exp\left(\alpha t\right) \\ b(t)=\frac{\gamma}{\beta}\exp\left(-\beta t\right)-\frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0<t<\infty,$$

pour $(m-1)\alpha+2\beta=0$. ■

2.3.1 Nouvelle solution explicite exacte

Pour $\alpha=\beta>0$, nous pouvons trouver explicitement une nouvelle solution exacte de l'équation (2.12).

En fait, dans ce cas, l'équation (2.13) devient :

$$\left(f^{m-1}f'\right)'=\left[\left(\alpha\eta+\gamma\right)f\right]' \quad \text{où } \gamma\in\mathbb{R}$$

après l'intégration, nous obtenons :

$$f^{m-1}f'=\left(\alpha\eta+\gamma\right)f+k, \text{ où } k \text{ constante.}$$

si l'on pose par exemple $f(0)=0$; cela implique $k=0$; alors nous obtenons :

$$f^{m-1}f'=\left(\alpha\eta+\gamma\right)f,$$

enfin la solution s'écrit sous la forme :

$$f\left(\eta\right)=\left[(m-2)^2\left(\frac{\alpha}{2}\eta^2+\gamma\eta\right)_+\right]^{\frac{1}{m-1}}, \quad \text{où } \eta=\frac{x-b\left(t\right)}{a\left(t\right)},$$

les coefficients $c\left(t\right), a\left(t\right)$, et $b\left(t\right)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t)=\left[1-\left(m+1\right)\alpha t\right]^{\frac{1}{m+1}} \\ c(t)=\left[1-\left(m+1\right)\alpha t\right]^{-\frac{1}{m+1}} \\ b(t)=\frac{\gamma}{\alpha}\left[1-\left(m+1\right)\alpha t\right]^{\frac{1}{m+1}}-\frac{\gamma}{\alpha} \end{cases}, \quad 0<t<T=\frac{1}{(m+1)\alpha} \tag{2.18}$$

Alors la solution de (2.12) s'écrit sous la forme :

$$u\left(x,t\right)=c\left(t\right)\left[(m-2)^2\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{x-b\left(t\right)}{a\left(t\right)}\right)^2+\gamma\left(\frac{x-b\left(t\right)}{a\left(t\right)}\right)\right)_+\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{2.19}$$

2.4 Solutions auto-similaires générale

Pour le cas $\gamma = 0$, la solution (2.2) du problème (2.1) devient :

$$u(x,t) = c(t)\, f\left(\frac{x}{a(t)}\right), \tag{2.20}$$

c'est à dire la solution sous forme auto-similaire générale, dans ce cas on a les théorèmes

Proposition 2.4.1 *Pour $f \in C^2 \cap L^2$; l'équation (2.1) admet une solution exacte sous forme "auto similaires générale"*

$$u(x,t) = c(t)\, f\left(\frac{x}{a(t)}\right),$$

Si

1- $A_x u = \frac{c^p}{a^q} A_\eta f$, *pour* $p, q \in \mathbb{R}$.

2- *le "profil basé" est une solution de l'équation suivante :*

$$A_\eta f = \alpha f + \beta \eta f^{'}, \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{2.21}$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t)$, sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^p}{a^q}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\beta \end{cases}. \tag{2.22}$$

Proposition 2.4.2 *La fonction*

$$u(x,t) = c(t)\, f\left(\frac{x}{a(t)}\right),$$

est une solution exacte du problème (2.12), où f le "profil de base" est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left(f^{m-1} f^{'}\right)^{'} = \alpha f + \beta \eta f^{\prime}_{\eta}, \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t)$, sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t))^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \end{cases}, \quad 0 < t < T$$

pour $(m-1)\alpha + 2\beta > 0$ où $A = 2 + \frac{\alpha}{\beta}(m-1)$

et donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = \exp(-\beta t) \\ c(t) = \exp(\alpha t) \end{cases}, \ t > 0$$

pour $(m-1)\alpha + 2\beta = 0$.

2.4.1 Explosion des solutions sous forme profils mobiles

Théorème 2.4.1 *Soit :*

$$u(x,t) = c(t) f\left[\frac{x - b(t)}{a(t)}\right]$$

avec f une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left(f^{m-1}f'\right)' = \alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

Si

$$(m-1)\alpha + 2\beta > 0$$

Il existe une solution sous la forme " profils mobiles" du problème (2.12) qui explose en temps fini $T > 0$, où les coefficients $c(t), a(t)$, et $b(t)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t))^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, 0 < t < T$$

où $A = 2 + \frac{\alpha}{\beta}(m-1)$.

Preuve. On a déjà prouvé que la solution "profiles mobiles" (2.2)

$$u(x,t) = c(t) f\left[\frac{x - b(t)}{a(t)}\right]$$

est une solution exacte du problème (2.12), (Théorème 2.3.1), avec f une solution de l'équation différentielle (2.13).

Aux limites, supposons les conditions aux limites latérales $a(0) = 1; c(0) = 1; b(0) = 0$:

Pour $(m-1)\alpha + 2\beta > 0$, les coefficients $c(t), a(t)$, et $b(t)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t))^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - A\beta t))^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}.$$

Rappelons que la solution explose en temps fini T. C-à-d : $\lim_{t \to T^-} u(x,t) = +\infty$.

on a $c(t) > 0$ si et seulement si

$$1 - A\beta t > 0$$

d'après un calcul simple nous obtenons :

$$t < \frac{1}{A\beta} = \frac{1}{(m-1)\alpha + 2\beta} = T > 0, \text{ où } A = 2 + \frac{\alpha}{\beta}(m-1).$$

La valeur de T représente donc le temps d'explosion de la solution.

donc $\lim\limits_{t\to T^-} c(t) = +\infty$, et alors

$$\lim_{t\to T^-} u(x,t) = \lim_{t\to T^-} c(t)\, f\left[\frac{x-b(t)}{a(t)}\right] = +\infty.$$

■

2.4.2 Solutions globale sous forme "profils mobiles"

Théorème 2.4.2 *Soit :*

$$u(x,t) = c(t)\, f\left[\frac{x-b(t)}{a(t)}\right]$$

avec f une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left(f^{m-1}f'\right)' = \alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta, \quad \text{où} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

si

$$(m-1)\alpha + 2\beta = 0$$

Il existe une solution globale sous la forme des profiles mobiles du problème (2.12), où les coefficients $c(t), a(t),$ et $b(t)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = \exp(-\beta t) \\ c(t) = \exp(\alpha t) \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\exp(-\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < \infty.$$

Preuve. On a déjà prouvé que la solution "profiles mobiles" (2.2) est une solution exacte du problème (2.12), (Théorème 2.3.1), avec f une solution de l'équation différentielle (2.13).

Pour $(m-1)\alpha + 2\beta = 0$, les coefficients $c(t), a(t),$ et $b(t)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = \exp(-\beta t) \\ c(t) = \exp(\alpha t) \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\exp(-\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < \infty.$$

on remarque que cette solution est globale. ■

Chapitre 3

Existence des solutions "profils mobiles"

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'une classe de solutions sous la forme d'auto-similaires générale appelée "Profils Mobiles" de l'équation de diffusion non-linéaire. On étudie l'existence du profiles de base de cette solution, on trouve également des solutions exactes particulières sous certaines conditions initiales.
Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^m\right), & b(t) < x < \infty,\ t > 0 \\ u(b\left(t\right), t) = c\left(t\right) V, & V \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1 Solutions profils mobiles

Nous allons étudier l'existence et l'unicité d'une classe de solutions sous la forme :

$$u\left(x,t\right) = c\left(t\right) f(\eta),\ \text{avec } \eta = \frac{x - b(t)}{a\left(t\right)},\ \text{ et } a, b, c \in \mathbb{R}^+, \tag{3.2}$$

Les paramètres $a(t), c(t), b(t)$ sont des fonctions à valeurs réelles de t, satisfaisant les conditions aux limites

$$a\left(0\right) = 1,\ c\left(0\right) = 1,\ b(0) = 0. \tag{3.3}$$

Dans ce cas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c} f - c\frac{\dot{a}}{a}\eta f'_\eta - c\frac{\dot{b}}{b} f'_\eta$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^m) = \frac{c^m}{a^2}(f^m)''_{\eta\eta}$$

si nous remplaçons cette forme de solutions dans (3.1), nous trouvons :

$$\frac{\dot{c}}{c}f - \frac{\dot{a}}{a}\eta f'_\eta - \frac{\dot{b}}{b}f'_\eta = \frac{c^{m-1}}{a^2}(f^m)''_{\eta\eta} \tag{3.4}$$

cette équation dépend de nombreux paramètres (Notre but est de déterminer les coefficients a, c, b et le profil f).

