

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

MESSEGUEM Nadia

Sujet

QUELQUES PROPRIETES DE L'INVERSE DE MOORE PENROSE DANS UNE C*-ALGEBRE

Date de soutenance : 20 Juin 2018

Devant le jury

| | | |
|------------------------|----------------------|------------|
| Mr. NADIR Mostefa | Prof. Univ de M'sila | Président |
| Mr. BENSALLOUA Cheniti | MCB. Univ de M'sila | Rapporteur |
| Mr. GAGUI Bachir | MCA. Univ de M'sila | Examineur |

Promotion : 2017 / 2018



Dédicace

Au nom de ALLAH chémeut et le miséricordieux

Je dédie ce travail

A ma mère Zahra

A mes très chers frères

A mes très chers sœurs

et surtout à mon frère Hicham

A tout ma famille MESSEQUEM sans exception

A mes amis Warda, Fatima, Amina, Iman et Nadjet

A tous mes collègues de ma promotion et du département

A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie

A tous mes enseignants

Nadia.

Remerciement

Avant toute considération, je remercie le **GRAND DIEU** le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je remercie premièrement mon directeur de recherche, Monsieur, **BENSALLOUA Cheniti**

pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux

conseils mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Mostefa NADIR, Professeur à l'université de m'sila.

GAGUI Bachir, M.C.A à l'université de m'sila.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et à tous les membres du département des mathématiques.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 3 |
| 1 Théorie des opérateurs | 4 |
| 1.1 Rappels et notions fondamentales | 4 |
| 1.1.1 Quelques propriétés | 5 |
| 1.1.2 Continuité des opérateurs linéaires | 6 |
| 1.2 Opérateurs bornés | 8 |
| 1.2.1 Définitions et propriétés | 8 |
| 1.2.2 L'adjoint d'un opérateur borné | 9 |
| 1.2.3 Quelques classes d'opérateurs | 11 |
| 1.2.4 Opérateur compact | 13 |
| 1.3 Les opérateurs non bornés | 14 |
| 1.3.1 Définition et propriétés | 14 |
| 1.3.2 L'adjoint d'un opérateur non borné | 15 |
| 1.3.3 Opérations sur les opérateurs non bornés | 16 |
| 1.3.4 Opérateurs fermés | 17 |
| 2 Théorie spectrale des opérateurs | 20 |
| 2.1 Théorie spectrale d'opérateurs bornés | 20 |
| 2.1.1 Définitions et propriétés | 20 |
| 2.1.2 Propriétés spectrales de l'adjoint | 24 |
| 2.1.3 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints | 25 |
| 2.2 Spectre des opérateurs non bornés | 25 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.2.1 | Définition et propriétés | 26 |
| 2.2.2 | Spectre des opérateurs compacts | 27 |
| 3 | Inverses généralisés | 28 |
| 3.1 | Inversibilité d'opérateurs | 28 |
| 3.1.1 | L'inverse d'un opérateur borné | 28 |
| 3.1.2 | L'inverse d'un opérateur non borné | 32 |
| 3.1.3 | Opérateurs à images fermées | 32 |
| 3.2 | Inverses généralisés | 34 |
| 3.2.1 | Théorie des opérateurs fermées | 34 |
| 3.3 | L'inverse généralisé de Moore-Penrose | 37 |
| 3.3.1 | Cas d'un espace de Hilbert | 37 |
| 3.3.2 | Cas d'une C^* Algèbre | 39 |
| | Conclusion | 48 |
| | Bibliographie | 48 |

| | |
|---------------------|---|
| $\mathcal{L}(E, F)$ | L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . |
| $L(E, F)$ | L'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F . |
| $K(E, F)$ | L'espace des opérateurs compacts de E dans F . |
| $C([a, b])$ | L'espace des fonctions continues sur $[a, b]$. |
| $C^1([a, b])$ | L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$. |
| $R(A)$ | L'image de l'opérateur A . |
| $N(A)$ | Le noyau de l'opérateur A . |
| $D(A)$ | Le domaine de l'opérateur A . |
| $G(A)$ | Le graphe de l'opérateur A . |
| $\ \cdot\ _{D(A)}$ | La norme du graphe de l'opérateur A . |
| A^{-1} | L'inverse de l'opérateur A . |
| A^* | L'adjoint de l'opérateur A . |
| \bar{A} | La fermeture de l'opérateur A . |
| $c(A)$ | La conorme de l'opérateur A . |
| $\rho(A)$ | L'ensemble résolvant de l'opérateur A . |
| $R_\lambda(A)$ | La résolvante de l'opérateur A . |
| $\sigma(A)$ | Le spectre de l'opérateur A . |
| $\sigma_p(A)$ | Le spectre ponctuel de l'opérateur A . |
| $\sigma_r(A)$ | Le spectre résiduel de l'opérateur A . |
| $\sigma_c(A)$ | Le spectre continu de l'opérateur A . |
| $r(A)$ | Le rayon spectral de l'opérateur A . |

Introduction

D'un point de vue abstrait, si on désigne par E un espace fonctionnel et A l'application linéaire sur E , différents problèmes consistent à chercher la solution $u \in E$ du problème :

$$(\lambda I - A)u = f,$$

où $\lambda \in \mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $f \in E$.

Celui-ci est équivalent à déterminer si l'opérateur $\lambda I - A$ est **inversible**, où I désigne l'opérateur Identité sur E . L'étude de l'**inversibilité** de l'opérateur $\lambda I - A$ est ce qu'on appelle la théorie spectrale.

L'équation $(\lambda I - A)u = f$ possède une solution unique lorsque l'opérateur linéaire $\lambda I - A$ est inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif, ou d'inverse non borné.

Dans ce cas, on essaie de trouver un opérateur qui possède le maximum de propriétés que possède l'inverse s'il existait, un tel opérateur sera appelé un inverse généralisé (ou pseudo inverse) de A .

Pour un opérateur A on peut définir différents types d'inverses généralisés, qui malgré leur différences, possèdent tous des propriétés communes, notamment leurs relations avec les projections.

Dans notre présent travail, on s'intéressera à l'inverse généralisé de **Moore-Penrose** en particulier et nous en donnerons quelques unes de ses propriétés.

Ce mémoire est composé de trois chapitres:

Dans le **premier chapitre** on donnera des notions fondamentales de base d'analyse fonctionnelle: les espaces (normé, Banach et Hilbert), les opérateurs linéaires continus, définitions et généralités des opérateurs bornées et non bornées sur les espaces.

Dans le **deuxième chapitre** on présentera la notion classique sur la théorie spectrale des opérateurs bornés et non bornés d'un espace E (Banach ou Hilbert) dans lui-même.

Dans le **troisième chapitre** on introduira quelques théorèmes importants sur l'inverse d'un opérateur aussi que les opérateurs à images fermées. On donnera des notions sur l'inverse généralisé d'un opérateur avec des propriétés élémentaires, et en particulier l'inverse de **Moore-Penrose**.

Chapitre 1

Théorie des opérateurs

Dans ce chapitre on va rappeler quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent les espaces de Hilbert, les opérateurs et leurs propriétés sur les espaces de Hilbert ainsi que quelques classes d'opérateurs.

1.1 Rappels et notions fondamentales

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel normé) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on appelle **norme** sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telle que:

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2 (Espace de Banach) On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé qui est complet pour la distance déduite de sa norme

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Définition 1.1.3 (Espace euclidien) *Un espace vectoriel E sur \mathbb{k} est dit un espace euclidien ou préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire.*

Remarque 1.1.1 *Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante*

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.1.4 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.*

Exemple 1.1.1

1. *L'espace*

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx,$$

est un espace de Hilbert.

2. *L'espace*

$$l^2 = \left\{ x = (x_j)_j; x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^k x_j \bar{y}_j,$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.5 *Si $f, g \in H$, on dit que f et g sont orthogonaux, et on écrit $f \perp g$ si $\langle f, g \rangle = 0$. Si M est une partie de H , l'orthogonal de M est défini par*

$$M^\perp = \{ f \in H \text{ tel que } \forall g \in M, f \perp g \} = \{ f \in H \text{ tel que } \forall g \in M, \langle f, g \rangle = 0 \}.$$

1.1.1 Quelques propriétés

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : pour tout $f, g \in H$, on a

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

- **L'identité du parallélogramme** : pour tout $f, g \in H$, on a

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Définition 1.1.6 Une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est une **base orthonormale** d'un espace de Hilbert H si

1. $\|e_i\| = 1$.
2. L'espace engendré $\text{Vect}\{e_i\}$ est dense dans H .
3. $e_i \perp e_j$ pour $i \neq j$.

Définition 1.1.7 (Opérateur) Soient E et F deux espaces vectoriel normés. On dit qu'une application A défini sur un sous ensemble $D \subset E$ dans F est un opérateur si D est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 1.1.8 (Domaine d'un opérateur) Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire défini sur le sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ dans F . $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A et est définie par

$$D(A) = \{ x \in E \text{ telle que } Ax \in F \}.$$

Définition 1.1.9 (Noyau, Image) Soit A un opérateur de E dans F .

Le noyau $N(A)$ et l'image $R(A)$ de A sont définis par

$$N(A) = \{x \in E, \text{ tel que } Ax = 0\}.$$

$$R(A) = \{y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } y = Ax\}.$$

1.1.2 Continuité des opérateurs linéaires

Définition 1.1.10 (Opérateur linéaire) Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

i) Condition additive

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

ii) Condition homogène

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{k}, \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Définition 1.1.11 (Continuité d'un opérateur en un point) Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $\Omega \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de Ω si on a, la propriété suivante :

Pour tout suite (x_n) de Ω qui converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1.1.2 L'opérateur A est dit continu sur Ω , s'il est continu en chaque point de l'ensemble Ω .

Théorème 1.1.1 Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Preuve. Voir [21]. ■

Proposition 1.1.1 Soient E et F deux espaces normés et $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. L'opérateur A est continu sur E .
2. L'opérateur A est continu au point 0_E .
3. L'opérateur A est borné.

Définition 1.1.12 (Opérateurs linéaires continues) Soient E et F deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continues de E dans F . Lorsque $E = F$ l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ devient par notation $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.1.13 (Convergence des opérateurs) Soient H un espace de Hilbert et $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés de $\mathcal{L}(H)$. On dit que A_n est convergente vers A dans $\mathcal{L}(H)$ si et seulement si $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)}$ est convergente vers 0 dans \mathbb{R} .

