N° d'ordre :

**République Algérienne Démocratique et Populaire Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

UNIVERSITE DE M'SILA
INSTITUT DE MATHEMATIQUE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

# DOCTRAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

par : **Messaoud Guesba**

Thème

## Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts

**Soutenue le 02-07-2017**

**Devant le jury composé de**

| | | |
|---|---|---|
| **Lemnaouar Zedam** | Professeur à l'Université de M'sila | **Président** |
| **Mostefa Nadir** | Professeur à l'Université de M'sila | **Rapporteur** |
| **Abdelkader Gasmi** | Professeur à l'Université de M'sila | **Examinateur** |
| **Abdelbaki Marouani** | Professeur à l'Université de B.B.A | **Examinateur** |
| **Azedine Rahmoune** | MCA à l'Université de B.B.A | **Examinateur** |
| **Amara Guerfi** | MCA à l'Université de Ouargla | **Examinateur** |

# *Remerciements*

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à **Allah** le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terminer ce projet et qui m'a ouvert les portes du savoir.

En particulier, je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mon directeur de ma thèse Monsieur le professeur **Mostefa Nadir**, sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour. Pour m'avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement. Je tiens également à le remercier pour sa gentillesse, sa patience, sa grande disponibilité et ses encouragements tout long de ce travail, et je le prie de croire en ma profonde reconnaissance.

Je tiens à exprimer mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer ma thèse.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur le professeur **Lemnaouar Zedam** pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ma soutenance.

Je tiens à remercier aussi Monsieur le professeur **Abdelkader Gasmi** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements à Monsieur le professeur **Abdelbaki Marouani** et à Monsieur le docteur **Azedine Rahmoune** de l'université Bordj Bou Arréridj, qui m'ont Honnorée en acceptant de faire partie du jury.

Je tiens à remercier vivement Monsieur **Amara Guerfi**, docteur à la faculté des sciences de université Kasdi Merbah - Ouargla, pour sa participation au jury de soutenance .

J'adresse aussi mes remerciements les plus vifs à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à élaborer ce travail dans les meilleures conditions.

Enfin, j'aurai une pensée particulière pour ma famille pour son soutien et les encouragements dont elle m'a fait bénéficier pendant cette période.

# Table des matières

# Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert. Pour bien préciser ses spécificités un rappel historique sur le développement de l'analyse fonctionnelle n'est pas inutile.

La théorie des opérateurs linéaires trouve ses origines d'une part dans l'étude des systèmes finis d'équations linéaires à un nombre fini d'inconnues et d'autres part dans des équations linéaires différentielles et intégrales.

En effet, c'est l'analogie entre les systèmes d'équations linéaires en dimension finie et les équations intégrales, qui a permis à quelques mathématiciens du début du siècle tels que I. Fredholm ou J. Volterra de dégager les éléments essentiels de la théorie qui porte aujourd'hui le nom de la théorie des équations de Fredholm.

Dans un effort pour compléter les travaux de I. Fredholm, Hilbert parvient à des conceptions plus générales. En particulier il découvre que le succés de la méthode de I .Fredholm repose sur la notion de « complète continuité » qu'il dégage en la formulant pour les formes bilinéaires et qu'il étudie de façon approfondie. Puis juste après, E. Schmidt et M. Frechet introduisent délibérément le langage de la géométrie euclidienne dans l'espace de Hilbert.

La notion d'application linéaire complètement continue se trouve pour la première fois définie de façon générale dans le cèlèbre mémoire de F. Riesz 1918 sur la théorie de I. Fredholm. Vers les années vingt de ce siécle, S. Banach ajoute une étude poussée des relations entre une application linéaire continue et sa transposée, étendue aux espaces normés. Cette période verra naître de grands théorèmes tels que le théorème du graphe fermé ou le théorème de Banach-Steinhaus.

La publication traité de Banach sur les opérations linéaires marque le début de l'âge adulte de l'Analyse Fonctionnelle et de la théorie des opérateurs.

Les opérateurs $\log -$hyponormaux et $p-$hyponormaux sont introduite, et leurs propriétés sont étudiées dans [2] et [48]

T. Ando [5] et Wang [3] ont prové que la classe $\omega-$ hyponormaux contient les deux classes d'opérateurs $\log -$hyponormaux et $p-$hyponormaux. Il est bien connu qu'un opérateur inversible $p-$hyponormal est $\log -$hyponormal, mais la résiproque est fausse,Tanahashi [48] a donné un exemple d'un opérateur $\log -$hyponormal qui'n'est pas $p-$hyponormal.

Dans [4], S.A. Azuraiqui a introduit la notion d'opérateurs n-normal, c'est-à-dire la classe des opérateurs $A$ tels que $A^n A^* = A^* A^n$. Les opérateurs considérés généralisent ce qu'on appelle "opérateur n-power-hyponormal" et en particulier les opérateurs normaux, qui sont très importantes par elles même.

L'objectif de ce travail est de présenter de nouveaux résultats liés à l'étude des opérateurs normaux et l'opérateurs compacts.

Le contenu de cette thése est composé de quatre chapitres

**CHAPITRE 1**

Dans le premier chapitre, on rappelle tous les outils nécessaires pour l'élaboration de ce travail. On commence par la définition d'un opérateur normal borné, non borné, ainsi on rappelle quelques propriétés fondamentaux et notions portant sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts.

**CHAPITRE 2**

Dans ce chapitre on s'intéresse au théorème classique et très important dans la théorie des opérateurs bornés, et non bornés avec toutes ses applications à savoir le théorème de Fuglede-Putnam. Beaucoup d'auteurs travaillent sur ce théorème. Ce théorème de Fuglede fut établit en 1950 par B. Fuglede.

On remarque que les théorèmes originaux étaient démontrés pour deux opérateurs pas nécerssairement bornés, dans un tel cas on remplace donc "$=$" par " $\subseteq$" .Il existe plusieurs versions de ce théorème pour les opérateurs " subnormaux, hyponormaux,p-hyponormaux, dominants, log-hyponormaux....etc" mais on va se contenter dans ce chapitre aux quelques applications de ce thoérème pour les opérateurs bornés.

**Application1** Sur la some des deux opérateurs normaux.

**Application2** Quelques conditions sur opérateurs non normaux qui impliquent la normalité.

**CHAPITRE 3**

Dans le second chapitre, on montre quelques l'inégalités des valeurs singulières aux opérateurs normaux compacts, soit $A$ est l'opérateur normal compact sur un espace de Hilbert séparable complexe $H$, où $A = A_1 + iA_2$ est la décomposition cartésienne de $A$.

On va montrer l'inégalité suivante

$$\frac{1}{\sqrt{2}} s_j \left(A_1 + iA_2\right) \leq s_j \left(A\right) \leq s_j \left(|A_1| + |A_2|\right), \text{ pour } j = 1, 2, ......$$

Ainsi nous montrons l'inégalité suivante

$$\sqrt{2} s_j \left(A_1 + iA_2\right) \leq s_j \left(A + iA^*\right) \leq 2 s_j \left(A_1 + A_2\right), \text{ pour } j = 1, 2, ......$$

De plus, on donne une généralisation de ces inégalités.

**CHAPITRE 4**

Dans le dernier chapitre est consacré à l'étude de quelques classes d'opérateurs sur un espace de Hilbert. Nous commençons par la définition de la nouvelle classe d'opérateur $n-$power-hyponormal sur un espace de Hilbert $H$, on donne quelques propriétés de base de ces opérateurs.

Ainsi, nous introduisons autre nouvelle classe d'opérateurs pour lesquels $T^2 \geq -T^{*^2}$ , nous donnons quelques propriétés de ces opérateurs, et nous étudions la rélation entre cette classe et quelques autres classes des opérateurs définis sur $H$.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons les définitions et les principaux résultats sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts.

En premier lieu, nous commençon par la terminologie.

## 1.1 Terminologie

1. On désigne par $H$ un espace de Hilbert (complexe), $\mathcal{L}(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaire bornés sur $H$.
2. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, $\Re(T)$ (resp. $Ker(T)$ ) désigne l'image (resp. le noyau) de $T$.
3. L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ pour tous $x, y \in H$, est appelé l'adjoint de $T$.
4. On désigne par $K(H)$ l'idéal des opérateurs compacts, $\mathcal{F}(H)$ désigne l'idéal des opérateurs de rang fini.
5. Sur $\mathcal{L}(H)$, on utilise l'une des topologies suivantes

   **i) Topologie uniforme (de la norme)**

   Une suite $(A_n)_n$ d'opérateus converges en norme vers $A$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$.

   **ii) Topologie forte d'opérateurs**

   Une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs converges fortement vers $A$, si pour tout $x \in H$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$, on note $A_n \xrightarrow{S} A$.

**iii) Topologie faible d'opérateurs**

Une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs converges faiblement vers $A$, on note $A_n \xrightarrow{W} A$ ssi $\langle A_n x, y\rangle \to \langle Ax, y\rangle$ quand $n \to \infty$, pour tout $x, y \in H$.

6. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, un sous-ensemble $E$ de $H$ est dit invaraint pour $A$ si $A(E) \subset E$. Un sous-ensemble $E$ de $H$ est dit réduisant pour $A$, si $A(E) \subset E$ et $A\left(E^{\perp}\right) \subset E^{\perp}$ .

7. Le spectre d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, noté $\sigma(A)$ est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :
$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

8. Si $A \in \mathcal{L}(H)$, le spectere ponctuel de $A$ noté $\sigma_p(A)$ est défini par :
$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

9. Le spectre résiduel de $A$, on note par $\sigma_r(A)$ est défini par :
$$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\Re(A - \lambda I\ )} \neq H\right\}.$$

10. Si $A \in \mathcal{L}(H)$, le spectere continu de $A$ noté $\sigma_c(A)$ est défini par :
$$\sigma_c(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda I \text{ injectif et } \Re(A - \lambda I\ ) \neq \ \overline{\Re(A - \lambda I\ )} = H\right\}.$$

11. Le spectre approximatif de $A \in \mathcal{L}(H)$, noté $\sigma_{ap}(A)$ défini par:
$$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\,(x_n)_n \text{ dans } H, \text{ tel que } \|x_n\| = 1 \text{ et } \|(A - \lambda I\ )x_n\| \to 0\ \}.$$

12. On a toujours
$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$
et
$$\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \sigma_{ap}(A) \subset \sigma(A).$$

13. Le rayon spectral de $A$ noté $r(A)$ défini par :
$$r(A) = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(A)\ \}.$$

14. Limage numérique d'un opérateur $T$ dans $\mathcal{L}(H)$ est l'ensemble défini par :

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{C};\ x \in H,\ \|x\| = 1\}.$$

Le rayon numérique de $T$ est défini par :

$$w(T) = \{|z|,\ z \in W(T)\}$$

15. Soit $A = U|A|$ la décomposition polaire de $A$, la transformation d'Aluthge de $A$ est l'opérateur $\widetilde{A}$ défini par :

$$\widetilde{A} = |A|^{\frac{1}{2}}\, U\, |A|^{\frac{1}{2}}\ .$$

16. On va rappeler quelques classes des opérateurs, soit $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit :

- auto-adjoint ou hermitien si $A = A^*$, où $A^*$ est l'adjoint de $A$.
- positif si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$; pour tout $x \in H$, ce qui est noté $A \geq 0$.
- normal si $AA^* = A^*A$.
- $n$-normal si $A^nA^* = A^*A^n$.
- sous-normal s'il admet une extension normale.
- hyponormal si $AA^* \leq A^*A$.
- co-hyponormal si $AA^* \geq A^*A$.
- semi-hyponormal si $(AA^*)^{\frac{1}{2}} \leq (A^*A)^{\frac{1}{2}}$.
- $p$-hyponormal si $(AA^*)^p \leq (A^*A)^p$, $0 < p \leq 1$.
- $n$-power-hyponormal si $A^nA^* \leq A^*A^n$.
- log-hyponormal si $A$ est inversible et $\log(AA^*) \leq \log(A^*A)$.
- $w$-hyponormal si $\left|\widetilde{A}\right| \geq |A|$ , tel que $\widetilde{A}$ est la transformation d'Aluthge de l'opérateur $A$.
- nilpotent d'ordre $n$, si $A^n = 0$ pour un certain entier naturel $n$.
- normaloid si $r(A) = \|A\|$.
- contraction si $\|A\| \leq 1$.
- dominant si pour tout complexe $\lambda$, $\Re(A - \lambda I\ ) \subset \Re(A - \lambda I\ )^*$.

- unitaire si $AA^* = A^*A = I$.
- isométrie si $A^*A = I$.
- isométrie partielle si $\|Ax\| = \|x\|$, pour tout $x \in (KerA)^{\perp}$.
- idempotent ou projection si $A^2 = A$.
- progection orthogonale si $A^2 = A$ et $A^* = A$.
- d'ascente finie s'il existe un entier positif $n$, tel que $Ker\left(A^n\right) = Ker\left(A^{n+1}\right)$.
- descente finie s'il existe un entier positif $n$, tel que $\Re\left(A^n\right) = \Re\left(A^{n+1}\right)$.
- quasi-nilpotent si $\sigma(A) = \{0\}$.
- quasi-normal si $A\left(A^*A\right) = \left(A^*A\right)A$.

## 1.2 Sur les opérateurs normaux

Dans cette section on introduit quelques notions de base de la théorie des opérateurs normaux qui joueront un rôle essentiel dans ce travail.

### 1.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 1.2.1** *On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal si $T$ commute avec son adjoint i.e., $T^*T = TT^*$.*

**Exemple 1.2.1** *La multipliquation $T_\varphi$ par une fonction mesurable bornée $\varphi$ est un opérateur normal sur $L^2([0,1])$.*

En effet, on a $(T_\varphi f)(t) = f(t)\varphi(t)$ où $\varphi \in C([0,1])$, $f \in L^2([0,1])$.

$$\langle T_\varphi f, g\rangle = \langle \varphi(t) f(t), g(t)\rangle$$

$$= \left\langle f(t), \overline{\varphi(t)} g(t)\right\rangle$$

donc $\left(T_\varphi^* g\right)(t) = \overline{\varphi(t)} g(t)$, c'est-à-dire $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.
D'où, $T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^*$.
L'opérateur $T_\varphi$ est un hermitien (auto-adjoint) s'il la fonction $\varphi$ est réelle.

**Proposition 1.2.1 ([16])** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $T$ est normal;

2. $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$;

3. Dans le cas complexes, les parties réelles et imaginaires de $T$ commutent.

   **Preuve.** - Pour $x \in H$, alors

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle \\ &= \langle (T^*T - TT^*)\, x, x\rangle . \end{aligned}$$

Donc l'équivalence de 1 et 2.
- On pose $T = A + iB$, tel que $A = \mathrm{Re}\,(T)$ et $B = \mathrm{Im}\,(T)$, on a $T^* = A - iB$, et

$$T^*T - TT^* = 2i\,(AB - BA)$$

D'où, $T^*T = TT^*$ si et seulement si $AB = BA$.

