REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA
FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par :

Marouf Samia

Sujet

Version générale du théorème de domination de Pietsch

Date de soutenance : **18 / 06 /2018**

devant le jury :

Achour Dahmen	Pr.Univ.de M'sila	Président
Tallab Abd elhamid	M.C.A.Univ. de M'sila	Rapporteur
Dahia Elhadj	M.C.B.Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 /2018

بسم الله الرحمن الرحيم

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A ce qui le plus cher, à ma mère ce qui était un bon soutien pour moi.

à mon père qui m'a soutenu et m'aide pour arriver d'ici.

A mes frères ; Saad, Mokhtar, Yaçin, Noureddine.

A mes sœurs ; Mberka, Nabila, Nesma, Sabrina.

A toute ma famille .

et à tous ceux qui se fatiguent pour réussir leur avenir.

SAMIA

Remerciements

Je remercie avant tous ALLAH pour son aide, ses innombrables dons, ALLAH qui m'a donné la force, la volonté et la moral pour accomplir mon étude en master en mathématique.

Ainsi, je tiens également à exprimer mes vifs remercîments à mon promoteur ***Mesieur ; Tallab Abd elhamid*** *pour avoir d'abord proposer ce thème, pour son suivi continuel toute le long de la réalisation de ce mémoire et quelle n'pas cessée de me donner ses conseils.*

Notre remercîments vont au précédent du jury et aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Je remercie évidemment mes parents, et mon frère aine et ma sœur ainée, qui depuis de si longues années, m'ont encouragé et soutenu dans la poursuite de mes études.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes amis et collègues pour le se tien moral.

A tous MERCI

Table des matières

Introduction

La théorie des opérateurs $p-$sommants est un dommaine de recherche important dans l'analyse fonctionnelle, son origine remonte aux années 1950, avec des contributions de Grothendieck qui a ouvert les portes à la théorie des opérateurs. Dans 1967, Pietsch [13] a devloppé la théorie opérateurs $p-$sommants pour $(1 \leq p < \infty)$ et il a établi beaucoup de leurs propriétés fondamentales et environ dans le même temps Mujagin et Pełczyński [10] ont trouvé la notion des opérateurs $(p, q)-$sommants tels que pour le $q = p$ cette notion coicïde avec la notion qui a présenté par Pietsch dans [13]. Ensuite qu'en 1968, Lindenstrauss-Pełczyński [8] a clarifié les idées présieuses de Grothendieck et a contribué clairement au dévloppement vigoureux de cette notion. Dans ce mémoire on va étudier une version générale du théorème de domination de Pietsch qui il a prouvé en 1967 dans son papier [13] un résultat qui caractérise les opérateurs $p-$sommants, maintenant il est connu le théorème de domination de Pietsch (**TDP**), qui il a joué un rôle spécial et important dans la théorie des espaces de Banach, depuis lors de nombreux auteurs ont commencé à travailler sur ce sujet. Ainsi, la première tentative dans ce sens est introduit par G.Botelho, D.Pellegrino, P.Rueda [3], en 2010,et par ([14]) où à l'occasion les auteurs l'ont appelé le théorème de domination de Pietsch unifié (**TDPU**), en utilisant le lemme de Ky Fan pour le prouver. Cependent, il existe des exemples de classe d'applications où ce théorème n'était pas efficace motivé par de tels exemples, ce travail présente une version potentiellement définitive de cette théorie appelée théorème de domination de Pietsch généralisé (**TDPG**) présenté par D.Pellegrino et ([11],[12],)incluant **TDPU** et une version améliorée (**TDPU**).

Ce mémoir est construit de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous allons faire un rappel sur les opérateurs $p-$sommants et on va citer de quelques définitions, propriétés de bases qui nous sera utiles de notre travail, par exemple le théorème de domination de Pietsch.

Dans le deuxième chapitre, on va mentionner quelques concepts des espaces des opérateurs absolument sommants, résultats fondamentaux et des lemmes principaux que utilisent dans les preuves des théorèmes. Nous tirons quelques nouvelles extensions du théorème de domination de Piestch dans les différents théories (linéaires et non linéaires) qui s'appelent le théorème de domination de Pietsch unifié (**TDPU**) introduit par G.Botelho, D.Pellegrino, P.Rueda [3], le théorème de domination de Pietsch généralisé (**TDPG**) présenté par PELLEGRINO et ALL ([11],[12]) et les résultats présentent une généralisation directe du théorème de domination de Piestch.

Enfin, dans le troisième chapitre que nous donnons quelques applications de (**TDPU**) et (**TDPG**) dans le cas Lipschitzien et multilinéaires.

Notations

$\lVert . \rVert_X$	Est définit une norme sur X.
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}$.
$l_p(X)$	Espace des suites (x_n) dans X absolument p-sommables.
$l_p^{\omega}(X)$	Espace des suites (x_n) dans X faiblement p-sommables.
l_p	Espace des suites scalaires.
x^*, y^*, a^*	Les éléments de X^* et note par $x^*(y) = \langle x^*, y \rangle$
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
$\sigma(X, X^*)$	Topologie faible définit sur X
$\sigma(X^*, X)$	Topologie $*-$faible définit sur X^*
B_X	Boule unité fermé de X .
$\mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_n; Y)$	L'ensemble de tous les applications $m-$ linéaires continues de $X_1 \times ... \times X_n$ dans Y.
$\mathcal{L}(X, \Bbbk) = X^*$	Le dual topologique de X
$\Bbbk$	Corps des scalaires ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$\Pi_p(X, Y)$	Espacedes opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y
$\Pi_{p,q}(X, Y)$	Espace des opérateurs linéaires (p, q)-sommants de X dans Y.
e	Elément neutre ou distingué,on prend 0 si X est normé
$\mathrm{Lip}_0(X, Y)$	Espace des applications Lipschitziennes de X dans E nulles au point e
$\mathrm{Lip}(X, Y)$	Espace de toutes les fonctions Lipschitziennes bornées de X dans E
$\langle ., . \rangle$	Dénote les crochets de dualité.

Chapitre 1

Opérateurs linéaires absolument sommants

1.1 Préliminaires

Dans cette section, on va faire un rappel de quelques notions d'opérateurs $p-$sommants et le théorème de domination de Pietsch avec quelques propriétés fondamentaux .

Définition 1.1.1 *Une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est dite fortement $p-$sommable, si pour toute suite $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p$ est converge. Dans ce cas on note par $l_p(X)$ l'espace des suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dans X fortement $p-$sommables, muni de la norme*

$$\begin{aligned}
\|(x_n)\|_{l_p(X)} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad si \;\; 1 \leq p < \infty \\
\|(x_n)\|_{l_\infty(X)} &= \sup_n \|x_n\| \quad\quad si \;\; p = \infty
\end{aligned}$$

Définition 1.1.2 *Une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est dite faiblement $p-$sommable, si pour toute suite $x^* \in X^*$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle|^{\,p}$est converge. On note par $l_p^{\omega}(X)$ l'espace des suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dans X faiblement p-sommables, muni de la norme*

$$\begin{aligned}
\|(x_n)\|_{l_p^{\omega}(X)} &= \sup\left\{ (\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} : \|x^*\| \leq 1 \right\} \quad pour\ 1 \leq p < \infty \\
\|(x_n)\|_{l_\infty^{\omega}(X)} &= \sup_n \{\sup\{|x^*(x_n)| : \|x^*\| \leq 1\}\} \quad si\ p = \infty.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 *1). Pour* $1 \leq p \leq \infty$, *on a* $l_p(X) \subseteq l_p^{\omega}(X)$, *de plus*

$$\|(x_i)\|_{l_p^{\omega}(X)} \leq \|(x_i)\|_{l_p(X)}$$

2). Si $p = \infty$, *on a* $l_\infty(X) = l_\infty^{\omega}(X)$, *et*

$$\|(x_i)\|_{l_\infty(X)} = \|(x_i)\|_{l_\infty^{\omega}(X)}.$$

3). $l_p(X) = l_p^{\omega}(X)$ *pour tout* $1 \leq p < \infty$ *si et seulement si* $dim(X)$ *est finie. Aussi* $\left(l_p^{\omega}(X), \|.\|_p^w\right)$ *est un espace vectoriel (voir [14, propositions 2.3.4]).*

Définition 1.1.3 *Soient* $1 \leq p \leq \infty$ *et* X *un espace de Banach ,on définit l'espace des suites inconditionnellements sommables*

$$l_{p,u}(X) = \left\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p,w}(X); \ \lim_{n\to\infty} \|(x_i)_{i=n}^{\infty}\|_{p,w} = 0\right\}.$$

Exemple 1.1.1 *Soit* X *un espace de Banach de dimension infinie. Désignons par* $id : X \to X$ *l'identité dans* X, *par [4, Théorème10,5], ce qui donne une suite* $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \frac{l_p^{\omega}(X)}{l_p(X)}$. *telle que*

$$\widetilde{id} : l_p^{\omega}(X) \to l_p(X) \ ; \ id\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \left(id\,(x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

ne peut pas être définit.

Enfin, ces résultats nous permettent d'aborder des suites inconditionnelles sommables des termes plus pratiques**.**

Lemme 1.1.1 *Si* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ *est une suite de scalaire avec* $\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\right| \leq 1$, *pour un ensemble finie* $M \subset \mathbb{N}$, *alors* $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 4$.

Proposition 1.1.2 *Une suite* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *dans* X *est inconditionnellement sommable si, et seulement si* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{1,w}(X)$.

Preuve. Soit $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X$, une suite inconditionnelle sommable, par [14, Théorème1.1.2], et pour $\epsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $M \subset \mathbb{N}$ finie, avec $M \subset \{n_\epsilon, n_\epsilon + 1, ...\}$, tel que

$$\left\|\sum_{j\in M} x_j\right\| < \frac{\epsilon}{8}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j\in M}\langle x^*,x_j\rangle\right| \qquad (1.1.1)\\
\leq\ & \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left|\sum_{j\in M}\langle x^*,x_j\rangle\right|\\
=\ & \sup_{x^*\in B_{X^*}}\left|\left\langle x^*,\sum_{j\in M}x_j\right\rangle\right|\\
=\ & \left\|\sum_{j\in M}x_j\right\| < \tfrac{\epsilon}{8}.
\end{aligned}$$

On appliqué le lemme (1.1.1), on obtient

$$\sum_{j=n_\epsilon}^{\infty}|x^*(x_j)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc si $n > n_\epsilon$, alors

$$\begin{aligned}
&\left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{1,w}\\
=\ & \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{j=n}^{\infty}|\langle x^*,x_j\rangle|\\
\leq\ & \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{j=n_\epsilon}^{\infty}|\langle x^*,x_j\rangle|\\
\leq\ & \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon,
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{1,w} = 0.$$

Donc $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{1,w}(X)$.

Réciproquement, supposons que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{1,w}(X)$. Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\epsilon$ce qui implique $\left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{1,w} < \epsilon$. Pour $M \subset \mathbb{N}$ finie, avec $M \subset \{n_\epsilon, n_\epsilon+1, ...\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j\in M}x_j\right\| &\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{j\in M}|\langle x^*,x_j\rangle|\\
&\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}}\sum_{j=n}^{\infty}|\langle x^*,x_j\rangle|\\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

pour $n \geq n_\epsilon.\}$. D'après [14, Théorème 1.1.2], il s'ensuit que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$est une suite inconditionnelle sommable. ∎

1.2 Opérateurs linéaires absolument (p,q) −sommants

Définition 1.2.1 *Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire continu. On dira que u est absolument (p,q)-sommant (ou simplement (p,q)-sommant) quand $(1 \leq p,\ q < \infty)$, il existe $\widehat{u}$*

un opérateur induit, tel que

$$\widehat{u}: \ l_{q,w}(X) \to l_p(Y) \ \text{ définit par } \widehat{u}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = (ux_n)_{n=1}^{\infty}.$$

On note $\Pi_{p,q}(X,Y)$) l'ensemble des opérateurs linéaires (p,q)-sommants de X dans Y. Si $q=p$ on remplace $\Pi_{p,q}(X,Y)$ par $\Pi_p(X,Y)$.

Proposition 1.2.1 *[4] Soit $u \in \mathcal{L}(X,Y)$ un opérateur linéaire continu de X dans Y alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

i). L'opérateur u est (p,q)-sommant

ii). Il existe $K>0$, tel que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.2.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_1,...,x_n \in X$,

iii). Il existe $K>0$, tel que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

pour chaque $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$,

iv). Il existe $K>0$, tel que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

si $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,u}(X)$,

v). La suite $u(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q(X)$ pour $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$.