Autrement dit

$$A_n \rightarrow A \text{ dans } \mathcal{L}(H) \Leftrightarrow \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)} \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{R}.$$

1.2 Opérateurs bornés

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1 (Opérateur borné) L'opérateur A défini sur un espace de Hilbert H est dit **borné** s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_H \leq C \|x\|_H, \quad \forall x \in H. \quad (1.2.1)$$

L'ensemble des opérateurs bornés de H dans H est noté $L(H)$.

Proposition 1.2.1 (Norme d'un opérateur) La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1.2.1) est appelée norme de A et sera notée par $\|A\|$:

$$\|A\|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_H}{\|x\|_H} = \sup_{\|x\|_H=1} \|A(x)\|_H = \sup_{\|x\|_H \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_H.$$

Exemple 1.2.1

1. Soit $H = L^2([0, 1])$. On définit A sur H par

$$\begin{aligned} A &: H \rightarrow H \\ \varphi &\rightarrow A\varphi(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt. \end{aligned}$$

A est borné car :

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|_H^2 &= \int_0^1 |A\varphi(x)|^2 dx, \\ &= \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt \right|^2 dx, \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |x-t|^2 dt \int_0^x |\varphi(t)|^2 dt \right) dx, \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} \int_0^x |\varphi(t)|^2 dt \right) dx, \\ &\leq \frac{1}{3} \|\varphi\|_H^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|_H^2 &\leq \frac{1}{3} \|\varphi\|_H^2, \quad \forall \varphi \in H, \\ \Rightarrow \|A\varphi\|_H &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|\varphi\|_H, \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

1.2.2 L'adjoint d'un opérateur borné

Définitions et propriétés de l'adjoint

Théorème 1.2.1 (Représentation de Riesz) *Soit H un espace de Hilbert. Alors*

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(H), \exists ! v \in H \text{ tel que } \varphi(u) = \langle u, v \rangle, \forall u \in H.$$

Preuve. Voir [27]. ■

Définition 1.2.2 (Opérateur adjoint) *Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors il existe un opérateur unique $A^* \in \mathcal{L}(H)$, appelé adjoint de A qui vérifie la relation suivante:*

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_H = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_H, \text{ pour tous } \varphi, \psi \in H.$$

Exemple 1.2.2

1. On considère l'opérateur **Shift** $S : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ défini par

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Soit (x_n) et (y_n) dans $l^2(\mathbb{C})$, alors

$$\begin{aligned} \langle S^*x_n, y_n \rangle &= \langle x_n, Sy_n \rangle, \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (0, y_1, y_2, \dots) \rangle, \\ &= x_1 \cdot 0 + x_2 \overline{y_1} + x_3 \overline{y_2} + \dots, \\ &= \langle (x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle. \end{aligned}$$

Donc S^* est défini par

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

2. Soit

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix},$$

alors

$$M^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général soit la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

alors son adjoint est :

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.2 Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$, A^*, B^* leurs adjoints (respectivement), alors on a les propriétés suivantes:

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
2. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. $(AB)^* = B^* A^*$.
4. $(A^*)^* = A$.
5. $I^* = I$.
6. $\|A\| = \|A^*\|$.

Preuve. Voir [8]. ■

Corollaire 1.2.1 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ on a

- i) $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$.
- ii) $A^*A = 0$ ou $AA^* = 0$ implique $A = 0$.

Preuve.

i) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\|A^*A\| = \sup_{u,v \in H} \frac{\langle u, A^*Av \rangle}{\|u\|\|v\|} = \sup_{u,v \in H} \frac{\langle Au, Av \rangle}{\|u\|\|v\|} \geq \sup_{u \in H} \frac{\|Au\|^2}{\|u\|^2} = \|A\|^2.$$

Mais d'autre part,

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2,$$

donc $\|A^*A\| = \|A\|^2$. L'autre égalité s'obtient en échangeant les rôles de A et A^* .

ii) Si $A^*A = 0$ alors

$$0 = \|A^*A\| = \|A\|^2,$$

donc

$$A = 0.$$

On procède de même manière pour AA^* . ■

Proposition 1.2.3 *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 alors, on a*

$$N(A) = \{\varphi \in H_1, A\varphi = 0\} = R(A^*)^\perp,$$

en encore

$$N(A^*) = \{\psi \in H_2, A^*\psi = 0\} = R(A)^\perp.$$

Lemme 1.2.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a*

1. $N(A) = R(A^*)^\perp$.
2. $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$.

Preuve.

1. On a

$$\begin{aligned} N(A) &= \{x \in H, Ax = 0\} = \{x \in H, \forall y \in H \langle Ax, y \rangle = 0\}. \\ &= \{x \in H, \forall y \in H, \langle x, A^*y \rangle = 0\}. \\ &= R(A^*)^\perp. \end{aligned}$$

2. D'après le Proposition précédente, on a

$$N(A^*)^\perp = (R(A)^\perp)^\perp = \overline{R(A)}.$$

■

1.2.3 Quelques classes d'opérateurs

Soit H est un espace de Hilbert.

1. Un opérateur $A \in L(H)$ est dit **hermitien** ou **auto-adjoint** si

$$A = A^*.$$

2. Un opérateur $N \in L(H)$ est dit **normal** si

$$N^*N = NN^*.$$

3. Un opérateur $U \in L(H)$ est dit **unitaire** si

$$U^*U = UU^* = I_H.$$

4. Un opérateur $S \in L(H)$ est dit **positif** si

$$\langle S\varphi, \varphi \rangle \geq 0, \quad \forall \varphi \in H \text{ et on note } S \geq 0.$$

Exemple 1.2.3

1. L'opérateur identité I_H est un opérateur auto-adjoint car $I_H^* = I_H$,

$$\langle I_H x, y \rangle = \langle x, I_H y \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

2. La multiplication A_ψ par une fonction mesurable bornée ψ est un opérateur normal sur $L^2([0, 1])$, car

$$A_\psi : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1], \quad \forall \psi \in C([0, 1]),$$

$$(A_\psi f)(t) = \psi(t) f(t).$$

On a

$$\langle A_\psi f, g \rangle = \langle f, A_\psi g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2([0, 1]),$$

$$\langle \psi(t)f(t), g(t) \rangle = \langle f(t), \overline{\psi(t)} g(t) \rangle,$$

donc

$$(A^*\psi g)(t) = \overline{\psi(t)} g(t),$$

d'où

$$A^*\psi = A_{\overline{\psi}},$$

alors

$$A_\psi^* A_\psi = A_{\overline{\psi}} A_\psi = A_\psi A_{\overline{\psi}} = A_\psi A_\psi^*.$$

Donc A_ψ est un opérateur normal.

3. Soit $H = L^2[0, 1]$ définissons un opérateur U sur H par

$$(U)[x(t)] = x(1 - t),$$

$$\langle Ux, x \rangle = \langle x(1 - t), x \rangle = \langle x, x \rangle = \langle x, (1 - t)^{-1}x \rangle = \langle x, U^*x \rangle.$$

Donc $UU^* = U^*U = I_H$ d'où, U est unitaire.

4. I_H : l'opérateur identité et O_H : l'opérateur nul sont opérateur positive car : si $\forall \varphi \in H$ alors

$$\langle I_H, \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0,$$

$$\langle O_H, \varphi \rangle = \langle 0, \varphi \rangle.$$

Définition 1.2.3 Un opérateur linéaire $P \in L(H)$ est appelé une **projection** si $P^2 = P$.

Si $M = R(P)$, alors P projection de H sur M et dans ce cas on obtient la décomposition suivante:

$$H = R(P) \oplus N(P) \text{ et pour tout } x \in H, \text{ on a : } x = Px + (I - P)x.$$

Si en outre P est auto-adjoint, alors P est appelé **projection orthogonale**.

Définition 1.2.4 On note P_X la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé X de H .

Si M et N sont deux sous-espaces fermés de H , on pose :

$$g(M, N) = \|P_M - P_N\|.$$

$$\delta(M, N) = \|(I - P_N)P_M\|.$$

Alors $g(M, N)$ définit une métrique sur la famille sous-espaces vectoriels fermés de H .

1.2.4 Opérateur compact

Définition 1.2.5 (Opérateurs linéaires compacts) Soit A un opérateur linéaire d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F , on dit que A est un **opérateur compact** s'il envoie tout ensemble borné Ω dans E à un ensemble relativement compact $A(\Omega)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(\Omega)}$ est compacte.

L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $K(E, F)$.

Proposition 1.2.4 (Critère de compacité) *Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite φ_n bornée de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F .*

Corollaire 1.2.2 *Un opérateur $A \in L(E, F)$ est dit de **rang fini** si $\dim R(A) < +\infty$.*

Remarque 1.2.1 *Un opérateur continu de rang fini est compact.*

Théorème 1.2.2

1. *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*
2. *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Preuve. Voir [21]. ■

Définition 1.2.6 *Soit E un espace normé, F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite des opérateurs compacts de E dans F . Si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors, A est compact.

1.3 Les opérateurs non bornés

1.3.1 Définition et propriétés

Définition 1.3.1 (Opérateur non borné) *Un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H est un couple $(D(A), A)$ où $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de H et A est un opérateur linéaire définie de $D(A)$ dans H , on dit que A est un opérateur **non borné** de domaine $D(A)$. Dans la suite, on supposera que $D(A)$ est dense dans H .*

Remarque 1.3.1 *Dans la pratique pour montrer qu'un opérateur A est non borné il suffit de trouver une suite $\{x_n\} \in D(A)$ telle que $\|x_n\| \leq M$ (pour une constante M et tout*

$n \in \mathbb{N}$) et $\|Ax_n\| \rightarrow \infty$.

Par conséquent on peut montrer qu'un opérateur A est non borné en trouvant une suite $\{x_n\} \in D(A)$ convergente vers 0 telle que la suite $\{Ax_n\}$ ne converge pas vers 0.