Les paramètres $c(t),\ a(t),\ b(t)$ sont déterminés par la solution du système de trois équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^m}{a^2}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\beta \\ \dot{b} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\gamma \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, et le profil f est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$(f^m)''_{\eta\eta} = \alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta, \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

et

$$f(0) = V \tag{3.7}$$

Maintenant, nous donnons le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 3.1.1 *Si $\beta \leq 0,\ \gamma \leq 0$ et $\alpha - 2\beta > 0$,*
le problème (3.1), a une solution faible à support compact sous la forme :

$$u(x,t) = c(t)\, f(\eta)\,,\ \text{où}\ \ \eta = \frac{x - b(t)}{a(t)},$$

avec le "profil de base" f est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$(f^m)''_{\eta\eta} = \alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta, \quad 0 < \eta < +\infty.$$

Les coefficients $c(t), a(t)$ et $b(t)$ sont donnés par :

1)

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{-\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \ 0 < t < T \tag{3.8}$$

Si $\frac{2\beta}{1-m} < \alpha < +\infty$, *avec* $A = 2 + \frac{\alpha}{\beta}(m-1)$ *et* $T = \frac{1}{2\beta+(m-1)\alpha}$.

et donnés par :

2)

$$\begin{cases} a(t) = \exp(-\beta t) \\ c(t) = \exp(\alpha t) \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\exp(-\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < \infty \tag{3.9}$$

Si $\alpha = \frac{2\beta}{1-m}$.

3.2 Existence et unicité du profil de base

Dans cette section, nous discutons l'existence et l'unicité des solutions faibles à support compact du problème aux limites

$$(f^m)''_{\eta\eta} = \alpha f + \beta\eta f'_\eta + \gamma f'_\eta, \quad 0 < \eta < \infty,$$

et

$$f(0) = V, \quad f(\infty) = 0. \tag{3.10}$$

Gilding et Peletier dans les séries d'articles $[18-19-20]$ a été présentée des cas spéciaux de l'équation (3.6) pour $\gamma = 0$, avec les conditions :

$$f(\lambda) = 0, \quad (f^m)'(\lambda) = 0, \tag{3.11}$$

où $\lambda > 0$ est un nombre réel.

Pour $\gamma = 0$, l'existence et l'unicité des solutions du (3.6) avec les conditions aux limites (3.10) et (3.11) sont donnés par les deux théorèmes suivants :

Théorème 3.2.1 [18] *Supposons que* $V > 0$. *Alors le problème aux limites (3.6) - (3.10) admet une solution faible à support compact si et seulement si* $\beta \leq 0$ *et* $\alpha - 2\beta > 0$. *En outre, cette solution faible est unique.*

Théorème 3.2.2 [18] *Supposons que* $V > 0$. *Alors le problème aux valeurs limites (3.6), (3.7) et (3.11) admet une solution unique et il existe un unique* $\lambda(V) > 0$ *telle que* $f(\eta; \lambda(V))$ *est positif sur* $(0, \lambda)$ *si et seulement si* $\beta \leq 0$ *et* $\alpha - 2\beta > 0$.

Dans la suite nous nous intéressons au cas générale $\gamma \neq 0$.

Définition 3.2.1 *Une fonction f sera dite une solution faible de l'équation* (3.6), *si*

a) *f est bornée, continue et non négative sur* $[0, \infty)$.

b) $(f^m)(\eta)$ *a une dérivée continue par rapport η sur* $(0, \infty)$.

c) *f vérifie l'égalité*

$$\int_0^\infty \phi' \left\{ (f^m)' - (\beta\eta + \gamma) f \right\} d\eta + (\alpha - \beta) \int_0^\infty \phi f d\eta = 0$$

pour tout $\phi \in C_0^1(0, \infty)$.

Théorème 3.2.3 *Supposons que $V > 0$. Alors le problème aux limites (3.6) - (3.10) admet une solution faible à support compact si et seulement si $\beta \leq 0$, $\gamma \leq 0$ et $\alpha - 2\beta > 0$. En outre, cette solution faible est unique.*

Nous allons d'abord donner la démonstration du théorème suivant pour l'existence et l'unicité des solutions classiques de (3.6) avec les conditions aux limites (3.7) et (3.11).

Théorème 3.2.4 *Supposons que $V > 0$. Alors le problème aux valeurs limites (3.6), (3.7) et (3.11) admet une solution unique et il existe un unique $\lambda(V) > 0$ telle que $f(\eta; \lambda(V))$ est positif sur $(0, \lambda)$ si et seulement si $\beta \leq 0$, $\gamma \leq 0$ et $\alpha - 2\beta > 0$.*

Nous allons données les conditions nécessaires sur les paramètres α, β et γ pour l'existence d'une solution faible non triviale de (3.6) à support compact, nous avons les lemmes suivants

Lemme 3.2.1 *Il existe une solution faible non triviale à support compact de (3.6)-(3.11) si $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha > 0$ ou bien $\beta < 0$ et $\gamma < 0$.*

Preuve. Supposons que $f(\eta; \lambda)$ est une solution faible non triviale de (3.6) à support compact. Alors

$$f \begin{cases} > 0 & \text{sur } (\lambda - \varepsilon, \lambda) \\ = 0 & \text{sur } [\lambda, \infty) \end{cases}$$

pour certain $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Il résulte que f est une solution classique de (3.6) sur $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ et satisfait (3.11) en $\eta = \lambda$; à savoir

$$f(\lambda) = 0, \quad (f^m)'(\lambda) = 0.$$

L'intégration de (3.6) à partir de η à λ, où $\lambda-\varepsilon<\eta<\lambda$, donne :

$$-\left(f^{m}\right)'(\eta)=-(\beta\eta+\gamma)f(\eta)+(\alpha-\beta)\int_{\eta}^{\lambda}f(\xi)\,d\xi. \tag{3.12}$$

La continuité de f et $\left(f^{m}\right)'$ assure l'existence de $\eta_0\in(\lambda-\varepsilon,\lambda)$ telle que $f'(\eta_0)<0$. Cela implique que le membre à gauche de (3.12) est positif en $\eta=\eta_0$, par conséquent, $-(\beta\eta_0+\gamma)$ et $\alpha-\beta$ ne peuvent pas tous les deux être inférieur à zéro.

Ainsi, $\beta=\gamma=0$ implique que $\alpha>0$.

Considérons maintenant le cas $\beta>0$ et $\gamma>0$. Cela exige que $\alpha-\beta>0$, par conséquent $\alpha>0$. Nous vérifions facilement à partir de (3.6) que f ne peut pas avoir un maximum car f est positif. Par conséquent, $f'<0$ sur $(\lambda-\varepsilon,\lambda)$. Il résulte de (3.12) que

$$-mf^{m-2}(\eta)f'(\eta)+(\beta\eta+\gamma)\eta\leq(\alpha-\beta)(\lambda-\eta), \tag{3.13}$$

où nous avons utilisé le faite que

$$f(\xi)\leq f(\eta)\quad\text{pour}\quad\xi\in(\eta,\lambda),\quad\lambda-\varepsilon<\eta<\lambda.$$

Si $\eta\to\lambda$ dans (3.13), la partie gauche devient positive, et la partie droite tend vers zéro, contradiction.

Ainsi, nous avons montré que $\beta=\gamma=0$ et $\alpha>0$ ou bien $\beta<0$ et $\gamma<0$ sont les seuls cas pour lesquels la solution faible non triviale de (3.6) existe à support compact. ■

3.2.1 Solutions explicites

Solution explicite pour $\beta=\gamma=0$ **et** $\alpha>0$. [18]

Avec $\beta=\gamma=0$ et $\alpha>0$, (3.6) devient :

$$\left(f^{m}\right)''=\alpha\left(f^{m}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{3.14}$$

on pose $f^m=g$ dans (3.14) et intégrer on obtient :

$$\left(g'\right)^2=\frac{2\alpha m}{m+1}g^{\frac{m+1}{m}}.$$

Résoudre cette équation et en utilisant (3.11), nous obtenons :

$$g(\eta)=\left[\frac{\alpha(m-1)^2}{2m(m+1)}(\lambda-\eta)^2\right]^{\frac{m}{m-1}},\quad 0<\eta<\lambda,$$

donc

$$f(\eta;\lambda)=\left[\frac{\alpha\,(m-1)^2}{2m\,(m+1)}\,(\lambda-\eta)^2\right]^{\frac{1}{m-1}},\quad 0<\eta<\lambda, \tag{3.15}$$

est l'unique solution du problème (3.6) satisfaisant (3.11). Nous constatons que :

$$f(0;\lambda)=\left[\frac{\alpha\,(m-1)^2}{2m\,(m+1)}\lambda^2\right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