**Corollaire 1.2.1** *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, on a*

$$Ker\,(T) = Ker\,(T^*)$$

**Proposition 1.2.2** *Soit $T$ un opérateur normal, on a*

1. L'opérateur $aT$ est aussi normal pour tout $a \in \mathbb{C}$.

2. L'opérateur $T^n$ est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Preuve.** 1) Nous avons $(aT)\,(aT)^* = a\overline{a}TT^*$ et $(aT)^*\,(aT) = \overline{a}aT^*T$.
Piusque $T$ est normal, d'où il sont égaux.
2) $T$ est normal, d'où $TT^* = T^*T$

$$\Rightarrow (TT^*)^n = (T^*T)^n$$

$$\Rightarrow T^n\,(T^*)^n = (T^*)^n\,T^n$$

$$\Rightarrow T^n\,(T^n)^* = (T^n)^*\,T^n.$$

C'est -à-dire $T^n$ est normal, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ . ■

**Corollaire 1.2.2** *Soit $P$ unpolynôme et $T$ un opérateur normal. Alors $P(T)$ est aussi normal.*

**Remarque 1.2.1** *$T^n$ normal $\nRightarrow$ $T$ normal.*

En effet, soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On a $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est normal, mais $T$ n'est pas normal.

**Proposition 1.2.3 ([23])** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, on a*

$$Ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)} = H$$

**Preuve.** On sait que : $Ker(T^*) = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$, d'où

$$(Ker(T^*))^{\perp} = \left((\operatorname{Im} T)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{(\operatorname{Im} T)}.$$

Donc

$$H = Ker(T^*) \oplus (Ker(T^*))^{\perp}$$
$$= Ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)}$$

■

**Proposition 1.2.4** ***(Inverse d'un opérateur normal )***

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et inversible d'inverse $T^{-1}$.

Alors $T^{-1}$ est aussi normal.

**Preuve.** On a

$$\left(T^{-1}\right)^* T^{-1} = (T^*)^{-1} T^{-1}$$
$$= (TT^*)^{-1} = (T^*T)^{-1} \text{ (car } T \text{ normal)}$$
$$= T^{-1} (T^*)^{-1} = T^{-1} \left(T^{-1}\right)^*.$$

Donc $T^{-1}$ est un opérateur normal. ■

**Proposition 1.2.5 ([35])** *Pour tout $U$ est unitaire. L'opérateur $U^*TU$ est normal si et seulement si $T$ est normal.*

**Preuve.** On a

$$(U^*TU)^* (U^*TU) = U^*T^*TU$$

et

$$(U^*TU) (U^*TU)^* = U^*TT^*U.$$

On remarque que $T^*T = TT^*$ si et seulement si $U^*TU$ est normal. ■

**Proposition 1.2.6 ([29])** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur inversible, les assertions suivantes sont équivalentes*

i. $T$ est normal.
ii. $T^{-1}T^*$ ( ou $T^*T^{-1}$) est unitaire.
iii. Il existe un opérateur unitaire $U$ tel que : $T^* = UT$.

**Preuve.** Motrons que

1) i ⇒ii On a

$$\left(T^{-1}T^*\right)^* \left(T^{-1}T^*\right) = T \left(T^{-1}\right)^* T^{-1}T^*$$

$$= TT^{-1} \left(T^{-1}\right)^* T^* = I \left(TT^{-1}\right)^* = I$$

2) ii ⇒iii clair 3)

iii ⇒i Pour tout $x \in H$, on a

$$\|T^*x\|^2 = \|UTx\|^2$$

$$= \langle UTx, UTx\rangle = \langle Tx, U^*UTx\rangle = \|Tx\|^2 .$$

Donc, $T$ est normal. ■

### 1.2.2 Théorie spectrale des opérateurs normaux

**Proposition 1.2.7** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Alors*

1. Si $Tx = \lambda x$, tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. Alors, $T^*x = \overline{\lambda}x$ .

2. Deux espaces propres de $T$ associé à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

**Proposition 1.2.8** *Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie*

$$r(T) = \|T\|$$

**Preuve.** On suppose d'abord que $T$ est auto-adjoint. On a $\|T^2\| = \|T\|^2$ et par récurrence sur $n$ l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation$\left\|T^{2^n}\right\| = \|T\|^{2^n}$ , il vient

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

On revient au cas normal, l'élément $TT^*$ est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a,

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|T^n (T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{r(TT^*)} \\ &= \sqrt{\|TT^*\|} = \|T\|. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.2.9 ([23])** *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Dans le résultat suivant, nous présentons certaines caractérisations du spectre continu d'un opérateur normal borné.

**Théorème 1.2.1** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $\lambda \in \sigma_c(T)$

ii) $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$

iii) $T - \lambda I$ est injectif, et l'image de $(T - \lambda I)(H)$ n'a pas fermée.

**Preuve.** ii) $\Longrightarrow$ i) puisque $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, alors $T - \lambda I$ est injectif ; mais ne pas surjectif. Supposons que l'image $(T - \lambda I)(H)$ n'est pas dense dans $H$, alors il existe $z \in (T - \lambda I)(H)^{\perp}$. Par conséquent nous avons,

$$z \in (T - \lambda I)(H)^{\perp} = Ker\left(T^* - \overline{\lambda} I\right) = Ker(T - \lambda I).$$

D'où contradiction, donc nous concluons que $\lambda \in \sigma_c(T)$.

i) $\Longrightarrow$ iii) est évidente à partir de la définition du spectre continu.

iii) $\Longrightarrow$ ii) on a $T - \lambda I$ est injectif, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Supposons que $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe un opérateur ( invérsible ) $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $S(T - \lambda I)x = x$, pour tout $x \in H$. En particulier nous avons,

$$\frac{1}{\|S\|}\|x\| \leq \|(T - \lambda I)x\|, \forall x \in H.$$

D'où $(T - \lambda I)(H)$ est complet et fermée dans $H$, qui est une contradiction. Nous concluons que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. ■

**Proposition 1.2.10 ([17])** *Le spectre d'un opérateur normal est égale à le spectre approximatif, i.e.,*

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T).$$

**Corollaire 1.2.3** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal.*

Alors

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_{ap}(T).$$

Le théorème ci-dessous a été établie par M. Akkouchi dans [1]

**Théorème 1.2.2 (voir [1])** *Soit $H$ est un espace de Hilbert complexe, soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a*

1. $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(T_\lambda) = H\}$
2. $\sigma_p(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\Re(T_\lambda)} \neq H\right\}$
3. $\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\Re(T_\lambda)} = H \text{ et } \Re(T_\lambda) \neq H\right\}$
4. $\sigma_r(T) = \phi$

### 1.2.3 Image numérique d'un opérateur normal

Dans ce qui suit, $T$ désigne un opérateur borné sur $H$.

**Définition 1.2.2** *L'image numérique de $T$ est l'ensemble $W(T)$ des nombres complexes défini par*

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{C} : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

**Définition 1.2.3** *Le rayon numérique de $T$ est défini par*

$$w(T) = \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda|.$$

Voici quelques propiétés de base souvent utilisées dans le calcul de l'image numérique et facile à démontrer.

**Proposition 1.2.11 ([28])** *Soient $T, S \in \mathcal{L}(H)$ et soit $U \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur unitaire (i.e., $U^*U = UU^* = I$). Alors on a que*

1. $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
2. $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$
3. $W(T^*) = \left\{\overline{\lambda}, \lambda \in W(T)\right\}$
4. $W(U^*TU) = W(T)$

**Exemple 1.2.2** *On définit l'opérateur $T$ de $l_2$ vers $l_2$ par*

$$T(x_1, x_2, x_3, .....) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, .....\right).$$

On a $W(T) = (0, 1]$.

La propriété la plus importante sur l'image numérique est fournie par le théorème de Toeplitz-Hausdorff.

**Théorème 1.2.3** *(Toeplitz-Hausdorff) L'image numérique d'un opérateur linéaire borné est un ensemble convexe borné.*

**Théorème 1.2.4 ([28])** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors, on a que*

1) $\sigma_p(T) \subset W(T)$
2) $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$

**Théorème 1.2.5 ([28])** *L'opérateur $T$ est un auto-adjoint si et seulement si $W(T) \subset \mathbb{R}$.*

**Preuve.** Si $T$ est auto-adjoint, alors pour tout $x \in H$ ,

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

D'où $W(T) \subset \mathbb{R}$.

Inversement, si $W(T) \subset \mathbb{R}$, alors $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Donc $T$ est auto-adjoint. ■

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un $T$ opérateur normal.

**Théorème 1.2.6 ([28])** *Si $W(T)$ est un segment de droite, alors $T$ est un opérateur normal.*

**Preuve.** Soit $\alpha$ un point sur le segment de droite ayant une inclinaison $\theta$, d'où $W\left(e^{-i\theta}[T-\alpha I]\right)$ est inclu dans l'axe des réels. Ainsi, le théorème précédent implique que $e^{-i\theta}[T-\alpha I]$ est un opérateur auto-adjoint. On déduit donc, par un calcul simple que $T$ est un opérateur normal. ■

**Théorème 1.2.7** *Si $T$ est un opérateur normal.*

Alors,

$$w(T) = \|T\|.$$

Rappelons aussi que l'envoloppe convexe de $\sigma(T)$, noté $Conv\{\sigma(T)\}$ est le plus petit convexe contenant $\sigma(T)$.

Le théorème suivant montre que l'image numérique d'un opérateur normal est une bonne approximation de son spectre.

**Théorème 1.2.8** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, on a que*

$$\overline{W(T)} = \overline{Conv\{\sigma(T)\}}.$$

**Corollaire 1.2.4** *Soit $m$ et $M$ deux nombres complexes. Si*

$$\overline{W(T)} = [m, M].$$

*Alors,*

$$\{m, M\} \subseteq \sigma(T).$$

**Preuve.** Si $\overline{W(T)} = [m, M]$, alors le théorème 1.2.6 implique que $T$ est un opérateur normal. Ainsi, d'aprés le théorème 1.2.8 $\overline{W(T)}$ est l'enveloppe convexe de $\sigma(T)$, ou encore

$$[m, M] = \overline{W(T)} = \overline{Conv\{\sigma(T)\}}.$$

Il suit donc que $\{m, M\} \subseteq \sigma(T)$. ■

### 1.2.4 Les opérateurs normaux non bornés

**Définition 1.2.4 (opérateur linéaire non borné)** *Un opérateur non borné sur un espace Hilbert $H$ est couple $(T, D(T))$ où $D(T)$ est un sous espace vectoriel de $H$ et $T$ est un opérateur linéaire défini de $D(T)$ dans $H$, on dit que $T$ est un opérateur non borné de domaine $D(T)$.*

**Exemple 1.2.3** *Considérons l'opérateur $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, défini par*

$$Tf(x) = xf(x).$$

L'opérateur $T$ a pour domaine

$$D(T) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}), xf \in L^2(\mathbb{R})\right\}$$

est un opérateur non borné, appelé opérateur de multiplication par $x$.

**Définition 1.2.5 (opérateur fermé )** *On dit que l'opérateur $T$ est fermé si pour toutes les suites $(x_n)_n$ de $D(T)$ convergente vers $x$ et la suite des images $(Tx_n)_n$ convergente vers $y$ dans $H$. Alors, $x \in D(T)$ et $y = Tx$.*

**Exemple 1.2.4** *Soit $T$ est un opérateur non borné défini sur $H^1([0,1])$ par*

$$Tf(x) = -i\frac{df}{dx}$$

où $H^1([0,1])$ est l'espace de Sobolev d'indice 1.

Alors, $T$ est un opérateur fermé.

**Définition 1.2.6 (adjoint d'un opérateur non borné)** *Soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dense dans $H$.*

On défint l'adjoint $T^*$ de $T$ par

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \forall x \in D(T), \forall y \in D(T^*).$$

**Définition 1.2.7 (domaine de l'adjoint)** *Soient $H_1$, $H_2$ deux espaces de Hilbert et soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné de $H_1$ dans $H_2$ tel que $D(T)$ est un sous-espace dense dans $H_2$. On définit $D(T^*)$ comme suit*

$$D(T^*) = \left\{y \in H_2 \text{ tel que } x \mapsto \langle Tx, y\rangle_{H_2} \text{ est borné de } \left(D(T), \|.\|_{H_1}\right) \text{ dans } \mathbb{C}\right\}.$$

**Définition 1.2.8 (opérateur normal non borné)** *Soit $T$ un opérateur non borné de domaine $D(T)$ dense dans $H$.*

On dit que $T$ est un opérateur normal si, $T$ est fermé et $TT^* = T^*T$.

**Proposition 1.2.12** *Si $T$ est un opérateur normal.*

Alors,

$$D(T) = D(T^*) \text{ et } \|Tx\| = \|T^*x\|$$

**Preuve.** Si $h \in D(T^*T) = D(TT^*)$, alors $Th \in D(T^*)$ et $T^*h \in D(T)$.

On a

$$\|Th\|^2 = \langle T^*Th, h\rangle$$
$$= \langle TT^*h, h\rangle = \|T^*h\|^2 .$$

Si $h \in D(T)$ d'où, il existe une suite $(h_n) \in D(T^*T)$ telle que $\langle h_n, Th_n\rangle \to \langle h, Th\rangle$ donc

$$\|Th_n - Th\| \to 0.$$

On a alors,

$$\|T^*h_n - T^*h_m\| = \|Th_n - Th_m\| .$$

D'où, il exsiste $g \in H$ tel que$T^*h_n \to g$.

Alors,

$$\langle h_n, T^*h_n\rangle \to \langle h, g\rangle .$$

Mais $T^*$ est férme. Alors $h \in D(T^*)$ et $g = T^*h$.

Donc, $D(T) \subseteq D(T^*)$ et $\|Th\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^*h_n\| = \|T^*h\|$. ∎

## 1.3 Préliminaires sur les opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs bornés, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont le plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts.

### 1.3.1 Rappels et notations

Nous commençons d'abord par rappeler la définition et quelques propriétés des opérateurs compacts.

Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. On désigne par $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $K(E) = K(E,E)$.

**Définition 1.3.1** *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ , on dit que $T$ est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans $E$ à un ensemble relativement compact dans $F$.*

**Définition 1.3.2** *L'opérateur $T$ est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$, la suite $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ admet que sous suite convergente dans $F$.*

Dans le cas particulier où $F = C([a,b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de $T$.

**Théorème 1.3.1 (Arzela-Ascoli )** *Une condition nécessaire et suffisante q'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a,b]$, est compacte dans $C([a,b])$ est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.*

**Théorème 1.3.2** *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

**Preuve.** En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Alors, $T(B(0,1))$ est relativement compact d'où $\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0,1)$. Alors $T$ est borné.