De plus, on note par $\pi_{p,q}(u) = \inf\{K$ vérifiant 1.2.1 $\}$, il s'ensuit que $\pi_{p,q}(T) = \|\widehat{u}\|$

Remarque 1.2.1 *Si $p<q$. Alors l'unique opérateur (p,q)-sommant est nul.*

Preuve. En effet, supposons que $X \neq 0$. Comme $p<q$ alors il existe une suite $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q - l_p$ $\left(\text{on prend } (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{k^{\frac{\alpha}{q}}}\right)_{k=1}^{\infty}, \text{ avec } 1<\alpha<\frac{q}{p}\right)$. Soit $0 \neq x \in X$. Alors $(\lambda_k x)_{k=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$. En effet

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x^*, \lambda_k x\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|x\| < \infty.$$

Supposons qu' il existe $0 \neq u \in \Pi_{p,q}(X,Y)$. Alors par la proposition 1.2.1, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\begin{array}{lll} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \left(u\left(\lambda_k x\right)^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \right) & \leq & K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\langle x^*, \lambda_k x\rangle\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \\ \|ux\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \leq & K \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left|\langle x^*, x\rangle\right| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \\ \|ux\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \leq & K \|x\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{array} \quad (1.2.2)$$

On divise les membres de (1.2.2) par $\|x\|$ et passant le supremum lorsque $x \in B_X$ on trouve

$$\|u\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \text{ (contradiction!)}.$$

Donc $T = 0$. ■

Corollaire 1.2.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(X,Y)$. Alors $u \in \Pi_{p,1}(X,Y)$ si, et seulement si, $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in l_p(X)$ pour $(x_k)_{k=1}^{\infty}$est inconditionnelle sommable. En particulier u est absolument sommant si, et seulement si, u est $(1;1)-$sommant.*

Proposition 1.2.2 *On a $(\Pi_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(.))$ est un espace vectoriel normé.*

Preuve. Soient $u, v \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et $\lambda \in \Bbbk$. où il a été montré que $T + \lambda S$ que satisfait l'inégalité (1.2.1) pour tout $u, v \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et $\lambda \in \Bbbk$.

Par la proposition (1.2.1), on trouve

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle x^*, x_k\rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

et

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|v(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(v) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle x^*, x_k\rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, ..., x_n \in X$. Alors

$$\begin{array}{ll} & \left(\sum_{k=1}^{m} \|(u+\lambda v)\, x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq & \left(\sum_{k=1}^{m} \|u(x_k)\| + |\lambda| \|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq & \left(\sum_{k=1}^{m} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{m} \|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq & \pi_{p,q}(u) + |\lambda|\, \pi_{p,q}(v) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\langle x^*, x_k\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{array} \quad (1.2.3)$$

Donc $u + \lambda v \in \Pi_{p,q}(X,Y)$. Par conséquent, $\pi_{p,q}(.)$ est une norme sur $\Pi_{p,q}(X,Y)$.

En effet, soient $u, v \in \Pi_{p,q}(X,Y)$ et $\lambda \in \Bbbk$. Comme $k > 0$ d'après la proposition (1.2.1), ce qui donne $\pi_{p,q}(u) \geq 0$ pour tout $u \in \Pi_{p,q}(X,Y)$.

$$\pi_{p,q}(u) = 0 \iff \|\widehat{u}\| = 0 \iff \widehat{u} = 0 \iff u = 0.$$

Puis, de l'inégalité (1.2.3) (on prend $\lambda = 0$), il s'ensuit que

$$\pi_{p,q}(u+v) \leq \pi_{p,q}(u) + \pi_{p,q}(v).$$

Aussi, nous avons

$$\pi_{p,q}(\lambda v) = \left\|\widehat{\lambda v}\right\| = |\lambda| \|\widehat{v}\| = |\lambda| \pi_{p,q}(v).$$

Alors $\pi_{p,q}(.)$ est une norme, et nous concluons $(\Pi_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(.))$ est un espace vectoriel normé. ■

Remarque 1.2.2 *Si pour tout $u \in \Pi_p(X,Y)$, alors $\|u\| \leq \pi_p(u)$. Puisque on prend $n = 1$ dans l'inégalité (1.2.1) on trouve*

$$\begin{aligned} & \|u\| \\ = \; & \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| \\ \leq \; & \sup_{\|x\|\leq 1} \pi_{p,q}(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle| \\ = \; & \pi_{p,q}(u) \sup_{\|x\|\leq 1} \|x\| \\ \leq \; & \pi_{p,q}(u). \end{aligned}$$

1.3 Théorème de domination de Pietsch

On présente maintenant le théorème de domination concernant cette classe.

Théorème 1.3.1 *[1, Théorème 4.2.10] Soit K un espace compact de Hausdorff et $x^* \in C(K)^*$ une forme linéaire positive ($\langle x^*, u\rangle \geq 0$ si $u \geq 0$) tel que $\langle x^*, 1\rangle = 1$. Alors il existe un'unique mesure de probabilités μ sur $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$, obtenu en munissant la boule unité de X^* de la topologie $*$ -faible, telle que*

$$\langle x^*, u\rangle = \int_K u \; d\mu$$

pour chaque $u \in C(K)$.

Corollaire 1.3.1 *Soit $P(K)$ l'ensemble de toute les mesures de probabilités sur K, alors on définit l'application Φ par*

$$\begin{aligned} \Phi : P(K) &\rightarrow \quad \{x^* \in C(K)^* ; x^* \textit{est positive et } \langle x^*, 1\rangle = 1\} \\ \mu \rightarrow & \quad \Phi(\mu) : C(K) \rightarrow \mathbb{R} \\ & \quad \varphi \rightarrow \Phi(\mu)(\varphi) := \textstyle\int_K \varphi \, d\mu, \end{aligned}$$

est bijective, et en plus $\Phi(P(K)) \subset B_{C(K)^*}$.

Preuve. Par le Théorème (1.3.1), il s'ensuit que Φ est bijective. De plus, pour chaque $\mu \in P(K)$ nous avons

$$\|\Phi(\mu)\| = \sup_{\varphi \in B_{C(K)}} \left| \int_K \varphi d\mu \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{C(K)}} \int_K |\varphi| \, d\mu \leq 1.$$

■

Lemme 1.3.1 *Soient X, Y deux espaces de Banach, et $u : X \rightarrow Y$ un opérateur p-sommant et $M \subset X$ un sous ensemble finie. On définit pour chaque M,*

$$\psi_M \ : B_{X^*} \rightarrow \mathbb{R} \textit{ définit par } \psi_M(x^*) = \sum_{x \in M} \left(\|u(x)\|^p - |\pi_p(T)|^p |\langle x^*, x\rangle|^p\right) \ ,$$

$\mathcal{G} = \{\psi_M ; M \subset X$ finie$\}$ et $\mathcal{F}$ son enveloppe convexe. Alors pour chaque $\psi \in \mathcal{F}$, il existe $x^*_\psi \in B_{X^*}$ tel que $\psi\left(x^*_\psi\right) \leq 0$.

Lemme 1.3.2 *On considère l'ensemble P définit par*

$$P = \{f \in C(B_{X^*}) \ ; \ f(\varphi) > 0 \ \forall \varphi \in B_{X^*}\},$$

alors P est ouvert et convexe.

Théorème 1.3.2 (Théorème de domination de Pietsch) *Soit $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur linéaire et $1 < p < \infty$. L'opérateur u est un opérateur $p-$sommant, s'il existe une constante positive C et une mesure de probabilités de Borel $\mu \in B_{X^*}$ telle que pour $x \in X$ on ait*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.3.1}$$

Preuve. Supposons qu'il existe $C > 0$ et une mesure μ comme ci-dessus, telle que (1.3.1) est satisfaite. On prend $x_1, ..., x_n \in X$, nous avons

$$\|u(x_j)\|^p \leq C^p \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x_j \rangle|^p \, d\mu \right),$$

pour tout $j = 1, ..., k$, on a

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j=1}^k \|u(x_j)\|^p \\ \leq \; & C^p \textstyle\sum_{j=1}^k \int_{B_{X^*}} |\langle x^*, x_j \rangle|^p \, d\mu \\ = \; & C^p \textstyle\int_{B_{X^*}} \sum_{j=1}^k |\langle x^*, x_j \rangle|^p \, d\mu \\ \leq \; & C^p \textstyle\int_{B_{X^*}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^k |\langle x^*, x_j \rangle|^p \, d\mu \\ = \; & C^p \textstyle\sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^k |\langle x^*, x_j \rangle|^p \int_{B_{X^*}} d\mu \\ = \; & C^p \textstyle\sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{j=1}^k |\langle x^*, x_j \rangle|^p . \end{aligned}$$

D'ou la resultat.

Inversement, supposons que u est $p-$sommant. On peut être considère

$$\psi_M \; ; \; B_{X^*} \to \mathbb{R} \text{ définit par } \psi_M(x) := \sum_{x \in M_j} \left(\|u(x)\|^p - |\pi_p(u)|^p |\langle x^*, x \rangle|^p \right),$$

$\mathcal{G}$ est l'ensemble forme par ψ_M et $\mathcal{F}$ son enveloppe convexe, par les lemmes (1.3.1), (1.3.2), il s'ensuit que $\mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, et d'après le théorème de Hahn Banach (la première forme géométrique), on peut séparé l'ensemble du convexe et l'ensemble du ouvert convexe, telle qu'il existe une mesure de probabilités $\mu_0 \in C(B_{X^*})^*$ et $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$\mu_0(\Psi_M) \leq a < \mu_0(f),$$

pour chaque $\psi_M \in \mathcal{F}$ et pour tout $f \in P$.

(1)**. Le cas :** μ_0 est positive.

On remarque prendre $M = \{0\}$, nous devons $\psi_{\{0\}} = 0$ pour chaque $\varphi \in B_{X^*}$,

$$\psi_{\{0\}}(x^*) = \|u(0)\|^p - |\pi_p(0)|^p |\langle x^*, 0 \rangle|^p = 0.$$

Alors

$$0 \leq a < \mu_0(f),$$

pour chaque $f \in P$ (ou pour chaque $f \in C(B_{X^*})$ oú $f > 0$).

En général, pour chaque $h \in C(B_{X^*})$, avec $h > 0$ on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n(x^*) = h(x^*) + \frac{1}{n},$$

donc $\lim_{n\to\infty} h_n = h$, et comme μ_0 est continue, on obtient $\lim_{n\to\infty} \mu_0(h_n) = \mu_0(h) \geq 0$. Alors μ_0 est positive.

Maintenant, on définit μ ; $C(B_{X^*}) \to \mathbb{R}$ tel que $\mu(f) = \frac{1}{\mu_0(1)}\mu_0(f)$, pour chaque $f \in C(B_{X^*})$ alors μ est bien définit, car $\mu_0(1) > 0$ et μ_0 est bien définit et μ est positive avec $\mu(1) = 1$. Clairement.

Par le Théorème (1.3.1) et pour $\mu(1) = 1$, nous savons que μ est identifié avec une *mesure de probabilités de Borel* $\mu \in B_{X^*}$.

(2). **Le cas :** $a = 0$.

En effet, il a été montré $a \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la fonction f_n ; $C(B_{X^*}) \to \mathbb{R}$ définit par $f_n(x^*) = \frac{1}{n}$ avec $f_n \in P$. Puis, $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Et comme μ_0 est continue, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \mu_0(f_n) = \mu_0(f) = 0,$$

avec $a < \mu_0(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $a \leq 0$ et $a = 0$. D'autre part, pour chaque $x \in X$, on a

$$\begin{array}{rcl} \mu\left(\Psi_{\{x\}}\right) & = & \frac{\mu_0\left(\Psi_{\{x\}}\right)}{\mu_0(1)} \quad \leq \quad a \\ & = & 0, \end{array}$$

alors $\mu\left(\psi_{\{x\}}\right) \leq 0$. Donc

$$\begin{array}{rcl} \int_{B_{X^*}} \psi_{\{x\}}(x^*)\, d\mu & = & \int_{B_{X^*}} \left(\|ux\|^p - |\pi_p(u)|^p \left|\langle x^*, x\rangle\right|^p\right) d\mu(x^*) \\ & = & \|ux\|^p \int_{B_{X^*}} d\mu - \pi_p(u)^p \int_{B_{X^*}} \left|\langle x^*, x\rangle\right|^p d\mu \\ & \leq & 0, \end{array}$$

par conséquent

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{X^*}} \left|\langle x^*, x\rangle\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

En utilisant l'inclusion des espaces L_p,il suit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.2 *Soit* $u \in \mathcal{L}(X,Y)$ *et* $0 < p < q < \infty$, *alors* $\pi_p(X,Y) \subset \pi_q(X,Y)$ *et* $\forall u \in \pi_p(X,Y)$, $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$.

Chapitre 2

Version abstraite du théorème de domination de Pietsch

2.1 Théorème de domination de Pietsch unifié (TDPU)

Soient X, Y et E des ensembles (arbitraires) non vides, $\mathcal{F}$ une famille des applications de X dans Y, G un espace de Banach et K un espace topologique compact de Hausdorff. Soient

$$R\colon K \times E \times G \longrightarrow [0, \infty) \text{ et } S\colon \mathcal{F} \times V \times G \longrightarrow [0, \infty)$$

deux applications arbitraires.

Définition 2.1.1 *Soit $1 \leq p < \infty$. On dit qu'une application $f \in \mathcal{F}$ est $R - S-$abstract p-sommante s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} S(f, x_j, b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{t=1}^{n} R\left(\varphi, x_t, b_t\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1.1}$$

pour tout $x_1, \ldots, x_n \in E$, $b_1, \ldots, b_n \in G$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, l'infimum des constantes C est noté par $\pi_{RS,p}(f)$.

Remarque 2.1.1 *On peut être considéré les conditions suivantes sur la version unifiée du **TDP** ;*

1). Pour chaque $f \in \mathcal{F}$ il existe $x_0 \in E$ tel que

$$R(\varphi, x_0, b) = S(f, x_0, b) = 0 \ \forall b \in G \ .$$

2). Pour chaque $x_0 \in E$ et $b_0 \in G$, on a l'application

$$R_{x,b} \colon K \longrightarrow [0, \infty) \text{ définit par } R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b)$$

est continue.