Puisque $m>1$, $f(0;\lambda)$ est une fonction continue de λ aux $f(0;0)=0$ et $f(0;\infty)=\infty$, par ailleurs, f est une fonction continue et monotone croissante. Cela implique que, pour une donnée $V>0$, il existe une unique $\lambda(V)$ telle que :

$$f(0;\lambda(V))=V$$

par suite, $f(\eta;\lambda(V))$ est l'unique solution de (3.6) vérifiant (3.7) et (3.11).
Un calcul facile montre que :

$$\lambda(V)=\left[\frac{2m\,(m+1)}{\alpha\,(m-1)^2}V^{m-1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Donc la solution du problème (3.1) est :

$$u\,(x,t)=\begin{cases} c\,(t)\,f\,(x) & 0\leq x<\lambda \\ 0 & \lambda\leq x<\infty \end{cases},$$

avec f est donnée par (3.15) :

$$f(\eta)=\left[\frac{\alpha\,(m-1)^2}{2m\,(m+1)}\,(\lambda-\eta)^2\right]^{\frac{1}{m-1}},\quad 0<\eta<\lambda.$$

et

$$c(t)=\left[1-\alpha\,(m-1)\,t\right]^{-\frac{1}{m-1}},\quad 0<t<T.$$

Solution explicite pour $\beta<0,\ \gamma<0$, et $\alpha=\beta$

Nous allons présenter maintenant de nouvelle solutions explicites de type "profils mobile". Pour $\alpha=\beta$ (conditions nécessaires $\beta<0$ et $\gamma<0$), l'équation (3.6) devient :

$$\left(f^m\right)''=\beta f+\beta\eta f'+\gamma f'=\left[\left(\beta\eta+\gamma\right)f\right]',$$

Résoudre cette équation et en utilisant (3.11), nous obtenons :

$$f(\eta;\lambda) = \left[\frac{m}{(m-1)}\left(-\frac{\beta}{2}(\lambda-\eta)^2 - \gamma(\lambda-\eta)\right)\right]^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 < \eta < \lambda, \tag{3.16}$$

est l'unique solution du problème (3.6) satisfaisant (3.11). Nous constatons que :

$$f(0;\lambda) = \left[\frac{m}{(m-1)}\left(-\frac{\beta}{2}\lambda^2 - \gamma\lambda\right)\right]^{\frac{1}{m-1}},$$

f est une fonction continue et monotone croissante. Cela implique que, pour une donnée $V > 0$, il existe une unique $\lambda(V)$ telle que

$$f(0;\lambda(V)) = V.$$

Dans ce cas $f(\eta;\lambda(V))$ est l'unique solution de (3.6) vérifiant (3.7) et (3.11).
Un calcul facile montre que :

$$\lambda(V) = \frac{\gamma - \left[\gamma^2 - \frac{2(m-1)}{m}\beta V^{m-1}\right]^{\frac{1}{2}}}{\beta}.$$

Alors la solution du problème (3.1) est :

$$u(x,t) = \begin{cases} c(t)\, f\left(\frac{x-b(t)}{a(t)}\right), & 0 \le x < \lambda a(t) + b(t) \\ 0, & \lambda a(t) + b(t) \le x < \infty \end{cases},$$

avec f est donnée par (3.16) :

$$f(\eta) = \left[\frac{m}{(m-1)}\left(-\frac{\beta}{2}(\lambda-\eta)^2 - \gamma(\lambda-\eta)\right)\right]^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 < \eta < \lambda, \quad \lambda > 0.$$

et les paramètres $c(t), a(t),\ b(t)$ sont donnée par :

$$\begin{cases} a(t) = [1-\beta(m+1)t]^{\frac{1}{m+1}} \\ c(t) = [1-\beta(m+1)t]^{-\frac{1}{m+1}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}[1-\beta(m+1)t]^{\frac{1}{m+1}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < T = \frac{1}{m+1}.$$

Nous donnons ci-dessous un lemme élémentaire pour le cas $\beta < 0$ et $\gamma < 0$.

Lemme 3.2.2 *Supposons que* $0 < \mu < \lambda$ *et* f *est une solution positive de (3.6) sur* $[\mu, \lambda)$ *satisfaisant (3.11), alors :*
(i) $f'(\eta) < 0$ *sur* $[\mu, \lambda)$ *pour* $\alpha - \beta \geq 0$.
(ii) *Supposons que* $\alpha - \beta < 0$ *et* $f'(\eta_0) = 0$ *pour* $\eta_0 \in [\mu, \lambda)$. *Alors* f *admet un maximum en* η_0 *et* $\eta_0 < \frac{\lambda(\alpha-\beta)-\gamma}{\alpha}$.
Supposons que f *est une solution positive de (3.6) et (3.11) sur* $[0, \lambda)$, *alors :*

$$f'(0) < 0, \ \textit{pour } \alpha - \beta \geq 0.$$

Preuve. **(i)** L'intégration de (3.6) à $\eta \in [\mu, \lambda)$, donne :

$$-\left(f^m\right)'(\eta) = -\left(\beta\eta + \gamma\right) f(\eta) + (\alpha - \beta) \int_\eta^\lambda f(\xi)\, d\xi. \tag{3.17}$$

Parce que $\beta < 0$ et $\gamma < 0$, le membre droit de (3.17) est positif lorsque $\alpha - \beta \geq 0$ et par conséquent $\left(f^m\right)'(\eta) < 0$. Ce qui implique que $f'(\eta) < 0$ sur $[\mu, \lambda)$.
(ii) si $\alpha - \beta < 0$ alors $\alpha < 0$ (car $\beta < 0$), selon (3.6), $f''(\eta_0) < 0$ lorsque $f'(\eta_0) = 0$, donc f admet un maximum en $\eta = \eta_0$ et est strictement décroissante sur (η_0, λ), c'est-à-dire, $f'(\eta) < 0$ sur (η_0, λ). On pose $\eta = \eta_0$ dans (3.17), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\beta\eta_0 + \gamma\right) f(\eta_0) + (\alpha - \beta) \int_{\eta_0}^\lambda f(\xi)\, d\xi \\ &> -\left(\beta\eta_0 + \gamma\right) f(\eta_0) + (\alpha - \beta)(\lambda - \eta_0) f(\eta_0), \end{aligned}$$

ainsi

$$-\left(\beta\eta_0 + \gamma\right) + (\alpha - \beta)(\lambda - \eta_0) < 0 \text{ or } \eta_0 < \frac{\lambda(\alpha - \beta) - \gamma}{\alpha}$$

Avec $\eta = 0$, (3.17) devient :

$$-\left(f^m\right)'(0) = -\gamma f(0) + (\alpha - \beta) \int_\eta^\lambda f(\xi)\, d\xi. \tag{3.18}$$

Les résultats pour $f'(0)$ découle immédiatement de (3.18). ■

Lemme 3.2.3 *Supposons que* $\beta < 0$, $\gamma < 0$ *et* α *est un nombre réel quelconque.*
Alors, pour tout $\lambda > 0$, *l'équation (3.6) avec la condition initiale (3.11) au* $\eta = \lambda$, *admet une solution unique positive au voisinage de* λ, $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ *; ici,* $\varepsilon > 0$ *est une constante.*

Preuve. Supposons que f est une solution positive au voisinage à gauche de $\eta = \lambda$. Par le (lemme 3.2.2), $f^{'}(\eta) < 0$ pour $\eta \in (\lambda - \varepsilon, \lambda)$ pour certaine $\varepsilon > 0$.

On pose $\eta = G(f)$ où G est l'inverse du f sur $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$. L'écriture de (3.17), nous donnes :

$$\left(f^m\right)^{'}(\eta) = (\alpha\eta + \gamma) f(\eta) + (\alpha - \beta) \int_\eta^\lambda \xi f^{'}(\xi)\, d\eta. \tag{3.19}$$

Avec $G(f) = \eta$ dans (3.19) nous avons :

$$\frac{dG}{df} = \frac{m f^{m-1}}{(\alpha G + \gamma) f - (\alpha - \beta) \int_0^f G(\varphi) d\varphi}, \tag{3.20}$$

l'équation (3.20) est une équation intégro-différentielle pour $G = G(f)$. En intégrant (3.20) de 0 à f, on obtient :

$$G(f) - \lambda = m \int_0^f \frac{\phi^{m-1} d\phi}{(\alpha G + \gamma)\phi - (\alpha - \beta) \int_0^\phi G(f) df}. \tag{3.21}$$

On pose :

$$H(f) = 1 - \lambda^{-1} G(f), \tag{3.22}$$

l'équation (3.21) devient :

$$H(f) = \frac{m}{\lambda^2} \int_0^f \frac{\phi^{m-1} d\phi}{(-\beta - \gamma)\phi + \alpha\phi H(\phi) - (\alpha - \beta) \int_0^\phi H(f) df}. \tag{3.23}$$

en utilisant le principe de contraction de Banach–Cacciopoli (voir Hartman [21]), nous montrons maintenant que l'équation (3.23) admet une unique solution positive au voisinage à droite de $f = 0$.

Soit X l'ensemble des fonctions bornées $H(f)$ sur $[0, h]$, $h > 0$, satisfaisant :

$$0 \leq H(f) \leq \rho = \frac{|\beta + \gamma|}{2(|\alpha| + |\alpha - \beta|)}. \tag{3.24}$$

Soit $\|..\|$ est la norme sup définie sur X, alors X est un espace métrique complet.