Exemple 1.3.1

1. Soit $E = F = \mathbb{C}([0, 1])$, opérateur A défini par

$$A : D(A) \subset E \rightarrow F \text{ tel que } Ax = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad D(A) = \mathbb{C}'([0, 1]),$$

A opérateur linéaire mais n'est pas continue. Nous considérons $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|x_n\|_\infty &= \max_{t \in [0, 1]} \|x_n(t)\| = \max_{t \in [0, 1]} \|t^n\| = 1, \\ \|Ax_n(t)\|_\infty &= \max_{t \in [0, 1]} \|nt^{n-1}\| = \frac{n}{n \rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Donc $\|Ax_n\|_\infty \not\leq c\|x_n\|_\infty$, alors l'opérateur A n'est pas borné.

2. On suppose $E = F = L^2(\mathbb{R})$. Alors, l'opérateur A défini par

$$Au(x) = xu(x),$$

de domaine

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que } xu \in L^2(\mathbb{R})\},$$

est non borné. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite u_n de $D(A)$ donnée par :

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \text{ ou } x > n + 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet :

$$\begin{cases} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \\ \text{et} \\ \|Au_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{3n^2 + 3n + 1}{3}}. \end{cases}$$

1.3.2 L'adjoint d'un opérateur non borné

Définition 1.3.2 (Opérateur densément défini) Soit H est un espace de Hilbert, un opérateur A de H dans H est dit **densément défini** si son domaine $D(A)$ est dense dans H .

C'est-à-dire

$$\overline{D(A)} = H.$$

Définition 1.3.3 (Domaine de l'adjoint) Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur dont le domaine est dense dans H . Le domaine de l'adjoint A^* de A est par définition

$$D(A^*) = \{v \in H : \text{il existe } C \geq 0 \text{ tel que } |\langle Au, v \rangle_H| \leq C\|u\|_H, \text{ pour tout } u \in D(A)\}.$$

Définition 1.3.4 (Adjoint d'un opérateur non borné) Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur H de domaine $D(A)$ dense. On définit l'adjoint A^* de A par

$$\langle Au, v \rangle_H = \langle u, A^*v \rangle_H, \quad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in D(A^*).$$

Proposition 1.3.1 Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur densément définie.

1) On dit que A est **symétrique** si $A \subset A^*$. C'est-à-dire

$$D(A) \subset D(A^*) \text{ et } Au = A^*u, \quad \forall u \in D(A).$$

Autrement dit,

$$\langle Au, v \rangle_H = \langle u, Av \rangle_H, \quad \forall u, v \in D(A).$$

2) On dit que A est **auto-adjoint** si $A = A^*$. C'est -à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = D(A^*), \\ \text{et} \\ Au = A^*u, \quad \forall u \in D(A) = D(A^*). \end{array} \right.$$

1.3.3 Opérations sur les opérateurs non bornés

Soient S et T sont des opérateurs dans E à valeurs dans F et R est un opérateur de F dans Z tel que E, F et Z sont des espaces de Banach. Alors

- La somme $S + T$ est définie par

$$\begin{aligned} D(S + T) &= D(S) \cap D(T). \\ (S + T)x &= Sx + Tx, \quad \forall x \in D(S + T). \end{aligned}$$

- L'opérateur produit (ou composition) RT est défini par

$$\begin{aligned} D(RT) &= \{x \in D(T), Tx \in D(R)\}. \\ (RT)x &= R(Tx), \forall x \in D(RT). \end{aligned}$$

- La multiplication de T par un scalaire λ est définie comme l'opérateur

$$\begin{aligned} \lambda T &: D(T) \rightarrow E \\ x &\rightarrow \lambda Tx \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} \text{si } \lambda = 0, & \text{ alors } D(\lambda T) = E. \\ \text{si } \lambda \neq 0, & \text{ alors } D(\lambda T) = D(T). \end{aligned}$$

- Associativité

$$(R + S) + T = R + (S + T).$$

1.3.4 Opérateurs fermés

Définition 1.3.5 (Graphe d'un opérateur) Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur. Le graphe de A est sous-espace vectoriel noté $G(A)$ de $H \times H$ défini par

$$G(A) = \{ (\varphi, A\varphi) \text{ telle que } \varphi \in D(A) \}.$$

Cette notion est importante puisqu'un opérateur est complètement déterminé par son graphe. Ainsi, pour des opérateurs A et B , on a

$$A = B \text{ (resp. } A \subseteq B) \text{ si et seulement si } G(A) = G(B) \text{ (resp. } G(A) \subseteq G(B)).$$

Définition 1.3.6 (Norme du graphe d'un opérateur) Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$. Il est clair que

$$\langle u, v \rangle_{D(A)} = \langle u, v \rangle_H + \langle Au, Av \rangle_H, \forall u, v \in D(A),$$

définie un produit scalaire dans le domaine $D(A)$. La norme correspondant

$$\|u\|_{D(A)} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2}, \forall u \in D(A),$$

est appelée la norme du graphe de l'opérateur A . Elle est équivalente à la norme

$$\|u\|_{D(A)} := \|u\|_H + \|Au\|_H, \quad \forall u \in D(A),$$

dans $D(A)$.

Définition 1.3.7 (Opérateurs fermés) Soit H un espace de Hilbert, $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est dit **fermé** si pour toute suite φ_n de $D(A)$ telle que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans H et $A\varphi_n \rightarrow \psi$ dans H . On a alors

$$\varphi \in D(A) \quad \text{et} \quad A\varphi = \psi.$$

C'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n \in D(A) \\ \varphi_n \rightarrow \varphi \\ A\varphi_n \rightarrow \psi \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in D(A) \\ A\varphi = \psi \end{array} \right. .$$

L'ensemble des opérateurs linéaires fermés de H dans H et à domaines denses est noté $C(H)$.

Proposition 1.3.2 Soient E et F deux espaces de Banach et un opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow F$. Alors A est fermé si et seulement si son graphe $G(A)$ est un sous-espace fermé de $E \times F$.

Exemple 1.3.2 Soit A un opérateur non borné défini sur $H^1(]0, 1[)$ avec $A = -i\frac{d}{dx}$, où $H^1(]0, 1[)$ est l'espace de Sobolev d'indice 1.

$$H^1(]0, 1[) := \{f \in L^2(]0, 1[), f' \in L^2(]0, 1[)\}.$$

Alors A est un opérateur fermé.

Théorème 1.3.1 Soient E et F deux espaces de Banach et un opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow F$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. A est fermé.
2. Le graphe $G(A)$ est un sous-espace fermé $E \times F$.
3. $(D(A), \|\cdot\|_A)$ est complet, ou $(D(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.3.2 (Théorème du graphe fermé) Soient E et F deux espaces de Banach et Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. On suppose que le graphe de A est fermé dans $E \times F$. Alors A est continu.

Proposition 1.3.3 Soient E et F deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur fermé. Alors A est borné si et seulement si $D(A) = E$.

Preuve. En appliquant le théorème du graphe fermé. ■

Lemme 1.3.1 Tout opérateur borné $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ est fermé.

Preuve. Supposons que $(u_n) \in D(A)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans E avec $Au_n \rightarrow v$ dans F . Comme A est borné donc $D(A) = E$. Alors d'après la continuité de A il est clair que $u \in D(A)$ et $Au = v$. ■

Proposition 1.3.4 Soit A un opérateur fermé de E dans F de domaine $D(A)$. Alors, son noyau $N(A)$ est un sous espace fermé.

Preuve. En effet, si $\varphi_n \in N(A)$ est une suite convergente vers φ dans E ,

$$A\varphi_n = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

puisque A est fermé, on a

$$\varphi \in D(A) \text{ et } A\varphi = 0, \text{ donc } \varphi \in N(A) .$$

■

Lemme 1.3.2 Soit $A \in C(H)$. Alors

(i) $N(A^*) = R(A)^\perp$.

(ii) $R(A)$ est fermé si et seulement si $R(A^*)$ est fermé dans H .

(iii) $H = N(A^*) \oplus R(A)$ si et seulement si $R(A)$ est un sous-espace fermé de H .

Chapitre 2

Théorie spectrale des opérateurs

Dans ce chapitre, on définit les notions de spectre et de valeur propre d'un opérateur linéaire et on en donne leurs propriétés élémentaires.

2.1 Théorie spectrale d'opérateurs bornés

Dans cette section, on étudiera en général la notion de spectre d'un opérateur. Soit E un espace de Banach complexe et $A : E \rightarrow E$ un opérateur borné.

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 Soit $A \in L(E)$.

- On appelle ensemble **résolvant** de A l'ensemble

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) \text{ est inversible}\}.$$

C'est-à-dire

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel que } (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe et borné sur } E\}.$$

Un élément de $\rho(A)$, est appelé valeur résolvante de l'opérateur A .

- Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la **résolvante** $R_\lambda(A)$ de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

La résolvante $R_\lambda(A)$ est simplement notée R_λ .

- Le **spectre** $\sigma(A)$ de A est l'ensemble

$$\begin{aligned}\sigma(A) & : = \mathbb{C} \setminus \rho(A), \\ & = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ n'est pas inversible} \}.\end{aligned}$$

Un élément de $\sigma(A)$ est une valeur spectrale de A .

- On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de A si $\lambda I - A$ n'est pas injectif. Autrement dit, l'ensemble des valeurs propres $Vp(A)$ de A est donné par :

$$Vp(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } N(\lambda I - A) \neq \{0\} \}.$$

Remarque 2.1.1

- * $\sigma(A) \cup \rho(A) = \mathbb{C}$.
- * $\sigma(A) \cap \rho(A) = \emptyset$.