Réciproquement, l'opérateur indentique $I$ de $E$ dans $E$ est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0,1)) = B(0,1)$, n'est pas relativement compacte sauf si $E$ est de dimension finie. ■

**Proposition 1.3.1 ([11])** *Une combinaison linéaire $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact, pour tous $\alpha$, $\beta \in \mathbb{k}$.*

**Proposition 1.3.2** *Le produit $T_1T_2$ de deux opérateurs bornés $T_1$ et $T_2$ est compact si l'un des opérateurs $T_1$ ou $T_2$ est compact.*

**Théorème 1.3.3 ([16])** *Soit $E$ un espace normé et $F$ un espace de Banach, et soit $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de $E$ dans $F$.*

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors, $T$ est compact.

**Théorème 1.3.4 ([11])** *Soit $T \in K(E)$, alors l'image par $T$ de toute suite de $E$* ***faiblement*** *convergente est une suite* ***fortement*** *convergente.*

**Corollaire 1.3.1** *Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans $H$. Si $T \in K(H)$, alors*

$$\lim_{k\to\infty} \|Te_k\| = 0.$$

**Preuve.** Pour tout $x \in H$ la série $\sum\limits_{k} |\langle x, e_k\rangle|^2$ est convergente et son terme général $\langle x, e_k\rangle$ tend vers 0 lorsque $k$ tend vers l'infini. Cela traduit le fait que la suite$(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente vers 0, le théorème précédent permet de conclure. ■

Un exemple important d'opérateurs compacts est donée par le théoreme qui suit.

**Théorème 1.3.5 ([17])** *Soient $H$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)$ une base hilbertienne de $H$. Soit $\lambda = (\lambda_n)$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$. Alors, l'opérateur de multiplication par $\lambda$ défini par :*

$$T_\lambda e_n = \lambda_n e_n,$$

est compact si, et seulement si,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

**Définition 1.3.3** *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si* $\dim \Re(T) < \infty$.

**Exemple 1.3.1** *Sur l'espace de Hilbert $L^2([0,\pi], dx)$ l'opérateur $T$ défini par :*

$$Tf(x) = \int_0^\pi \cos(x-t) f(t)\, dt, \text{ pour} f \in L^2([0,\pi], dx),$$

est manifestement un opérateur linéaire continu et l'expression

$$Tf(x) = \left(\int_0^\pi \cos(s) f(s)\, ds\right) \cos x + \left(\int_0^\pi \sin(s) f(s)\, ds\right) \sin x$$

montrer que l'image de $T$ est un sous-espace de dimension deux. L'opérateur $T$ est donc de rang fini égal à 2.

**Remarque 1.3.1** *Il est clair qu'un opérateur borné de rang fini est compact.*

**Corollaire 1.3.2** *Soit $(T_n)$ une suite d'opérateurs bornés de rang finis de $E$ dans $F$ et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

*Alors, $T$ est compact.*

**Théorème 1.3.6 ([11])** *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. L'opérateur $T$ est compact;
2. L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ est compact;
3. L'opérateur $T$ est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

### 1.3.2 Spectre d'un opérateur compact

**Proposition 1.3.3 ([44])** *Soit $T \in K(H)$. Si $T - \lambda I$ est surjectif, alors il est injectif.*

Pour la réciproque de cette proposition, on a besion du lemme suivant

**Lemme 1.3.1** *Soit $T \in K(H)$,si $T - \lambda I$ est injectif. Alors son image est fermée dans $H$.*

**Preuve.** Soient $y \in \overline{\Re(T - \lambda I)}$ et $(y_n)$ une suite de $\Re(T - \lambda I)$ qui converge vers $y$. On pose

$$y_n = Tx_n - \lambda x_n.$$

**-** Si $(x_n)$ contient une sous-suite bornée, alors $T$ étant compact, $(x_n)$ contient aussi une sous-suite $(x_{n_k})$ telle que $(Tx_{n_k})$ converge. Comme

$$x_{n_k} = \frac{Tx_{n_k} - y_{n_k}}{\lambda}$$

la suite $(x_{n_k})$ converge vers un élément $x$ qui vérifie $Tx - \lambda x = y$.

**-** Si $(x_n)$ ne contient aucune sous-suite bornée, la suite $\|x_n\|$ tend vers l'infini avec $n$. Posons $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, il vient

$$\|z_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} (T - \lambda I) z_n = 0.$$

Comme $T$ est compact, $(z_n)$ contient une sous-suite $(z_{n_k})$ telle que $(Tz_{n_k})$ converge. On en déduit que la suite $(z_{n_k})$ est convergente et si $z$ est sa limite, on aura $\|z\| = 1$ et $Tz - \lambda z = 0$. Ce qui contredit l'hypothèse $T - \lambda I$ est injectif. ■

**Théorème 1.3.7 ([11])** ***(Alternative de Fredholm)*** *Soit $T \in K(H)$. Alors*

a) $Ker\,(I - T)$ de dimension finie

b) $\Re\,(I - T)$ est fermé, et plus précisément

$$\Re\,(I - T) = Ker\,(I - T^*)^{\perp}$$

c) $Ker\,(I - T) = \{0\} \iff \Re\,(I - T) = H$

d) $\dim Ker\,(I - T) = \dim Ker\,(I - T^*)$

Les résultats précédents se résument comme suite

**Théorème 1.3.8 ([16])** *Soit $T \in K(H)$. Alors, on a*

1. $0 \in \sigma\,(T)$
2. $\sigma\,(T) \setminus \{0\} = \sigma_p\,(T) \setminus \{0\}$

**Théorème 1.3.9** *Soit $T \in K(H)$, si $(\lambda_n)$ est suite de valeurs propres de $T$.*

Alors,

i) **ou bien** cette suite est finie

ii) **ou bien** elle tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

**Corollaire 1.3.3** *Soit $T \in K(H)$, l'ensemble $\sigma\,(T)$ est dénombrable et s'il est infini on peut indexer les élements de $\sigma\,(T) / \{0\}$ est une suite $(\lambda_n)$ tends vers 0.*

**Théorème 1.3.10 ([54])** *Soit $T \in K(H)$. Alors, on a*

$$\sigma_{ap}\,(T) \setminus \{0\} = \sigma_p\,(T) \setminus \{0\}.$$

On sait que, si $T$ est normal on a $\sigma\,(T) = \sigma_{ap}\,(T)$, par conséquent nous avons le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.4** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et compact. Alors*

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

### 1.3.3 Opérateur de Hilbert - Schmidt

Il s'agit de la classe la plus fréquente d'opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert.

**Définition 1.3.4** *Soit $H$ un espace de Hilbert séparable. On dit $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert - Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty.$$

Le nombre

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

S'appelle la norme de Hilbert - Schmidt de l'opérateur $T$.

**Exemple 1.3.2** *Pour un opérateur en dimension finie $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ( de façon équivalente, pour les matrices $n \times n$),*

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} tr(T^*T)\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Proposition 1.3.4** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur de Hilbert - Schmidt , on a*

1) La norme $\|.\|_{HS}$ ne dépendent pas du choix de la base hilbertienne de $H$.
2) $\|T^*\|_{HS} = \|T\|_{HS}$
3) on a toujours, $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$

**Théorème 1.3.11** *Tout opérateur de Hilbert - Schmidt est compact.*

**Exemple 1.3.3** *Considérons l'opérateur integral $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ défini par*

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s)\, ds$$

avec un noyau $K(.,.) \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Alors $T$ est un opérateur de Hilbert - Schmidt, et

$$\|T\|_{HS} = \|K\|_{L^2[0,1]}.$$

### 1.3.4 Etude spectrale d'un opérateur compact auto-adjoint

**Proposition 1.3.5 ([11])** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$m = \inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle$$

Alors, $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$.

**Corollaire 1.3.5** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors, $T = 0$.*

**Théorème 1.3.12** *On suppose que $H$ est séparable. Soit $T$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, $H$ admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de $T$.*

**Théorème 1.3.13** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il admet une valeur propre $\lambda$ telle que*

$$|\lambda| = \|T\|.$$

Maintenant, nous pouvons énoncer ce qu'on appelle le théorème spectrale pour opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace Hilbert séparable.

**Théorème 1.3.14** *Soient $H$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$ et une suite de réells $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$Te_n = \lambda_n e_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

et pour tout $x \in H$,

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

# Chapitre 2

# Quelques résultats sur les opérateurs normaux

## 2.1 Les opérateurs log- et p-hyponormaux

Les opérateurs $\log -$hyponormaux et $p-$hyponormaux sont introduite, et leurs propriétés sont étudiées dans [2] et [48]

T. Ando [5] et Wang [3] ont prové que la classe $\omega-$ hyponormaux contient les deux classes d'opérateurs $\log -$hyponormaux et $p-$hyponormaux. Il est bien connu qu'un opérateur inversible $p-$hyponormal est $\log -$hyponormal, mais la résiproque est fausse,Tanahashi [48] a donné un exemple d'un opérateur $\log -$hyponormal qui'n'est pas $p-$hyponormal.

Si un opérateur $A$ est $p-$hyponormal, alors $KerA \subset KerA^{*}$, et si $A$ est $\log -$hyponormal, alors $KerA = KerA^{*}$.

Dans cette section on donne des exemples sur les opérateurs $\log -$hyponormaux et $p-$hyponormaux; on donne aussi l'exemple de Tanahashi [48] d'un opérateur $\log -$hyponormal qui'n'est pas $p-$hyponormal.

**Définition 2.1.1** *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit $A$ est*

i) $p-$hyponormal si et seulement si $(A^{*}A)^{p} \geq (AA^{*})^{p}$ , $0 < p \leq 1$.

Si $p = 1$ on dit que $A$ est hyponormal, et si $p = \frac{1}{2}$ est dit semi-hyponormal.

ii) $\log -$hyponormal si et seulement si $A$ est inversible et $\log(A^{*}A) \geq \log(AA^{*})$.

## 2.2 Exemples sur les classes d'opérateurs

**Exemple 2.2.1 ([52])** *Soient $A$ et $B$ deux matrices carré complexe positives d'ordre 2, et $T$ un opérateur défini sur $H = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{C}^2$ par :*

$$T = \begin{pmatrix} \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & 0 & & & & & & \\ & & & B & 0 & & & & & \\ & & & & B & \boxed{0} & & & & \\ & & & & & A & 0 & & & \\ & & & & & & A & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

avec $\boxed{0}$ montre la place de la matrice $(0,0)$. Alors,

1. $T$ est $p-$hyponormal $\Longleftrightarrow A^{2p} \geq B^{2p}$
2. $T$ est $\log-$hyponormal $\Longleftrightarrow A$ et $B$ sont inversible et $\log A^2 \geq \log B^2$.

**Exemple 2.2.2 ([48])** *Soient $H = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{C}^2$ et $x = (.,.,.,x_{-1}, x_0, x_1, ....) \in H$ avec $\|x\| = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \|x_j\|^2 < \infty$.*

Soient $A$ et $B$ deux matrices positives telles que

$$\log A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$\log B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$V=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

alors, $V$ est unitaire, et

$$V^*(\log A)V=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix},$$

$$A^p=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3e^{2p}+2e^{\frac{-p}{2}} & \sqrt{6}e^{2p}-\sqrt{6}e^{\frac{-p}{2}}\\ \sqrt{6}e^{2p}-\sqrt{6}e^{\frac{-p}{2}} & 2e^{2p}+3e^{\frac{-p}{2}}\end{pmatrix},$$

et

$$B^p=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-p}\end{pmatrix}.$$

On remplace $x=e^p$, on a

$$5\det(A^p-B^p)=\begin{vmatrix}3x^2+2x^{-\frac{1}{2}}-5 & \sqrt{6}x^2-\sqrt{6}x^{-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{6}x^2-\sqrt{6}x^{-\frac{1}{2}} & 2x^2+3x^{-\frac{1}{2}}-5x^{-1}\end{vmatrix}$$

$$=\left(3x^2+2x^{-\frac{1}{2}}-5\right)\left(2x^2+3x^{-\frac{1}{2}}-5x^{-1}\right)-\left(\sqrt{6}x^2-\sqrt{6}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$=-5x^{\frac{-3}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^4\left(2x+2x^{\frac{1}{2}}+2\right)\leq 0.$$

Pour tout $x>1$, par conséqent il n'existe pas $p>0$ tel que $B^p\leq A^p$, soit $x=(.,.,.,x_{-1},x_0,x_1,....)\in H$ et $(x)_n=x_n$.

On définit $P\in\mathcal{L}(H)$, avec $(Px)_n=P_nx_n$ et

$$P_n=\begin{cases}B & \text{si } n\leq 0\\ A & \text{si } n\geq 1\end{cases}.$$

Soit $U$ le shift unitaire $(Ux)_n=x_{n-1}$ et $T=UP$.

Donc, $((T^*T)x)_n=P_n^2x_n$ et $((TT^*)x)_n=P_{n-1}^2x_n$.

Alors,

$$(((T^*T)^p-(TT^*)^p)x)_n=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq 1\\ (A^{2p}-B^{2p})x_1 & \text{si } n=1\end{cases},$$

et

$$((\log(T^*T)-\log(TT^*))x)_n=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq 1\\ (2\log A-2\log B)x_1 & \text{si } n=1\end{cases}.$$

Ainsi, $T$ est $\log-$hyponormal, mais $T$ n'est pas $p-$hyponormal.

## 2.3 Quelques conditions impliquant la normalité

**Théorème 2.3.1** *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur* $\log-$*hyponormal ou* $p-$*hyponormal et* $T = U|T|$ *décomposition polaire de* $T$.

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U^{n_0} = U^*$.

Alors, $T$ est normal.

**Preuve.** Supposons que $T$ est $p-$hyponormal, donc

$$|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p} = U|T|^{2p} U^*.$$

D'où,

$$|T|^{2p} \geq U^2 |T|^{2p} U^{2*}.$$

Par récurrence, on obtient

$$|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p} = U|T|^{2p} U^* \geq U^2 |T|^{2p} U^{2*} \geq .... \geq U^{n_0+1} |T|^{2p} U^{(n_0+1)^*} \geq .... \tag{2.3.1}$$

Puisque $U^{n_0} = U^*$ , on a alors

$$U^{n_0+1} = U^*U = U^{(n_0+1)^*},$$

est la projection sur $\overline{\Re(|T|)}$.

Ainsi,

$$U^{n_0+1} |T|^{2p} U^{(n_0+1)^*} = |T|^{2p},$$

d'où par les inégalités (2.3.1), on obtient

$$|T|^{2p} = |T^*|^{2p}.$$

D'où,

$$|T|^2 = |T^*|^2,$$

i.e., $T$ est normal.