3). Les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} R(\varphi, x, \eta b) &\leq \eta R(\varphi, x, b) \text{ pour chaque } \varphi \in K, \ x \in E, b \in G \text{ et } 0 \leq \eta \leq 1, \\ S(f, x, \eta b) &\geq \eta S(f, x, b) \text{ pour chaque } f \in \mathcal{F}, \ x \in E, b \in G \text{ et } 0 \leq \eta \leq 1. \end{aligned}$$

On peut donner le théorème unifié de domination de pietsch introduit par Pelgrino et all dans [11] comme suit.

Théorème 2.1.1 (TDPU) *[11] Soient R, S sont des applications satisfaites* (1), (2) *et* (3) *et pour $0 < p < \infty$, alors $f \in \mathcal{F}$ est $R - S-$abstract p-sommante si, et seulement s'il existe une constante $C > 0$ et une mesure de probabilités de Borel μ sur K telle que*

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1.2}$$

pour tout $x \in E$ et $b \in G$. La plus petite constante C qui vérifie l'inégalité 2.1.2 est notée par $\pi_{RS,p}(f)$.

Preuve. On suppose qu'il existe une telle mesure μ. Alors on donne $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $b_1, \ldots, b_n \in G$, on a

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^m S(f, x_j, b_j)^p &\leq C^p \textstyle\sum_{j=1}^m \int_K R(\varphi, x_j, b_j)^p d\mu \\ &= C^p \textstyle\int_K \sum_{j=1}^m R(\varphi, x_j, b_j)^p d\mu \\ &\leq C^p \sup_{\varphi \in K} \textstyle\sum_{j=1}^m R(\varphi, x_j, b_j)^p. \end{aligned}$$

Donc f est $R - S-$abstract p-sommante avec $\pi_{RS,p}(f) \leq C$.

Inversement, On suppose que l'application $f : E \to F$ est $R - S-$abstract p-sommante. Considérons l'espace de Banach $C(K)$ des fonctions continues à valeur réelle sur K. Pour chaque ensemble fini $M = \{(x_1, b_1), ... (x_k, b_k)\} \subset E \times G$, soit

$$\psi_M : K \to \mathbb{R} \text{ définit par } \psi_M(\varphi) = \sum_{(x,b) \in M} \left(S(f, x, b)^p - \pi_{RS,p}(f)^p R(\varphi, x, b)^p \right).$$

Il est commode de considèrer M comme une suite finie engendrè par d'éléments $E \times G$ plutôt qu'un ensemble fini. Le fait, les fonctions

$$R_{x,b} : K \to [0, \infty)\,, \text{définit par } R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b),$$

sont continues, alors $\psi_M \in C(K)$.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions ψ_M et $\mathcal{F}$ son enveloppe convexe. On montre que pour chaque $\Psi \in \mathcal{F}$, il existe $\varphi_\psi \in K$ tel que $\psi\left(\varphi_\psi\right) \leq 0$. On prend $\psi \in \mathcal{F}$, il existe $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ avec $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ et $\psi_{M_1}, ..., \psi_{M_k} \in \mathcal{G}$ tel que $\psi = \sum_{j=1}^k \lambda_j \psi_{M_j}$.

On définit

$$M_\psi = \cup_{j=1}^k \left\{ \left(x, \lambda_j^{\frac{1}{p}} b \right) : \ (x,b) \in M_j \right\},$$

et on choisit $\varphi_\psi \in K$ telle que

$$\sup_{\varphi \in K} \sum_{(x,b)\in M_\psi} R(\varphi, x, b)^p = \sum_{(x,b)\in M_\psi} R(\varphi_\psi, x, b)^p.$$

On remarque qu'il existe φ_ψ car K est compact et $R_{x,b}$ est continue. Alors

$$\begin{aligned}
\psi\left(\varphi_\psi\right) &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \psi_{M_j}\left(\varphi_\psi\right) \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{(x,b)\in M_j} \left(S(f,x,b)^p - \pi_{RS,p}(f)^p R(\varphi_\psi, x, b)^p\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^k \sum_{(x,b)\in M_j} \left(S(f,x,\lambda_j^{\frac{1}{p}} b)^p - \pi_{RS,p}(f)^p R(\varphi_\psi, x, \lambda_j^{\frac{1}{p}} b)^p\right) \\
&= \sum_{(x,b)\in M_\psi} \left(S(f,x,w)^p - \pi_{RS,p}(f)^p R(\varphi_\psi, x, w)^p\right) \\
&= \psi_{M_\psi(\varphi_\psi)}.
\end{aligned}$$

Nous avons considérè des suites finies au lieu des ensemble finis précisément pour que l'inégalitè (2.1) est vraie. En utilisant (2.1.1) on obtient $\psi_{M_\psi(\varphi_\psi)} \leq 0$. Donc

$$\psi_{(\varphi_\psi)} \leq 0. \tag{2.1.3}$$

Soit

$$\mathcal{P} = \{ f \in C(K) \ ; \ f(\varphi) > 0 \text{ pour tout } \varphi \in K \}.$$

Il est clair que $\mathcal{P}$ est non vide (chaque application constante positive appartiennemt à $\mathcal{P}$), ouvert et convexe. De la définition de $\mathcal{P}$ et (2.1.3) il s'ensuit que $\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Donc d'aprés le théorème de Hahn-Banach (la premième forme geométrique), il existe $\mu_1 \in C(K)^*$ et $L > 0$ telle que

$$\mu_1(g) \leq L < \mu_1(h), \tag{2.1.4}$$

pour tout $g \in \mathcal{F}$ et $h \in \mathcal{P}$.

Si $x_0 \in E$ tel que $R(\varphi, x_0, b) = S(f, x_0, b) = 0$ pour tout $\varphi \in K$ et $b \in G$, alors

$$0 = S(f, x_0, b)^p - \pi_{RS,p}(f)^p R(\varphi_\psi, x_0, b)^p = \psi_{\{x,b\}} \in \mathcal{F}.$$

Donc $0 = \mu_1(0) \leq L$. Comme les fonctions de constantes $\frac{1}{k}$ appartiennemt à $\mathcal{P}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ il résulte de (2.1.4) que $0 \leq L < \mu_1\left(\frac{1}{k}\right)$. Faire $k \to \infty$ on obtient $L = 0$. Par (2.1.4) on trouve

$$,\mu_1(g) \leq 0 < \mu_1(h), \tag{2.1.5}$$

pour tout $g \in \mathcal{F}$ et $h \in \mathcal{P}$.

En utilisant la continuité de μ_1, on conclut que $\mu_1(h) \geq 0$ pour $h \geq 0$, alors on peut considèrer μ_1 est une mesure de Borel régulière positive sur K.

On pose

$$\mu = \frac{1}{\mu_1(K)} \mu_1,$$

il est clair que μ est une mesure régulière de probabilités sur K et par (2.1.5), on obtient

$$\int_K g(\varphi)\, d\mu(\varphi) \leq 0.$$

Pour chaque $g \in \mathcal{F}$. En particulier, pour tous x, b nous avons $\psi_{\{x,b\}} \in \mathcal{F}$, et

$$\int_K \psi_{\{x,b\}}(\varphi)\, d\mu(\varphi) \leq 0.$$

Alors

$$\int_K \left(S(f, x, b)^p - \pi_{(RS),p}(f)^p R(\varphi_\psi, x, b)^p\right) d\mu(\varphi) \leq 0.$$

D'où

$$S(f, x, b)^p \leq \pi_{(RS),p}(f)^p \int_K R(\varphi_\psi, x, b)^p d\mu(\varphi).$$

Ce qui termine la preuve. ■

2.2 Théorème de domination de Pietsch généralisé (TDPG)

Dans cette section nous allons donner une version générale de **TDP** qui récupère tous les théorèmes du type de domination de Pietsch, incluant **TDPU**. Puis la version améliore le **TDPU** en réduisant une de leurs hypothèses.

Soient $X_1, ..., X_n, Y$ et $E_1, ..., E_m$ (arbitraires) des ensembles non vides, $\mathcal{F}$ une famille des applications arbitraires de $X_1 \times ... \times X_n$ dans Y, $G_1, ..., G_l$ des espaces de Banach et $K_1, ..., K_l$ des espaces toplogiques compacts de Hausdorff. Soient

$$R_j \colon K_j \times E_1 \times ... \times E_m \times G_j \longrightarrow [0, +\infty)$$

et

$$S \colon \mathcal{F} \times E_1 \times ... \times E_m \times G_1 \times ... \times G_l \longrightarrow [0, +\infty)$$

deux applications arbitraires.

Définition 2.2.1 *[12] Soient $0 < p_1, ..., p_l < \infty$ tel que $\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{P_j} = \frac{1}{P}$. On dit que $f \in \mathcal{F}$ est $(R_1, ..., R_l - S)-$abstract p-sommante s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left(\sum_{t=1}^{k} S(f, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(m)}, b_t^{(1)}, ..., b_t^{(l)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \Pi_{j=1}^{l} \sup_{\varphi \in k_j} \left(\sum_{t=1}^{k} R_j(\varphi, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(m)}, b_t^{(j)})^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}.$$

Pour tout $x_1^{(i)}, ..., x_k^{(i)} \in E_i, b_1^{(j)}, ..., b_k^{(j)} \in G_j$ avec $\{i, j\} \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., l\}$.

*On peut être considéré un exemple de **TDPU** par les conditions suivantes sur les applications R_j et S.*

i). Pour chaque $x^{(i)} \in E_i, b^{(j)} \in G_j$ avec $\{i, j\} \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., l\}$, on a l'application

$$R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b^{(j)}} \colon K_j \longrightarrow [0, +\infty) \text{ définit par } R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m}, b^{(j)}}(\varphi) = R_j(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(j)}),$$

est continue.

ii). Les inégalités suivantes sont satifaites

$$\begin{array}{lcl} R_j(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, \eta b^{(j)}) & \leq & \eta R_j(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(j)}) \\ S(f, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, \alpha_1 b^{(1)}, ..., \alpha_l b^{(l)}) & \geq & \Pi_{j=1}^{l} \alpha_j S(f, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(1)}, ..., b^{(l)}), \end{array}$$

pour tout $x^{(i)} \in E_i, b^{(j)} \in G_j, \varphi \in K_j$ avec $0 \leq \eta, \alpha_1, ..., \alpha_l \leq 1$ et $\{i, j\} \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., l\}$.

2.3 Inclusion Principale

Théorème 2.3.1 *[12] Si*

$$p_j \leq q_j \text{ pour } j = 1, 2,$$
$$1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty,$$
$$1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty,$$
$$\tfrac{1}{p_1} - \tfrac{1}{q_1} \leq \tfrac{1}{p_2} - \tfrac{1}{q_2}.$$

Alors

$$RS_{((q_1,1),p_1)} \subset RS_{((q_2,\alpha),p_2)}$$

pour

$$\alpha = \frac{q_2 p_1}{q_1 p_2} \text{ si } p_1 < p_2.$$

Preuve. Soit $f \in RS_{((q_1,1),p_1)}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{v \in V} \sum_{j=1}^{m} S(f, z_j, v)^{q_1} \leq \sup_{w \in W} \sum_{j=1}^{m} R_j(z_j, w)^{p_1}, \tag{2.3.1}$$

pour tout $z_1, ..., z_j \in Z$ et $m \in \mathbb{N}$. Si chaque $\eta_1, ..., \eta_m$ est un nombre entier positive, on peut considère chaque z_j est répété η_j en (2.3.1), on trouve

$$\sup_{v \in V} \sum_{j=1}^{m} \eta_j S(f, z_j, v)^{q_1} \leq \sup_{w \in W} \sum_{j=1}^{m} \eta_j R_j(z_j, w)^{p_1}, \tag{2.3.2}$$

pour tout $z_1, ..., z_j \in Z$ et $m \in \mathbb{N}$. Maintenat, en utilisant un argument de Mendel et Schecht-man (qui il est été utilisé récemment dans différents contextes) on peut coclure que l'inégalite (2.3.2) a des nombres réels positifs η_J.