Définition 2.1.2 (Spectre ponctuel) On appelle spectre ponctuel de A l'ensemble des valeurs propres A noté $\sigma_p(A)$ tel que

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) & = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ non injectif} \}, \\ & = \{ \lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - A) \neq \{0\} \}.\end{aligned}$$

Définition 2.1.3 (Spectre résiduel) On appelle spectre résiduel de A et on note par $\sigma_r(A)$, l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est injectif et } R(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense dans } E \}.$$

Définition 2.1.4 (Spectre continu) On appelle spectre continu de A et on note par $\sigma_c(A)$, l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est injectif et } R(\lambda I - A) \text{ est dense dans } E \}.$$

Définition 2.1.5 (Le spectre) Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A).$$

Lemme 2.1.1 Soit A un opérateur borné de E . Alors

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Preuve. Soit A un opérateur borné de E . Alors

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} \left(I - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n.$$

(car la série est normalement convergente). ■

Remarque 2.1.2

1. Les définitions ci-dessus restent valables même si E n'est pas un Banach.
2. L'ensemble des valeurs propres est aussi appelé spectre ponctuel et est parfois noté $\sigma_p(A)$.
3. On a toujours $Vp(A) \subset \sigma(A)$.
4. Si E est de dimension finie, $\lambda I - A$ est inversible si et seulement si $N(\lambda I - A) = \{0\}$. En particulier, on en déduit $Vp(A) = \sigma(A)$. La situation est plus délicate en dimension infinie comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 2.1.1 Soient $E = C([0, 1], \mathbb{C})$ et A l'opérateur de Volterra défini sur E par

$$\forall f \in E, Af(x) := \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0, 1].$$

Alors, on a $N(A) = \{0\}$ et $R(A) = \{g \in C^1([0, 1], \mathbb{C}) : g(0) = 0\}$. En particulier A est injectif donc $0 \notin Vp(A)$ mais non surjectif donc $0 \in \sigma(A)$.

Lemme 2.1.2 Soit $A \in L(E)$. λ valeur propre de A alors $\lambda \in \sigma(A)$.

Preuve. Soit λ valeur propre de A alors $\exists x \neq 0$,

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0 \Leftrightarrow x \in N(\lambda I - A), x \neq 0. \\ &\Leftrightarrow N(\lambda I - A) \neq \{0\} \text{ non injectif.} \end{aligned}$$

Donc $\lambda I - A$ est non inversible et alors $\lambda \in \sigma(A)$. ■

Définition 2.1.6 (Rayon spectral) Soit $A \in L(E)$. On appelle rayon spectral de A , et on note $r(A)$, la quantité:

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Exemple 2.1.2 Sur l'espace $E = L^2([0, 1])$, on considère l'opérateur de multiplication par x

$$A(f)(x) = xf(x).$$

On a $\|A\| = 1$ et donc

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}.$$

Alors, $\sigma(A) = [0, 1]$ et $r(A) = 1$.

Proposition 2.1.1 La formule suivante est valable pour tout opérateur $A \in L(E)$

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Preuve. Voir [1]. ■

Lemme 2.1.3 Pour $A \in \mathcal{L}(E)$, la suite $\left(\|A_n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans \mathbb{R}_+ et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|A_n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|.$$

Proposition 2.1.2 Soit $A \in L(E)$. Alors

- 1) $\rho(A)$ est un ouvert non vide de \mathbb{C} .
- 2) $\sigma(A)$ est un compact de \mathbb{C} .
- 3) $\overline{Vp(A)} \subset \sigma(A)$.
- 4) Si $|\lambda| > \|A\|$ alors $\lambda \in \rho(A)$. En particulier, on a $\sigma(A) \subset \overline{D(0, \|A\|)}$.

Définition 2.1.7 (Identité de la résolvante) Soient $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Alors, on a

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A).$$

De plus, l'application $\lambda \rightarrow R_\lambda$ est dérivable sur $\sigma(A)$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = -R_\lambda^2.$$

Théorème 2.1.1 Soit $A \in L(H)$. Alors l'ensemble résolvant de A est ouvert et l'application $\lambda \in \rho(A) \rightarrow R_\lambda(A) \in L(H)$ est **analytique** sur $\rho(A)$.

Preuve. On rappelle que si $a \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$ sont tels que $|\lambda - \lambda_0| < |a - \lambda_0|$, alors

$$\frac{1}{\lambda - a} = \frac{1}{\lambda_0 - a} \times \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - a}} = \frac{1}{\lambda_0 - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - a} \right)^n.$$

Soient à présent $\lambda_0 \in \rho(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(A)\|}$. On définit, par analogie avec ce qui précède,

$$\tilde{R}_\lambda(A) := R_{\lambda_0}(A) \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1}(A).$$

Par complétude, la série converge en norme dans $\mathcal{L}(H)$. Par un calcul direct, on a

$$(\lambda I - A) \tilde{R}_\lambda(A) = \tilde{R}_\lambda(A) (\lambda I - A) = I.$$

Ainsi, λ est dans l'ensemble résolvant, qui est donc ouvert et $\tilde{R}_\lambda(A) = R_\lambda(A)$, ce qui prouve l'analyticité de $R_\lambda(A)$. ■

Lemme 2.1.4 Soient $A \in L(H)$ et P un polynôme de degré n à coefficients complexes,

avec $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Alors

1. Si A est inversible alors $\sigma(A^{-1}) = (\sigma(A))^{-1} = \{\lambda^{-1}, \lambda \in \sigma(A)\}$.

2. Le spectre de $P(A)$ est $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)) = \{P(x), x \in \sigma(A)\}$.

2.1.2 Propriétés spectrales de l'adjoint

Proposition 2.1.3 Soit H un espace de Hilbert complexe, $A \in L(H)$ et $A^* \in L(H)$ l'adjoint de A . Alors

1) $\rho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \rho(A)\}$ et $\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \bar{\lambda} \in \sigma(A)\}$.

2) pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$, on a $R_\lambda(A^*) = (R_{\bar{\lambda}}(A))^*$.

Preuve.

1) On a l'équivalence $(\lambda I - A^*)$ est inversible si et seulement si $(\lambda I - A^*)^*$ est inversible.

Où $(\lambda I - A^*)^* = \bar{\lambda}I - A$ donc

$$\begin{aligned} \rho(A^*) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A^* \text{ est inversible}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda}I - A \text{ est inversible}\}, \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \rho(A)\}. \end{aligned}$$

De plus, $\sigma(A^*) = \mathbb{C} \setminus \rho(A^*)$, ce qui donne le résultat.

2) Si $\lambda \in \rho(A^*)$ alors

$$\begin{aligned} R_\lambda(A^*) &= (\lambda I - A^*)^{-1} = \left((\overline{\lambda} I - A)^* \right)^{-1}, \\ &= \left((\overline{\lambda} I - A)^{-1} \right)^* = (R_{\overline{\lambda}}(A))^*. \end{aligned}$$

■

2.1.3 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

Proposition 2.1.4 (Valeurs propres des opérateurs auto-adjoints) Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, un opérateur auto-adjoint. Alors

- 1) $V_p(A) \subset \mathbb{R}$.
- 2) $\lambda \in V_p(A)$ si et seulement si $\overline{R(\lambda I - A)} \neq H$.
- 3) Si $\lambda, \mu \in V_p(A)$, avec $\lambda \neq \mu$, alors $N(\lambda I - A) \perp N(\mu I - A)$, i.e., les sous-espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Théorème 2.1.2 (Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints) On suppose $H \neq \{0\}$. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m := \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} \langle Ax, x \rangle \quad \text{et} \quad M := \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} \langle Ax, x \rangle .$$

Alors,

1. $m, M \in [-\|A\|, +\|A\|] \subset \mathbb{R}$.
2. $m, M \in \sigma(A)$.
3. $\sigma(A) \subset [m, M]$.
4. $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x \rangle|, x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$. En particulier, $\|A\| = \max(|m|, |M|)$.

Preuve. Voir [16] ■

2.2 Spectre des opérateurs non bornés

Beaucoup de définitions et de résultats exposés dans les sections précédentes sont encore valables pour des opérateurs non bornés, à condition qu'ils soient fermés. Commençons par un résultat important pour définir le spectre d'un opérateur.

2.2.1 Définition et propriétés

Définition 2.2.1 Soit $(D(A), A)$ opérateur non borné sur un Hilbert H de domaine dense.

On définit

- L'ensemble résolvant de A

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } (\lambda I - A) : D(A) \rightarrow H \text{ bijection d'inverse borné}\}.$$

- Le spectre de A

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A).$$

- La résolvente de A

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Remarque 2.2.1

- Si A est **borné**, son **spectre** est un ensemble **compact non vide**.
- Si A est **non borné**, son **spectre** est un ensemble **fermé**, il se peut que $\sigma(A)$ soit **vide**.

Si un opérateur linéaire A a un ensemble résolvant non vide, alors il est fermé.

Lemme 2.2.1 $R_\lambda(A)$ est borné de $R(\lambda I - A)$ dans $D(A)$ c'est-à-dire $\exists C > 0$ tel que

$$\|R_\lambda(A)u\|_H \leq C\|u\|_H, \quad \forall u \in R(\lambda I - A).$$

Remarque 2.2.2 On déduit que le spectre $\sigma(A)$ d'un opérateur non borné est comme le cas d'un opérateur borné, i.e. l'union disjointe de trois sous ensembles

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Proposition 2.2.1 Soient E, F deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur fermé. Les assertions suivantes sont équivalentes

- 1) A est injectif d'inverse $A^{-1} : R(A) \rightarrow D(A)$ borné.
- 2) Il existe $m > 0$ tel que $\|A\varphi\|_F \geq m\|\varphi\|_E$, pour tout $\varphi \in D(A)$.
- 3) $R(A)$ est fermé dans F et $N(A) = \{0\}$.

Proposition 2.2.2 Le spectre d'un opérateur fermé A d'un espace de Banach complexe E dans lui-même est une partie fermée de \mathbb{C} , et l'application $\lambda \rightarrow R_\lambda := R_\lambda(A)$ est analytique (ou holomorphe) sur $\rho(A)$.

2.2.2 Spectre des opérateurs compacts

Proposition 2.2.3 Soient E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$. Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact, et

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|].$$

Preuve. Voir [5]. ■

Remarque 2.2.3 Il est clair que $V_p(A) \subset \sigma(A)$. En général l'inclusion est stricte. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$N(\lambda I - A) = \{0\} \quad \text{et} \quad R(\lambda I - A) \neq E.$$

(Un tel λ appartient au spectre mais n'est pas une valeur propre). Par exemple, prenons dans $E = l^2$, $Au = (0, u_1, u_2, \dots)$ où $u = (u_1, u_2, \dots)$ (i.e. A est le **Shift à droite**). Alors $0 \in \sigma(A)$ et $0 \notin V_p(A)$.