Dans le cas $T$ est $\log-$hyponormal les inégalités (2.3.1) sont remplacés par les inégalités

$$\log|T| \geq \log|T^*| = U(\log|T|)U^* \geq U^2(\log|T|)U^{2*} \geq ... \geq U^{n_0+1}(\log|T|)U^{(n_0+1)^*} \geq ...$$

Le reste de la preuve est similaire à l'argument ci-dessus. ■

**Lemme 2.3.1** *Soient $T, S \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs positifs inversibles. Si,*

$$\log T \geq \log S.$$

*Alors*

$$\log(cT) \geq \log(cS) \ , \ \ c \in \mathbb{R}_+^*.$$

**Théorème 2.3.2** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur $\log -$hyponormal ou $p-$hyponormal et $T = U|T|$ décomposition polaire de $T$.*

Si $U^{*^n} \xrightarrow{S} I$ ou $U^n \xrightarrow{S} I$ quand $n \to \infty$. Alors, $T$ est normal.

**Preuve.** Soit $T$ est $p-$hyponormal, et soit $\xi \in H$, supposons que $U^{*^n} \xrightarrow{S} I$ quand $n \to \infty$.

D'aprés les inégalités (2.3.1), on trouve

$$\||T|^p \xi\| \geq \||T^*|^p \xi\| = \||T|^p U^* \xi\| \geq \left\||T|^p U^{*^2} \xi\right\| \geq ... \geq \left\||T|^p U^{*^n} \xi\right\| \geq ... \tag{2.3.2}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \left| \left\||T|^p U^{*^n} \xi\right\| - \||T|^p \xi\| \right| &\leq \left\||T|^p U^{*^n} \xi - |T|^p \xi\right\| \\ &\leq \||T|^p\| \left\|U^{*^n} \xi - \xi\right\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \end{aligned}$$

D'où,

$$\left\||T|^p U^{*^n} \xi\right\| \to \||T|^p \xi\|, \text{ quand } n \to \infty.$$

D'aprés les inégalités (2.3.1), on obtient

$$\||T|^p \xi\| = \||T^*|^p \xi\|.$$

D'où, $|T|^{2p} = |T^*|^{2p}$ donc $T$ est normal.

Maintenant, soit $T$ est $\log -$hyponormal, d'où

$$\log|T| \geq \log|T^*| = U(\log|T|)U^*.$$

Par le lemme précédent il existe $c > 0$ tel que

$$\log|cT| \geq \log|cT^*| = U(\log c|T|)U^*.$$

On applique le même argument de le théorème 2.3.1 ■

## 2.4 Le théorème de Fuglede-Putnam

Dans ce section on s'intéresse au théorème classique et très importont dans la théorie d'opérateurs bornés et non bornés avec toutes ses applications à savoir le théorème de Fuglede-Putnam. Beaucoup des auteurs travaillent sur ce théorème. Après la preuve de Fuglede et Putnam, Rosenblum a donné une preuve simple en utiisant le théorème de Liouville. Berberian a donné une autre preuve avec une matrice qui fait l'équivalance entre celle de Fuglede et Putnam.

Voici ci-après ce théorème dans les deux cas borné et non borné. La version classique du théorème dans le cas borné est la suivante

**Théorème 2.4.1 ([21])** ***(Fuglede - 1950)*** *Soient $A$ et $N$ deux opérateurs bornés sur un Hilbert $H$, tels que $AN = NA$ où $N$ est normal. Alors,*

$$AN^* = N^*A.$$

Puis en 1951 Putnam a fait la généralisation au cas de deux opérateurs normaux i.e.,

**Théorème 2.4.2 ([40])** ***(Putnam - 1951)*** *Soient $A, M$ , $N$ trois opérateurs bornés sur un Hilbert $H$, avec $N, M$ sont normaux et*

$$MA = AN.$$

*Alors*

$$M^*A = AN^*.$$

**Preuve.** La preuve suivante est à M.Rosenblum. Supposons que $S \in \mathcal{L}(H)$ et posons $V = S - S^*$ , on définit

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n.$$

Alors, $V^* = -V$ donc $Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1}$.

D'où $Q$ est unitaire, la conséquence dont nous avons besoin est que $\|\exp(S - S^*)\| = 1$ pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$.

D'autre part, on a $MA = AN$ d'où par récurrence, alors $M^k A = AN^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où $\exp(M) A = A \exp(N)$ ou bien,

$$A = \exp(-M) A \exp(N).$$

Posons $U_1 = \exp(M^* - M)$ et $U_2 = \exp(N - N^*)$, puisque $M$ et $N$ sont normaux il s'enuit que $\exp(M^*) A \exp(-N^*) = U_1 A U_2$ et $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$, d'où

$$\|\exp(M^*) A \exp(-N^*)\| \leq \|A\|.$$

Maintenant, on définit

$$F(\lambda) = \exp(\lambda M^*) A \exp(-\lambda N^*)$$

tel que $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées avec $\overline{\lambda} M$ et $\overline{\lambda} N$ à la place de $M$ et $N$ donc implique que $\|F(\lambda)\| \leq \|A\|$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, $F$ est une fonction bornée analytique à valeur dans $\mathcal{L}(H)$. D'aprés le théorème de Liouville $F'(\lambda) = 0$ on a

$$F'(\lambda) = M^* \exp(\lambda M^*) A \exp(-\lambda N^*) + \exp(\lambda M^*) A(-N^*) \exp(-\lambda N^*).$$

Pour $\lambda = 0$, $F'(0) = 0$.

D'où,

$$M^* A = AN^*.$$

■

**Remarque 2.4.1** *La preuve précédente a été donné par Rosenblum en 1958.*

En 1959 Berberian a remarqué l'équivalence entre les deux version celle de Fuglede et l'autre de Putnam. Cette relation est donnée par la matrice suivante

Soient $T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices d'opérateurs définies sur $H \times H$ où $M$ et $N$ normaux.

Alors, $T$ est normal et on a

$$TS = ST.$$

La version de Fuglede donne alors,

$$T^*S = ST^*.$$

En écrivant les coefficient de ces deux dernière matrices on trouve la version de Putnam.

**Remarque 2.4.2** *Les hypothèses du théorème précédent n'impliquent pas que* $MA^* = A^*N$.

Lorsque $M$ et $N$ sont auto-adjoints et $A$ normal, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors, $MA = AN$ mais $MA^* \neq A^*N$.

**Le cas non bornés**

Dans le cas non borné la version classique donné par le théorème suivant

**Théorème 2.4.3** *Soient $M$, $N$ deux opérateurs normaux non bornés, et soit $A$ un opérateur borné sur $H$ . Si,*

$$AN \subseteq MA.$$

Alors

$$AN^* \subseteq M^*A.$$

**Preuve.** La preuve suivante est donnée par Rosenblum.

On a maintenant $M$ et $N$ normaux non bornés de domaines $D(M)$ et $D(N)$. On sait que $D(N) = D(N^*)$ et $D(M) = D(M^*)$.

Supposons que $AN \subseteq MA$. Alors, si $f \in D(N) = D(N^*)$ d'où $Af \in D(M) = D(M^*)$. Soit $e_\alpha$ la fonction caractéristique d'ensemble

$$\left\{z : |z| \leq \alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\right\}.$$

Alors, $Ne_\alpha(N)$ et $Me_\beta(M)$ sont des opérateurs normaux bornés tel que

$$[e_\beta(M) Ae_\alpha(N)] Ne_\alpha(N) = Me_\beta(M) [e_\beta(M) Ae_\alpha(N)].$$

Donc

$$[e_\beta(M) Ae_\alpha(N)] [Ne_\alpha(N)]^* = [Me_\beta(M)]^* [e_\beta(M) Ae_\alpha(N)].$$

Alors,

$$e_\beta(M)\, AN^* e_\alpha(N)\, f = e_\beta(M)\, M^* A e_\alpha(N)\, f,\ \ \forall f \in D(N^*)\,.$$

Pour $\alpha \to \infty$ et $\beta \to \infty$ on a alors,

$$AN^* f = M^* A f.$$

D'où,

$$AN^* \subseteq M^* A.$$

■

## 2.5 Quelques applications sur le théorème de Fuglede - Putnam

On va se contenter dans ce section aux quelques applications de ce théorème

### 2.5.1 Application 1 ( Sur la somme de deux opérateurs normaux bornés )

Nous notons que la somme de deux opérateurs normaux n'est pas toujours normal comme indiqué en exemple suivant.

**Exemple 2.5.1** *considérons les matrices $A$ et $B$ definies par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On remrque que $A$ et $B$ sont normaux ($B$ auto-adjoint)

Mais, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas normal.

**Proposition 2.5.1** *Soient $A$ et $B$ deux opérateurs normaux bornés, si $A$ commute avec $B$.*

Alors, $A + B$ est normal.

**Preuve.** Montrons que : $(A + B)(A + B)^* = (A + B)^*(A + B)$.

On a

$$(A+B)(A+B)^* = (A+B)(A^*+B^*)$$
$$= AA^* + AB^* + BA^* + BB^*.$$

D'aprés le théorème de Fuglede-Putnum, et par la normalité de $A$ et $B$ on aura;

$$(A+B)(A+B)^* = A^*A + B^*A + A^*B + B^*B$$

$$\begin{aligned} &= A^*(A+B) + B^*(A+B) \\ &= (A^*+B^*)(A+B) = (A+B)^*(A+B). \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.5.1** .

**1)** Dans la proposition précédente on peut remplace la commutativité de $A$ et $B$ , par la commutativité de $A$ et $B^*$ ou $B$ et $A^*$.

**2)** L'inverse de la proposition précédente n'est pas toujours vrais. On peut construire de nombreus contre-exemples.

**3)** la normalité de $A+B$ n' implique pas la commutativité de $A$ et $B$.

**Corollaire 2.5.1** *Si $A$ et $B$ sont deux opérateurs auto-adjoints, tel que $AB = BA$.*

Alors, l'opérateur $A + iB$ est normal.

**Proposition 2.5.2** *Soient $A$ et $B$ deux opérateurs normaux bornés.*

Si $AB^*$ et $B^*A$ sont auto-adjoints.

Alors, la normalité de $A+B$ implique que la commutativité de $A$ et $B$.

**Preuve.** Puisque $A, B$ et $A+B$ sont normaux, on trouve

$$A^*B + B^*A = BA^* + AB^* \tag{2.5.1}$$

Comme $AB^*$et $B^*A$ sont auto-adjoints.

Alors, $(AB^*)^* = BA^* = AB^*$ et $(B^*A)^* = A^*B = B^*A$ par (2.5.1) on obtient

$$B^*A = AB^*.$$

D'aprés le théorème de Fuglede-Putnam.

Alors, on a

$$AB = BA.$$

■

### 2.5.2 Application 2 (Sur le produit de deux opérateurs log-hyponormaux)

**Proposition 2.5.3** *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs log-hyponormaux, tel que $A$ commute avec $B$. Alors, $AB$ est log-hyponormal.*

**Preuve.** Si $A$ et $B$ sont log-hyponormaux, alors $A$ et $B$ sont inversibles et $\log|A|^2 \geq \log|A^*|^2$, $\log|B|^2 \geq \log|B^*|^2$.

Puisque $AB = BA$, en appliquant le théorème de Fuglede-Putnam, on obtient $A^*B = BA^*$.

D'où

$$|AB|^2 = |B|^2 |A|^2,$$

et

$$|(AB)^*|^2 = |B^*|^2 |A^*|^2.$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned}
\log|AB|^2 &= \lim_{p\to 0^+} \frac{\left(|AB|^2\right)^p - 1}{p} \\
&= \lim_{p\to 0^+} \frac{\left(|A|^2\right)^p \left(|B|^2\right)^p - 1}{p} \\
&= \lim_{p\to 0^+} \frac{\left(\left(|A|^2\right)^p - 1\right)\left(\left(|B|^2\right)^p - 1\right) + \left(|A|^2\right)^p + \left(|B|^2\right)^p - 2}{p} \\
&= \log|A|^2 + \log|B|^2.
\end{aligned}$$

De la même manière on démontre que

$$\log|(AB)^*|^2 = \log|A^*|^2 + \log|B^*|^2.$$

Ceci qui donne, puisque $AB$ est inversible et

$$\begin{aligned} & \log |AB|^2 - \log |(AB)^*|^2 \\ = & \left(\log |A|^2 - \log |A^*|^2\right) + \left(\log |B|^2 - \log |B^*|^2\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $AB$ est log-hyponormal. ■

### 2.5.3 Application 3 (Quelques conditions impliquant la normalité)

Beaucoup des auteurs travaillent sur le théorème en changeant leurs hypothése du théorème de Fuglede-Putnam. Voici une autre généralisation du théorème par Uchiyama et Tanahashi.

**Théorème 2.5.1 ([51])** ***(Uchiyama et Tanahashi - 2002)*** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur p-hyponormal ou log-hyponormal, et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint.*

Si

$$TA = AT^*,$$

alors

$$T^*A = AT.$$

**Théorème 2.5.2 ([51])** *Soient $A$, $B$, $X \in \mathcal{L}(H)$, avec $A^*$ est p-hyponormal ou log-hyponormal, $B$ dominant. Si*

$$XA = BX,$$

*alors*

$$XA^* = B^*X.$$

On présente quelques conditions qui impliquent la normalité d'un opérateur, en appliquant les deux théorèmes précédents.

**Proposition 2.5.4** *Soit $A$, $B$, $X$ trois opérateurs bornés sur un Hilbert, avec $A^*$est un $p$-hyponormal ou log-hyponormal, $B$ dominant et $X$ inversible. Si*

$$XA = BX.$$

*Alors, il existe un opérateur unitaire $U$ tel que : $UA = BU$, et $A$, $B$ sont normaux.*

**Preuve.** Si $XA = BX$, d'aprés le théorème de Fuglede-Putnam pour $p$-hyponormal, alors $XA^* = B^*X$ ce qui implque que

$$AX^*X = X^*BX = X^*XA.$$

Soit $X = UP$ (décomposition polaire de $X$) puisque $X$ est inversible, d'où $P$ inversible et $U$ unitaire, d'où $AP^2 = P^2A$ et $P$ positif donc

$$AP = PA.$$

D'autre part, $XA = BX$ imlique que $UPA = BUP = UAP$, mais $P$ est inversible d'où $BU = UA$, par conséquent $A$, $B$ sont unitairement équivalents.

Alors, $A$ est dominant et $B$ est $p$-hyponormal, donc $A$ et $B$ sont normaux. ■

**Corollaire 2.5.2** *Soit $A$, $B$, $X$ trois opérateurs bornés sur un Hilbert, avec $A^*$est un $p$-hyponormal ou log-hyponormal, $B$ dominant.*

Si $X$ est opérateur positif et inversible. Alors,
$XA = BX$ implique $A = B$.

**Théorème 2.5.3** *Soit $T = A+iB$ décomposition cartésienne de $T$ avec $AB$ est $p$-hyponormal. Si $A$ ou $B$ est positif. Alors $T$ est normal.*

**Preuve.** Supposons que $A$ est positif, soit $S = AB$ d'où $S^* = BA$.

On a

$$(AB)A = A(BA).$$

Donc

$$SA = AS^*.$$

Utilisant le théorème de Fuglede-Putnam pour $p$-hyponormal, on trouve :

$$S^*A = AS.$$

D'où $BA^2 = A^2B$, mais $A$ est positif, alors

$$AB = BA$$

i.e., $T$ est normal.