On définit :

$$M(H)(f) = \frac{m}{\lambda^2} \int_0^f \frac{\phi^{m-1} d\phi}{-(\beta + \gamma)\phi + \alpha\phi H(\phi) - (\alpha - \beta) \int_0^\phi H(f) df},\ H(f) \in X. \tag{3.25}$$

Montrons d'abord que M est un application de X vers X, pour $h \leq h_0$.

Soit $H \in X$. Il est clair que :

$$\begin{aligned} -(\beta + \gamma)\phi + \alpha\phi H(\phi) - (\alpha - \beta) \int_0^\phi H(f) df &\geq -(\beta + \gamma)\phi - |\alpha| \phi H(\phi) - |\alpha - \beta| \|H\| \phi \\ &\geq -(\beta + \gamma)\phi - (|\alpha| + |\alpha - \beta|) \|H\| \phi \\ &\geq \frac{-(\beta + \gamma)\phi}{2}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

on a utilisé (3.26). Par conséquent, à partir de (3.25), nous avons

$$\begin{aligned} M(H)(f) &\leq \frac{2m}{-(\beta+\gamma)\lambda^2}\int_0^f \phi^{m-2}d\phi \\ &= \frac{2mf^{m-2}}{-(\beta+\gamma)\lambda^2(m-1)} \\ &\leq \frac{2mh^{m-2}}{-(\beta+\gamma)\lambda^2(m-1)}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ainsi, $M(H)$ est bien défini sur X et $M(H):[0,h]\to\mathbb{R}$ est positive et continue. Le coté droit de (3.27) indique que nous pouvons trouver $h_0,\ h\leq h_0$ telle que $\|M(H)\|\leq\rho,\ H\in X$. Donc M est une application de X vers X pour $h\leq h_0$.

Dans l'étape suivante, nous montrons que M est une application contractante sur X.

Soit $H_1,H_2\in X$, et $h\leq h_0$. Alors

$$\begin{aligned} \|M(H_1)-M(H_2)\| &\leq \frac{4m}{(\beta+\gamma)^2\lambda^2}\int_0^f \phi^{m-3}\left(|\alpha|\,\phi\,\|H_1-H_2\|+|\alpha-\beta|\int_0^\phi\|H_1-H_2\|\,df\right)d\phi \\ &\leq \frac{4m}{(m-1)(\beta+\gamma)^2\lambda^2}\left(|\alpha|+|\alpha-\beta|\right)h^{m-1}\|H_1-H_2\|\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $h_1\in(0,h_0]$ telle que si $h\leq h_1$, M est une contraction sur X. Par le principe de contraction du Banach–Cacciopoli [21], M admet un unique point fixe dans X, et par conséquent l'équation (3.23) admet une solution unique. Ceci implique qu'il existe une solution unique positive de (3.6), (3.11) dans l'intervalle $(\lambda-\varepsilon,\lambda)$ pour certaine $\varepsilon>0$.

■

Lemme 3.2.4 *Supposons que $\beta<0,\ \gamma<0$ et $\mu\in[0,\lambda)$.*
Si f est une solution positive de (3.6) et (3.11) sur (μ,λ). Alors f est bornée sur (μ,λ) et

$$\sup_{(\mu,\lambda)} f(\eta)\leq\left[\frac{(m-1)\lambda}{2m}\max\left\{-(\beta\lambda+2\gamma),\left[(\alpha-2\beta)\lambda-2\gamma\right]\right\}\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

Preuve. Nous prouvons ce lemme pour les deux cas suivants: **(i)** $\alpha-\beta\geq 0$, **(ii)** $\alpha-\beta<0$.

Cas **(i)** $\alpha-\beta\geq 0$.

Pour ce cas $f'(\eta)<0$ sur (μ,λ) par Lemme 3.2.2, $f(\eta)\geq f(\eta),\ \eta\in(\eta,\lambda)$. d'après (3.17),

$$-(f^m)'(\eta)\leq-(\beta\eta+\gamma)f(\eta)+(\alpha-\beta)f(\eta)(\lambda-\eta),\quad \mu\leq\eta<\lambda,$$

où

$$\begin{aligned} -mf^{m-2}f' &\leq -\alpha\eta - \gamma + \lambda(\alpha - \beta) \\ &\leq -\lambda\beta - \gamma + \alpha(\lambda - \eta), \quad \mu \leq \eta < \lambda. \end{aligned} \tag{3.28}$$

L'intégration de (3.28) à partir de η à λ donne :

$$\frac{m}{m-1} f^{m-1}(\eta) \leq \left[-\lambda\beta - \gamma + \frac{1}{2}\alpha(\lambda - \eta) \right] (\lambda - \eta), \quad \mu \leq \eta \leq \lambda. \tag{3.29}$$

Donc

$$\sup_{(\mu,\lambda)} f^{m-1}(\eta) \leq \frac{(m-1)\lambda}{2m} \left[(\alpha - 2\beta)\lambda - 2\gamma \right]. \tag{3.30}$$

Cas **(ii)** $\alpha - \beta < 0$.

Par l'équation (3.17),

$$-(f^m)'(\eta) \leq -(\beta\eta + \gamma) f(\eta), \quad \mu \leq \eta < \lambda,$$

où

$$-mf^{m-2}f' \leq -(\beta\eta + \gamma), \quad \mu \leq \eta < \lambda. \tag{3.31}$$

L'intégration de (3.31) à partir de η à λ donne :

$$\frac{m}{m-1} f^{m-1}(\eta) \leq -\left[\frac{\beta}{2}\left(\lambda^2 - \eta^2\right) + \gamma(\lambda - \eta) \right], \quad \mu \leq \eta \leq \lambda. \tag{3.32}$$

Ceci, implique que :

$$\sup_{(\mu,\lambda)} f^{m-1}(\eta) \leq -\frac{(m-1)\lambda}{2m} (\beta\lambda + 2\gamma). \tag{3.33}$$

Remarquons que les bornes de (3.30) et (3.33) sont indépendants de μ et, par conséquent, $f(\eta)$ ne peut pas être illimitée à $\eta \to \lambda$. ■

Lemme 3.2.5 *Supposons que f est une solution positive de (3.6) et (3.11) au voisinage à gauche de $\eta = \lambda$, et $\beta < 0$, $\gamma < 0$. Alors $f(\eta) > 0$ sur $[0, \lambda)$ quand $\alpha - 2\beta > 0$.*

Preuve. L'intégration (3.17) à partir de η à λ donne :

$$f^m(\eta) = -(\beta\eta + \gamma) \int_\eta^\lambda f(\xi)\, d\xi + (\alpha - 2\beta) \int_\eta^\lambda (\xi - \eta) f(\xi)\, d\xi. \tag{3.34}$$

Il est facile de voir à partir de (3.34) que, si $\alpha - 2\beta > 0$, alors $f(\eta) > 0$ sur $[0, \lambda)$. ■

Proposition 3.2.1 *Supposons que* $\beta < 0$, $\gamma < 0$ *et* $\alpha - 2\beta \geq 0$.
Si $f(\eta; \lambda_1)$ *et* $f(\eta; \lambda_1)$ *des solutions de (3.6) et (3.11) sur* $(0, \lambda_1)$ *et* $(0, \lambda_2)$*, respectivement, où* $\lambda_1 > \lambda_2$*. Alors* $f(\eta; \lambda_1) > f(\eta; \lambda_2)$ *sur* $(0, \lambda_2)$.

Preuve. On note $f(\eta; \lambda_i) = f_i(\eta)$, $i = 1, 2$.
Supposons, par l'absurde, que la conclusion de la proposition n'est pas vrai. Alors il existe un $\overline{\eta} \in (0, \lambda_2)$ telle que $f_1(\overline{\eta}) = f_2(\overline{\eta})$ et $f_1(\eta) > f_2(\eta)$ sur $(\overline{\eta}, \lambda_2)$.
D'après (3.34), nous avons :

$$f_i^m(\eta) = -(\beta\overline{\eta} + \gamma) \int_{\overline{\eta}}^{\lambda_i} f_i(\eta)\, d\eta + (\alpha - 2\beta) \int_{\overline{\eta}}^{\lambda_i} (\eta - \overline{\eta}) f_i(\eta)\, d\eta, \quad i = 1, 2. \tag{3.35}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} &-(\beta\overline{\eta} + \gamma) \int_{\overline{\eta}}^{\lambda_2} (f_1 - f_2)\, d\eta + (\alpha - 2\beta) \int_{\overline{\eta}}^{\lambda_2} (\eta - \overline{\eta})(f_1 - f_2)\, d\eta \\ &-(\beta\overline{\eta} + \gamma) \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} f_1(\eta)\, d\eta + (\alpha - 2\beta) \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} (\eta - \overline{\eta}) f_1(\eta)\, d\eta = 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Parce que le deuxième et le quatrième termes du membre à gauche de (3,36) sont positives et les deux autres termes sont positifs, nous arrivons une contradiction. D'où la proposition 3.2.1. ■

Maintenant nous procédons à démontrer les théorèmes 3.2.4 et 3.2.3 et 3.1.1.