Théorème 2.2.1 Soit E un espace de Banach, $A \in K(E)$ avec $\dim E = \infty$. Alors on a

1. $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma(A) \setminus \{0\} = V_p(A) \setminus \{0\}$.
3. l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(A) = \{0\}$.
 - ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est fini.
 - ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Preuve. Voir [5]. ■

Chapitre 3

Inverses généralisés

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'inverse généralisé d'opérateur et en particulier celle de l'inverse de Moore-Penrose. En particulier en dimension finie, l'inverse généralisé d'une matrice non carrée ou celle d'une matrice carrée dont le déterminant est nul peut exister. Ces matrices ne sont pas inversibles au sens classique.

3.1 Inversibilité d'opérateurs

3.1.1 L'inverse d'un opérateur borné

Définition 3.1.1 Soit $A \in L(H)$, on dit que A est inversible si'il existe un opérateur $S \in L(H)$ qui vérifie:

$$AS = SA = I_H.$$

S est dit l'inverse de A et on note $S = A^{-1}$.

Exemple 3.1.1 L'opérateur I_H est inversible, et $I_H^{-1} = I_H$.

Théorème 3.1.1 Soit H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$ un opérateur. Si $\dim(H) < \infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. A est inversible.
2. A est injectif.
3. A est surjectif.

4. A admet un inverse à droite (i.e, il existe $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que $A \circ U = I_H$).

5. A admet un inverse à gauche (i.e, il existe $V \in \mathcal{L}(H)$ tel que $V \circ A = I_H$).

Remarque et contre-exemple : Attention si $\dim H = +\infty$, les propriétés équivalentes du théorème précédent ne sont plus vraies.

Soit $H = l^2$, l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, muni de sa norme $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ avec $x = (x_n)_{n \geq 1}$. Considérons l'application $S : l^2 \rightarrow l^2$ définie pour tout $x = (x_n)_{n \geq 1}$, par $Sx = y = (y_n)_{n \geq 1}$ où

$$y_1 = 0, y_2 = x_1, \dots, y_n = x_{n-1}, \dots \quad (n \geq 1).$$

Autrement dit Sx est composée des mêmes termes que la suite x mais décalés d'un rang.

L'application S est linéaire de l^2 dans lui-même et c'est une isométrie puisque

$$\|Sx\|_2 = \|x\|_2.$$

Donc $S \in L(l^2)$. On appelle S l'opérateur de décalage dans l^2 . On voit alors facilement que:

1) S est injective (car isométrique).

2) S n'est pas surjective.

3) S admet un inverse à gauche $T : x = (x_n)_{n \geq 1} \rightarrow Tx = (x_{n+1})_{n \geq 1}$.

4) L'opérateur T n'est pas un inverse à droite de l'opérateur S .

Théorème 3.1.2 Si A, B et C sont trois opérateurs tels que $AB = CA = I$, alors $B = C$ et A est inversible.

Preuve. $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Il découle que A est inversible, et son inverse B est unique et on a $AB = BA = I$. On peut aussi dire que $B = A^{-1}$.

Si les opérateurs A^{-1} , AB et A^n sont inversibles alors

$$(A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ et } (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n, \text{ pour tout entier positif } n.$$

■

Lemme 3.1.1 Si A est un opérateur et α est un réel positif tel que $\|Ax\| \geq \alpha\|x\|$ pour tout vecteur x alors l'image de A , $R(A)$ est un sous-espace vectoriel fermé.

Théorème 3.1.3 *Un opérateur A est inversible si et seulement si son image est dense dans H . (C'est-à-dire $\overline{R(A)} = H$) et il existe un réel positif α tel que $\|Ax\| \geq \alpha\|x\|$, $\forall x \in H$.*

Preuve. Supposons que A est inversible et si $y \in H$, on écrit $x = A^{-1}y$ comme $y = Ax$, il découle que $R(A)$ n'est pas uniquement dense dans H mais coïncide avec H . On en déduit que pour tout vecteur $x \in H$,

$$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\|.$$

C'est-à-dire que la condition du théorème est vérifiée pour $\alpha = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

Inversement, supposons que $\overline{R(A)} = H$ et que $\|Ax\| \geq \alpha\|x\|$, pour tout vecteur x . D'après le (Lemme) précédent on trouve que $R(A) = H$. Si

$$Ax_1 = Ax_2 \implies Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) = 0,$$

alors

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \geq \alpha\|x_1 - x_2\| \implies x_1 = x_2.$$

Ceci est vrai pour tout $y \in H$, $y = Ax$ pour un certain $x \in H$, mais aussi il existe une transformation uniforme B de H dans lui-même définie par : $x = By$. B est linéaire et donc

$$\|y\| = \|Ax\| \geq \alpha\|x\| = \alpha\|By\|.$$

Par conséquent B est opérateur et que $\|B\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

Les relations $ABy = Ax = y$ et $BAy = By = x$ montre que $AB = BA = I$ et donc que A est inversible et que $B = A^{-1}$.

Soit $Y_n = Ax_n$, $n = 1, 2, \dots$, et $Y_n \longrightarrow y$, alors, on a

$$\|Y_n - Y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \geq \alpha\|x_n - x_m\|, \text{ pour tout } n, m.$$

On en déduit que (x_n) est une suite de cauchy, il existe un vecteur x tel que $x_n \longrightarrow x$. Comme l'opérateur A est continu, alors $y = Ax$ et par conséquent $y \in R(A)$. Donc $R(A)$ est fermée. ■

Proposition 3.1.1 *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $A \in L(E, F)$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) L'application A est injective d'image fermée.
(ii) Il existe un nombre $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\|Ax\| \geq c\|x\|$.
(iii) Il n'existe pas de suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = 0$.

Preuve. Voir [17]. ■

Remarque 3.1.1 Si un opérateur **borné** A de E dans F est inversible, il possède les deux propriétés suivantes:

- (a) Il existe une constant $c > 0$ tel que $x \in E$ on ait $\|Ax\| \geq c\|x\|$.
(b) On a $\overline{R(E)} = F$.

La deuxième propriété (b) est une forme faible de surjectivie l'image de A est dense dans F , c'est évidemment vrai quand A est inversible, puisque alors A est surjectif. De plus, lorsque A est inversible, la propriété (a). Est vraie avec $c = \|A^{-1}\|^{-1} > 0$, en effet, on a pour tout $x \in E$, lorsque A^{-1} existe dans $L(E, F)$:

$$\|x\| = \|A^{-1}(Ax)\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\|.$$

Lemme 3.1.2 Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur $A \in L(E, F)$ est inversible si et seulement si il vérifie (a) et (b).

Proposition 3.1.2 Un opérateur $A \in L(H)$ est inversible si et seulement si A^* est inversible, et alors on a

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Preuve. Si $A \in L(H)$ est inversible alors, on a A inversible $\iff AA^{-1} = A^{-1}A = I_H$, on passe à l'adjoint

$$(A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I_H^* = I_H,$$

et

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^* A^* = I_H,$$

d'où $A^* \in L(H)$ est inversible et

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Réciproquement, si $A^* \in L(H)$ est inversible alors l'étape précédente montre que $(A^*)^* = A \in L(H)$ est inversible. ■

Théorème 3.1.4 Soit $A \in L(H)$. Si $\|A\| < 1$ alors l'opérateur $I_H - A$ est inversible, et on a

$$(I_H - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n.$$

Preuve. Voir [16]. ■

3.1.2 L'inverse d'un opérateur non borné

Définition 3.1.2 (Inverse d'un opérateur non borné) Soient H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire bijectif. On définit l'opérateur A^{-1} défini de H dans H tel que

$$\begin{aligned} AA^{-1}v &= v, \quad \forall v \in H, \\ A^{-1}Au &= u, \quad \forall u \in D(A). \end{aligned}$$

L'opérateur A^{-1} est dit l'inverse de A .

Remarque 3.1.2 L'inverse de l'opérateur A s'il existe est unique.

Théorème 3.1.5 L'inverse d'un opérateur fermé est fermé.

Preuve. Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur fermé, alors

$$G(A) = \{(\varphi, A\varphi) : \varphi \in D(A)\},$$

est fermé, d'où

$$G(A^{-1}) = \{(A\varphi, \varphi) : \varphi \in D(A)\},$$

est fermé. Ceci montre que A^{-1} est fermé. ■

3.1.3 Opérateurs à images fermées

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la caractérisation de la classe des opérateurs linéaires à images fermées dans H .

Ascente et descente

Rappelons que les noyaux et les images des itérés d'un opérateur linéaire A sur H , forment respectivement deux suites croissante et décroissante de sous-espace vectoriel de H :

$$N(A^0) = \{0\} \subseteq N(A) \subseteq N(A^2) \subseteq \dots \subseteq N(A^n).$$

$$R(A^0) = H \supseteq R(A) \supseteq R(A^2) \supseteq \dots \supseteq R(A^n).$$

Généralement ses inclusions sont strictes. Mais s'il existe un certain rang à partir duquel ces suites deviennent constantes, alors on appelle

- **L'ascente** de A , le plus petit entier naturel $p = p(A)$ tel que

$$N(A^p) = N(A^{p+1}).$$

- **La descente** de A , le petit entier naturel $q = q(A)$ tel que

$$R(A^q) = R(A^{q+1}).$$

Remarque 3.1.3 Si la suite $(N(A_n))_n$ (respectivement $(R(A_n))_n$) est strictement croissante (respectivement strictement décroissante), on écrit $p(A) = +\infty$ (respectivement $q(A) = +\infty$). Il est clair que

$$p(A) = 0 \iff A \text{ est injectif.}$$

$$q(A) = 0 \iff A \text{ est surjectif.}$$

Définition 3.1.3 (La nullité et la déficience) Soit A un opérateur linéaire sur H . Alors

- La **nullité** de A est l'entier naturel $\alpha(A) = \dim N(A)$.
- La **déficience** de A est l'entier naturel $\beta(A) = \text{co dim } R(A) = \dim N(A^*)$.

Définition 3.1.4 (Conorme) Soit A un opérateur linéaire pas nécessairement borné. Alors on appelle **conorme** de A et on note $c(A)$ la quantité:

$$c(A) = \inf \left\{ \|Au\|; u \in D(A) \cap N(A)^\perp \text{ et } \|u\| = 1 \right\}.$$

$$(c(A) = \infty \iff A = 0).$$

Théorème 3.1.6 Soit $A \in C(H)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $R(A)$ est fermée dans H .
2. $R(A^*)$ est fermée dans H .
3. $R(A) = N(A^*)^\perp$.
4. $R(A^*) = N(A)^\perp$.
5. $c(A) > 0$.
6. $\beta(A) < +\infty$.