Maintenant, si $B$ est positif, on applique le même argument. ■

**Théorème 2.5.4** *Soit $T = A+iB$ décomposition cartésienne de $T$ avec $AB$ est $p$-hyponormal.*

Si $T^*$ est hyponormal, alors $T$ est normal.

**Preuve.** Soit $Q = AB$ d'où $Q^* = BA$.

On a

$$(AB)A = A(BA),$$

donc

$$QA = AQ^*.$$

Utilisant le théorème de Fuglede-Putnam pour $p$-hyponormal, on trouve

$$Q^*A = AQ.$$

D'où

$$BA^2 = A^2B.$$

Comme $T^*$ est hyponormal, nous avons,

$$TT^* - T^*T = 2i(BA - AB).$$

On pose $Y = 2i(BA - AB)$, alors $Y \geq 0$.

D'autre part,

$$Y^2A = Y(YA)$$

$$= Y(-AY) = -(YA)Y$$

$$= -(-AY)Y = AY^2.$$

Mais $Y$ est positif, alors

$$YA = AY = 0.$$

Donc,

$$A(AB - BA) = (AB - BA)A = 0.$$

Ce implique que

$$\sigma(AB - BA) = \{0\}.$$

Par conséquent $AB - BA$ est quasi-nilpotent et anti-hermitien, d'où

$$AB - BA = 0.$$

Donc, $T$ est normal. ∎

**Théorème 2.5.5** *Soient $A, B$ deux opérateurs positifs tels que $AB$ est normal.*

Alors, $AB$ est auto-adjoint.

**Preuve.** On a

$$(AB)\,A = A\,(BA).$$

D'aprés Fuglede-Putnam, on trouve

$$(AB)^*\,A = A\,(BA)^*.$$

D'où, $A^2B = BA^2$ comme $A$ positif alors, $AB = BA$ et

$$(AB)^* = (BA)^*$$

$$= A^*B^* = AB.$$

Donc, $AB$ est auto-adjoint. ∎

**Théorème 2.5.6** *Soient $V, X$ deux opérateurs isométries et soit $A$ est opérateur normal.*

Si

$$VX = XA.$$

Alors, l'opérateur $A$ est unitaire.

**Preuve.** Puisque $VX = XA$, d'aprés le théorème de Fuglede-Putnam, on trouve

$$V^*X = XA^*.$$

Maintenant, on muliplie la première équation par $V^*$, nous obtenons

$$X = V^*XA.$$

D'où

$$X\left(I - A^*A\right) = 0,$$

implique $X^*X\left(I - A^*A\right) = 0$ d'où $A^*A = I$ c'est-à-dire $A$ est isométrie et puisque $A$ normal, alors le résultat. ■

# Chapitre 3

# La classe des opérateurs compacts

## 3.1 Valeurs singulières

Dans ce paragraphe nous définissons les valeurs singulières d'un opérateur compact, agissant sur un espace de Hilbert séparable $H$.

**Définition 3.1.1** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, on définit les valeurs singulières de $T$ par*

$$s_n(T) := \lambda_n(|T|) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}\ , n \in \mathbb{N}^*$$

i.e.; les valeurs singulières de $T$ sont les valeurs propres de l'opérateur $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ .
En particulier, $s_1(T) = \|T\|$.

**Exemple 3.1.1** *On considère l'opérateur $A \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ défini par*

$$(Af)(t) = 2i\int_0^t f(s)\, ds.$$

*On trouve*

$$s_j(A) = \frac{2}{(2j-1)\pi}, j = 1, 2, ......$$

**Proposition 3.1.1 ([23])** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Alors, il existe dans $H$ deux systémes $(\phi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ orthonormaux tels que*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle ., \phi_n \rangle \psi_n \quad ,$$

où $(s_n)_n$ est la suite des valeurs singulières de $T$.

**Corollaire 3.1.1** ***(Expression de l'adjoint)*** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, on a*

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle ., \psi_n \rangle \phi_n.$$

**Preuve.** En effet, on a $\forall f, g \in H$ ,

$$\langle Tf, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle f, \phi_n \rangle \langle \psi_n, g \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle g, \psi_n \rangle \phi_n \right\rangle \\ &= \langle f, T^* g \rangle . \end{aligned}$$

Donc, $T^* g = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle g, \psi_n \rangle \phi_n$. ■

On donne ci-dessous quelques propriétés sur les valeurs singulières.

**Proposition 3.1.2** *Les valeurs singulières d'un opérateur compact $T \in \mathcal{L}(H)$ sont également données par les deux formules suivantes*

1) $s_{n+1} = \min\limits_{g_1,\ldots,g_n} \max \{\|Tf\|, \|f\| = 1 \text{ et } \langle f, g_k \rangle = 0, k = 1, \ldots\ldots, n\}$.
2) $s_n = \inf \{\|T - F\|, F \in \mathcal{F}_n\}$.

où $\mathcal{F}_n$ est la classe des opérateurs de rang stictement plus petit que $n$, définis de l'espace $H$ dans lui même.

**Proposition 3.1.3** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, et soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$s_n(AT) \leq \|A\| s_n(T).$$

**Preuve.** On a

$$s_n(AT) = \min_{g_1,\ldots,g_{n-1}} \max \{\|ATf\|, \|f\| = 1 \text{ et } \langle f, g_k \rangle = 0, k = 1, \ldots\ldots, n-1\}$$

$$\leq \|A\| \min_{g_1,\ldots,g_{n-1}} \max \{\|Tf\|, \|f\| = 1 \text{ et } \langle f, g_k \rangle = 0, k = 1, \ldots\ldots, n-1\}$$

$$= \|A\| \, s_n (T) .$$

■

**Proposition 3.1.4** *Soit $(A_k)$ une suite d'opérateurs compacts convergent vers un opérateur $A$ pour la norme d'opérateurs. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{k \to \infty} s_n (A_k) = s_n (A) .$$

**Preuve.** On a pour touts $n, k \in \mathbb{N}$

$$|s_n (A_k) - s_n (A)| \leq \|A_k - A\| .$$

Ainsi, $\lim\limits_{k \to \infty} s_n (A_k) = s_n (A)$. ■

## 3.2 Les classes de Schatten $S_p$

Dans ce paragraphe nous introduisons les classes de Schatten $S_p$, pour $P > 0$. Nous nous référons essentiellement au livre de Zhu (voir [54]).

**Définition 3.2.1** *On dit qu'un opérateur compact $T$ défini sur un espace de Hilbert $H$ est de Schatten de classe $p$, $0 < p < \infty$, autrement dit $T \in S_p$, si la suite des valeurs singulières qui lui associée $(s_n)_n$ est dans $l_p$ ( i.e.; $\sum\limits_n s_n^p < \infty$ ).*

Pour tout opérateur $T$ de $S_p$, on pose

$$\|T\|_{S_p} = \left( \sum_{n \geq 1} s_n^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(s_n)_n\|_{l_p} .$$

**Remarque 3.2.1** *Cette expression définit une norme sur $S_p$, pour $1 \leq p < \infty$ et une quasi-norme pour $0 < p < 1$.*

On donne ci dessous quelques propriétés sur les classes $S_p$.

**Proposition 3.2.1** *Soit $A \in \mathcal{L} (H)$ un opérateur compact.*

**a)** Si $p \geq 1$, l'opérateur $T$ appartient à la classe $S_p$ si seulement si,

$$\sum |\langle T\varphi_i, \psi_i \rangle|^p < \infty,$$

pour tout choix $(\varphi_i)_i$ , $(\psi_i)_i$ des systémes orthonormaux de $H$. De plus, on a

$$\|T\|_{S_p} = \sup \left\{ \left( \sum_i |\langle T\varphi_i, \psi_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

où le sup est pris sur tous les systémes orthonormaux $(\varphi_i)_i$ , $(\psi_i)_i$ de $H$.

**b)** Si $p = 1$ et si $T$ est positif alors, pour toute basse orthonormale $(\varphi_i)_i$ de $H$ , on a

$$\|T\|_{S1} = \sum_i |\langle T\varphi_i, \varphi_i \rangle|^p .$$

Cette somme est en particulier convergente indépendamment du choix de la basse $(\varphi_i)_i$.

**c)** Si $0 < p \leq 1$ et si, de plus, $T$ est un opérateur positif tel que, pour une certaine base orthonormale $(\varphi_i)_i$ de $H$ , on a

$$\sum_i |\langle T\varphi_i, \varphi_i \rangle|^p < \infty,$$

alors, $T \in S_p$ et $\|T\|_{S_p}^p \leq \sum_i |\langle T\varphi_i, \varphi_i \rangle|^p$.

**Proposition 3.2.2** *(voir [54]) Soient $T$ un opérateur compact sur un espace de Hilbert $H$ et $p \geq 1$. Alors, $T \in S_p$ si seulement si,*

$$(T^*T)^{\frac{p}{2}} \in S_{\frac{p}{2}}.$$

De plus,

$$\|T\|_{S_p}^p = \|T^*T\|_{S_{\frac{p}{2}}}^{\frac{p}{2}} .$$

**Proposition 3.2.3** *La classe $S_p$ est un idéal dans l'algèbre des opérateurs bornés. De plus, si $A$ et $B$ sont deux opérateurs bornés et $T \in S_p$. Alors,*

$$\|ATB\|_{S_p} \leq \|A\| \, \|T\|_{S_p} \, \|B\| .$$

## 3.3 Quelques résultats sur les inégalités des valeurs singulières pour les opérateurs normaux compacts

Dans cette section on montre quelques les inégalités des valeurs singulières aux opérateurs normaux compacts, soit $A$ est l'opérateur normal compact sur un espace de Hilbert séparable complexe $H$, où $A = A_1 + iA_2$ est la décomposition cartésienne de $A$ , on va montrer l'inégalité suivante

$$\frac{1}{\sqrt{2}} s_j\left(A_1 + iA_2\right) \leq s_j\left(A\right) \leq s_j\left(|A_1| + |A_2|\right), \text{ pour } j = 1, 2, ......$$

De plus, nous montrons l'inégalité suivante

$$\sqrt{2} s_j\left(A_1 + iA_2\right) \leq s_j\left(A + iA^*\right) \leq 2 s_j\left(A_1 + A_2\right), \text{ pour } j = 1, 2, ......$$

Aussi, plusieurs inégalités seront prouvées.

Pour $T \in K(H)$ Les valeurs singulières de $T$ notée $s_1(T), s_2(T), ....$ sont les valeurs propres de l'opérateur positif $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ comme $s_1(T) \geq s_2(T) \geq ....$ et répétée selon la multiplicité. Notez que $s_j(T) = s_j(T^*) = s_j(|T|)$, pour $j = 1, 2, ......$

Il suit le principe deWeyl (voir par exemple [54], p. 63 ou [24], p. 26) que si $S, T \in K(H)$ sont positifs et $S \leq T$ , alors $s_j(S) \leq s_j(T)$ pour $j = 1, 2, ......$

Les valeurs singulières de $S \oplus T$ et $\begin{bmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{bmatrix}$ sont les mêmes. Ici, nous utilisons la notation de la somme directe $S \oplus T$ pour l'opérateur block-diagonal $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$ définie sur $H \oplus H$ (voir [7]).

La décomposition de Jordan de $A$, définie par

$$A = A^+ - A^-,$$

où $A^+$ et $A^-$ sont les opérateurs positifs donnés par

$$A^+ = \frac{|A| + A}{2}$$

et

$$A^- = \frac{|A| - A}{2}$$

(voir [7] ).

On rappelle que la décomposition cartésienne de l'opérateur $A$ donné par $A = A_1 + iA_2$ où $A_1 = \frac{A+A^*}{2}$ et $A_2 = \frac{A-A^*}{2i}$, sont des opérateur auto-adjoint. Si $A$ est normal, alors $A_1A_2 = A_2A_1$.

Dans [6] que si $A, B, C \in K(H)$ tel que $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$, alors

$$s_j(B) \leq s_j(A \oplus C). \tag{3.3.1}$$

En outre, dans [6] que si $A, B \in K(H)$ tel que $A$ est auto-adjoint et

$$\pm A \leq B, B \geq 0.$$

Alors,

$$2s_j(A) \leq s_j((B + A) \oplus (B - A)). \tag{3.3.2}$$

En plus, dans [6] les auteurs ont monté que

$$s_j(A + B) \leq s_j\left(\left(A^+ + B^+\right) \oplus \left(A^- + B^-\right)\right) \tag{3.3.3}$$

Tao a démontré dans [50] que si $A, B, C \in K(H)$ tel que $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$, alors

$$2s_j(B) \leq s_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$$

Zhan a démontré dans [55], que si $A, B \in K(H)$ sont positifs, alors

$$s_j(A - B) \leq s_j(A \oplus B). \tag{3.3.4}$$

Dans [30] Hirzallah et Kittaneh ont monté que si $A, B \in K(H)$ , alors

$$s_j(A + B) \leq 2s_j(A \oplus B) \tag{3.3.5}$$

Dans cette section on montre quelques résultats sur les inégalités des valeurs singulières pour les opérateurs normaux compacts.

### 3.3.1 Résultats principaux

Nous commencerons par présenter le théorème suivant pour les nombres complexes

**Théorème 3.3.1** *Soit $x = a + ib$ un nombre complexe.*

Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|a+b\right| \leq \left|x\right| \leq \left|a\right| + \left|b\right|, \tag{3.3.6}$$

Aussi,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|a-b\right| \leq \left|x\right| \leq \left|a\right| + \left|b\right|. \tag{3.3.7}$$

**Preuve.** Pour prouver l'inégalite (3.3.6), on a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|a+b\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(a+b\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+2ab}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2a^2+2b^2} = \sqrt{a^2+b^2} = \left|x\right|.$$

De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|a-b\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(a-b\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2-2ab} \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq \left|x\right|.$$

■

Maintenant, on généralise le théorème précédent par le théorème suivant.