Preuve du théorème 3.2.4.
Nous avons déjà prouvé dans le lemme 3.2.3, l'existence locale au $\eta = \lambda$ d'une solution de (3.6) et (3.11). Cette solution locale unique peut être prolongé vers $\eta = 0$ comme une solution positive avec $f(0) > 0$ si et seulement si, lorsque $\beta < 0$, $\gamma < 0$, et $\alpha - 2\beta > 0$ (voir Lemme 3.2.5).
Maintenant, nous pouvons s'il existe $\lambda(V)$ telle que $f(0; \lambda(V)) = V$. Pour ce faire, nous utilisons le résultat suivant (Barenblatt, 1952 [9]).
Supposons que $f(\eta; \lambda)$ est une solution de (3.6) et (3.11) sur $(0, \lambda)$, alors $\mu^{-\frac{2}{m-1}} f(\mu\eta; \mu\lambda)$ est une solution de (3.6) et (3.11) sur $(0, \mu\lambda)$ pour tout $\mu > 0$. Si $\mu = \lambda^{-1.}$ Alors :

$$f(0; \lambda) = \lambda^{\frac{2}{m-1}} f(0; 1) = V. \tag{3.37}$$

Puisque $f(0;1) > 0$ pour $\alpha - 2\beta > 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$, nous obtenons une racine unique $\lambda = \lambda(V)$ de (3.37). Ainsi, $f(\eta; \lambda(V))$ est l'unique solution de (3.6), (3.7), et (3.11).

Pour $\beta = \gamma = 0$, nous avons déjà construit la solution explicite (3.15) :

$$f(\eta;\lambda) = \left[\frac{\alpha\,(m-1)^2}{2m\,(m+1)}\,(\lambda-\eta)^2\right]^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 < \eta < \lambda.$$

où

$$\lambda(V) = \left[\frac{2m\,(m+1)}{\alpha\,(m-1)^2}V^{m-1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

■

Preuve du théorème 3.2.3.

Nous remarquons que

$$f(\eta) = \begin{cases} f(\eta;\lambda) & 0 < \eta < \lambda \\ 0 & \lambda < \eta < \infty \end{cases}, \tag{3.38}$$

est une solution faible de (3.6) et (3.11). Maintenant, nous devons montrer qu'étant donné $V > 0$, (3.38) est l'une seule solution de (3.6), (3.7) et (3.11) à support compact.

Supposons que $f(\eta)$ est une solution faible de problème (3.6) et (3.10) à support compact. D'après le Lemme 3.2.5, cela est possible seulement si $\beta < 0$, $\gamma < 0$, et $\alpha - 2\beta > 0$, par ailleurs

$$f(\eta)\begin{cases} > 0 & \text{si } \ \eta \in [0,\lambda) \\ = 0 & \text{si } \eta \in [\lambda,\infty)\,, \quad \lambda > 0 \end{cases}.$$

D'après le théorème 3.2.4, il est également l'unique solution. Ainsi, nous avons démontré le théorème 3.2.3. ■

Preuve du théorèm 3.1.1.

Nous avons déjà prouvé dans le théorème 3.2.3, l'existence de "profil de base" f à support compact si et seulement si $\beta \leq 0$, $\gamma \leq 0$, et $\alpha - 2\beta > 0$. Maintenant, nous déterminons les coefficients $c(t), a(t)$ et $b(t)$, il suffit de résoudre le système (3.5) satisfaisant les conditions aux limites (3.3)

$$c(0) = 1,\ a(0) = 1,\ b(0) = 0,$$

On peut donc écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^m}{a^2}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\beta \\ \dot{b} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\gamma \end{cases}$$

Nous constatons que de (3.5), nous avons

$$\begin{cases} c(t) = (a(t))^{\frac{-\alpha}{\beta}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}a(t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases},$$

1) Si $2\beta + (m-1)\alpha > 0$, c-à-d $\frac{2\beta}{1-m} < \alpha < +\infty$, nous obtenons (3.8)

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{-\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, 0 < t < T,$$

avec $A = 2 + \frac{\alpha}{\beta}(m-1)$ et $T = \frac{1}{2\beta+(m-1)\alpha}$.
2) Si $2\beta + (m-1)\alpha = 0$, c-à-d $\alpha = \frac{2\beta}{1-m}$, nous obtenons (3.9)

$$\begin{cases} a(t) = \exp(-\beta t) \\ c(t) = \exp(\alpha t) \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}\exp(-\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad 0 < t < \infty.$$

■

Nous avons donc démontré l'existence et l'unicité de cette classe de solution pour $\beta \leq 0$, $\gamma \leq 0$, et $\alpha - 2\beta > 0$, on présente également pour des cas particuliers des solutions explicites nouvelles.

Chapitre 4

Solutions de l'équation de diffusion non-linéaire à n dimensions

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'équation de diffusion non-linéaire à n dimensions. On donne trois types de classes de solutions, la première est la solution sous la forme auto-similaires, la deuxième est la solution sous la forme auto-similaires générale, le troisième type est la solution sous la forme de profils mobiles.

4.1 Solutions sous la forme auto-similaire

Considérons donc l'équation de diffusion non-linéaire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \left(u^m (x,t) \right), \tag{4.1}$$

où $u(x,t)$ est une fonction des variables d'espace $(x \in \mathbb{R}^n)$, et de temps $(t > 0)$ et $(m > 1)$, $\Delta (u^m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 (u^m)}{\partial x_i^2}$ (où Δ désigne l'opérateur de Laplace).

en cherchons les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour les quelles :

$$\lambda^\alpha u \left(\lambda^\beta x, \lambda t \right)$$

est solution de l'équation de diffusion non-linéaire pour tout $\lambda > 0$ sachant que u est solution de cette même équation.

Comme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda^{\alpha} u\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right)\right)=\lambda^{\alpha+1} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right)$$

et

$$\Delta\left(\left(\lambda^{\alpha} u\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right)\right)^{m}\right)=\lambda^{\alpha m+2 \beta}\left(\Delta u^{m}\right)\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right)$$

on trouve que α et β doivent vérifier la relation :

$$\alpha+1=\alpha m+2 \beta. \tag{4.2}$$

Supposons cette relation réalisée, et choisissons $\lambda=\frac{1}{t}$, on va donc chercher une solution $u(x, t)$ de l'équation de diffusion non-linéaire sous la forme :

$$u(x, t)=\frac{1}{t^{\alpha}} U\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right), \quad x \in \mathbb{R}^{n}, \quad t>0. \tag{4.3}$$

où $U=u(1,.)$. Donc l'équation de diffusion non-linéaire $(4,1)$ est invariante sous l'action de la dilatation, c'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)=\Delta\left(u^{m}(x, t)\right) \Rightarrow \lambda^{\alpha+1} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right)=\lambda^{\alpha m+2 \beta}\left(\Delta u^{m}\right)\left(\lambda^{\beta} x, \lambda t\right).$$

Théorème 4.1.1 *(Existence de solution auto similaire)* [31]
Pour :

$$\alpha+1=\alpha m+2 \beta.$$

l'équation de diffusion non-linéaire admette une solution sous la forme auto similaire donnée par :

$$u(x, t)=\frac{1}{t^{\alpha}} U\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right).$$

Détermination du profil U

Pour la détermination du profil U et les paramètres α et β, notons y la nouvelle variable

$$y = \frac{x}{t^\beta},$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\alpha t^{-\alpha-1} U\left(t^{-\beta}x\right) - \beta t^{-\alpha-\beta-1} x.\nabla U\left(t^{-\beta}x\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} U\left(t^{-\beta}x\right) - \beta t^{-\alpha-1}\left(t^{-\beta}x\right).\nabla U\left(t^{-\beta}x\right) \\
&= -\alpha t^{-\alpha-1} \left. U(y)\right|_{y=t^{-\beta}x} - \beta t^{-\alpha-1} y. \left.\nabla U(y)\right|_{y=t^{-\beta}x},
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\left(t^{-\alpha} U\left(t^{-\beta}x\right)\right)^m\right) &= t^{-\alpha m-2\beta}\Delta\left(U^m\right)\left(t^{-\beta}x\right) \\
&= t^{-\alpha m-2\beta} \left.\Delta\left(U^m(y)\right)\right|_{y=t^{-\beta}x}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction u définie ci-dessus à partir de la fonction U est solution de l'équation de diffusion non-linéaire si :

$$-\alpha t^{-\alpha-1} \left. U(y)\right|_{y=t^{-\beta}x} - \beta t^{-\alpha-1} y. \left.\nabla U(y)\right|_{y=t^{-\beta}x} = t^{-\alpha m-2\beta} \left.\Delta\left(U^m(y)\right)\right|_{y=t^{-\beta}x},$$

supposons que :

$$\alpha + 1 = \alpha m + 2\beta$$

alors l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$\Delta\left(U^m(y)\right) + \beta y.\nabla U(y) + \alpha U(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Pour aller plus loin, supposons que U est une fonction radiale, c'est à dire de la forme :

$$U(y) = V(|y|)$$

Rappelons la formule donnant le Laplacien d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^n$:
pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a :

$$\Delta\left(\phi(|y|)\right) = \phi^{\text{``}}(|y|) + \frac{n-1}{|y|}\phi^{\text{`}}(|y|), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi

$$(V^m)''(r) + \frac{n-1}{r}(V^m)'(r) + \beta r V'(r) + \alpha V(r) = 0, \text{ pour tout } r > 0. \tag{4.4}$$

Supposons que $\alpha = n\beta$; multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par r^{n-1}, on met l'égalité ci-dessus sous la forme :

$$\left(r^{n-1}(V^m)'\right)' + (\beta r^n V)' = 0, \quad r > 0.$$

on en déduit que :

$$r^{n-1}(V^m)' + \beta r^n V = \text{Const.}, \quad r > 0.$$

et, en supposant que $U(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $|y|$ soit assez grand, on trouve que la constante d'intégration ci-dessus est nulle.