Théorème 3.1.7 Soit $A \in C(H)$ est à image fermée si et seulement si $\|Au\| \geq c\|u\|$ pour tout $u \in D(A) \cap N(A)^\perp$ avec c une constante strictement positive.

Preuve. En effet supposons que $\|Au\| \geq c\|u\|$ pour tout $u \in D(A) \cap N(A)^\perp$ est vérifiée. Soient $f_n \rightarrow f$, $f_n \in R(A)$ et u_n définie par $f_n = Au_n$, $u_n \in D(A) \cap N(A)^\perp$. On obtient $u_n - u_m \in D(A) \cap N(A)^\perp$ donc $\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{c}\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$.

Par conséquent $u_n \rightarrow u$, $Au_n \rightarrow f \implies u \in D(A)$, $Au = f$ car f est fermé et par conséquent $f \in R(A)$.

Réciproquement supposons que $R(A)$ est fermé.

L'application $D(A) \cap N(A)^\perp \rightarrow R(A); u \rightarrow Au$ est bijective. $A^{-1} : R(A) \rightarrow N(A)^\perp$ est borné et $D(A^{-1}) = R(A)$. ■

3.2 Inverses généralisés

3.2.1 Théorie des opérateurs fermés

Proposition 3.2.1 Soit $A \in C(H)$, Alors

- 1) $R(A)$ est fermée si et seulement si $c(A) > 0$.
- 2) On a $c(A) = c(A^*)$.

Définition 3.2.1 Soit A un opérateur fermé, alors A est dit **régulier** si $R(A)$ est fermée et

$$N(A^n) \subseteq R(A), \quad \forall n \geq 0.$$

Exemple 3.2.1

1. $A \in C(H)$, A surjectif.
2. $A \in C(H)$, A injectif avec $R(A)$ fermée.
3. A est un opérateur de **Kato** c'est-à-dire

$$V(A; I) = \infty \quad (\text{notation de } \mathbf{Kato})$$

et $R(A)$ est un sous-espace fermé. Alors

$$V(A; I) = \infty \iff N(A^n) \subseteq R(A), \quad \forall n > 0.$$

Lemme 3.2.1 Soient $A \in L(H)$ régulier et $B \in L(H)$ commutant avec A , alors

$$\|A - B\| < c(A) \implies B \text{ est régulier.}$$

Lemme 3.2.2 $A, B \in L(H)$ avec $AB = BA$. Alors

$$AB \text{ régulier} \implies A, B \text{ sont réguliers.}$$

Proposition 3.2.2 Soit $A \in L(H)$ régulier, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

- a) $\exists B \in L(H)$ résolvant généralisé de A en zéro commutant avec A .
- b) A est inversible.

Preuve. Voir [18]. ■

Définition 3.2.2 Soit A un opérateur fermé, notons $\text{reg}(A)$ l'ensemble **résolvante généralisé** (ou l'ensemble régulier) de A défini par

$$\text{reg}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, A \text{ admette un résolvant généralisé analytique dans un voisinage } v \text{ de } \lambda\}.$$

$\sigma_g(A) = \mathbb{C} \setminus \text{reg}(A)$ sera appelé le spectre généralisé de A .

Remarque 3.2.1

1. $\text{reg}(A)$ est ouvert dans \mathbb{C} .
2. $\rho(A) \subseteq \text{reg}(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)$ où $\sigma_r(A)$ et $\sigma_p(A)$ sont respectivement le spectre résiduel et le spectre ponctuel de A .
3. $\rho(A) = \text{reg}(A)$ si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :
 - i) $\dim H < +\infty$.
 - ii) A est normal.

Lemme 3.2.3 Soit $A \in L(H)$ alors on a

1. $R(A)$ fermé dans $H \iff R(AA^*)$ fermé dans H .
2. $N(A) = N(A^*A)$ et $N(A^*) = N(AA^*)$.

Proposition 3.2.3 On dit que $A \in C(H)$ est inversible à gauche s'il existe un opérateur $U \in L(H)$ tel que $U \circ A = I$. Il est alors nécessairement injectif.

On dit qu'il est inversible à droite s'il existe un opérateur $V \in L(H)$ tel que $A \circ V = I$. Il est alors nécessairement surjectif.

Définition 3.2.3 Un opérateur $A \in C(H)$ est dit **monojectif** si et seulement si il est soit inversible à gauche, soit à droite.

Remarque 3.2.2

1. $A \in C(H)$ est inversible à gauche si et seulement si $N(A) = \{0\}$ et $R(A)$ fermé.
2. $A \in C(H)$ est inversible à droite si et seulement si $R(A) = H$ (c'est-à-dire A est surjectif).

Lemme 3.2.4 Si A est monojectif et $S \in L(H)$ alors

$$\|A - S\| \leq c(A) \implies S \text{ est monojectif.}$$

Preuve. Voir [18]. ■

Corollaire 3.2.1 L'ensemble des opérateur monojectif est ouvert dans $L(H)$.

Preuve. Le (lemme) précédent implique que l'ensemble des opérateurs inversibles à gauche et l'ensemble des opérateurs inversibles à droite sont ouverts et donc l'ensemble des opérateurs monojectifs est ouvert. ■

Corollaire 3.2.2 Soit $A, B \in C(H)$. Alors si $R(A) + N(B)$ est fermé et si $R(A) \cap N(B) = \{0\}$, $R(A)$ est fermé.

3.3 L'inverse généralisé de Moore-Penrose

La notion d'inverse généralisé généralise celle d'inverse. Dans cette section on étudiera l'inverse de **Moore-Penrose**.

3.3.1 Cas d'un espace de Hilbert

Soit maintenant H un espace de Hilbert sur \mathbb{C} et si $A \in C(H)$ notons A^* son adjoint.

Définition 3.3.1 Soit $A \in C(H)$. On dit que $B \in C(H)$ est un *inverse généralisé* de A et on note $B(INV)A$ si

$$R(B) \subseteq D(A), \quad R(A) \subseteq D(B).$$

- Pour tout $u \in D(A)$, $ABAu = Au$.
- Pour tout $v \in D(B)$, $BABv = Bv$.

Remarque 3.3.1 La relation (INV) est symétrique c'est-à-dire que $A(INV)B \iff B(INV)A$.

Lemme 3.3.1 Soit $A, B \in C(H)$, $A(INV)B$. Alors

- a) AB est une projection de $D(B)$ sur $R(A)$ de noyau $N(B)$.
- b) BA est une projection de $D(A)$ sur $R(B)$ de noyau $N(A)$.

Preuve. Voir [24]. ■

Proposition 3.3.1 Tout opérateur linéaire admet un inverse généralisé.

Exemple 3.3.1 Soit A l'opérateur linéaire de $C([1, 0])$ dans lui-même, défini par

$$A(x(t)) = t(x^2).$$

On définit B de $C([1, 0])$ dans lui-même par

$$B(x(t)) = x(\sqrt{t}).$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} ABA(x(t)) &= AB(x(t^2)) = A(x(t)). \\ BAB(x(t)) &= BA(x(\sqrt{t})) = B(x(t)). \end{aligned}$$

Alors B est un inverse généralisé de A .

Corollaire 3.3.1 Soit $A, B \in C(H)$, avec $A(INV)B$. Alors AB considéré comme un opérateur de H dans lui-même, est fermé si et seulement si $R(A)$ est fermé.

Corollaire 3.3.2 Soit $A, B \in C(H)$, avec $A(INV)B$. Alors $AB \in L(H)$ si et seulement si $R(A) \oplus N(B) = H$.

Définition 3.3.2 Soit $A, B \in C(H)$ tel que $A(INV)B$. On dira que B est un **inverse généralisé strict** de A et on note $B(INV.S)A$ si

$$\overline{R(A)} \oplus N(B) = \overline{R(B)} \oplus N(A) = H.$$

Remarque 3.3.2 La relation $(INV.S)$ est symétrique c'est-à-dire que:

$$A(INV.S)B \iff B(INV.S)A.$$

Lemme 3.3.2 Soit $A, B \in C(H)$ avec $A(INV.S)B$. Alors B est borné si et seulement si $R(A)$ est fermé dans H .

Lemme 3.3.3 Soit $A, B \in C(H)$ avec $A(INV)B$. Alors $A^*(INV)B^*$ et

$$D(B^*) \cap \overline{R(A^*)} = R(A^*), \quad D(A^*) \cap \overline{R(B^*)} = R(B^*). \quad (3.3.1)$$

Preuve. Voir [24]. ■

Définition 3.3.3 Soit $A \in C(H)$, P la projection orthogonale de H sur $\overline{R(A)}$ et Q la projection orthogonale de H sur $\overline{R(A^*)}$. Alors l'**inverse généralisé strict** B de A déterminé à partir de P et de Q selon les modalités du lemme précédent est appelé l'**inverse de Moore-Penrose** de A , ce qui se notera $A(IMP)B$. Il est facile de voir que l'**inverse de Moore-Penrose** d'un opérateur est unique, ce qui permet d'écrire également $A = IMP(B)$. On a alors $B = IMP(A)$.

Remarque 3.3.3 $\forall A, B \in C(H)$ tels que $A(IMP)B$ on trouve à partir de (3.3.1):

$$R(B^*) = \overline{R(A)} \cap D(A^*), \quad R(A^*) = \overline{R(B)} \cap D(B^*). \quad (3.3.2)$$

Définition 3.3.4 Si $A \in C(H)$, posons $R_A = (I + A^*A)^{-1}$. Alors $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$.

Lemme 3.3.4 Soit $A, B \in C(H)$ avec $A(IMP)B$. Alors

a) $AR_A = B^*R_{B^*}$.

b) $I - R_A = R_{B^*} - P_{N(B^*)}$.

Preuve. Voir [24]. ■

Corollaire 3.3.3 Sous les mêmes conditions, par symétrie entre A et B on a

c) $A^*R_{A^*} = BR_B$.

d) $I - R_{A^*} = R_B - P_{N(B)} \iff I - R_B = R_{A^*} - P_{N(A^*)}$.