**Théorème 3.3.2** *Soit $A$ un opérateur normal dans $K\left(H\right)$, où $A = A_1 + iA_2$ décomposition cartésienne de $A$.*

Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}s_j\left(A_1+A_2\right) \leq s_j\left(A\right) \leq s_j\left(\left|A_1\right| + \left|A_2\right|\right)$$

pout tout $j = 1, 2, \ldots.$

**Preuve.** Nous avons

$$\sqrt{A^*A} = \sqrt{\left(A_1^2+A_2^2\right) + i\left(A_1A_2 - A_2A_1\right)},$$

puisque $A$ est normal alors,

$$\sqrt{A^*A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2},$$

d'où,

$$s_j(A) = s_j(|A|)$$

$$= s_j\left(\sqrt{A^*A}\right) = s_j\left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right),$$

pour $j = 1, 2, .....$

En utilisant le principe de Weyl et l'inégalité

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \leq |A_1| + |A_2|,$$

on trouve

$$s_j\left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right) \leq s_j(|A_1| + |A_2|),$$

pour $j = 1, 2, .....$

D'où

$$s_j(A) \leq s_j(|A_1| + |A_2|)$$

Maintenant , pour prouver l' inégalité de gauche, nous rappelons cette fameuse inégalité

$$0 \leq (A_1 + A_2)^* (A_1 + A_2) \leq 2\left(A_1^2 + A_2^2\right).$$

Par conséquent, en utilisant le principe de Weyl, nous pouvons écrire

$$s_j\left(\sqrt{(A_1 + A_2)^* (A_1 + A_2)}\right) \leq \sqrt{2} s_j\left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right)$$

pour $j = 1, 2, .....$

D'où,

$$s_j(A_1 + A_2) = s_j(|A_1 + A_2|) \leq \sqrt{2} s_j\left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right).$$

■

L'exemple suivant montrent que la condition de la normalité est nécessaire.

**Exemple 3.3.1** *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & 2i \\ 2i & 2i \end{bmatrix}$$

*on a*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

*D'où, on trouve*

$$s_2(A) = s_2(A_1 + iA_2) \approx 1.34 > s_2(|A_1| + |A_2|) \approx 1.27.$$

**Remarque 3.3.1** *Soit*

$$X = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{bmatrix},$$

où $A$ est un opérateur normal, alors $X$ est un opérateur normal et $X = X_1 + iX_2$ est la décomposition cartésienne de $X$ .

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{A-A^*}{2} \\ \frac{A^*-A}{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } X_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{A+A^*}{2i} \\ \frac{-A-A^*}{2i} & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, on trouve,

$$|X_1| = \begin{bmatrix} \frac{|A-A^*|}{2} & 0 \\ 0 & \frac{|A^*-A|}{2} \end{bmatrix} \text{ et } \quad |X_2| = \begin{bmatrix} \frac{|A+A^*|}{2} & 0 \\ 0 & \frac{|A+A^*|}{2} \end{bmatrix}.$$

Maintenant, en appliquant le théorème 3.3.2, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{2}} s_j(A_1 - A_2) \leq s_j(A) \leq s_j(|A_1| + |A_2|).$$

Comme application du théorème 3.3.2, nous allons déterminer les limites supérieures et inférieures pour les valeurs singulières de l'opérateur normal $A + iA^*$, où $A$ est normal.

**Théorème 3.3.3** *Soit $A \in K(H)$ un opérateur normal, où $A = A_1 + iA_2$ est la décomposition cartésienne de $A$.*

Alors,

$$\sqrt{2} s_j(A_1 + A_2) \leq s_j(A + iA^*) \leq 2 s_j(A_1 + A_2),$$

pour $j = 1, 2, .....$

**Preuve.** Supposons que $T = A + iA^*$ un opérateur normal, donc on peut écrire la décomposition cartésienne de $T$ comme $T = T_1 + iT_2$ où

$$T_1 = \frac{(A + A^*) + i(A^* - A)}{2}, T_2 = \frac{(A - A^*) + i(A + A^*)}{2i}$$

où la décomposition cartésienne de $A$ est donné par $A = A_1 + iA_2$.

En faisant la comparaison de $T_1$ et $T_2$ et on voit facilement que$T_1 = T_2$ .

Donc

$$T_1 + T_2 = (A + A^*) + i(A^* - A) = 2(A_1 + A_2).$$

De plus, on trouve

$$|T_1| = |T_2| = |A_1 + A_2|.$$

Maintenant, on applique le théorème 3.3.2. On obtient,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} s_j(2(A_1 + A_2)) \leq s_j(T) \leq s_j(2|A_1 + A_2|),$$

pour $j = 1, 2, ....$

Ceci est équivalent

$$\sqrt{2} s_j(A_1 + A_2) \leq s_j(A + iA^*) \leq 2 s_j(A_1 + A_2),$$

pour $j = 1, 2, .....$ ■

Maintenant, on donne une nouvelle preuve d'inégalité (3.3.2).

**Théorème 3.3.4** *Soient $A, B \in K(H)$ tel que $A$ est auto-adjoint, $B \geq 0$ et $\pm A \leq B$.*

Alors,

$$2 s_j(A) \leq s_j((B + A) \oplus (B - A)).$$

**Preuve.** Nous pouvons écrire $A$ sous la forme

$$A = \frac{(B + A) - (B - A)}{2}.$$

On applique l'inégalité (3.3.4), nous obtenons

$$s_j(A) = \frac{1}{2} s_j((B + A) - (B - A))$$

$$\leq \frac{1}{2} s_j \left( (B + A) \oplus (B - A) \right),$$

ce qui revient à dire que

$$2 s_j (A) \leq s_j \left( (B + A) \oplus (B - A) \right),$$

pour $j = 1, 2.....$ ■

Dans le théorème suivant on présente une preuve d'inégalité (3.3.3).

**Théorème 3.3.5** *Soient $A, B$ deux opérateurs auto-adjoints dans $K(H)$.*

Alors,

$$s_j (A + B) \leq s_j \left( \left(A^+ + B^+\right) \oplus \left(A^- + B^-\right) \right),$$

pour $j = 1, 2, ......$

**Preuve.** Puisque $A$ et $B$ sont des opérateurs auto-adjoints nous pouvons écrire

$$A = A^+ - A^-$$

et

$$B = B^+ - B^-$$

On applique l'inégalité (3.3.4), on trouve

$$s_j (A + B) = s_j \left( A^+ - A^- + B^+ - B^- \right)$$

$$= s_j \left( \left(A^+ + B^+\right) - \left(A^- + B^-\right) \right)$$

$$\leq s_j \left( \left(A^+ + B^+\right) \oplus \left(A^- + B^-\right) \right),$$

pour $j = 1, 2, .......$ ■

Maintenant, on présente les deux théorèmes suivants comme une application d'inégalité (3.3.5).

**Théorème 3.3.6** *Soit $A \in K(H)$ un opérateur normal, et soit $A = A_1 + iA_2$ la décomposition cartésienne de $A$.*

Alors,

$$s_j(A) \leq 2s_j\left(\left(2A_1^- + 2A_2^-\right) \oplus (A_1 + A_2)\right),$$

pour $j = 1, 2, .......$

**Preuve.** D'après le théorème 3.3.2 si $A$ est un opérateur normal dans $K(H)$ avec $A = A_1 + iA_2$ la décomposition cartésienne de $A$ , on a

$$s_j(A) \leq s_j(|A_1| + |A_2|)$$

$$= s_j((|A_1| - A_1) + (|A_2| - A_2) + (A_1 + A_2))$$

$$= s_j\left(\left(2A_1^- + 2A_2^-\right) + (A_1 + A_2)\right)$$

$$\leq 2s_j\left(\left(2A_1^- + 2A_2^-\right) \oplus (A_1 + A_2)\right)$$

pour $j = 1, 2, ......$ ■

Le théorème suivant est la deuxième application de l'inégalité (3.3.5).

**Théorème 3.3.7** *Siot $A \in K(H)$ un opérateur auto-adjoint.*

Alors,

$$s_j\left(A^+\right) \leq s_j(A \oplus |A|),$$

pour $j = 1, 2, ......$

De plus,

$$s_j\left(A^-\right) \leq s_j(A \oplus |A|),$$

pour $j = 1, 2, ......$

**Preuve.** Il est bien connu que

$$A^{+} = \frac{A + |A|}{2}.$$

Donc en utilisant l'inégalité (3.3.5),

on obtient

$$s_j\left(A^{+}\right) = s_j\left(\frac{A + |A|}{2}\right)$$

$$\leq 2s_j\left(\frac{A}{2} \oplus \frac{|A|}{2}\right)$$

$$= s_j\left(A \oplus |A|\right).$$

De même,

$$A^{-} = \frac{|A| - A}{2}.$$

Donc en utilisant l'inégalité (3.3.5),

on obtient

$$s_j\left(A^{-}\right) = s_j\left(\frac{|A| + (-A)}{2}\right)$$

$$\leq 2s_j\left(\frac{|A|}{2} \oplus \left(-\frac{A}{2}\right)\right)$$

$$= s_j\left(A \oplus |A|\right),$$

pour $j = 1, 2, .....$ ■

Bhatia et Kittaneh dans [9] ont prouvé que si $A, B \in K(H)$, alors

$$s_j\left(AB^* + BA^*\right) \leq s_j\left(\left(A^*A + B^*B\right) \oplus \left(AA^* + BB^*\right)\right), \tag{3.3.8}$$

pour $j = 1, 2, .....$

Ici, nous allons démontrer une inégalité similaire de l'inégalité (3.3.8) .

**Théorème 3.3.8** *Soient $A, B \in K(H)$.*

Alors,

$$s_j(AB+BA) \leq s_j((A^*A+B^*B) \oplus (AA^*+BB^*)),$$

pour $j = 1, 2, .....$

**Preuve.** Posons

$$X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \text{et } Y = \begin{bmatrix} B & 0 \\ A^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Cela implique que

$$XX^* = \begin{bmatrix} AA^* & AB \\ B^*A^* & B^*B \end{bmatrix}$$

et

$$X^*X = \begin{bmatrix} A^*A+BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'autre part, nous avons

$$YY^* = \begin{bmatrix} BB^* & BA \\ A^*B^* & A^*A \end{bmatrix}$$

et

$$Y^*Y = \begin{bmatrix} B^*B+AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme $XX^*$et $YY^*$ sont des opérateurs positifs, alors

$$XX^*+YY^* = \begin{bmatrix} AA^*+BB^* & AB+BA \\ B^*A^*+A^*B^* & B^*B+A^*A \end{bmatrix},$$

est positif.

Maintenant, en appliquant l'inégalité (3.3.1), on obtient

$$s_j(AB+BA) \leq s_j((A^*A+B^*B) \oplus (AA^*+BB^*)),$$

pour $j = 1, 2, .......$ ∎

**Corollaire 3.3.1** *Soient $A, B \in K(H)$ deux opérateurs normaux.*

Alors,

$$s_j(AB+BA) \leq s_j((AA^*+BB^*) \oplus (AA^*+BB^*)),$$

pour $j = 1, 2, .......$

## 3.4 Résultat de généralisation

Dans cette section on donne la généralisation des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3

**Théorème 3.4.1** *Soit $A_1, A_2, ...., A_n$ des opérateurs normaux dans $K(H)$.*

Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} s_j \left( \bigoplus_{i=1}^{n} \left( \Re(A_i) + \Im(A_i) \right) \right) \leq s_j \left( \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \right) \leq s_j \left( \bigoplus_{i=1}^{n} \left( |\Re(A_i)| + |\Im(A_i)| \right) \right),$$

pour $j = 1, 2, .......$

**Preuve.** Si $A_1, A_2, ...., A_n$ sont normaux.

Alors, on obtient

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_i = \begin{pmatrix} A_1 & & & & 0 \\ & A_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & . \\ & & 0 & & A_n \end{pmatrix},$$

est normal.

D'où, on trouve

$$\left( \bigoplus_{i=1}^{n} \Re(A_i) \right) \left( \bigoplus_{i=1}^{n} \Im(A_i) \right) = \left( \bigoplus_{i=1}^{n} \Im(A_i) \right) \left( \bigoplus_{i=1}^{n} \Re(A_i) \right).$$

Par l'égalité suivante, on obtient

$$\sqrt{\left( \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \right)^* \left( \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \right)} = \sqrt{\left( \bigoplus_{i=1}^{n} \Re(A_i) \right)^2 + \left( \bigoplus_{i=1}^{n} \Im(A_i) \right)^2}.$$

Donc,

$$s_j \left( \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \right) = s_j \left( \left| \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \right| \right) = s_j \left( \sqrt{\left( \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \right)^* \left( \bigoplus_{i=1}^{n} A_i \right)} \right)$$

$$= s_j \left( \sqrt{\left( \bigoplus_{i=1}^{n} \Re(A_i) \right)^2 + \left( \bigoplus_{i=1}^{n} \Im(A_i) \right)^2} \right).$$

En utilisant le principe de Weyl et l'inégalité

$$\sqrt{\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)\right)^2+\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right)^2}\leq\left|\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)\right|+\left|\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right|,$$

on trouve

$$s_j\left(\sqrt{\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)\right)^2+\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right)^2}\right)\leq s_j\left(\left|\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)\right|+\left|\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right|\right).$$

Maintenant , pour prouver l' inégalité de gauche, nous rappelons cette inégalité

$$0\leq\left(\Re\left(A_i\right)+\Im\left(A_i\right)\right)^*\left(\Re\left(A_i\right)+\Im\left(A_i\right)\right)\leq 2\left(\left(\Re\left(A_i\right)\right)^2+\left(\Im\left(A_i\right)\right)^2\right).$$

Par conséquent, en utilisant le principe de Weyl, nous pouvons écrire

$$s_j\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)+\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right)^*\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)+\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right)\right)\leq 2s_j\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)\right)^2+\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right)^2\right).$$

D'où,

$$\begin{aligned}s_j\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)+\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right)&=s_j\left(\left|\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)+\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right|\right)\\&\leq\sqrt{2}s_j\left(\sqrt{\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Re\left(A_i\right)\right)^2+\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Im\left(A_i\right)\right)^2\right)}\right),\end{aligned}$$

pour $j=1,2,....$ ■

**Corollaire 3.4.1** *Soit $A=A_1+iA_2$ un opérateur normal dans $K(H)$.*

Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}s_j\left(A_1+A_2\right)\leq s_j\left(A\right)\leq s_j\left(\left|A_1\right|+\left|A_2\right|\right),$$

pour $j=1,2,.....$

**Théorème 3.4.2** *Soit $A_1,A_2,....,A_n$ des opérateurs normaux dans $K(H)$.*

Alors,

$$\sqrt{2}s_j\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\Re\left(A_i\right)+\Im\left(A_i\right)\right)\right)\leq s_j\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(A_i+iA_i^*\right)\right)\leq 2s_j\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\Re\left(A_i\right)+\Im\left(A_i\right)\right)\right),$$

pour $j = 1, 2, .....$

**Preuve.** Puisque $A_i + iA_i^*$ est normal pour $j = 1, 2, ......$

Supposons que

$$T = \bigoplus_{i=1}^{n} (A_i + iA_i^*),$$

est un opérateur normal.

Donc on peut écrire la décomposition cartésienne de $T$ comme

$$T = \Re(T) + i\Im(T)$$

où

$$\Re(T) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i + A_i^*}{2}\right) + i \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i^* - A_i}{2}\right),$$

et

$$\Im(T) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i - A_i^*}{2i}\right) + i \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i^* + A_i}{2i}\right).$$

En faisant la comparaison des $\Re(T)$ et $\Im(T)$ , on voit facilement que $\Re(T) = \Im(T)$ donc

$$\Re(T) + \Im(T) = \bigoplus_{i=1}^{n} (A_i + A_i^*) + i \bigoplus_{i=1}^{n} (A_i^* - A_i).$$

Maintenant, on applique le théorème 3.3.2.