L'équation différentielle :

$$(V^m)' + \beta r V = 0, \text{ pour tout } r > 0, \text{ avec } \lim_{r\to+\infty} V(r) = 0$$

admet pour solutions non identiquement nulles toutes les fonctions de la forme

$$V(r) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} \left(c - \frac{1}{2}\beta r^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad r > 0 \tag{4.5}$$

où c est une constante positive quelconque.

Ainsi, pour tout $c > 0$ fixé, en choisissant :

$$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2}, \quad \beta = \frac{1}{n(m-1)+2} \tag{4.6}$$

on trouve que la fonction :

$$U(y) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} \left(c - \frac{1}{2}b|y|^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \tag{4.7}$$

est solution de l'équation :

$$\Delta(U^m(y)) + \beta y.\nabla U(y) + \alpha U(y) = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Comme la fonction U ci-dessus est clairement de classe C^1 au voisinage de $y = 0$, l'EDP :

$$\Delta(U^m(y)) + \beta y.\nabla U(y) + \alpha U(y) = 0,$$

vaut au sens des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

On résume l'analyse faite ci-dessus dans le théorème suivant :

Théorème 4.1.2 ***(Solutions de Barenblatt)*** [31]
Soient $n \geq 1$ *et* $m > 1$.
Pour

$$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2}, \ \text{et } \beta = \frac{1}{n(m-1)+2}$$

la fonction

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} \frac{1}{t^{\alpha}} \left(c - \beta \frac{|x|^2}{2t^{2\beta}}\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \tag{4.8}$$

est, pour tout $c > 0$, *solution au sens des distributions de l'équation de diffusion non-linéaire (4,1).*

Remarque 4.1.1 *Pour tout* $t > 0$, *la fonction* $x \to u(x,t)$ *est continue et à valeurs positives ou nulles et*

$$supp\,(u(.,t)) = \overline{B\left(0, \frac{2ct^{2\beta}}{\beta}\right)};$$

4.2 Solutions auto-similaires générale

Dans cette section on va étudié une classe de solutions sous la forme auto-similaires générale de l'équation de diffusion non-linéaire à n dimensions en appliquant la méthode dite "Profils Mobiles".

4.2.1 La méthode des profils mobiles (MPM) à n dimensions (première forme)

Considérons l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_x u \tag{4.9}$$

Où A_x est un opérateur différentiel linéaire ou non linéaire de la variable $(x \in \mathbb{R}^n)$.
Le principe de cette méthode est de chercher une solution du problème (4,9) sous la forme

$$u(x,t) = c(t)\, f(\eta), \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{x}{a(t)}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.10}$$

où f est dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, qu'on va appeler "profil de base".

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c} f(\eta) - c\frac{\dot{a}}{a}\eta.\nabla f(\eta) \\ A_x u = \frac{c^p}{a^q} A_\eta f, \quad \text{avec} \quad p, q \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Les paramètres $c(t)$, $a(t)$, sont des fonctions dépendant du temps t, sont déterminés par la solution de problème de minimisation :

$$\min_{\dot{c},\dot{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u \right|^2 dx, \tag{4.11}$$

par conséquent, nous obtenons le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, f \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \eta.\nabla f \rangle = 0 \end{cases}, \tag{4.12}$$

ou $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$.

L'EDP (4.9) est transforme alors dans un ensemble de deux EDOs associées :

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c}\langle f, f \rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta.\nabla f, f \rangle = \frac{1}{c}\langle A_\eta f, f \rangle \\ \frac{\dot{c}}{c}\langle \eta.\nabla f, f \rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta.\nabla f, \eta.\nabla f \rangle = \frac{1}{c}\langle A_\eta f, \eta.\nabla f \rangle \end{cases}, \tag{4.13}$$

Approximation à priori :

Soit :

$$V_t = \{f, \ \eta.\nabla f\}$$

le sous espace de $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendré par les fonctions f et $\eta.\nabla f$ à l'instant t, de la relation (4.12) on déduit que $\frac{\partial u}{\partial t} - A_x u$ est orthogonale à V_t.

En particulier comme $\frac{\partial u}{\partial t} \in V_t$, alors :

$$\langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = 0,$$

donc si $A_x u$ appartient aussi à V_t alors la méthode nous fournit une solution exacte faible qui s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = c(t) f\left(\frac{x}{a(t)}\right).$$

Maintenant nous voulons établir des conditions sur la méthode pour trouver des solutions exactes de l'équation (4.9).

Solutions exactes de quelque EDPs non linéaires :

Théorème 4.2.1 *Pour $f \in C^2 \cap L^2$; l'équation (4.9) admet une solution exacte sous la forme :*

$$u(x,t) = c(t)\, f\left(\frac{x}{a(t)}\right),$$

Si

1- $A_x u = \frac{c^p}{a^q} A_\eta f$, *pour* $p, q \in \mathbb{R}$.

2- *le "profil de base" est une solution de l'équation suivante :*

$$A_\eta f = \alpha f + \beta \eta . \nabla f, \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{4,14}$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t)$, sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} & = \frac{c^p}{a^q}\alpha \\ \dot{a} & = -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\beta \end{cases} \tag{4,15}$$

Preuve. D'après le principe de l'estimation de cette méthode, si $A_x u$ appartient au sous espace V_t; alors la fonction $u(x;t) = c(t) f(\eta)$ est une solution exacte d'équation (4.9), dans ce cas le terme $A_\eta f$ peut être exprimé comme une combinaison linéaire de fonctions, $f, \eta.\nabla f$, donc

$$A_\eta f = \alpha f + \beta \eta . \nabla f, \quad \text{pour} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le système (4.13) est obtenu comme suit :

Quand on remplace $A_\eta f$ par la combinaison $\alpha f + \beta \eta.\nabla f$, dans (4.13), nous obtenons le système :

$$MX = \frac{c^{p-1}}{a^q} MF \tag{4,16}$$

avec

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \langle f, f \rangle & \langle \eta.\nabla f, f \rangle \\ \langle \eta.\nabla f, f \rangle & \langle \eta.\nabla f, \eta.\nabla f \rangle \end{pmatrix}, \\ X &= \begin{pmatrix} \frac{\dot{c}}{c} \\ -\frac{\dot{a}}{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La matrice dans le système (4,16) est symétrique et inversible, alors (4,16) peut être écrit sous la forme (4,15)

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^p}{a^q}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\beta \end{cases}.$$

■

4.2.2 Application à l'équation de diffusion non-linéaire

Nous présentons maintenant une application intéressante de notre méthode. L'application concerne l'équation de diffusion non linéaire à n dimensions.

Soit l'équation de la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\left(u^m(x,t)\right), \ x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

admet une solution exacte sous la forme d'auto similaires générale

$$u(x,t) = c(t) f\left(\frac{x}{a(t)}\right),$$

Si

1- $A_x u = \frac{c^m}{a^2}\Delta_\eta\left(f^m(\eta)\right)$. $(p = m, \ q = 2)$

2- alors le "profil-basé" doit vérifier l'EDP suivante :

$$\Delta_\eta\left(f^m(\eta)\right) = \alpha f + \beta\eta.\nabla f, \quad \text{où} \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t)$, sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^m}{a^2}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\beta \end{cases} \tag{4.18}$$

Détermination du "profil de base" f :

Le "profil de base" doit vérifier l'EDP suivante :

$$\Delta_\eta\left(f^m(\eta)\right) = \alpha f + \beta\eta.\nabla f, \quad \text{où } \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pour aller plus loin, supposons la fonction f radiale, c'est à dire de la forme :

$$f(\eta) = V(|\eta|),$$

d'où

$$\Delta_\eta \left(f^m \left(|\eta| \right) \right) = \left(f^m \right)'' \left(|\eta| \right) + \frac{n-1}{|\eta|} f' \left(|\eta| \right), \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi

$$\left(V^m \right)'' (r) + \frac{n-1}{r} \left(V^m \right)' (r) = \alpha V (r) + \beta r V' (r), \quad r = |\eta|.$$

Supposons que $\alpha = n\beta$; multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par r^{n-1}, on met l'égalité ci-dessus sous la forme :

$$\left(r^{n-1} \left(V^m \right)' \right)' + \left(\beta r^n V \right)' = 0, \quad r > 0.$$

on en déduit que

$$r^{n-1} \left(V^m \right)' + \beta r^n V = \text{Const.}, \quad r > 0.$$

et, en supposant que $f(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\eta|$ soit assez grand, on trouve que la constante d'intégration ci-dessus est nulle.