Puisque $p_1 < p_2$ nous avons $q_1 < q_2$. On définit p, q comme suit

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \text{ et } \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}.$$

Donc nous avons $1 \leq q < p < \infty$, on a $m \in \mathbb{N}$ et $z_1, ..., z_j \in Z$ sont fixé. pour tout $j = 1, ..., m$, on considère λ_j est définit par

$$\begin{aligned} \lambda_j \quad &: \quad V \to [0, \infty), \\ \lambda_j(V) \quad &= \quad S(f, z_j, v)^{\frac{q_2}{q}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \lambda_j\,(V)^{q_1}\, S\,(f,z_j,v)^{\frac{q_2}{q}} \\ = \;& S\,(f,z_j,v)^{\frac{q_1 q_2}{q}}\, S\,(f,z_j,v)^{q_1} \\ = \;& S\,(f,z_j,v)^{q_2}\,. \end{aligned}$$

Rappelant que (2.3.2) est valable pour les nombres réels positifs arbitraires η_j on obtient pour $\eta_j = \lambda_j\,(V)^{q_1}$,

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j=1}^m S(f,z_j,v)^{q_2} \\ = \;& \textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\,(V)^{q_1}\, S\,(f,z_j,v)^{q_1} \\ \leq \;& C \sup_{w\in W} \textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\,(V)^{q_1}\, R_j(z_j,w)^{p_1}, \end{aligned}$$

pour tout $v \in V$. Deplus, pour $p, p_2 > p_1$ et $\frac{1}{\left(\frac{p}{p_1}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$, par l'inégalité de Hôlder on obtient

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j=1}^m S(f,z_j,v)^{q_2} \\ \leq \;& C \sup_{w\in W} \textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\,(V)^{q_1}\, R_j(z_j,w)^{p_1} \\ \leq \;& C \sup_{w\in W} \left[\left(\textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\,(V)^{\frac{q_1 p}{p_1}} \right)^{\frac{p_1}{p}} \left(\textstyle\sum_{j=1}^m R_j(z_j,w)^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right] \\ = \;& C \left(\textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\,(V)^{\frac{q_1 p}{p_1}} \right)^{\frac{p_1}{p}} \sup_{w\in W} \left(\textstyle\sum_{j=1}^m R_j(z_j,w)^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}}, \end{aligned}$$

pour tout $v \in V$. pour $\frac{q_1 p}{p_1} \geq p \geq q$ on obtient $\|.\|_{l_{\frac{q_1 p}{p_1}}} \leq \|.\|_{l_q}$ et alors

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j=1}^m S(f,z_j,v)^{q_2} \\ \leq \;& C \left(\textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\,(V)^{q} \right)^{\frac{q_1}{q}} \sup_{w\in W} \left(\textstyle\sum_{j=1}^m R_j(z_j,w)^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \\ = \;& C \left(\textstyle\sum_{j=1}^m S(f,z_j,v)^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q}} \sup_{w\in W} \left(\textstyle\sum_{j=1}^m R_j(z_j,w)^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}}, \end{aligned}$$

pout tout $v \in V$ donc nous avons

$$\left(\sum_{j=1}^m S(f,z_j,v)^{q_2} \right)^{1-\frac{q_1}{q}} \leq C \sup_{w\in W} \left(\sum_{j=1}^m R_j(z_j,w)^{p_2} \right)^{\frac{p_1}{p_2}},$$

pout tout $v \in V$, et finalement on conclut

$$\left(\sup_{w\in W} \sum_{j=1}^m S(f,z_j,v)^{q_2} \right)^{\frac{q_1 p_2}{q_2 p_1}} \leq C^{\frac{p_2}{p_1}} \sup_{w\in W} \left(\sum_{j=1}^m R_j(z_j,w)^{p_2} \right)^{p_2}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Avant d'introduire le théorème de domination de Pietsch généralisé de [11] nous avons besoin les lemmes suivants pour le prouver.

Lemme 2.3.1 (Ky Fan) *Soient X un espace vectoriel topologique séparé, W une partie convexe compacte de X. Soit $\mathcal{H}$ un ensemble des fonctions définies sur W à valeurs dans $(-\infty, \infty]$ vérifiant les propriétés suivantes.*

(a) Tout $\Psi \in \mathcal{H}$ est convexe et semicontinue infériermént.

(b) Si $\Psi \in conv(\mathcal{H})$,il existe $\varphi_\psi \in W$ telle que $\psi\left(\varphi_\psi\right) \leq \varrho, \forall \varphi \in \mathcal{H}$

(c) S'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi(\varphi) \leq r$.

Alors il existe $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\psi(\varphi_0) \leq \varrho$ pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$.

Lemme 2.3.2 *[7, P.40] Soient $0 < p_1, ..., p_l < \infty$ tel que $\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{P_j} = \frac{1}{P}$, alors*

$$\frac{1}{p}\Pi_{j=1}^{l} q_j^p \leq \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{P_j} q_j^{p_j}$$

pour tout $q_1, ..., q_l \geq 0$, $j = 1, ..., l$.

Théorème 2.3.2 (TDPG) *Soient $R_1, ..., R_l, S$ sont satisfaites (i) et (ii) de la définition (2.2.1). Une application $f \in \mathcal{F}$ est $(R_1, ..., R_l - S)-$abstract $(p_1, ..., p_l)-$sommante si, et seulement s'il existe une constante $C > 0$ et des mesures de probabilités de Borel μ_j sur K_j pour $j = 1, ..., l$, telles que*

$$S(f, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(1)}, ..., b^{(l)}) \leq C\Pi_{j=1}^{l}\left(\int_{K_j} R_j(\varphi, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(j)})^{p_j} d\mu_j(\varphi)\right)^{\frac{1}{p_j}}, \quad (2.3.3)$$

pour tout $x^{(i)} \in E_i, b^{(j)} \in G_j$ avec $\{i, j\} \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., l\}$.

Preuve. Premièrement on commence par montrer la réciproque. Soient $x_1^{(i)}, ..., x_k^{(i)} \in E_i, b_1^{(j)}, ..., b_k^{(j)} \in G_j$ avec $\{i, j\} \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., l\}$. Par l'hypothèse, on a

$$\begin{array}{rcl} & & \sum_{t=1}^{k} S(f, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(m)}, b_t^{(1)}, ..., b_t^{(l)})^p \qquad (2.3.4) \\ & \leq & C^p \sum_{t=1}^{k} \Pi_{j=1}^{l}\left(\int_{K_j} R_j(\varphi, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(m)}, b_t^{(j)})^{p_j} d\mu_j\right)^{\frac{p}{p_j}} \\ (*) & \leq & C^p\Pi_{j=1}^{l}\left(\sum_{t=1}^{k}\int_{K_j} R_j(\varphi, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(m)}, b_t^{(j)})^{p_j} d\mu_j\right)^{\frac{p}{p_j}} \\ & = & C^p\Pi_{j=1}^{l}\left(\int_{K_j}\sum_{t=1}^{k} R_j(\varphi, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(m)}, b_t^{(j)})^{p_j} d\mu_j\right)^{\frac{p}{p_j}} \\ & \leq & C^p\Pi_{j=1}^{l}\left(\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^{k} R_j(\varphi, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(m)}, b_t^{(j)})^{p_j}\int_{K_j} d\mu_j\right)^{\frac{p}{p_j}} \\ & = & C^p\Pi_{j=1}^{l}\left(\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^{k} R_j(\varphi, x_t^{(1)}, ..., x_t^{(m)}, b_t^{(j)})^{p_j}\right)^{\frac{p}{p_j}}, \end{array}$$

où (*) est vérifie dans l'inégalite (2.3.4) grâce à l'inégalité de Hölder. Donc f est $(R_1,...,R_l - S)-$abstract $(p_1,...,p_l)-$sommante.

Maintenant, supposons que f est $(R_1,...,R_l - S)-$abstract $(p_1,...,p_l)-$sommante. Soit $\mathcal{P}(K_j)$ un ensemble des mesures de probabilités de Borel sur K_j, pour tout $j = 1,...l$. Nous avons $\mathcal{P}(K_j)$ est considéré comme un sous ensemble compact de $B_{C(K_j)^*}$ pour tout $j = 1,...l$ (voir [15, Théorème 2.3.4]).

Pour $k \in \mathbb{N}$, $x_1^{(i)},...,x_k^{(i)} \in E_i$ et $b_1^{(j)},...,b_k^{(j)} \in G_j$ avec $\{i,j\} \in \{1,...,m\} \times \{1,...,l\}$, on définit

$$\psi = \psi_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^k, \left(b_t^{(j)}\right)_{t=1}^k ; \{i,j\} \in \{1,...,m\} \times \{1,...,l\}} P(K_1) \times ... \times P(K_l) \to \mathbb{R},$$

telles que

$$\begin{aligned} \psi\left(\left(\mu_j\right)_{j=1}^l\right) \quad = \quad & \textstyle\sum_{t=1}^k \Big(\frac{1}{P} S(f, x_t^{(1)},...,x_t^{(m)}, b_t^{(1)},...,b_t^{(l)})^p \\ & -C^p \textstyle\sum_{j=1}^l \frac{1}{P_j} \int_{K_j} R(\varphi, x_t^{(1)},...,x_t^{(m)}, b_t^{(j)})^{p_j} d\mu_j \Big). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{H}$ la famille formée par toutes les applications ψ. par simplifier, on notera

$$S_{\left(x_{t_r}^{(i)}\right)_{t=1}^m, \left(b_{t_r}^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f) := S(f, x_{t_r}^{(1)},...,x_{t_r}^{(m)}, b_{t_r}^{(1)},...,b_{t_r}^{(l)}),$$

et

$$R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^l, b^{(j)}}(\varphi) := R_j(\varphi, x^{(1)},...,x^{(m)}, b^{(j)}).$$

Par le Théorème (1.3.1), ce qui donne chaque μ_j est identifié comme $x_j^* \in C(K_j)^*$ une forme linéaire continue. Où

$$\int_{K_j} R_{j,t}^{p_j} d\mu_j = \left\langle x_j^*, R_{j,t}^{p_j} \right\rangle,$$

pour tout $t = 1,...k$ et $j = 1,...l$. Alors chaque partie de la définition de Ψ est continue, par conséquent ψ est continue. D'autre part, chaque $\psi \in \mathcal{H}$ est convexe. En effet, pour $\lambda \in [0,1]$ et $\left(\mu_j\right)_{j=1}^l, \left(\rho_j\right)_{j=1}^l \in P(K_1) \times ... \times P(K_l)$, on pose $\left(\mathcal{V}_j\right)_{j=1}^l = \lambda\left(\left(\mu_j\right)_{j=1}^l\right) + (1-\lambda)\left(\rho_j\right)_{j=1}^l$.

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
&\psi\left(\left(\mathcal{V}_j\right)_{j=1}^l\right)\\
= \;& \textstyle\sum_{t=1}^k \left[\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p - C^p \sum_{j=1}^l \frac{1}{P_j}\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^l,b^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\left(\mathcal{V}_j\right)\right]\\
= \;& \textstyle\sum_{t=1}^k \left(\frac{\lambda}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p + \frac{1-\lambda}{p}\left[S_{\left(x_{t_r}^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_{t_r}^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p\right.\\
&\textstyle\left. -C^p\sum_{j=1}^l \frac{1}{P_j}\left(\lambda\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^l,b^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\mu_j + (1-\lambda)\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^l,b^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\rho_j\right)\right)\\
= \;& \textstyle\sum_{t=1}^k \left(\frac{\lambda}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p + \frac{1-\lambda}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p\right.\\
&\textstyle\left. - C^p\sum_{j=1}^l \frac{1}{P_j}\lambda\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\mu_j + (1-\lambda)\sum_{j=1}^l\frac{1}{P_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\rho_j\right)\\
= \;& \textstyle\lambda\sum_{t=1}^k\left(\frac{\lambda}{p}\left[S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^k}(f)\right]^p - C^p\sum_{j=1}^l\frac{1}{P_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\mu_j\right.\\
&\textstyle\left. + (1-\lambda)\sum_{t=1}^k\left[\frac{1}{p}S_t^p - C^p\sum_{j=1}^l\frac{1}{P_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^l,b_t^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\rho_j\right]\right)\\
= \;& \lambda\psi\left(\left(\mu_j\right)_{j=1}^l\right) + (1-\lambda)\,\psi\left(\left(\rho_j\right)_{j=1}^l\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, il a montré que $\mathcal{H}$ est concave. Pour cela, on donne les applications $\psi_1, ..., \psi_s \in \mathcal{H}$ et $0 \leq \lambda_1, ..., \lambda_s \leq 1$ telles que $\sum_{r=1}^s \lambda_r = 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{r=1}^s \lambda_r\psi_s\left(\left(\mu_j\right)_{j=1}^l\right)\\
= \;& \textstyle\sum_{r=1}^s\lambda_r\sum_{t_r=1}^{k_r}\left[\frac{1}{p}\left[S_{\left(x_{t_r}^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_{t_r}^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p - C^p\sum_{j=1}^l\frac{1}{P_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{j=1}^l,b_{t_r}^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\mu_j\right]\\
\leq \;& \textstyle\sum_{r=1}^s\sum_{t_r=1}^{k_r}\left[\frac{1}{p}\left[S_{\left(x_{t_r}^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(\lambda_r^{\frac{1}{p}}b_{t_r}^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right]^p - C^p\sum_{j=1}^l\frac{1}{P_j}\int_{K_j}\left[R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{j=1}^l,\lambda_r^{\frac{1}{p_j}}b_{t_r}^{(j)}}(\varphi)\right]^{p_j} d\mu_j\right]\\
= \;& \psi_0\left(\left(\mu_j\right)_{j=1}^l\right),
\end{aligned}$$

qui une somme finie de la même façon que la définition de ψ. Alors $\psi_0 \in \mathcal{H}$ et par conséquent, $\mathcal{F}$ est concave. Avec chaque K_j est compact et $R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^l,b^{(j)}}$ est continue, il existe $\varphi_j \in K_j$ telle que

$$\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^k\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} = \sum_{t=1}^k\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi_j)\right)^{p_j}.$$

On donne $\Psi \in \mathcal{F}$, on prend $\mu_j^{\Psi} = \delta_{\varphi_j}$ est la mesure de Dirac sur K_j par rapport à φ_j, pour tout $j = 1, ...l$. On trouve

$$\begin{aligned}
&\psi\left(\left(\mu_j^{\Psi}\right)_{j=1}^{l}\right)\\
=\ & \textstyle\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} - C^p \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{P_j}\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\mu_j^{\Psi}\right]\\
=\ & \textstyle\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} - C^p \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{P_j}\int_{K_j}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\mu_j^{\Psi}\\
=\ & \textstyle\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} - C^p \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{P_j}\int_{\left\{\varphi_j\right\}}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\mu_j^{\Psi}\\
=\ & \textstyle\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} - C^p \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{P_j}\left[\left(\int_{\left\{\varphi_j\right\}}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\mu_j^{\Psi}\right)^{\frac{1}{p_j}}\right]^{p_j}\\
=\ & \textstyle\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} - C^p \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{P_j}\left[\left(\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}\left(\varphi_j\right)\right)^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}\right]^{p_j}\\
=\ & \textstyle\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} - C^p \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{P_j}\left[\left(\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}\right]^{p_j}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme (2.3.2) avec

$$q_j = \left(\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\psi\left(\left(\mu_j^{\Psi}\right)_{j=1}^{l}\right)\\
\leq\ & \textstyle\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} - \frac{C^p}{p}\Pi_{j=1}^{l}\left[\left(\sup_{\varphi\in K_j}\sum_{t=1}^{k}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}\right]^{p}\\
\leq\ & 0,
\end{aligned}$$

car f est $(R_1, ..., R_l - S)-$abstract $(p_1, ..., p_l)-$sommante.