On obtient,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} s_j (\Re(T) + \Im(T)) \leq s_j (\Re(T) + i\Im(T)) \leq s_j (|\Re(T)| + |\Im(T)|).$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{2}} s_j \left(\bigoplus_{i=1}^{n} (A_i + A_i^*) + i \bigoplus_{i=1}^{n} (A_i^* - A_i)\right) \leq s_j \left(\bigoplus_{i=1}^{n} (A_i + iA_i^*)\right),$$

et

$$s_j \left(\bigoplus_{i=1}^{n} (A_i + iA_i^*)\right) \leq 2s_j \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i^* + A_i}{2}\right) + i \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i^* - A_i}{2}\right)\right)$$

$$= s_j \left(\bigoplus_{i=1}^{n} (A_i + A_i^*) + i \bigoplus_{i=1}^{n} (A_i^* - A_i)\right)$$

on a

$$\Re\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i^* + A_i}{2}\right)$$

et

$$\Im\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\frac{A_i - A_i^*}{2i}\right)$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}} s_j\left(2\Re\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right) + 2\Im\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right)\right) \leq s_j\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(A_i + iA_i^*\right)\right)$$

$$\leq s_j\left(2\Re\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right) + \Im\left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right)\right)$$

Finalement,

$$\sqrt{2} s_j\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\Re\left(A_i\right) + \Im\left(A_i\right)\right)\right) \leq s_j\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(A_i + iA_i^*\right)\right) \leq 2 s_j\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\Re\left(A_i\right) + \Im\left(A_i\right)\right)\right)$$

pour $j = 1, 2, ....$ ■

# Chapitre 4

# L'opérateur n-power-hyponormal et l'opérateur de la forme $T^2 \geq -T^{*2}$

## 4.1 L'opérateur n-power-hyponormal

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle classe d'opérateur agissant sur un espace de Hilbert complexe $H$ dite $n$-power-hyponormal.

Nous donnons quelques propriétés de base de ces les opérateurs.

**Définition 4.1.1** *(**opérateur n-power-hyponormal** ) un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est appelé un opérateur $n$-power-hyponormal si,*

$$T^n T^* \leq T^* T^n.$$

Il est facile de constater que, cette nouvelle classe comprend tous les opérateurs normaux, tous les opérateurs n-normaux et tous les opérateurs hyponormaux.

**Proposition 4.1.1** *Soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs sont unitairement équivalents, et $T$ est n-power-hyponormal .*

Alors, l'opérateur $S$ aussi est $n$-power-hyponormal.

**Preuve.** Comme $S$ et $T$ sont unitairement équivalents, alors il existe un opérateur unitaire $U$ tel que

$$S = UTU^*$$

d'où,

$$S^n = UT^nU^*$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} S^nS^* &= UT^nU^*\left(UTU^*\right)^* \\ &= UT^nU^*UTU^* \\ &= UT^nT^*U^* \\ &\leq UT^*T^nU^* \\ &= S^*S^n. \end{aligned}$$

Donc,

$$S^nS^* \leq S^*S^n,$$

c'est - à - dire, $S$ est un opérateur $n$-power-hyponormal. ■

**Proposition 4.1.2** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur $n$-power-hyponormal .*

Alors, $T^*$ est anti-$n$-power-hyponormal.

**Preuve.** Comme $T$ est un opérateur n-power-hyponormal.

Alors,

$$\begin{aligned} T^nT^* &\leq T^*T^n \Rightarrow \left(T^nT^*\right)^* \leq \left(T^*T^n\right)^* \\ &\Rightarrow \left(T^*\right)^*\left(T^n\right)^* \leq \left(T^n\right)^*\left(T^*\right)^* \\ &\Rightarrow T\left(T^*\right)^n \leq \left(T^*\right)^nT \\ &\Rightarrow \left(T^*\right)^nT \geq T\left(T^*\right)^n. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

**Corollaire 4.1.1** *Si $T$ et $T^*$ sont deux opérateurs $n$-power-hyponormaux.*

Alors, l'opérateur $T$ est un opérateur $n$-normal.

**Théorème 4.1.1** *Soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs n-power-hyponormaux commutent avec $ST^* = T^*S$.*

Alors, $ST$ est un opérateur $n$-power-hyponormal.

**Preuve.** Puisque $ST = TS$, d'où

$$S^n T^n = (ST)^n,$$

et $ST^* = T^*S$ , d'où

$$S^n T^* = T^* S^n.$$

On a

$$\begin{aligned} ST^* &= T^*S \Rightarrow TS^* = S^*T \\ &\Rightarrow T^n S^* = S^* T^n. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (ST)^n (ST)^* &= S^n T^n T^* S^* \\ &\leq S^n T^* T^n S^* \\ &= T^* S^n S^* T^n \\ &\leq T^* S^* S^n T^n. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(ST)^n (ST)^* \leq (ST)^* (ST)^n.$$

Donc , $ST$ est un opérateur $n$-power-hyponormal. ■

**Proposition 4.1.3** *Soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs n-power-hyponormaux commutent avec $ST^* = T^*S$ et $(S+T)^*$ commute avec $\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k S^{n-k} T^k$.*

Alors, $S + T$ est $n$-power-hyponormal.

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}(S+T)^n(S+T)^* &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k S^{n-k}T^k\right)(S^*+T^*)\\ &= S^nS^* + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k S^{n-k}T^k(S+T)^* + T^nS^* + S^nT^* + T^nT^*.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$TS^* = S^*T \Rightarrow T^nS^* = S^*T^n.$$

Maintenant

$$\begin{aligned}TS^* &= S^*T \Rightarrow ST^* = T^*S\\ &\Rightarrow S^nT^* = T^*S^n.\end{aligned}$$

Puisque $(S+T)^*$ est commute avec $\sum\limits_{k=1}^{n-1} C_n^k S^{n-k}T^k$.

Alors,

$$\begin{aligned}(S+T)^n(S+T)^* &= S^nS^* + (S+T)^*\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k S^{n-k}T^k + S^*T^n + T^*S^n + T^nT^*\\ &\leq S^*S^n + (S+T)^*\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k S^{n-k}T^k + S^*T^n + T^*T^n\\ &= (S+T)^*\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k S^{n-k}T^k\right)\\ &= (S+T)^*(S+T)^n.\end{aligned}$$

■

**Proposition 4.1.4** *Soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs 2-power-hyponormaux, avec $TS^* = S^*T$, et $ST + TS = 0$.*

Alors, $T+S$ et $ST$ sont 2-power-hyponormaux.

**Preuve.** Comme

$$ST + TS = 0.$$

D'où

$$(S+T)^2 = S^2 + T^2.$$

On a

$$\begin{aligned}
(S+T)^2(S+T)^* &= \left(S^2+T^2\right)(S^*+T^*) \\
&= S^2S^*+S^2T^*+T^2S^*+T^2T^* \\
&= S^2S^*+T^*S^2+S^*T^2+T^2T^* \text{ (car } TS^*=S^*T) \\
&\leq S^*S^2+T^*S^2+S^*T^2+T^*T^2 \\
&= (S+T)^*(S+T)^2.
\end{aligned}$$

Maintenant,

comme $ST+TS=0$, d'où $(ST)^2=-S^2T^2$.

Nous avons,

$$\begin{aligned}
(ST)^2(ST)^* &= -S^2T^2(-TS)^* \\
&\leq S^2T^2S^*T^* \\
&= S^2S^*T^2T^* \\
&\leq S^*S^2T^*T^2 \\
&\leq S^*T^*S^2T^2 \text{ (car } TS^*=S^*T) \\
&= -(ST)^*(ST)^2 \\
&= (ST)^*(ST)^2.
\end{aligned}$$

■

**Théorème 4.1.2** *Soient $T_1, T_2, ......., T_m \in \mathcal{L}(H)$ des opérateurs n-power-hyponormaux.*

Alors, $(T_1 \oplus T_2 \oplus ....... \oplus T_m)$ et $(T_1 \otimes T_2 \otimes ....... \otimes T_m)$ sont opérateurs $n$-power-hyponormaux.

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned}
(T_1 \oplus T_2 \oplus ...... \oplus T_m)^n (T_1 \oplus T_2 \oplus ...... \oplus T_m)^* &= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus ...... \oplus T_m^n)(T_1^* \oplus T_2^* \oplus ...... \oplus T_m^*) \\
&= T_1^nT_1^* \oplus .......... \oplus T_m^nT_m^* \\
&\leq T_1^*T_1^n \oplus .......... \oplus T_m^*T_m^n \\
&= (T_1^* \oplus T_2^* \oplus ...... \oplus T_m^*)(T_1^n \oplus T_2^n \oplus ...... \oplus T_m^n) \\
&= (T_1 \oplus T_2 \oplus ...... \oplus T_m)^* (T_1 \oplus T_2 \oplus ...... \oplus T_m)^n.
\end{aligned}$$

Alors, $(T_1 \oplus T_2 \oplus ...... \oplus T_m)$ un opérateur n-power-hyponormal.

Dautre part,

pour $x_1, ......., x_m \in H$

On a

$$\begin{aligned}
& (T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)^n (T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)^* (x_1 \otimes ...... \otimes x_m) \\
= & (T_1^n \otimes T_2^n \otimes ...... \otimes T_m^n) (T_1^* \otimes T_2^* \otimes ....... \otimes T_m^*) (x_1 \otimes ...... \otimes x_m) \\
= & T_1^n T_1^* x_1 \otimes ......... \otimes T_m^n T_m^* x_m \\
\leq & T_1^* T_1^n x_1 \otimes ......... \otimes T_m^* T_m^n x_m \\
= & (T_1^* \otimes T_2^* \otimes ...... \otimes T_m^*) (T_1^n \otimes T_2^n ...... \otimes T_m^n) (x_1 \otimes ...... \otimes x_m) \\
= & (T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)^* (T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)^n (x_1 \otimes ...... \otimes x_m)
\end{aligned}$$

d'où

$$(T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)^n (T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)^* \leq (T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)^* (T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)^n .$$

Donc $(T_1 \otimes T_2 \otimes ...... \otimes T_m)$ un opérateur n-power-hyponormal. ■

**Proposition 4.1.5** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur 3-power-hyponormal, avec $T^2 = -T^{*^2}$.*

Alors, $T$ est un opérateur 3-normal.

**Preuve.** Comme

$$T^3 T^* = T T^2 T^* = -T T^{*^3}$$

et

$$T^* T^3 = T^* T^2 T = -T^{*^3} T.$$

$T$ est 3-power-hyponormal, alors

$$\begin{aligned}
T^3 T^* & \leq T^* T^3 \Rightarrow -T T^{*^3} \leq -T^{*^3} T \\
& \Rightarrow T T^{*^3} \geq T^{*^3} T \\
& \Rightarrow \left(T T^{*^3}\right)^* \geq \left(T^{*^3} T\right)^* \\
& \Rightarrow T^3 T^* \geq T^* T^3.
\end{aligned}$$

.

Donc

$$T^3T^* = T^*T^3.$$

■

**Proposition 4.1.6** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur 4-power-hyponormal, avec $T$ est anti-normal.*

Alors, l'opérateur $T$ est 4-normal.

**Preuve.** $T$ est anti-normal d'où $T^2 = T^{*^2}$. Puisque

$$T^4T^* = T^2T^2T^* = T^{*^5}$$

et

$$T^*T^4 = T^*T^2T^2 = T^{*^5}.$$

On trouve $T^4T^* = T^*T^4$. ■

**Proposition 4.1.7** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$un opérateur 2-power-hyponormal, avec $T$ est idempotent.*

Alors, $T$ est un opérateur hyponormal.

**Preuve.** Comme est 2-power-hyponormal, d'où

$$T^2T^* \leq T^*T^2.$$

Puisque $T$ est idempotent d'où

$$T^2 = T.$$

Ce qui implique

$$TT^* \leq T^*T,$$

c'est-à-dire $T$ est hyponormal. ■

**Proposition 4.1.8** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur 3-power-hyponormal, avec $T$ est idempotent.*

Alors, $T$ est un opérateur 2-power-hyponormal.

**Preuve.** Puisque est 3-power-hyponormal, alors

$$T^3 T^* \leq T^* T^3.$$

Comme $T$ est idempotent qui implique

$$T^2 T^* \leq T^* T^2.$$

Donc $T$ est un opérateur 2-power-hyponormal. ■

## 4.2 Etude des opérateurs de la forme $T^2 \geq -T^{*2}$

Dans cette section, nous introduisons la nouvelle classe d'opérateurs pour lesquels $T^2 \geq -T^{*2}$ sur un espace de Hilbert complexe $H$ .

Nous donnons quelques propriétés de base de ces opérateurs, et nous étudions la relation entre cette la classe et quelques autres classes définis sur $H$.

### 4.2.1 Quelques propriétés fondamentales

**Proposition 4.2.1** *Soit $T = A + iB \in \mathcal{L}(H)$ (décomposition cartésienne de $T$).*

Alors, $T^2 \geq -T^{*2}$ si et seulement si $A^2 \geq B^2$.

**Preuve.** Nous avons

$$T^2 = (A + iB)^2$$

$$= A^2 - B^2 + i(AB + BA)$$

et

$$T^{*2} = A^2 - B^2 - i(AB + BA).$$

Donc on trouve

$$T^2 + T^{*2} = 2\left(A^2 - B^2\right),$$

et on a

$$T^2 \geq -T^{*2}.$$

Ce que implique

$$A^2 \geq B^2.$$

■

**Proposition 4.2.2** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, avec $T^2$ est positif.*

Alors,

$$T^2 \geq -T^{*2}.$$

**Preuve.** Clair. ■

**Proposition 4.2.3** *Soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs sont unitairement équivalents.*

Si

$$T^2 \geq -T^{*2}.$$

Alors,

$$S^2 \geq -S^{*2}.$$

**Preuve.** Comme $S$ et $T$ sont unitairement équivalents, alors il existe un opérateur unitaire $U$ tel que

$$S = U^{-1}TU \ .$$

Ce que implique

$$S^* = U^*T^*\left(U^{-1}\right)^*$$

$$= U^*T^*\left(U^*\right)^{-1}.$$

Donc, on trouve

$$S^2 = U^{-1}TUU^{-1}TU$$

$$= U^{-1}T^2U$$

et

$$-S^{*2} = -U^*T^*(U^*)^{-1}U^*T^*(U^*)^{-1}$$

$$= -U^*T^{*2}(U^*)^{-1}.$$

Puisque $U$ est unitaire d'où $U^{-1} = U^*$, maintenant on utilise $T^2 \geq -T^{*2}$ d'où

$$U^{-1}T^2U \geq -U^*T^{*2}(U^*)^{-1},$$

donc

$$S^2 \geq -S^{*2}.$$

■

### 4.2.2 La somme et le produit de deux opérateurs

Dans ce pragraphe, nous étudions la somme de deux opérateurs et la somme directe et le produit de tenseur.