L'équation différentielle :

$$\left(V^m \right)' + \beta r V = 0, \quad \text{pour tout} \quad r > 0, \quad \text{avec} \quad \lim_{r \to +\infty} V(r) = 0 \tag{4.19}$$

admet pour solutions non identiquement nulles toutes les fonctions de la forme :

$$V (r) = \left(1 - \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} \left(c - \frac{1}{2} \beta r^2 \right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad r > 0,$$

où c est une constante positive quelconque

donc

$$f (\eta) = \left(1 - \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} \left(c - \frac{1}{2} \beta |\eta|^2 \right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad \text{avec} \quad \alpha = n\beta, \tag{4.20}$$

les coefficients $c(t), a(t)$, sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^m}{a^2} \alpha \\ \dot{a} &= \frac{c^{m-1}}{a} \beta \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \alpha = n\beta,$$

supposons les conditions aux limites $a(0) = 1; c(0) = 1$, nous avons :

$$c(t) = [a(t)]^{-n},$$

On en déduire finalement :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{-\frac{n}{A}} \end{cases}, \quad 0 < t < T \tag{4.21}$$

où $A = 2 + n(m-1)$.

On a donc les résultats suivants :

Théorème 4.2.2 ***(Solutions auto-similaires générale).***
La fonction :

$$u(x,t) = c(t)\, f\left(\frac{x}{a(t)}\right), \ \textit{avec } x \in \mathbb{R}^n$$

est solution de l'équation de diffusion non-linéaire (4.1) :

$$\partial_t u(x,t) = \Delta\left(u^m(x,t)\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad m > 1.$$

telle que :

$$f(\eta) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} \left(c - \frac{1}{2}\beta|\eta|^2\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad \textit{avec} \ \ c > 0,$$

et les coefficients $c(t), a(t)$, *donnés par :*

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{-\frac{n}{A}} \end{cases}, \quad 0 < t < T$$

où $A = 2 + n(m-1)$.

4.2.3 Explosion des solutions sous la forme auto similaires générale

Théorème 4.2.3 *Soit :*

$$u(x,t) = c(t)\, f\left(\frac{x}{a(t)}\right),$$

avec f *une solution de l'équation suivante :*

$$\Delta_\eta\left(f^m(\eta)\right) = \alpha f + \beta \eta.\nabla f, \ \textit{où } \alpha = n\beta, \ \textit{et } \beta \in \mathbb{R}_+^*,$$

Il existe une solution sous la forme auto similaires générale du problème (4,1) qui explose en temps fini $T > 0$, *de la forme (4,10) où les coefficients* $c(t), a(t)$, *sont donnés par :*

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{-\frac{n}{A}} \end{cases}, \quad 0 < t < T,$$

avec $A = 2 + n(m-1)$.

Preuve. Déjà prouvé que la solution sous la forme auto similaires générale (4,10) :

$$u\left(x,t\right)=c\left(t\right)f\left(\frac{x}{a\left(t\right)}\right),$$

est une solution exacte du problème (4,1), (Théorème 4.2.2), avec f une solution de l'équation (4,17).

et les coefficients $c(t), a(t)$, sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t)=(1-A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t)=(1-A\beta t)^{-\frac{n}{A}} \end{cases} , \quad 0<t<T,$$

Rappelons que la solution explose en temps fini T. C-à-d : $\lim\limits_{t\to T^-} u\left(x,t\right)=+\infty$.
on a $c(t)>0$ si et seulement si :

$$1-A\beta t>0$$

d'après un calcul simple nous obtenons :

$$t<\frac{1}{A\beta}=\frac{1}{\beta\left(2+n(m-1)\right)}=T>0,$$

donc $\lim\limits_{t\to T^-} c\left(t\right)=+\infty$,
et alors :

$$\lim_{t\to T^-} u\left(x,t\right)=\lim_{t\to T^-} c\left(t\right)f\left(\frac{x}{a\left(t\right)}\right)=+\infty.$$

■

4.3 Solutions profils mobiles à n dimensions (MPM)

Dans cette section, on étudie une classe de solutions sous la forme des profils mobiles, de l'équation de diffusion non-linéaire à n dimensions en appliquant la méthode de "Profils Mobiles" à n dimensions.

4.3.1 La méthode des profiles mobiles (MPM) à n dimensions (deuxième forme)

Le principe de cette méthode est de chercher une solution du problème (4,9) sous la forme

$$u(x,t) = c(t) f(\eta), \text{ avec } \eta = \frac{x - \mathbf{b}(t)}{a(t)}, \text{ et } \mathbf{b}(t) = (b(t), b(t), ..., b(t)) \in \mathbb{R}^n \tag{4.23}$$

où f est dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, qu'on va appeler "profil de base".

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{c} f(\eta) - c\frac{\dot{a}}{a}\eta.\nabla f(\eta) - c\frac{\dot{b}}{a}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right) \\ A_x u = \frac{c^p}{a^q} A_\eta f, \quad \text{avec } p, q \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Les paramètres $c(t)$, $a(t), b(t)$, sont des fonctions dépendant du temps t, sont déterminés par la solution de problème du minimisation :

$$\min_{\dot{c},\dot{a},\dot{b}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u \right|^2 dx, \tag{4.24}$$

par conséquent, nous obtenons le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, f \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \eta.\nabla f \rangle = 0 \\ \langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right) \rangle = 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

ou $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

L'EDP (4,9) est transforme alors dans un ensemble de trois EDOs associées :

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c}\langle f, f\rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta.\nabla f, f\rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right), f\rangle = \frac{1}{c}\langle A_\eta f, f\rangle \\ \frac{\dot{c}}{c}\langle \eta.\nabla f, f\rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta.\nabla f, \eta.\nabla f\rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right), \eta.\nabla f\rangle = \frac{1}{c}\langle A_\eta f, \eta.\nabla f\rangle \\ \frac{\dot{c}}{c}\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right), f\rangle - \frac{\dot{a}}{a}\langle \eta.\nabla f, \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right)\rangle - \frac{\dot{b}}{a}\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right), \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right)\rangle = \frac{1}{c}\langle A_\eta f, \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}\right)\rangle \end{cases} \tag{4.26}$$

Approximation à priori :

Soit :

$$V_t = \left\{ f,\ \eta.\nabla f, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \right\}$$

le sous espace de $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendré par les fonctions associées au f à l'instant t, de la relation $(4,25)$ on déduit que $\frac{\partial u}{\partial t} - A_x u$ est orthogonal à V_t.

En particulier comme $\frac{\partial u}{\partial t} \in V_t$, alors $\langle \frac{\partial u}{\partial t} - A_x u, \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = 0$, donc si aussi $A_x u$ appartient à V_t alors la méthode nous fournit un solution exacte faible qui s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = c(t)\, f\left(\frac{x - b(t)}{a(t)} \right).$$

Maintenant nous voulons établir des conditions sur la méthode pour trouver des solutions exactes équation (4.9).

Solutions exactes de quelque EDPs non linéaires :

Théorème 4.3.1 *Pour $f \in C^2 \cap L^2$; l'équation (4,9) admet une solution exacte sous la forme*

$$u(x,t) = c(t)\, f\left(\frac{x - b(t)}{a(t)} \right),$$

Si

1- $A_x u = \frac{c^p}{a^q} A_\eta f$, *pour* $p, q \in \mathbb{R}$.

2- *le "profil basé" est une solution de l'équation suivante :*

$$A_\eta f = \alpha f + \beta \eta.\nabla f + \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}, \quad \text{où} \ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4,27}$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t), b(t)$ sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^p}{a^q}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\beta \\ \dot{b} &= -\frac{c^{p-1}}{a^{q-1}}\gamma \end{cases} . \tag{4,28}$$

les coefficients $c(t), a(t), b(t)$, sont déterminés (Section 2.1),

(i) pour $\alpha(p-1) + q\beta > 0$

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases} , \quad 0 < t < T \tag{4.29}$$

(ii) pour $\alpha(p-1)+q\beta=0$

$$\begin{cases} a(t)=\exp(-\beta t) \\ c(t)=\exp(\alpha t) \\ b(t)=\frac{\gamma}{\beta}K_1\exp(-\beta t)-\frac{\gamma}{\beta} \end{cases}, \quad t>0 \tag{4.30}$$

avec $A=q+\frac{\alpha}{\beta}(p-1)$.