Par le lemme de Ky Fan (2.3.1), il existe $\left(\widehat{\mu_j}\right)_{j=1}^{l} \in P(K_1) \times ... \times P(K_l)$ telle que $\psi\left(\left(\widehat{\mu_j}\right)_{j=1}^{l}\right) \leq 0$ pour chaque $\Psi \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_1^{(i)}, ..., x_k^{(i)} \in E_i$ et $b_1^{(j)}, ..., b_k^{(j)} \in G_j$ avec $\{i, j\} \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., l\}$, on a

$$\sum_{t=1}^{k}\left[\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} - C^p\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{p_j}\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\widehat{\mu_j}\right] \leq 0, \quad (2.3.5)$$

en particulier, on prend $k=1$ il s'ensuit que

$$\frac{1}{p}\left(S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p \leq C^p \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{p_j}\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j} d\widehat{\mu_j}\,. \tag{2.3.6}$$

On donne $x^{(i)}\in E_i$, $b^{(j)}\in G_j$ avec $\{i,j\}\in\{1,...,m\}\times\{1,...,l\}$, on définit

$$\tau_j=\left(\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x_t^{(i)}\right)_{i=1}^m,b_t^{(j)}}(\varphi))^{p_j}\right)d\widehat{\mu_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}.$$

Soit

$$I=\{j\in\{1,...,t\}\ ;\tau_j\neq 0\ \}\,.$$

Si $I=\emptyset$, par (2.3.6) on trouve

$$S_{\left(x_t^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(b_t^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)=0,$$

et l'inégalité(2.3.4) est évidente. Autrement, pour chaque $j\in I$, soit $\epsilon_j>0$ assez grand de tel sort que

$$0<\left(\tau_j\epsilon_j^{\frac{1}{pp_j}}\right)^{-1}<1.$$

On pose $\epsilon=\max_{j\in\{1,...,l\}}\epsilon_j$. Donc

$$0<\left(\tau_j\epsilon^{\frac{1}{pp_j}}\right)^{-1}<1,$$

pour tout $j\in I$. On définit

$$\theta_j=\begin{cases}\left(\tau_j\epsilon^{\frac{1}{pp_j}}\right)^{-1} & \text{si} \quad j\in I,\\ 1 & si \quad j\notin I.\end{cases}$$

Alors $\theta_j\in[0,1]$ pour tout $j=1,...,l$. Par (2.3.6) et (2.3) on obtient

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{p}\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^m,\left(\theta_j b^{(j)}\right)_{j=1}^l}(f)\right)^p \\ \leq\ & C^p\textstyle\sum_{j=1}^l \frac{1}{P_j}\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^m,\theta_j b^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}d\widehat{\mu_j} \\ \leq\ & C^p\textstyle\sum_{j=1}^l \frac{\theta_j^{p_j}}{p_j}\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^m,b^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}d\widehat{\mu_j} \\ =\ & C^p\left(\textstyle\sum_{j\in I}\frac{\theta_j^{p_j}}{p_j}\tau_j^{p_j}+\sum_{j\notin I}\frac{\theta_j^{p_j}}{p_j}\tau_j^{p_j}\right) \\ \leq\ & C^p\textstyle\sum_{j\in I}\frac{1}{p_j}\left(\tau_j\epsilon^{\frac{1}{pp_j}}\right)^{-p_j}\tau_j^{p_j} \\ =\ & C^p\epsilon^{\frac{1}{p}}\textstyle\sum_{j\in I}\frac{1}{p_j}\leq\frac{1}{p}C^p\epsilon^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Par conséquent
$$\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p}\Pi_{j=1}^{l}\theta_j \leq C^p\epsilon^{-\frac{1}{p}}. \tag{2.3.8}$$
D'où
$$\begin{aligned}&\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} \\ \leq\ & C^p\epsilon^{-\frac{1}{p}}\left(\Pi_{j=1}^{l}\theta_j\right)^{-1} \\ \leq\ & C^p\epsilon^{-\frac{1}{p}}\Pi_{j\in I}\left(\tau_j\epsilon^{\frac{1}{pp_j}}\right)^{p} \\ =\ & C^p\epsilon^{-\frac{1}{p}}\Pi_{j\in I}\,\tau_j^p\epsilon^{\frac{1}{p_j}} \\ =\ & C^p\epsilon^{\left(\sum_{j\in I}\frac{1}{P_j}-\frac{1}{p}\right)}\Pi_{j\in I}\,\tau_j^p.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Si $I \subsetneqq \{1,...,l\}$, alors $\sum_{j\in I}\left(\frac{1}{P_j}-\frac{1}{p}\right) < 0$. Par conséquent, en prenant la limite quand $\epsilon \to +\infty$ dans (2.3.9) nous avons
$$S_{\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f) = 0,$$
et nous obtenons l'inégalité (2.3.4).

Si $I = \{1,...,l\}$, alors (2.3.9) est pris la forme
$$\begin{aligned}&\left(S_{\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f)\right)^{p} \\ \leq\ & C\Pi_{j=1}^{l}\,\tau_j^p.\end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned}&S_{\left(x^{(i)}\right)_{t=1}^{m},\left(b^{(j)}\right)_{j=1}^{l}}(f) \\ \leq\ & C\left(\Pi_{j=1}^{l}\,\tau_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ =\ & C\Pi_{j=1}^{l}\left(\int_{K_j}\left(R_{j,\left(x^{(i)}\right)_{i=1}^{m},b^{(j)}}(\varphi)\right)^{p_j}d\widehat{\mu_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}\end{aligned}$$
Ce qui termine la preuve. ∎

2.4 Amélioration du théorème de domination de Pietsch unifié

En utilisant **TDPG**, et nous allons la version améliore le **TDPU** qui ne nécessite pas la première 'hypothèse de la Remarque (2.1.1).

Théorème 2.4.1 (TDPU) *Soient R, S sont satisfaites* (2) *et* (3) *et* $0 < p < \infty$. *Alors une application $f \in \mathcal{F}$ est $R-S-$abstract $p-$sommante si, et seulement s'il existe une constante $C > 0$ et une mesure de probabilités de Borel μ sur K, telle que*

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $x \in E$, $b \in G$.

Preuve. On prend $m = n = 1$, dans le théorème (2.3.2). ■

Maintenant, nous pouvons démontrer que la version unifiée de **TDP** à l'aide du lemme suivant et en demandant seulement une hypothèse sur l'application R et en permettant à S d'être arbitraire.

Lemme 2.4.1 *Soit $f : X \to Y$ une application est $R - S-$abstract $p-$sommante si, et seulement s'il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.4.1}$$

pour tout $x_1, ..., x_n \in E, b_1, ..., b_n \in G$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^+$.

Preuve. La réciproque est claire, on prend $\lambda_1, ..., \lambda_n = 1$. D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in E$ et $b_1, ..., b_n \in G$, on suppose que $\lambda_j \in \mathbb{N}$ pour tout $j = 1, ..., n$. Alors par l'hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p \\
= \; & \underbrace{S(f, x_1, b_1)^p + ... + S(f, x_1, b_1)^p}_{\lambda_1} + ... + \underbrace{S(f, x_n, b_n)^p + ... + S(f, x_n, b_n)^p}_{\lambda_n} \\
\leq \; & \underbrace{C^p \sup_{\varphi \in K} R(\varphi, x_1, b_1)^p + ... + C^p \sup_{\varphi \in K} R(\varphi, x_1, b_1)^p}_{\lambda_1} + ... + \\
& + \underbrace{C^p \sup_{\varphi \in K} R(\varphi, x_n, b_n)^p + ... + C^p \sup_{\varphi \in K} R(\varphi, x_n, b_n)^p}_{\lambda_n} \\
= \; & C^p \textstyle\sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p.
\end{aligned}$$

Donc l'inégalité (2.4.1) est valable pour $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}$.

On pose $\lambda_j = \frac{r_j}{s_j} \in \mathbb{Q}^+$ pout tout $j = 1, ..., n$. On a

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{s_j} S(f, x_j, b_j)^p &= \frac{\Pi_{i=1}^{n} s_i}{\Pi_{i=1}^{n} s_i} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{s_j} S(f, x_j, b_j)^p \\ &= \frac{1}{\Pi_{i=1}^{n} s_i} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \left(r_j \Pi_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} s_i \right) S(f, x_j, b_j)^p. \end{aligned}$$

Et par la première partie de la démonstration, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{s_j} S(f, x_j, b_j)^p &\leq C \frac{1}{\Pi_{i=1}^{n} s_i} \sup_{\varphi \in K} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \left(r_j \Pi_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} s_i \right) R(\varphi, x_j, b_j)^p \\ &\leq C \sup_{\varphi \in K} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{r_j \Pi_{i=1, i \neq j}^{n} s_i}{\Pi_{i=1}^{n} s_i} \right) R(\varphi, x_j, b_j)^p \\ &= C \sup_{\varphi \in K} \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j}{s_j} R(\varphi, x_j, b_j)^p. \end{aligned}$$

Puis, il faut démontrer que l'inégalité (2.4.1) pour $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{Q}^+$. Maintenant, on considère les suites de scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ comme des formes réelles positives arbitraires, supposons que par l'absurde pour tout $C > 0$, il existe $n_c \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in E$, $b_1, ..., b_n \in G$ et $\lambda_1, ..., \lambda_{n_c} \in \mathbb{R}^+$, telle que

$$\left(\sum_{j=1}^{n_c} \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} > C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{n_c} \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4.2}$$

Pour chaque $j = 1, ..., n_c$, soit $\left(q_k^{(j)} \right)_{k=1}^{\infty}$ une suite des nombres rationnelles converge respectivement vers λ_j. Alors

$$q_k^{(j)} S(f, x_j, b_j)^p \underset{\longrightarrow}{k} \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p,$$

et

$$q_k^{(j)} R(\varphi, x_j, b_j)^p \underset{\longrightarrow}{k} \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p,$$

pour tout $j = 1, ..., n_c$ et $\varphi \in K$. Nous avons

$$\sum_{j=1}^{n_c} q_k^{(j)} S(f, x_j, b_j)^p \underset{\longrightarrow}{k} \sum_{j=1}^{n_c} \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p,$$

il s'ensuit que

$$C \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{n_c} q_k^{(j)} R(\varphi, x_j, b_j)^p \underset{\longrightarrow}{k} C \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{n_c} \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p.$$

On peut conclure l'inégalité (2.4.2), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n_c} q_n^{(j)} S(f, x_j, b_j)^p > C \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{n_c} q_n^{(j)} R(\varphi, x_j, b_j)^p,$$

pour $n \geq n_0$. Absurde.

Ce qui termine la preuve. ■

Le théorème suivant dû à D. Pellegrino et J. Santos.

Théorème 2.4.2 (TDPU) *Supposons que* $0 < p < \infty$ *et soient* S *arbitraire et* R *satisfaite* (2). *Alors* $f \in \mathcal{F}$ *est* $R-S-$*abstract* $p-$*sommante si, et seulement s'il existe une constante* $C > 0$ *et une mesure de probabilités de Borel* μ *sur* K, *telle que*

$$S(f,x,b) \leq C \left(\int_K R(\varphi,x,b)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $x \in E$, $b \in G$.

Preuve. La réciproque est similaire de la démonstration de Théorème (1.3.2). D'autre part, f est $R-S-$abstract $p-$sommante. Alors il s'ensuit que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(f,x_j,b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j R(\varphi,x_j,b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.4.3}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1,...,x_n \in E$ et $b_1,...,b_n \in G$ et $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}^+$.