Définition 3.3.5 Soit $G(A) = \{(u, Au) : u \in D(A)\}$ le graphe de A . La projection orthogonale sur $G(A)$ dans $H \times H$ est donnée par:

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^*R_{A^*} \\ AR_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.3.4 Soit $A, B \in C(H)$ avec $A(IMP)B$. Alors

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} P_{G(B)} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{N(B^*)} & 0 \\ 0 & -P_{N(B)} \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Cas d'une C^* Algèbre

Définition 3.3.6

1) Δ est **algèbre normée** si pour chaque $X \in \Delta$ il existe $\|X\| \in \mathbb{R}$ tel que :

- $\|X\| \geq 0, \|X\| = 0 \iff X = 0$.
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.
- $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$.

2) Si Δ est complète par rapport à la norme, c'est-à-dire Δ est un espace de Banach, Δ sera appelée algèbre de Banach.

3) Une application $*$ de Δ dans lui-même sera appelée une **involution** si elle vérifie :

- $(X^*)^* = X$.
- $(X + Y)^* = X^* + Y^*$.
- $(XY)^* = Y^*X^*$.
- $(\lambda X)^* = \bar{\lambda}X^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

4) Une algèbre Δ avec une involution $*$ sera appelée $*$ algèbre.

5) Une algèbre de Banach Δ sera appelée C^* algèbre si en outre :

$$\|X^*X\| = \|X\|^2, \forall X \in \Delta.$$

Définition 3.3.7 Soit $A \in \Delta$. On dira que $B \in \Delta$ est un **inverse généralisé** de A , ce qui sera noté $B(INV)A$ si

$$BAB = B \text{ et } ABA = A.$$

Remarque 3.3.4

- 1) Si $B(INV)A$ alors $A(INV)B$.
- 2) Si $A(INV)B$ alors $A^*(INV)B^*$.

Définition 3.3.8 Soit $A \in \Delta$. On dira que $B \in \Delta$ est un **inverse de Moore-Penrose** de A , ce qui sera noté $B(IMP)A$, si

- 1) $B(INV)A$.
- 2) $(AB)^* = AB$, $(BA)^* = BA$.

Remarque 3.3.5

- 1) Si $B(IMP)A$ alors $B(INV)A$.
- 2) Si $B(IMP)A$ alors $A(IMP)B$.
- 3) Si $B(IMP)A$ alors $B^*(IMP)A^*$.

Proposition 3.3.2 L'inverse de **Moore-Penrose** d'un élément de Δ , s'il existe est unique.

Preuve. Soit $B (IMP) A$ et $C (IMP) A$, alors d'après la définition précédent on a

$$\begin{cases} ABA = A \\ BAB = B \end{cases} \text{ et } \begin{cases} ACA = A. \\ CAC = C. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{cases} (AB)^* = AB \\ (BA)^* = BA \end{cases} \text{ et } \begin{cases} (AC)^* = AB. \\ (CA)^* = BA. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Alors

$$AB = AC. \quad (3.3.5)$$

En effet, d'après (3.3.3) et (3.3.4) on trouve

$$\begin{aligned} (AB - AC)(AB - AC)^* &= AB(AB)^* - AB(AC)^* - AC(AB)^* + AC(AC)^*, \\ &= ABAB - ABAC - ACAB + ACAC, \\ &= AB - AC - AB + AC = 0. \end{aligned}$$

Alors, $\|AB - AC\| = 0 \implies AB = AC$.

De manière analogue, on trouve que

$$BA = CA. \quad (3.3.6)$$

$B^* (IMP) A^*$ et $C^* (IMP) A^*$, alors par symétrie de (3.3.5) on obtient

$$A^*B^* = A^*C^*,$$

on en déduit (3.3.6). Alors

$$B = BAB = BACCAC = C.$$

■

Remarque 3.3.6 Comme B est unique, on peut écrire : $B = IMP(A)$.

Lemme 3.3.5 Soit $A \in L(H)$. Alors

$$c^2(A) = c(A^*A) = c(AA^*) = c^2(A^*).$$

Preuve. Si $A = 0$, alors $A^* = A^*A = AA^* = 0$ et par conséquent

$$c^2(A) = c(A^*A) = c(AA^*) = c^2(A^*) = 1.$$

Supposons donc que $A \neq 0$.

Premier cas : $c(A) > 0$.

Alors $R(A)$ est fermé, d'où

$$R(A) = N(A^*)^\perp. \quad (3.3.7)$$

Soit $u \in N(A)^\perp - \{0\}$, comme

$$\|Au\|^2 \leq \|A^*Au\| \|u\|. \quad (3.3.8)$$

On a

$$c^2(A) = \inf_{u \in N(A)^\perp - \{0\}} \frac{\|Au\|^2}{\|u\|^2} \leq \inf_{u \in N(A)^\perp - \{0\}} \frac{\|A^*Au\|}{\|u\|},$$

or $N(A) = N(A^*A)$, d'où

$$c^2(A) = \inf_{u \in N(A^*A)^\perp - \{0\}} \frac{\|A^*Au\|}{\|u\|} = c(A^*A).$$

Donc

$$c^2(A) \leq c(A^*A), \quad (3.3.9)$$

en outre

$$c(A^*A) = \inf_{u \in N(A^*A)^\perp - \{0\}} \frac{\|A^*Au\|}{\|u\|} = \inf_{u \in N(A^*A)^\perp - \{0\}} \left(\frac{\|A^*Au\|}{\|Au\|} \right) \left(\frac{\|Au\|}{\|u\|} \right).$$

En utilisant (3.3.8), on trouve

$$\frac{\|Au\|}{\|u\|} \leq \frac{\|A^*Au\|}{\|Au\|},$$

d'où

$$c(A^*A) \leq \inf_{u \in N(A^*A)^\perp - \{0\}} \left(\frac{\|A^*Au\|}{\|Au\|} \right)^2. \quad (3.3.10)$$

En utilisant (3.3.7), on trouve

$$\inf_{u \in N(A^*A)^\perp - \{0\}} \left(\frac{\|A^*Au\|}{\|Au\|} \right)^2 = \inf_{v \in N(A^*)^\perp - \{0\}} \left(\frac{\|A^*v\|^2}{\|v\|^2} \right) = c^2(A^*), \quad (3.3.11)$$

donc avec (3.3.10) et (3.3.11) on voit que

$$c(A^*A) \leq c^2(A^*). \quad (3.3.12)$$

De (3.3.9) et (3.3.12), $c(A^*) > 0$ et par symétrie entre A et A^* , on déduit

$$c^2(A^*) \leq c(AA^*), \quad (3.3.13)$$

$$c(AA^*) \leq c^2(A). \quad (3.3.14)$$

Et d'après (3.3.9), (3.3.12), (3.3.13), (3.3.14) on trouve

$$c^2(A) = c(A^*A) = c^2(A^*) = c(AA^*).$$

Cas 2 : $c(A) = 0$.

Supposons $c(A^*) > 0$, en vue de la symétrie entre A et A^* et en utilisant (3.3.9), (3.3.12) on en déduit que $c(A) > 0$ contradiction, donc

$$c(A) = c(A^*) = 0.$$

Par ailleurs, on a toujours :

$$c(A^*A) = \inf_{u \in N(A^*A)^\perp - \{0\}} \frac{\|A^*Au\|}{\|u\|} \leq \inf_{u \in N(A)^\perp - \{0\}} \frac{\|A\|\|Au\|}{\|u\|},$$

alors

$$c(A^*A) \leq \|A\|c(A).$$

D'où, $c(A^*A) = 0$. De même : $c(AA^*) \leq \|A\|c(A^*)$ et on en déduit que $c(AA^*) = 0$. ■

Proposition 3.3.3 Soit $A \in \Delta$. Si $c(A) > 0$ alors $B = IMP(A)$ existe.

Preuve. Si $A = 0$ on prend $B = 0$.

Si $A \neq 0$, $0 < c(A) \leq \|A\|$ et conséquent $0 \leq 1 - \frac{c^2(A)}{\|A^*A\|} < 1$.

La série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(I - \frac{A^*A}{\|A^*A\|} \right)^j \frac{A^*}{\|A^*A\|} \text{ est normalement convergente dans } \Delta.$$

Donc si on pose

$$B = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(I - \frac{A^*A}{\|A^*A\|} \right)^j \frac{A^*}{\|A^*A\|}, \text{ alors } B \in \Delta.$$

En outre

$$ABA = A \text{ et } BAB = B. \quad (3.3.15)$$

En effet,

$$\begin{aligned} ABA &= \sum_{j=0}^{+\infty} A \left(I - \frac{A^*A}{\|A^*A\|} \right)^j \frac{A^*A}{\|A^*A\|} = \sum_{j=0}^{+\infty} A \left[\sum_{p=0}^j C_j^p I^{j-p} \left(\frac{A^*A}{\|A^*A\|} \right)^p \right] \frac{A^*A}{\|A^*A\|}, \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} A \left[\sum_{p=0}^j C_j^p \frac{AA^* \cdot AA^* \cdot AA^* \cdots AA^*}{\|A^*A\|^p} \right] \frac{A^*A}{\|A^*A\|} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\sum_{p=0}^j C_j^p \frac{(AA^*)^p}{\|A^*A\|^p} \right] \frac{AA^*A}{\|A^*A\|}, \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} A \left(I - \frac{AA^*}{\|AA^*\|} \right)^j \left[I - \left(I - \frac{AA^*}{\|AA^*\|} \right) \right], \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} A \left(I - \frac{AA^*}{\|AA^*\|} \right)^j - \sum_{j=1}^{+\infty} A \left(I - \frac{AA^*}{\|AA^*\|} \right)^j, \\ &= A. \end{aligned}$$

Et comme les deux séries convergent, donc $ABA = A$.