4.3.2 Application à l'équation de diffusion non-linéaire

En appliquant cette méthode à l'équation de diffusion non-linéaire, alors l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta\left(u^m(x,t)\right), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0.$$

admet une solution exacte sous forme auto similaire générale :

$$u(x,t)=c(t)\,f(\eta), \quad \text{avec} \quad \eta=\frac{x-\mathbf{b}(t)}{a(t)}, \text{ et } \mathbf{b}(t)=(b(t),b(t),...,b(t))\in\mathbb{R}^n$$

Si

1- $A_x u=\frac{c^m}{a^2}\Delta_\eta(f^m)$. $(p=m,\ q=2)$

2- alors le "profil de base" doit vérifier l'EDP suivante :

$$\Delta_\eta(f^m(\eta))=\alpha f+\beta\eta.\nabla f+\gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\eta_i}\right), \quad \text{où} \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t), b(t)$, sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \dot{c} &= \frac{c^m}{a^2}\alpha \\ \dot{a} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\beta \\ \dot{b} &= -\frac{c^{m-1}}{a}\gamma \end{cases}.$$

On résume l'analyse faite ci-dessus dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.2 *La fonction :*

$$u(x,t)=c(t)\,f\left(\frac{x-b(t)}{a(t)}\right)$$

est une solution exacte du problème (4,1), où f le "profil de base" est une solution de l'EDP suivante :

$$\Delta_\eta(f^m(\eta))=\alpha f+\beta\eta.\nabla f+\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\eta_i}, \quad \text{où } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

dans ce cas, les coefficients $c(t), a(t), b(t)$ *donnés par :*

(i) *pour* $(m-1)\alpha + 2\beta > 0$

$$\begin{cases} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{-\frac{\alpha}{\beta A}} \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta}(1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}} - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases} \quad , \quad 0 < t < T \tag{4.31}$$

(ii) *pour* $(m-1)\alpha + 2\beta = 0$

$$\begin{cases} a(t) = \exp(-\beta t) \\ c(t) = \exp(\alpha t) \\ b(t) = \frac{\gamma}{\beta} K_1 \exp(-\beta t) - \frac{\gamma}{\beta} \end{cases} \quad , \quad t > 0 \tag{4.32}$$

où $A = 2 + \frac{\alpha}{\beta}(m-1)$.

Conclusion générale

Dans cette thèse nous avons présenté une nouvelle méthode pour chercher des nouvelles solutions appelées "profils mobiles" [15] pour l'équation de diffusion non linéaire.

Cette méthode a été inspirée de la méthode dite "ondelette mobile" qui a été proposée par Basdevant en 1990 [8].

Ainsi on a présenté des nouvelles solutions particulières explicite pour cette équation de diffusion non linéaire [1] . Une application intéressante concernant les équations de diffusion non linéaires a été présentée.

Nous avons également démontré l'existence et l'unicité de cette classe de solutions, en déterminant dans certaines cas le temps d'explosion pour des formes de solutions particulières.

Cette étude ouvert quelques perspectives notamment, la recherche d'autres formes de solutions en appliquant le même principe d'approche, et l'existence des solutions " profils mobiles" mais dans l'espace L^2.

Enfin, une généralisation de la méthode du profil mobile est donnée avec une application bien évidement sur l'équation de diffusion non linéaire en dimension n, cette généralisation ouvre plusieurs perspectives concernant l'application de cette méthode à plusieurs dimensions, et surtout l'étude d'existence des solutions qui n'est pas encore établie.

Bibliographie

[1] Arioua Y, Benhamidouche N, Traveling profiles solutions to heat equation with a power-law nonlinearity, Journal of Advanced Research in Applied Mathematics. 7 (2015), 1–6.

[2] Aronson, D.G. and Peletier, L.A. Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains, J. Diff. Eq. 39 (1981), 378–412.

[3] Aronson, D.G, The porous medium equation, in "Nonlinear Diffusion Problems", Springer Verlag, New York (1986).

[4] Atkinson, F.V. and Peletier, L.A, Similarity profiles of flows through porous media, drch. Rational Mech. Anal. 42 (1971), 369–379.

[5] Atkinson, F.V. and Peletier, L.A, Similarly solutions of the nonlinear diffusion equation, Arch. Rational Mech. Anal. 54 (1974), 373–392.

[6] Basak, P. Murty, V.V.N, Nonlinear diffusion applied to groundwater contamination problem, J Hydrol. 35 (1977), 357–363.

[7] Basak, P. Murty, V.V.N, Concentraction dependent diffusion applied to groundwater contamination problems, J Hydrol. 37 (1978), 333–337.

[8] Basdevant, C. Holshneider, M. Perrier, V, Méthode des ondelettes mobiles, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 310 (1990), 647–652.

[9] Barenblatt, G.I, On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium, Prikl. Mat. Meh. 16 (1952), 67–78.

[10] Barenblatt, G.I, On a class of exact solutions of the plane onedimensional problem of unsteady filtration into a porous medium, Prikl. Mat. Mek. 17 (1953), 739–742.

[11] Barenblatt, G.I, On limiting self-similar motions in the theory of unsteady filtration of a gas in a porous medium and the theory of the boundary layer, Prikl. Mat. Mek. 18 (1954), 409–414.

[12] Barenblatt, G.I, Similarity self-similarity and Intermediate Asymptotics, *Consultants Bureau,* New york (1979).

[13] Barenblatt, G.I. and Zel'dovich, YA. B, On the dipole-type solution in problems of unsteady gas filtration in the polytropic regime, Prikl. Mat. Meh. 21 (1957), 718–720.

[14] Benhamidouche N, Exact solutions to some nonlinear PDEs, travelling profiles method, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equation , 15 (2008), 1-7.

[15] Benhamidouche N, Arioua Y, New Method for Constructing Exact Solutions to Nonlinear PDEs, International Journal of Nonlinear Science. 7 (2009), 395–398.

[16] Fisher, R.A, The advance of advantageous genes, Ann Eugenics. 7 (1937), 335–369.

[17] Galaktionov, V.A. Posashkov, V. A, New exact solutions of parabolic equation with quadratic non-linearities, USSR. Compt. Math. Match. Phys. 29 (1989), 112–119.

[18] Gilding, B.E. and Peletier, L.A, On a class of similarity solutions of the porous medium equation I, J. Math. Anal. Appl. 55 (1976), 351–364.

[19] Gilding, B.E. and Peletier, L.A, On a class of similarity solutions of the porous medium equation II, J. Math. Anal. Appl. 57 (1977), 522–538.

[20] Gilding, B.E. and Peletier, L.A, On a class of similarity solutions of the porous medium equation III, J. Math. Anal. Appl. 77 (1980), 381–402.

[21] Hartman, P, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, New York (1964).

[22] Kalashnikov, A. S, The occurrence of singularities in solutions of the nonsteady seepage equation, Z. Vycisk. Mat. i Mat. Fiz. 7 (1967), 440–444. (Translated as : USSR Computational Math. and Math. Phys. 7 (1967), 269–275.

[23] Kolmogorov, N.A. Petrovsky, I.G. Piskunov, N.S, Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, Bulletin Université d'état à Moscou (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ), Série A. 1(1937), 1–26.

[24] Pattel, R.E, Diffusion from an instantaneous point source with concentration dependent coefficient, Quart. J. Mech. Appl. Math. 12 (1959), 407–409.

[25] Polyanin, A.D. Zaitsev, V.F, Handbook of Nonlinear Partial Equation, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton (2004).

[26] Polyanin, A.D. Alexei, I. Zhurov. Andrei, V. Vyazmin, Generalized Separation of Variables and Mass Transfer Equations, J. Non Equilib. Thermodyn. 25 (2000), 251–267.

[27] Shigesada, N. Kawasaki, K. Teramoto, E, Traveling periodic waves in heterogeneous environments, Theor. Population Biol. 30 (1986), 143–160.

[28] Sachdev, P.L, Srinivasa, C.R, Large Time Asymptotics for Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC (2010).

[29] Nakano, Y, Application of recent results in functional analysis to the problem of water tables, Adv. Water Resour. 2 (1979), 185–190.

[30] Nakano, Y, Particular solution to the problems of horizontal flow of water and air through porous media near a wetting front. Water Resour, 3 (1980), 81-85.

[31] V´azquez, J.L, The porous medium equation Mathematical Theory, Clarendon Press, *OXFORD* (2007).

[32] Zeldovich, Ya.B. and Raizer, Yu.P, Physics of Shock-waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena Vol. II, Academic Press, NewYork (1966).

[33] Zel'dovich, Ya. B and Kompaneets, S.A, On the theory of heat propagation for temperature-dependent thermal conductivity, in "Collection Commemorating the Seventieth Birthday of Academician X. F. Ioffe,", Izdat. Akad. Nauk SSSR, Rloscow, (1950), 61-72.

[34] Zel'dovich, Ya. B and Raizer, YU. P, "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena," Vol. II, Academic Press, New York (1967).