On pose $E_1 = E \times G$, $G_1 = \Bbbk$ et on définit

$$\overline{R} \ : \ K \times E_1 \times G_1 \to [0,+\infty) \text{ définit par } \overline{R}\left(\varphi,(x,b),\lambda\right) = |\lambda| \, R\left(\varphi,x,b\right),$$

et

$$\overline{S} \ : \ \mathcal{F} \times E_1 \times G_1 \to [0,+\infty) \text{ définit par } \overline{S}\left(f,(x,b),\lambda\right) = |\lambda| \, S\left(f,x,b\right).$$

Donc par l'inégalité (2.4.3) on obtient

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{S}(f,(x_j,b_j),\lambda_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{R}\left(\varphi,(x_j,b_j),\lambda_j\right)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1,...,x_n \in E$ et $b_1,...,b_n \in G$, $\lambda_1,...,\lambda_n \in \Bbbk$. Autrement, f est $\overline{R}-\overline{S}-$abstract $p-$sommante. De plus, par l'hypothèse R est continue, on a l'application

$$\overline{R}_{(x,b),\lambda} \ : \ K \to [0,+\infty) \text{ définit par } \overline{R}_{(x,b),\lambda}\left(\varphi\right) = \overline{R}\left(\varphi,(x,b),\lambda\right) = |\lambda| \, R_{x,b}\left(\varphi\right),$$

est continue, pour tout $(x,b) \in E_1$ et $\lambda \in G_1$. On note encore

$$\overline{S}\left(f,(x,b),t\lambda\right) = |t\lambda| \, S\left(f,x,b\right) = t\overline{S}\left(f,(x,b),\lambda\right),$$

et

$$\overline{R}\left(\varphi,(x,b),t\lambda\right)=t\left|\lambda\right|R\left(\varphi,x,b\right)=t\overline{R}\left(\varphi,(x,b),t\lambda\right),$$

pour tout $(x,b)\in E_1$ et $\lambda\in\Bbbk$, $0\leq t\leq 1$. Par le Théorème (2.4.1) ce qui donne exister une constante $C>0$ et une mesure de probabilités de Borel μ sur K, telle que

$$\bar{S}(f,(x,b),\lambda)^p\leq C\left(\int_K\overline{R}\left(\varphi,(x,b),\lambda\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $(x,b)\in E_1$ et $\lambda\in G_1$. On prend, particulièrement, $\lambda\in\mathbb{N}$ tel que $|\lambda|=1$, il s'ensuit que

$$S(f,x,b)\leq C\left(\int_K R(\varphi,x,b)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $x\in E$, $b\in G$. ■

Chapitre 3

Applications de TDPG et TDPU

Il à été discuté précédemment, qu'il ne semble pas possible qu'il existe un choix approprié des paramètres dans **TDPU** qui récupère **TDP** pour la classe des applications multilinéaires $(q_1, ..., q_n)$ −dominées, à cet effet, nous allons utiliser **TDPG**.

3.1 Applications multilinéaires $(q_1, ..., q_n)$ −dominées

Définition 3.1.1 *Soient* $1 \leq q_1, ..., q_n < \infty$ *avec* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_n}$. *On dit qu'un application* $n-$*linéaire* $T \in \mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_n; Y)$ *est* $(q_1, ..., q_n)$ −*dominée s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\left(\sum_{t=1}^{k} \left\| T\left(b_t^{(1)}, ..., b_t^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \ \Pi_{j=1}^n \sup_{x^* \in B_{X_j^*}} \left(\sum_{t=1}^{k} \left|\left\langle x^*, b_t^{(j)}\right\rangle\right|^{q_j}\right)^{\frac{1}{q_j}}, \tag{3.1.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et* $b_t^{(j)} \in X_j$ *avec* $\{t, j\} \in \{1, ..., k\} \times \{1, ..., n\}$.

Théorème 3.1.1 (TDP) *Une application* $T \in \mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_n; Y)$ *est* $(q_1, ..., q_n)$ −*dominée si, et seulement s'il existe une constante* $C > 0$ *et des mesures de probabilités de Borel* μ_j *en* $B_{X_j^*}$, *telles que*

$$\left\|T\left(b^{(1)}, ..., b^{(n)}\right)\right\| \leq C \ \Pi_{j=1}^n \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^*, b^{(j)}\right\rangle\right|^{q_j} d\mu_j\right)^{\frac{1}{q_j}}, \tag{3.1.2}$$

pour tout $x^{(j)} \in X_j$ *et* $j = 1, ..., n$.

Preuve. On choisit les paramètres suivants

$$\begin{cases} l = n, \\ \mathcal{F} = \mathcal{L}\left(X_1 \times ... \times X_n; Y\right), \\ E_i = \mathbb{R}, \text{ pour tout } i = 1, ..., m, \\ G_j = X_j \text{ et } K_j = B_{X_j^*}, \text{ pour tout } j = 1, ..., n, \\ p_j = q_j, \text{ pour tout } j = 1, ..., n, \\ S\left(T, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(1)}, ..., b^{(n)}\right) = \left\|T\left(b^{(1)}, ..., b^{(n)}\right)\right\|, \\ R_j\left(x^*, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(j)}\right) = \left|\left\langle x^*, b^{(j)}\right\rangle\right|. \end{cases}$$

On fixe $(x_i)_{i=1}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $b^{(j)} \in X_j$, nous avons $R_{j,(x_i)_{i=1}^m, b^{(j)}}$ est continue en $B_{X_j^*}$ pour tout $j = 1, ..., n$. De plus, il est facile de trouver que S et R_j (comme $j = 1, ..., n$) vérifient l'inégalité en (ii) de la définition (2.2.1). Donc T est $(q_1, ..., q_n)$ $-$dominée si, et seulement si, T est $R_1, ..., R_n - S-$abstract $(q_1, ..., q_n)$ $-$sommante. Dans ce cas, le Théorème (2.3.2) ce qui donne l'existence d'une constante $C > 0$ et des mesures de probabilités de Borel μ_j sur K_j, telles que, pour tout $x^{(j)} \in \mathbb{R}$ et $b^{(j)} \in X_j$ avec $\{i, j\} \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$, on a

$$S\left(T, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(1)}, ..., b^{(n)}\right) \leq C\ \Pi_{j=1}^n \left(\int_{K_j} R_j\left(x^*, x^{(1)}, ..., x^{(m)}, b^{(j)}\right)^{p_j}\ d\mu_k\right)^{\frac{1}{p_j}}.$$

Par conséquent

$$\left\|T\left(b^{(1)}, ..., b^{(n)}\right)\right\| \leq C\ \Pi_{j=1}^n \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle x^*, b^{(j)}\right\rangle\right|^{q_j} d\mu_k\right)^{\frac{1}{q_j}}, \tag{3.1.3}$$

pour tout $b^{(j)} \in X_j$ et $j = 1, ..., n$.

Ce qui termine la preuve. ■

3.2 Les applications multilinéaires Cohen fortements q-sommantes

Définition 3.2.1 *Soient*$1 < q < \infty$, $T : X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow Y$ *(*X_j, Y *sont des espaces de Banach arbitraires et* $m \in \mathbb{N}$*). Si* $q > 1$, *alors* q^* *est le nombre reél satisfait* $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$.*un* *operateur n-linéaire continu est Cohen fortement p-sommant si, et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{i=1}^{m} \left|y_i^* \left(T(x_i^1, ..., x_i^n\right)\right| \leq C(\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} \left\|\left(x_i^j\right)\right\|^q)^{\frac{1}{q}} \sup_{y^{**}\in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left|y^{**}\left(y_i^*\right)\right|^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \tag{3.2.1}$$

pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j, y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$ et $(j = 1, ..., m)$.

Le théorème suivant dû à D. Achour et L. Mezrag (voir [2]).

Théorème 3.2.1 (TDP) *Soient $1 < q < \infty$, $T : X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow Y$ un operateur n-linéaire continu est dit Cohen fortement q-sommant, si est seulement s'il existe une constante $C > 0$ et mesure de probabilités μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que pour tout $(x^1, ..., x^n, y^*) \in X_1 \times ... \times X_n \times y^*$. On a l'inégalitè suivante*

$$\left|y^* \left(T(x^1, ..., x^n\right)\right| \leq C \left(\prod_{k=1}^{n} \left\|x^k\right\|\right) \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left|y^{**}\left(y^*\right)\right|^{q^*} d\mu\right)^{\frac{1}{q^*}}, \tag{3.2.2}$$

est valide.

Preuve. On choit les paramètres suivants:.

$$\begin{cases} t = 2 \text{ et } r = n-1, \\ E_i = X_i \text{ pour tout } i = 1, ...n-1, \\ K_1 = B_{X_1^* \times ... X_n^*} \text{ et } K_2 = B_{Y^{**}}, \\ G_1 = X_n \text{et } G_2 = Y^*, \\ \mathcal{H} = \mathcal{L}\left(X_1 \times ... \times X_n; Y\right), \\ p = 1, \ p_1 = q \text{ et } p_2 = q^*, \\ S\left(T, x_1, ..., x_n, y^*\right) = \left|y^*\left(T\left(x^1, ..., x^n\right)\right)\right|, \\ R_1\left(\varphi, x^1, ..., x^n\right) = \left\|x^{(1)}\right\| ... \left\|x^{(n)}\right\|, \\ R_2\left(\varphi, x^1, ..., x^{n-1}, y^*\right) = \left|\varphi\left(y^*\right)\right|. \end{cases}$$

Il s'ensuit que $T : X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow Y$ un operateur est dit *Cohen fortement q-sommant si est seulement si* T est $R_1, R_2 - S-$abstract $(q, q^*)-$sommant. Par le théorème (2.3.2), T est $R_1, R_2 - S-$abstract $(q, q^*)-$sommant.si est seulement s'il existe une constante $C > 0$ et une mesure $\mu_k \in K_k$ telle que,

$$\begin{aligned} & S\left(T, x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y^*\right) \\ \leq \ & C \left(\int_{K_1} R_1\left(\varphi, x^1, ..., x^n\right)^q d\mu_1\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{K_2} R_2\left(\varphi, x^1, ..., x^{n-1}\right)^{q^*} du_2\right)^{\frac{1}{q^*}} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} & \left|y^* \left(T(x^1,...,x^n)\right|\right. \\ \leq \; & C\left(\int_{B_{X_1^*\times\ldots X_n^*}} \left(\left\|x^{(1)}\right\|\ldots\left\|x^{(n)}\right\|\right)^q d\mu_1\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left|\varphi\left(y^*\right)\right|^{q^*} d\mu_2\right)^{\frac{1}{q^*}} \\ = \; & C\left\|x^{(1)}\right\|\ldots\left\|x^{(n)}\right\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left|\varphi\left(y^*\right)\right|^{q^*} d\mu_2\right)^{\frac{1}{q^*}}. \end{aligned}$$

Et on récupère(3.2.2) quel que soit le choix de l'entier positive m et $x^{(k)}X_k$, $k = 1, ..., n$.

Ce qui termine le preuve. ■

Avant de donner quelques applications de **TDPU** et **TDPG** dans le cas lipschitzien. On a besoin de présenter quelques préliminaires concernant les applications lipschitziennes.

Définition 3.2.2 *Soit (X, d_X, e) est un espace métrique pointé(i.e., e un élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé). On note par*

$$M_0 = \{\textit{espace métriques complets pointés}\}.$$

Définition 3.2.3 *(i). Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques. Une application $T : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est dite Lipschitzienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$d_X\left(Tx, Ty\right) \leq C d_Y\left(x, y\right) \tag{3.2.3}$$

pour tout $x, y \in X$

(ii). On note par $\mathrm{Lip}\left(X; Y\right)$ l'ensemble des applications Lipschitz $T : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

(iii). Quand $Y = H$ est un espace de Banach, on dit qu'une application $T : X \to H$ est Lipschitzienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\|T\left(x\right) - T\left(y\right)\right\| \leq C \; d\left(x, y\right) \tag{3.2.4}$$

pour tout $x, y \in X$.

Définition 3.2.4 *Soient (X, e_X, d_X) et (Y, e_Y, d_Y) deux espaces métriques pointés. On dit que $T : X \to Y$ préserve l'élément distingué si $T\left(e_X\right) = e_Y$.*

Définition 3.2.5 *Soit H un espace de Banach. On note par $\mathrm{Lip}_0\left(X, H\right)$ l'ensemble des applications Lipschitz de X dans H telles que $T\left(e_X\right) = 0$.*

Remarque 3.2.1 *(i). On a la fonction*

$$\|.\|_{\mathrm{Lip}_0} \;:\; \mathrm{Lip}_0(X,H) \to [0,+\infty\} \;;\; \textit{définit par } \|T\|_{\mathrm{Lip}_0} = \sup_{x\neq y}\left\{\frac{\|T(x)-T(y)\|}{d(x,y)}\right\}$$

est une norme. De plus, $\left(\mathrm{Lip}_0(X,H), \|.\|_{\mathrm{Lip}_0}\right)$ *est un espace de Banach. Quand* $H=\mathbb{R}$ *on note par* $\mathrm{Lip}_0(X,\mathbb{R}) = X^{\#}$*, s'appelle le dual de Lipschitz de* X*.*

(ii). La boule $\mathcal{B}_{X^{\#}}$ *(ici* $\mathcal{B}_{X^{\#}}$ *est la boule unité de* $X^{\#}$*) est l'espace compact de Hausdorff dans la topologie de la convergence pointé sur* X*. (voir [5, Théorème 3.1]).*

(iii). On fixe $z\in X$*, on a l'application*

$$\zeta_z \;: X^{\#} \to \mathbb{R} \;;\; \textit{définit par } \zeta_z(\varphi) = \varphi(z),$$

est continue.

3.3 Les applications Lipschitz $p-$sommantes

Dans [3] il est esquissé comment le théorème de domination de Farmer-Johnson [6] peut être récupére à partir de la théorème unifié de domination de Pietsch obtenue à la section ci-dessus. Par souci de compléter, nous allons expliquer avec quelques détails, comment cela peut être fait grâce à une procédure plus simple.

Définition 3.3.1 *Soient* (X,d_X), (Y,d_Y) *sont des espaces métriques, une application* $T:X\to H$ *est dite Lipschtiz* $p-$*sommante (voir [6]) s'il existe une constante* $C>0$ *telle que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i d_Y\left(T(x_i),T(y_i)\right)^p \leq C \sup_{f\in\mathcal{B}_{X^{\#}}} \sum_{i=1}^{n} a_i \left|f(x_i)-f(y_i)\right|^p,$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_1,...,a_n$ et $b_1,...,b_n\in X$, où $\mathcal{B}_{X^{\#}}$ est la boule unité de dual Lipschtiz $X^{\#}$ de X.