Posons

$$B_n = \sum_{j=0}^n \left(I - \frac{A^*A}{\|A^*A\|} \right)^j \frac{A^*}{\|A^*A\|}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$B = \lim_n B_n \text{ et } B_n = A^* \sum_{j=0}^n \left(I - \frac{AA^*}{\|AA^*\|} \right)^j \frac{1}{\|AA^*\|}.$$

Comme $BAB = \lim_n BAB_n$ et $BAA^* = A^*B^*A^* = A^*$, on trouve :

$$\begin{aligned} BAB &= \lim_n BAA^* \sum_{j=0}^n \left(I - \frac{AA^*}{\|AA^*\|} \right)^j \frac{1}{\|AA^*\|} = \lim_n A^* \sum_{j=0}^n \left(I - \frac{AA^*}{\|AA^*\|} \right)^j \frac{1}{\|AA^*\|}, \\ &= \lim_n \sum_{j=0}^n \left(I - \frac{A^*A}{\|A^*A\|} \right)^j \frac{A^*}{\|AA^*\|} = \lim_n B_n = B. \end{aligned}$$

Finalement, comme AB et BA sont des limites d'opérateur hermitiens, alors

$$(AB)^* = AB \text{ et } (BA)^* = BA. \quad (3.3.16)$$

De (3.3.15) et (3.3.16) on déduit que $B(IMP)A$. ■

Proposition 3.3.4 Soit $A, B \in \Delta$ avec $B(INV)A$. alors

$$\exists C \in \Delta \text{ tel que } C = IMP(A).$$

Preuve. Comme $B(INV)A$, alors par définition on a : $ABA = A$ et $BAB = B$.
D'où on déduit que AB et BA sont des projections, donc

$$c(AB) \geq 1 \text{ et } c(BA) \geq 1. \quad (3.3.17)$$

Par conséquent il existe D et E tels que

$$D = IMP(AB) \text{ et } E = IMP(BA). \quad (3.3.18)$$

On a alors

$$AB = ABDAB \text{ et } BA = BAEBA. \quad (3.3.19)$$

$$(ABD)^* = ABD \text{ et } (EBA)^* = EBA. \quad (3.3.20)$$

On en déduit d'après (3.3.19)

$$\begin{aligned} AEB &= ABAEBAB = ABAB = AB \text{ et} \\ BDA &= BABDABA = ABAB = BABA = BA. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Soit $F = EBD$, alors

$$(AF)^* = AF \text{ et } (FA)^* = FA. \quad (3.3.22)$$

En effet, en utilisant (3.3.20), ABD et EBA sont hermitiens, donc FA et AF sont hermitiens. En outre

$$A = AFA \text{ et } F = FAF. \quad (3.3.23)$$

En effet, de (3.3.21) on trouve

$$AFA = ABDA = ABA = A \text{ et } FAF = EBDAEBD = EBABD = EBD = F.$$

On déduit que $F = IMP(A)$. ■

Proposition 3.3.5 Soit $A \in \Delta$ tel que $c(A) > 0$. Alors

$$IMP(A^*A) = IMP(A)IMP(A^*).$$

Corollaire 3.3.5 Soit $A \in \Delta$. Alors

- 1) Si A est normal alors $IMP(A)$ est aussi normal.
- 2) Si A est hermitien alors $IMP(A)$ est aussi hermitien.

Preuve.

- 1) Si A est normal alors $AA^* = A^*A$. D'après la proposition précédente

$$IMP(A^*)IMP(A) = IMP(AA^*) = IMP(A^*A) = IMP(A)IMP(A^*).$$

Ce qui montre que $IMP(A)$ est normal.

- 2) $[IMP(A)]^* = IMP(A^*) = IMP(A)$, puisque par hypothèse $A = A^*$. ■

Définition 3.3.9 Soit $A \in \Delta$. On dira que A est **élément positif** de Δ et on notera $A \in \Delta^+$ si

- 1) A est hermitien.
- 2) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Proposition 3.3.6 Soit $A \in \Delta^+$, avec $A \neq 0$ et $B = IMP(A)$. Alors

$$\|B\|_c(A) = 1.$$

Preuve. Par hypothèse on sait que A est hermitien et B l'est aussi.

De la définition $IMP(A)$ on sait que $(AB)^* = AB$, mais comme A et B sont hermitiens,

$$AB = (AB)^* = B^*A^* = BA, \text{ donc } AB = BA. \quad (3.3.24)$$

Soit

$$C(\lambda) = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) (I - BA) + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n B^{n+1}, \quad (3.3.25)$$

d'après la formule de Cauchy, le rayon de convergence r de la série est donnée par

$$r = \frac{1}{\lim_n \sup \|B^n\|^{\frac{1}{n}}}.$$

Et comme B est hermitien, $\|B^n\| = \|B\|^n$, d'où

$$r = \frac{1}{\|B\|}. \quad (3.3.26)$$

En outre

$$C(\lambda)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)C(\lambda) = I.$$

En effet ;

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)C(\lambda) &= (A - \lambda I) \left[\left(-\frac{1}{\lambda} \right) (I - BA) + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n B^{n+1} \right], \\ &= -\frac{1}{\lambda} (A - ABA) + I - BA + \sum_{n=0}^{+\infty} A\lambda^n B^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} B^{n+1}, \\ &= I - BA + \sum_{n=0}^{+\infty} A\lambda^n B^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} B^{n+1}, \\ &= I - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n (I - AB) B^n. \end{aligned}$$

D'où en utilisant (3.3.24) on obtient :

$$(A - \lambda I)C(\lambda) = I - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n (I - BA) B^n = I.$$

De manière analogue on démontre que : $C(\lambda)(A - \lambda I) = I$.

Donc $]0, r[\subseteq \rho(A)$ et $r \in \sigma(A)$, (sinon $C(\lambda)$ convergerait pour $\lambda = r$) d'où $c(A) = r$.

On en déduit d'après (3.3.26) que : $\|B\|c(A) = 1$. ■

Conclusion

Nous souhaiterions avoir des résultats semblables à ceux de la théorie spectrale classique en introduisant la notion d'ensemble résolvant généralisé $reg(A)$ qui repose sur la notion d'inverse généralisé.

Bibliographie

- [1] G.AUBRUN, *Théorie des Opérateurs*, M1 Mathématiques, Université de la Réunion.
- [2] B.BENDHIA et P.JOLY, *Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints et application à l'étude des ondes guidées*, Cours MAE 21.
- [3] C.BENSALLOUA, *Correction compacte d'opérateurs de Fredholm*, Memoire de Doctorat, Université de M'sila, 2016.
- [4] B.BUONI et GENOUD, *Théorie spectrale et Évolution en mécanique quantique*, 2008.
- [5] H.BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [6] J.CHARLES, M.MBEKHTA et H.QUEFFELEC, *Analyse fonctionnelle théorie des opérateurs*, Paris, 2010.
- [7] I.COLOJOARA and C.FOIAS, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and breach, New york, 1988.
- [8] L.DEBNATH et P.MIKUSINSKI, *Introduction to Hilbert spaces with applications*, Orlando, 1990.
- [9] V.EHRLACHER et G.STOLTZ, *Analyse spectrale*, Cours ENPC - IMI - 2ème année, 20 juin 2015.
- [10] Y.EIDELMAN, V.MILMAN and A.TSOLOMITIS, *Functional Analysis An Introduction*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2004.

-
- [11] A.GHERBI, *Quelque classes d'opérateurs quaternions caractérisation et applications*, Mémoire de Université d'oran 1, 2015.
- [12] V.HUTSON and J.S.PYM, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, University of Sheffield, 1980.
- [13] A.INTISSAR, *Analyse fonctionnelle et théorie spectrale pour les opérateurs compacts non auto-adjoints*, CÉPADUÈ, 1997.
- [14] A.KHELFAOUI, *Les opérateurs de Fredholm*, Memoire de Master, Université de Saida, 2013.
- [15] P.LEVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale*, Paris, 2003.
- [16] S.MAINGOT et D.MANCEAU, *Théorie spectrale*, Université de Harve, 2011.
- [17] B.MAUREY, *Analyse fonctionnelle et théorie spectrale*, MT404, 2001-2002.
- [18] M.MBEKHTA, *Résolvant généralisé et théorie spectrale*, J. Operator theory 21(1989), 69-105.
- [19] M.MBEKHTA, *Généralisation de la décomposition de Kato Aux opératurrs paranormaux et spectraux*, 1985.
- [20] S.MENKAD, *Inégalités sur les normes d'opérateurs*, Memoire de Doctorat, Université de Batna, 2013.
- [21] M.NADIR, *Cours d'analyse fonctionnelle*, Université de M'sila 2004.
- [22] Z.NASHED, *Generalized inverses and applications*, Academic Press, New york, 1976.
- [23] F.NICOLEAU, *Introduction à la théorie spectrale*, Cours de Master 2, Université de Nantes, 2016.
- [24] J-PH.LABROUSSE, *Inverses Generalises D'opérateurs non Brnes*, Volume 115, 1992.
- [25] J.PH.LABROUSSE et M.MBEKHTA, *Résolvant Généralisé et Séparation des Points Singuliers Quasi-Fredholm*, Volume 333, 1992.

- [26] S.PONNUSAMY, *Foundations of Functial Analysis*, Alpha Science, 2002.
- [27] L.SAINT-RAYMOND, *Analyse Fonctionnelle* , Université de Paris, E-mail :
Laure.SaintRaymond@ens.fr.

ملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو الجمع بين النتائج الرئيسية فيما يتعلق بمفهوم المعكوسات المعممة وإعطاء بعض خصائص معكوس مور بانروز في الفضاء C^* الجبري.

كلمات مفتاحية:

المؤثرات المحدودة، المؤثرات غير المحدودة، المؤثرات المغلقة، طيف، طيف المؤثرات المحدودة و غير المحدودة، معكوس مور بانروز.

Résumé:

Le but de mémoire et réunir les principaux résultats concernant la notion d'inverses généralisés et de donner quelques propriétés de l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur dans une C^* -Algèbre.

Mots clés:

Opérateurs bornés, opérateurs non bornés, opérateurs fermé, spectre, spectre des opérateurs (bornés et non bornés), l'inverse de Moore-Penrose, résolvant.

Abstract:

This paper is devoted to the definitions and the study of generalized inverses of linear operators in Hilbert spaces and C^* -Algebra.

We'll give some proprieties of the inverse of Moore-Penrose.

Key words:

Bounded operators, unbounded operators, closed operators, spectrum, spectrum of bounded and unbounded operators, inverse of Moore-Penrose, resolvent.