**Proposition 4.2.4** *Si $T^2 \geq -T^{*2}$ et $S^2 \geq -S^{*2}$ avec*

$$TS = -ST.$$

Alors,

$$(T+S)^2 \geq -(T+S)^{*2}.$$

**Preuve.** Comme $TS = -ST$ d'où $TS + ST = 0$ ce implique que

$$(T+S)^2 = T^2 + S^2,$$

et

$$(T+S)^{*2} = T^{*2} + S^{*2}.$$

Dautre part, nous avons

$$T^2 \geq -T^{*2},$$

et

$$S^2 \geq -S^{*2},$$

implique que

$$T^2 + S^2 \geq -\left(T^{*2} + S^{*2}\right).$$

On a $(T+S)^2 = T^2 + S^2$ d'où $-(T+S)^{*2} = -(T^{*2} + S^{*2})$.

Donc on obtient $(T+S)^2 \geq -(T+S)^{*2}$. ■

**Proposition 4.2.5** *Si* $T^2 \geq -T^{*^2}$ *et* $S^2 \geq -S^{*^2}$.

Alors,

$$(T \oplus S)^2 \geq -(T \oplus S)^{*^2}$$

et

$$(T \otimes S)^2 \geq -(T \otimes S)^{*^2}.$$

**Preuve.** Soit $x = x_1 \oplus x_2$ dans $H \oplus H$.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
(T \oplus S)^2 x &= (T \oplus S)^2 (x_1 \oplus x_2) \\
&= \left(T^2 \oplus S^2\right)(x_1 \oplus x_2) \\
&= T^2 x_1 \oplus S^2 x_2 \\
&\geq \left(-T^{*^2}\right) x_1 \oplus \left(-S^{*^2}\right) x_2 \\
&= -\left(T^{*^2} \oplus S^{*^2}\right)(x_1 \oplus x_2) \\
&= -(T \oplus S)^{*^2} x.
\end{aligned}$$

D'où

$$(T \oplus S)^2 \geq -(T \oplus S)^{*^2}.$$

Dautre part, on a

$$\begin{aligned}
(T \otimes S)^2 x &= (T \otimes S)^2 (x_1 \otimes x_2) \\
&= \left(T^2 \otimes S^2\right)(x_1 \otimes x_2) \\
&= T^2 x_1 \otimes S^2 x_2 \\
&\geq \left(-T^{*^2}\right) x_1 \otimes \left(-S^{*^2}\right) x_2 \\
&= -\left(T^{*^2} \otimes S^{*^2}\right)(x_1 \otimes x_2) \\
&= -(T \otimes S)^{*^2} x.
\end{aligned}$$

Donc $(T \otimes S)^2 \geq -(T \otimes S)^{*^2}$. ■

### 4.2.3 Relation entre la classe d'opérateur $T^2 \geq -T^{*^2}$ et quelques classes des opérateurs

**Proposition 4.2.6** *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint avec $T^2 \geq -T^{*^2}$.*

Alors, $T$ est skew-normal.

**Preuve.** On a $T^2 \geq -T^{*^2}$ et $T$ est auto-adjoint, d'où $T^2 \geq 0$, donc $T^2$ est positif.

Alors

$$T^2 = \left(T^2\right)^* = T^{*^2}$$

c'est-à-dire $T$ est skew-normal. ■

**Proposition 4.2.7** *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est anti-hermitien, avec $T^2 \geq -T^{*^2}$.*

Alors, $T = 0$.

**Preuve.** Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est anti-hermitien, et supposons $T = A + iB$ décomposition cartésienne de $T$. Puisque $T$ est anti-hermitien (i.e.; $T = -T$) ce imlique que $A = 0$ donc $A^2 = 0$.

D'autre part, comme $T^2 \geq -T^{*^2}$et on utilise la proposition 4.2.1 on trouve $B^2 \leq 0$ mais $B^2 \geq 0$ d'où $B^2 = 0$ puisque $B$ est hermitien donc $B = 0$ d'où on obtient $T = 0$ ■

**Proposition 4.2.8** *Sioit $T \in \mathcal{L}(H)$ est idempotent, avec $T^2 \geq -T^{*^2}$.*

Alors, $T + T^*$ est positif.

**Preuve.** Comme $T^2 \geq -T^{*^2}$, et $T$ est idempotent i.e.; $T^2 = T$ .

Ce qui implique $T^{*2} = T^*$.

Alors $T^2 \geq -T^{*^2}$imlique $T \geq -T^*$ d'où $T + T^* \geq 0$ c'est-à-dire $T + T^*$ est positif. ■

Dans [32] l'auteur a introduit la classe des opérateurs "subpojection" dans $\mathcal{L}(H)$.

**Définition 4.2.1** *On appelle un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est subpojection.*

Si

$$T^2 = T^*.$$

On note par $S(H)$ de tous les opérateurs subpojections

**Proposition 4.2.9** *Soit $T^2 \geq -T^{*^2}$ avec $T \in S(H)$.*

Alors, $T + T^*$ est positif.

**Preuve.** On a $T^2 \geq -T^{*^2}$et puisque $T \in S(H)$ d'où $T^2 = T^*$.

Ce implique que $T^* \geq -T$ , donc $T + T^* \geq 0$ c'est-à-dire $T + T^*$ est positif. ■

**Proposition 4.2.10** *Soit $T^2 \geq -T^{*^2}$ avec $T$ est projection orthogonale.*

Alors, $T$ est positif.

**Preuve.** Comme $T^2 \geq -T^{*^2}$et $T$ est projection orthogonale $(T^2 = T = T^*)$ ce qui implique que $T \geq -T$ d'où $T \geq 0$ i.e.; $T$ est positif. ■

# Conclusion et Perspectives

Cette thèse s'incrit dans le domaine de la théorie des opérateurs. Les opérateurs qui m'a particulièrement intéressé sont les opérateurs compacts et les opérateurs normaux.

On a commencé par quelques préliminaires sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, on a rappelé tous les outils nécessaires pour l'élaboration de ce travail.

L'objectif de second chapitre est de donner quelques conditions sur d'opérateurs non normaux qui impliquent la normalité en utilisant le théorème est très important dans le domaine de la théorie des opérateurs bornés ou non bornés dit théorème de Fuglede-Putnam.

Au troisième chapitre nous avons introduit quelques inégalités des valeurs singulières pour les opérateurs compacts et normaux. On a montré l'inégalité suivante

$$\frac{1}{\sqrt{2}}s_j\left(A_1+iA_2\right)\leq s_j\left(A\right)\leq s_j\left(\left|A_1\right|+\left|A_2\right|\right), \text{ pour } j=1,2,......$$

Pour $A$ un opérateur normal compact sur un espace de Hilbert $H$ séparable et complexe, où $A=A_1+iA_2$ est la décomposition cartésienne de $A$, aussi on a prouvé l'inégalité suivante

$$\sqrt{2}s_j\left(A_1+iA_2\right)\leq s_j\left(A+iA^*\right)\leq 2s_j\left(A_1+A_2\right), \text{ pour } j=1,2,......$$

À la fin de ce chapitre, nous avons donné une généralisation de ces inégalités.

Au dernier chapitre, on a présenté une nouvelle classe d'opérateur dite $n$-power-hyponormal sur un espace de Hilbert $H$, on a donné quelques propiétés de base concernant cette classe.

Ainsi, nous avons introduit autre nouvelle classe d'opérateurs de la forme $T^2\geq -T^{*^2}$, on a donné donné quelques propiétés de ces opérateurs et on a étudié la relation entre cette classe et quelques autres classes des opérateurs définis sur $H$.

- Les perspectives de recherche dans ce travail sont nombreuses, nous citons quelques unes.

1. On a le problème ouvert suivant. Soient $N, M$ normaux et $A, B$ bornés tels que $AN = MB$. A-t-on $AN^* = M^*B$ ?.

2. La somme d'opérateurs normaux a été étudié récemment. L'une des questions naturelles est de faire la même chose pour les opérateurs hyponormaux?.

3. Quelle est la caractérisation du spectre d'un opérateur $n$-power-hyponormal?.

4. Quel est le spectre de l'opérateur de la forme $T^2 \geq -T^{*^2}$?.

# Bibliographie


[1] M. Akkouchi, Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert space, An. St. Univ. Ovidius Constanta. 16/2 (2008), 7-14.

[2] A. Aluthge, On $p-$hyponormal operators for $0 < p < 1$, Integral Equation and Operator Theory. 13 (1990), 307-315.

[3] A. Aluthge, D. Wang, $\omega-$hyponormal operators, Integral Equation and Operator Theory. 36 (2000), 324-331.

[4] S.A. Alzuraiqi, A.B. Patel, On n-normal operators. General Mathematics Notes. 1/2 (2010), 61-73.

[5] T. Ando, Operators with a norm condition, Acta. Sci. Math. (Szeged). 33 (1972), 169-178.

[6] W. Audeh, F. Kittaneh, Singular value inequalities for compact operators, Linear Algebra Appl. 437 (2012), 2516-2522.

[7] R. Bhatia, Matrix Analysis, GTM169, Springer-Verlag, New York, 1997.

[8] R. Bhatia, F. Kittaneh, On the singular values of a product of operators, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11 (1990), 272-277.

[9] R. Bhatia, F. Kittaneh, The matrix arithmetic-geometric mean inequality revisited, Linear Algebra Appl. 428 (2008), 2177-2191.

[10] R. Bhatia, F. Kittaneh, The singular values of $A+B$ and $A+iB$, Linear Algebra Appl. 431 (2009), 1502-1508.

[11] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[12] S.K. Berberian, Note on a theorem of Fuglede and Putnam. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 175-182.

[13] S.K. Berberian, Extensions of a theorem of Fuglede and Putnam. Proc. Amer. Math. Soc. 71/1 (1978), 113-114.

[14] S.L. Campbell, Linear operators for which $T^*T$ and $T^* + T$ commute. Pacific J. Math. 76 (1978), 17-19.

[15] S.L. Campbell, R.Gellar, Linear operators for which $T^*T$ and $T^* + T$ commute. Proc. Amer. Math. Soc. 60 (1976), 197-202.

[16] J.B. Conway, A Course in Functional Analysis, (1985) New York, Spring-Verlag.

[17] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part II, Wiley, New York, 1971.

[18] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part III, Wiley, New York, 1971.

[19] M.R. Embry, Conditions impling normality in Hilbert space. Pacific J. Math. 18 (1966), 457-460.

[20] C.K. Fong, S.K. Tsui, A note on positive operators, J. Operator Theory. 5/1 (1981), 73-76.

[21] B. Fuglede, A commutativity theorem for normal operators. Proc. Nati. Acad. Sci. 36 (1950), 35-40.

[22] T. Furuta, M. Horie, A remark on a class of operators, Proc. Japan. 43 (1967), 607-609.

[23] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, Basic of Classes of Linear Operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[24] I. Gohberg, M. G.Krein, Introduction to the Theory of Linear Non self adjoint Operators, American Mathematical Society, providence, 1969.

[25] S. Goldberg, Unbounded Linear Operators, McGraw-Hill, 1966.

[26] M. Guesba, M. Nadir, On operators for which $T^2 \geq -T^{*^2}$, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. 13/1(6) (2016), 1-5.

[27] M. Guesba, M. Nadir, On n-power-hyponormal operators, Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 12/1 (2016), 473-479.

[28] K.E. Gustafson, D.K.M. Rao, Numerical Range, Springer, New York, 1997.

[29] P.R. Halmos, A Hilbert space problem book. Second edition, Springer-verlag, New York, 1982.

[30] O. Hirzallah, F. Kittaneh, Inequalities for sums and direct sums of Hilbert space operators, Linear Algebra Applications. 424 (2007), 71-82.

[31] A. A.S, Jibril, On $\mu-$Operators, International Mathematical Forum. 8/25 (2013), 1215-1224.

[32] A. A.S, Jibril, On subprojection operators, International Mathematical Forum. 4/3 (2003), 229-238

[33] E. Kamei, Operators with skew commutative parts, Math. Japonica 25/4 (2002), 431-432.

[34] I. Kaplansky, Products of normal operators, Duke Math. J. 20/2 (1953), 257-260.

[35] T. Kato, Perturbation theory for linear operator, Springer, 1980 (2nd edition).

[36] S.M. Patel, A note on $p-$hyponormal operators for $0 < p < 1$, Integral Equation Operator Theory. 21 (1995), 498-503.

[37] S. Mecheri, On the Normality of Operators, Revista Colombiana de Matemàticas. 39 (2005), 1-9.

[38] M.H. Mortad, On the Normality of the sum and two normal operators, Complex Anal. Oper. Theory. 6(2012), 105-112.

[39] S.M. Patel, On intertwining $p-$hyponormal operators, Indian J. Math. 38 (1996), 287-290.

[40] C.R. Putnam, On normal operators in Hilbert space, Amer. J. Math. 73 (1951), 357-362.

[41] M. Rajabalipour, On normality of operators, Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 623-630.

[42] V. Rakocevic, On class of operators, Mat. Vesnik. 37 (1989), 423-426.

[43] W. Rudin, Real and Complex analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[44] W. Rudin, Functional Analysis, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd, New Delhi, 1974.

[45] M. Sdkane, A note on normal matrices., J. Comput. Appl. Math. 136 (2001), 185-187.

[46] J.G. Stampfli, Hyponormal operators, Pacific J. Math. 12 (1962), 1453-1458.

[47] A. Taghavi, V. Darvish, Some results on singular value inequalities of operators, arXiv: 1308.4103v4 (math.FA), (2013), 1-5.

[48] K. Tanahashi, On log-hyponormal operators, Integral Equation Operator Theory. 34 (1999), 364-372.

[49] K. Tanahashi, Putnam's inequality for log-hyponormal operators, Integral Equation Operator Theory. 48 (2004), 103-114.

[50] Y. Tao, More results on singular value inequalities of matrices, Linear Algebra Appl. 416 (2006) 724-729.

[51] A. Uchiyama and K. Tanahashi, Fuglede-putnam's theorem for log-hyponormal or $p-$hyponormal operators, Glasgow Math. J. 44 (2002), 397-410.

[52] M. Yanagida, Somme applications of Tanahashi's result on the best possibility of Furuta inequality, Math. Inequal. Appl. 2 (1999), 297-305.

[53] J. Yang, H. Hong-Ke Du, A note on compact normal operators, J. Comput. Appl. Math. 151 (2003), 229-233.

[54] K. Zhu, Operator theory in function spaces. Mongraphs and Text-books in Pure and Applied Mathematics, 139. Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[55] X. Zhan, Singular values of differences of positive semidefinite matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 22 (2000), 819-823.

[56] X. Zhan, Matrix Inequalitis, LMN 1790, Springer-Verlag, Berlin, 2002.