Théorème 3.3.1 (Farmer-Johnson) *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une application* $T:X\to H$ *entre des espaces métriques :*

(i). T *est Lipschtiz* $p-$ *sommante*

(ii). Il existe une constante $C > 0$ et une mesure de probabilités de Borel μ en $\mathcal{B}_{X^{\#}}$, telle que

$$d_Y(T(x), T(y)) \leq C \left(\int_{\mathcal{B}_{X^{\#}}} |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $x, y \in X$.

Preuve. On note que T est Lipschtiz $p-$ sommante si, et seulement si T est $R-S-$abstract $p-$sommante avec

$$\begin{aligned} E &= X \times X, \\ &\text{et} \\ G &= \mathbb{R}, \end{aligned}$$

et $K = \mathcal{B}_{X^{\#}}$ est l'espace compact de Hausdorff dans la topologie de la convergence pointé sur $X, \mathcal{H}$ est l'ensemble de tous les mappings de X à H et R, S sont donnés par

$$R : \mathcal{B}_{X^{\#}} \times (X \times X) \times \mathbb{R} \to [0, \infty) \text{ définit par } R(f, (x, y), a) = |a|^{\frac{1}{p}} |f(x_i) - f(y_i)|,$$

et

$$S : \mathcal{H} \times (X \times X) \times \mathbb{R} \to [0, \infty) \text{ définit par } S(T, (x, y), a) = |a|^{\frac{1}{p}} d_H(T(x), T(y)).$$

Ainsi, nous avons, en conséquence du théorème (3.1.1). ■

3.4 Les applications Lipschitz (p, r, s) −sommantes

Dans cette section, on suppose que toutes les suites sont finies.

Soient $N \in \mathbb{N}, (\lambda_j)_{j=1}^N$ une suite de nombre réelle et $(x_j)_{j=1}^N, (y_j)_{j=1}^N$ sont des suites dans X. On définit

$$w_r^{Lip}\left((\lambda_j, x_j, y_j)_{j=1}^N\right) = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}_{X^{\neq}}} \left(\sum_{j=1}^N |\lambda_j (\varphi(x_j) - \varphi(y_j))|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

J. A. Chàvez-Doménguez est définit in [5] les opérateurs Lipschitz (r, p, q)-sommants comme suit.

Définition 3.4.1 *Soient $1 \leq p, r < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ et $T : X \to H$ est une application Lipschitzienne. On note par T est Lipschitz (p, r, s) −sommante s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j^* \in H^*, \lambda_j, k_j > 0$ et $j = 1, ..., n$ on trouve,*

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\lambda_j \left\langle v_j^*, T(x_j) - T(y_j)\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.4.1}$$

$$\leq C\ w_r^{Lip}\left(\left(\lambda_j k_j^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^{N}\right) \left\|\left(k_j v_j^*\right)_{j=1}^{N}\right\|_{s,w}. \tag{3.4.2}$$

Remarque 3.4.1 *En [5] il est commenté sur la possibilité de la restriction $\lambda_j = 1$, pour tout $j = 1, ..., N$. Dans la définition de Lipschitz (p, r, s) −sommant et la démonstration de ce fait est similaire au cas de la définition des applications Lipschitz dans [6]. De sort que l'inégalité (3.2.4) devient équivalente à*

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\left\langle v_j^*, T(x_j) - T(y_j)\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\ w_r^{Lip}\left(\left(k_j^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^{N}\right) \left\|\left(k_j v_j^*\right)_{j=1}^{N}\right\|_{s,w}. \tag{3.4.3}$$

Remarque 3.4.2 *Quand $H = G^*$, on peut considérer $v_j \in G$ au lieu de $v_j^{**} \in G^{**}$ pour tout $j = 1, ..., N$.*

En effet, supposons que T est Lipschitz (p, r, s) −sommante, donc il existe $C > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j^{**} \in G, \lambda_j, k_j > 0$. On trouve

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\lambda_j \left\langle v_j^{**}, T(x_j) - T(y_j)\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\ w_r^{Lip}\left(\left(\lambda_j k_j^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^{N}\right) \left\|\left(k_j v_j^{**}\right)_{j=1}^{N}\right\|_{s,w}. \tag{3.4.4}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $v_j \in G$ avec $j = 1, ..., N$, on pose $v_j^{**} = J(v_j) \in G^{**}$ en (3.4.4), où $J : G \to G^{**}$ est la surjection canonique. Alors

$$\begin{aligned} & \left\|\left(k_j v_j^{**}\right)_{j=1}^{N}\right\|_{s,w} \qquad (3.4.5)\\ = & \sup_{v^{***} \in G^{***}} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{N} \left|\left\langle v^{***}, k_j v_j^{**}\right\rangle\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ = & \sup_{v^* \in B_{G^*}} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{N} \left|\left\langle k_j v_j^{**}, v^*\right\rangle\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ = & \sup_{v^* \in B_{G^*}} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{N} \left|\left\langle J(k_j v_j), v^*\right\rangle\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ = & \sup_{v^* \in B_{G^*}} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{N} \left|\left\langle v^*, k_j v_j\right\rangle\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ = & \left\|\left(k_j v_j\right)_{j=1}^{N}\right\|_{s,w} \end{aligned}$$

et

$$\left|\left\langle v_j^{**}, T(x_j) - T(y_j)\right\rangle\right| = \left|\left\langle J(v_j), T(x_j) - T(y_j)\right\rangle\right| = \left|\left\langle T(x_j) - T(y_j), v_j\right\rangle\right|, \tag{3.4.6}$$

pour tout $j = 1, ..., N$, donc

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\lambda_j \left\langle T(x_j) - T(y_j), v_j\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\ w_r^{Lip}\left(\left(\lambda_j k_j^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^N\right) \left\|(k_j v_j)_{j=1}^N\right\|_{s,w}, \tag{3.4.7}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j \in G, \lambda_j, k_j > 0$ avec $j = 1, ..., n$.

Autrement, supposons que l'inégalité (3.4.7) est valide. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $v_1^{**}, ..., v_N^{**} \in H^{**}$, on considère les sous espaces de dimension fini $V = Span\left\{v_1^{**}, ..., v_n^{**}\right\} \subset G^{**}$ et $U = Span\left\{T(x_1) - T(y_1), ..., T(x_n) - T(y_n)\right\} \subset G^*$. Par le principe de la réflexivité locale (voir [4, P.177]), on donne $\epsilon > 0$, il existe une application injective linéaire $\Psi : V \to G$ telle que

$$\max\left\{\|\Psi\|, \|\Psi\| . \|\Psi\|^{-1}\right\} < 1 + \epsilon,$$

et

$$\left\langle u^*, \Psi(v^{**})\right\rangle = \left\langle v^{**}, u^*\right\rangle,$$

pour tout $v^{**} \in V$ et $u^* \in U$. On pose $v_j = \Psi\left(v_j^{**}\right)$. On appliquons le résulta ci-dessus avec $u_j^* = T(x_j) - T(y_j)$, l'inégalité (3.4.7) pris de la forme

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\lambda_j \left\langle v_j^{**}, T(x_j) - T(y_j)\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\ w_r^{Lip}\left(\left(\lambda_j k_j^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^N\right) \left\|(k_j v_j)_j\right\|_{s,w}. \tag{3.4.8}$$

Notez aussi que, pour tout $\epsilon > 0$

$$\left\|(k_j v_j)_{j=1}^N\right\|_{s,w} = \left\|\left(k_j \Psi\left(v_j^{**}\right)\right)_{j=1}^N\right\|_{s,w} \leq \|\Psi\| \left\|\left(k_j v_j^{**}\right)_{j=1}^N\right\|_{s,w} \leq (1+\epsilon)\left\|\left(k_j v_j^{**}\right)_j\right\|_{s,w}. \tag{3.4.9}$$

Alors

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\lambda_j \left\langle v_j^{**}, T(x_j) - T(y_j)\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1+\epsilon)\, C\ w_r^{Lip}\left(\lambda_j k_j^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^N \left\|\left(k_j v_j^{**}\right)_j\right\|_{s,w},$$

faire $\epsilon \to 0$, on conclut T est Lipschitz (p, r, s) −sommante.

On combine entre les remarques (3.4.1) et (3.4.2), nous avons $T : X \to H^*$ est Lipschitz (p,r,s) −sommante si, et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j \in H$ et $k_j > 0$ avec $j = 1, ..., N$,

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\left\langle T(x_j) - T(y_j), v_j\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \; w_r^{Lip}\left(\left(k_j^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^{N}\right) \left\|(k_j v_j)_{j=1}^{N}\right\|_{s,w}. \qquad (3.4.10)$$

Et cette inégalité est la plus forte durant cette section.

La classe des applications Lipschitz (p,r,s) −sommantes de X dans H est définit $\Pi^l_{p,r,s}$ et

$$\pi^l_{p,r,s}(T) = \{\inf C \text{ vérifiant 3.4.1}\}.$$

L'exemple de la classe des opérateurs $(p;q)$ −sommants, pour tout l'espace métrique pointé X et l'espace de Banach H, on a l'application

$$\pi^l_{p,r,s}(.) \quad : \Pi^l_{p,r,s}(X;H) \to [0,+\infty\},$$

est définit une norme dans $\Pi^l_{p,r,s}(X;H)$ de telle que $\left(\Pi^l_{p,r,s}(X;H), \pi^l_{p,r,s}(.)\right)$ est un espace vectoriel normé.

Nous allons présenter le théorème de domination de pietsch pour la classe $\Pi^l_{p,r,s}$.

Théorème 3.4.1 (TDP) *[5] Supposons que $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ et $T \in \mathrm{Lip}_0(X;H^*)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a). $T \in \Pi^l_{p,r,s}(X;H^*)$;

(b). Il existe des mesures de probabilités de Borel μ et ρ en $\mathcal{B}_{X^\#}$ et B_{H^*} respectivement telles que

$$\left|\left\langle T(x) - T(y), v\right\rangle\right| \leq C \left(\int_{\mathcal{B}_{X^\#}} |\varphi(x) - \varphi(y)|^r \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{B_{H^*}} |\langle v, v^*\rangle|^s \, d\rho(v^*)\right)^{\frac{1}{s}}, \qquad (3.4.11)$$

pour tout $x, y \in M$ et $v \in H$.

Preuve. Notez d'abord que, en utilisant l'inégalité (3.4.10), $T \in \Pi^l_{p,r,s}(X;H^*)$ si, et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\left\langle T(x_j) - T(y_j), v_j\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in \mathcal{B}_{M^\#}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left|k_j^{-1}\left(\varphi(x_j) - \varphi(y_j)\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \sup_{v^* \in B_{H^*}} \left(\sum_{j=1}^{N} |\langle v^*, v_j\rangle|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$, $v_j \in H$ et $k_j > 0$ avec $j = 1, ..., N$. Alors on choit les paramètres suivants:

$$\begin{cases} l = 2 \text{ et } m = 1 \\ \mathcal{F} = \mathrm{Lip}_0(X; H^*) \\ E = X \times X \times \mathbb{R}^+ \\ G_1 = \mathbb{R} \text{ et } G_2 = H \\ K_1 = \mathcal{B}_{M\#} \text{ et } K_2 = B_{H^*} \\ S(T, (x, y, k), \lambda, v) = |\langle T(x) - T(y), v\rangle| \\ R_1(\varphi, (x, y, k), \lambda) = k^{-1} |\varphi(x) - \varphi(y)| \\ R_2(v^*, (x, y, k), v) = k |\langle v, v^*\rangle| . \end{cases}$$

On remarque que S, R_1et R_2 sont satisfaites (ii) de la définition (2.2.1). D'autre part, on donne $(x, y, k) \in X \times X \times \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in H$, on a les applications sont définis par $R_{1,(x,y,k),\lambda}(\varphi) = k^{-1} \left|\left(\zeta_x - \zeta_y\right)(\varphi)\right|$ est continue en $\mathcal{B}_{X\#}$ et $R_{2,(x,y,k),v}(v^*) = k |\langle v, v^*\rangle|$ est continue en B_{H^*}, puisque les applications suivantes sont continues $J_{v^*}(.) = \langle ., v^*\rangle$, pour tout $v^* \in B_{H^*}$.

Notez que les inégalités

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |\langle T(x_j) - T(y_j), v\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\ w_{rr}^{Lip}\left(\left(k_j^{-1}, x_j, y_j\right)_{j=1}^{N}\right) \left\|(k_j v_j)_{j=1}^{N}\right\|_{s,w} .$$

et

$$\left(\sum_{j=1}^{N} S(T, (x_j, y_j, k_j), \lambda_j, v_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \sup_{\varphi \in K_1} \left(\sum_{j=1}^{N} R_1(\varphi, (x_j, y_j, k_j), \lambda_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} \sup_{v^* \in K_2} \left(\sum_{j=1}^{N} R_2(v^*, (x_j, y_j, k_j), v_j)^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

sont équivalentes.

Alors T est Lipschitz (p, r, s) −sommante si, et seulement si, T est $R_1, R_2 - S-$abstract (p, r, s) −sommante. Ainsi, le Théorème (2.3.2) est garantit l'existence d'une constante $C > 0$ et des mesures de probabilités de Borel μ et ρ en $\mathcal{B}_{X\#}$ et B_{H^*} respectivement telles que

$$(S(T, (x, y, k), \lambda, v)) \leq C \left(\int_{K_1} R_1(\zeta, (x, y, k), \lambda)^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{K_2} R_2(v^*, (x, y, k), v)^s d\rho\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{3.4.12}$$

ou

$$|\langle T(x)-T(y),v\rangle|\leq C\left(\int_{\mathcal{B}_{M\#}}|(\varphi(x)-\varphi(y))|^{r}\,d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{B_{H^*}}|\langle v,v^*\rangle|^{s}\,d\rho(v^*)\right)^{\frac{1}{s}},$$

pour tout $x,y\in M$ et $v\in H$. ■

3.5 Les applications Lipschitz Cohen fortement $p-$sommantes

La définition suivante a été introduite indépendamment par [16] et [17]. Pour notre commodité, nous adopterons la notation de [17].

Définition 3.5.1 *Soient* $1<p\leq\infty$, X *un espace métrique pointé,* H *un espace de Banach et* $T:X\to H$ *une application Lipschitzienne. On a* T *est Lipschitz-Cohen fortement* $p-$*sommante s'il existe une constante* $C>0$ *telle que*

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left|\left\langle v_j^*,T(x_j)-T(y_j)\right\rangle\right|\leq C\left\|\left(\lambda_j d(x_j,y_j)_{j=1}^{N}\right)\right\|_{p}\left\|\left(v_j^*\right)_{j=1}^{N}\right\|_{p,w}\tag{3.5.1}$$

pour tout $N\in\mathbb{N}$, $x_j,y_j\in X$, $v_j^*\in H^{\,*}$*et* $\lambda_j\in\mathbb{R}_+$ *avec* $j=1,...,N$.

Maintenat, on donne le théorème de domination pour les opérateurs Lipschitz-Cohen fortement $p-$sommants (voir [16] et [17])

Théorème 3.5.1 (TDP) *Soit* X *un espace métrique pointé,* H *un espace de Banach et* $T\in\mathrm{Lip}(X;H)$. *Alors* T *est Lipschitz-Cohen fortement* $p-$*sommante si, et seulement s'il existe une constante* $C>0$ *et des mesures de probabilités de Borel* μ *en* $B_{H^{**}}$, *telles que*

$$|\langle v^*,T(x)-T(y)\rangle|\leq Cd(x,y)\left(\int_{B_{H^{**}}}|\langle v^*,v\rangle|^{p^*}\,d\mu(v^*)\right)^{\frac{1}{p^*}},\tag{3.5.2}$$

pour tout $x,y\in X$ *et* $v^*\in H^{\,*}$, *et de plus, dans ce cas*
$d_{st,p}^{L}(T)=\inf\{C$ *vérifiant 3.5.2*$\}$.

Preuve. Notez que T est Lipschtiz-Cohen fortement $p-$sommante si, et seulement si

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left|\left\langle T(x_j)-T(y_j),v_j^*\right\rangle\right| \\ \leq\;& C\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j d(x_j,y_j)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{v^{**}\in B_{H^{**}}}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N}\left|\left\langle v^{**},v_j^*\right\rangle\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ =\;& \sup_{\zeta\in[0,1]}C\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j d(x_j,y_j)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{v^{**}\in B_{H^{**}}}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N}\left|\left\langle v^{**},v_j^*\right\rangle\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}\tag{3.5.3}$$

Maintenant, on choisit les paramètres suivants

$$\begin{cases} l = 2 \text{ et } m = 1, \\ \mathcal{F} = \mathrm{Lip}\,(X; H)\,, \\ E = X \times X, \\ G_1 = \mathbb{R} \text{ et } G_2 = H^*, \\ K_1 = [0,1] \subset \mathbb{R} \text{ et } K_2 = B_{H^{**}}, \\ S\,(T, (x,y)\,, \lambda, v^*) = |\lambda|\,|\langle v^*, T\,(x) - T\,(y)\rangle|\,, \\ R_1\,(\xi, (x,y)\,, \lambda) = |\lambda|\, d\,(x,y) \text{ et } R_2\,(v^{**}, (x,y)\,, v^*) = |\langle v^{**}, v^*\rangle|\,. \end{cases}$$

On remarque, pour tout $(x, y) \in X \times X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont fixés, $R_{1,(x,y),\lambda}$ est une fonction constante dans $\mathbb{R}$, alors $R_{1,(x,y),\lambda}$ est continue dans $\mathbb{R}$. Avec, $R_{2,(x,y),v^*}\,(v^{**}) = |\langle J_{v^*}, v^{**}\rangle|\,,$ où $J : H^* \to H^{**}$ est la surjection canonique, il s'ensuit que $R_{2,(x,y),v^*}\,(v^{**})$ est continue en $B_{H^{**}}$. Deplus, nous avons R_1, R_2 et S sont satisfaites l'inégalité de (ii) de la définition (2.2.1). Ainsi, on trouve l'inégalité (3.5.3) pris de la forme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} S\left(T, (x_j, y_j)\,, \lambda_j, v_j^*\right) \quad &\leq \quad C \sup_{\xi \in K_1} \left(\sum_{j=1}^{N} R_1\,(\xi, (x_j, y_j)\,, \lambda_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad\quad \sup_{v^{**} \in K_2} \left(\sum_{j=1}^{N} R_2\left(v^{**}, (x_j, y_j)\,, v_j^*\right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Alors T est Lipschtiz-Cohen fortement $p-$sommante si, et seulement si, T est $R_1, R_2 - S-$abstract $(p, p^*)\,-$sommante. Par le Théorème (2.3.2), il existe une constante $C > 0$ et des mesures de probabilités de Borel ρ en $[0, 1]$ et μ en $B_{H^{**}}$, telles que

$$\begin{aligned} & S\,(T, (x,y)\,, \lambda, v^*) \\ \leq \quad & C \left(\int_{[0,1]} R_1\,(\xi, (x,y)\,, \lambda)^p \, d\rho \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{K_2} R_2\,(v^{**}, (x,y)\,, v^*)^{p^*} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ = \quad & C \left(\int_0^1 R_1\,(\xi, (x,y)\,, \lambda)^p \, d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{K_2} R_2\,(v^{**}, (x,y)\,, v^*)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ = \quad & C \lambda d\,(x,y) \left(\int_{K_2} R_2\,(v^{**}, (x,y)\,, v^*)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}, \end{aligned}$$

par conséquent, on obtient l'inégalité (3.5.2). ■

Maintenant, on présente les applications suivantes de **TDPU.**

3.6 Les applications Lipschtiz $\tau(p)$ −sammantes

Définition 3.6.1 *[9] Soient H est un espace de Banach, $T \in \mathrm{Lip}_0(X;H)$ et $1 \leq p < \infty$. T est Lipschtiz $\tau(p)$ −sammante s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \left|\left\langle v_j^*, T(x_j) - T(y_j)\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{B}_{X^\#} \\ v\in B_H}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left|(\varphi(x_j) - \varphi(y_j))\left\langle v_j^*, v\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.6.1)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in X$ et $v_j \in H^*$, avec $j = 1, ..., n$.

Nous donnons le théorème de domination des opérateurs Lipschtiz $\tau(p)$ −sammants (voir [9]).

Théorème 3.6.1 (TDP) *Soit T est une application Lipschtiz $\tau(p)$ −sammante s'il existe une constante $C > 0$ et une mesure de probabilités de Borel μ sur $K = B_{H^{**}} \times \mathcal{B}_{X^\#}$, telle que*

$$|\langle v^*, T(x) - T(y)\rangle| \leq C \left(\int_K |(\varphi(x) - \varphi(y))\langle v^{**}, v^*\rangle|^p \, d\mu(\varphi, v^{**})\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.6.2)$$

pour tout $x, y \in X$ et $v^* \in H^*$.

Preuve. Dans le Théorème (2.4.2), on suppose

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \mathrm{Lip}_0(X;H), \\ K = B_{H^{**}} \times \mathcal{B}_{X^\#}, \\ E = X \times X, \\ G = H^*, \\ S(T,(x,y),v^*) = |\langle v^*, T(x) - T(y)\rangle|, \\ R((\varphi, v^{**}),(x,y),v^*) = |(\varphi(x) - \varphi(y))\langle v^{**}, v^*\rangle|. \end{cases}$$

On remarque pour tout $(x,y) \in X \times X$ et $v^* \in H^*$ sont fixés , $R_{(x,y),v^*}$ est continue en K, parce que les opérateurs suivants

$$\langle ., v^*\rangle \ : B_{H^{**}} \to \mathbb{R} \text{ définit par } \langle v^{**}, v^*\rangle = J_{v^*}(v^{**})$$

et

$$\zeta_x \ : \mathcal{B}_{X^\#} \to \mathbb{R} \text{ définit par } \zeta_x(\varphi) = \varphi(x)$$

sont continue en $B_{H^{**}}$ et $\mathcal{B}_{X^{\#}}$, respectivement . Nous avons

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{B}_{X^{\#}} \\ v\in B_H}} \left[\sum_{j=1}^N \left|\left(\varphi(x_j)-\varphi(y_j)\right)\left\langle v_j^*, v\right\rangle\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
= & \sup_{\varphi\in\mathcal{B}_{X^{\#}}} \sup_{v\in B_H} \left[\sum_{j=1}^N \left|\left(\varphi(x_j)-\varphi(y_j)\right)\left\langle v_j^*, v\right\rangle\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
= & \sup_{\varphi\in\mathcal{B}_{X^{\#}}} \sup_{v^{**}\in B_{H^{**}}} \left[\sum_{j=1}^N \left|\left(\varphi(x_j)-\varphi(y_j)\right)\left\langle v^{**}, v_j^*\right\rangle\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
= & \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{B}_{X^{\#}} \\ v^{**}\in B_{H^{**}}}} \left[\sum_{j=1}^N \left|\left(\varphi(x_j)-\varphi(y_j)\right)\left\langle v^{**}, v_j^*\right\rangle\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, T est Lipschtiz $\tau(p)$ −sammante si, et seulement si

$$\left(\sum_{j=1}^N S\left(T,(x_j,y_j),v_j^*\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C \sup_{(\varphi,v^{**})\in K}\left(\sum_{j=1}^N R\left((\varphi,v^{**}),(x_j,y_j),v_j^*\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

c'est-à dire, T est $R-S$−abstract p−sommante. Ainsi, il s'ensuit que d'après le Théorème (2.4.2) on a

$$S(T,(x,y),v^*) \le C\left(\int_K R((\varphi,v^{**}),(x,y),v^*)^p\, d(\varphi,v^{**})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent

$$|\langle v^*, T(x)-T(y)\rangle| \le C\left(\int_{B_{H^{**}}\times\mathcal{B}_{X^{\#}}} |(\varphi(x)-\varphi(y))\langle v^{**}, v^*\rangle|^p\, d\mu(\varphi,v^{**})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

Bibliographie

[1] R.Ash. *Measure, integration, and functional analysis,* Academic Press, Inc, (1972) pp. $170-177$.

[2] D. Achour et L. Mezrag, On the Cohen strongly $p-$summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 327(1)(2007),pp $550-563$.

[3] G.Botelho, D.Pellegrino, P.Rueda. *A unified Pietsch domination theorem,* J. Math. Anal. Appl. 365 (2010) pp $269-276$.

[4] J.Diestel, H.Jarchow, A.Tonge. *Absolutely p-summing operatores,* Cambridge University Press, Cambridge, (1995) .

[5] J.A.Chôvez-DomÍnguez. *Duality for Lipschitz p-summing operatores,* Journal of functional analysis 261, (2011) pp $388-406$.

[6] J.Farmer et W.B.Johnson. *Lipschitz p-summing operatores,* Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009) pp $2989-2995$.

[7] G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.poly. *Inequalities,* Cambridge University Press, Cambridge, (1952) .

[8] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński. *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications,* Studia Math. **29**(1968),pp $275-326$.

[9] L.Mezrag, A.Tallab. *On the Lipschitz $\tau(p)$-summing operators,* To appear in Mathematische Nachrichten.

[10] B. MITJAGIN, A. PEŁCZYŃSKI. *Nuclear operators and npproximativr dinicnsion,* Proc. of ICM, BIo.;cov (1966),pp $366-372$.

[11] D.PELLEGRINO et J.SANTOS. *A general Pietsch domination theorema,* J. Math. Anal. Appl. 375 (2011) pp $371-374$.

[12] D.PELLEGRINO, J.SANTOS ET J.B.SEOANE-SEPULVEDA. *Some techniques on nonlinear analysis and applications,* Adv. Math. 229 (2012) pp $1235-1265$.

[13] A.PIETSCH. *Absolut $p-$summierende ,* Abbildungen in normieten Räumen, Studia Math, 27 (1967) pp $333-353$.

[14] J.SANTOS. *Resultados de coincidência para operadores absolutamente,* Dissertação, UFPB, (2008) .

[15] J.SANTOS. *Aplicações absolutamente somantes e generalizações do teorema da dominação de Pietsch,* Tese, UFPB, (2011) .

[16] K.SAADI. *Some properties of Lipshitz Strongly p-summing operator,* J. Math. Anal. Appl, 432 (2015) pp $1410-1426$.

[17] R. YAHI, D. ACHOUR AND P. RUEDA. *Absolutely summing Lipschitz conjugates*, Mediterr. J. Math. **13**(2016) pp $1949-1961$.


جزاكم الله خيرا