REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et Numérique

Thème

On the Numerical Solution of Volterra Integral Equation of the First Kind

---

Présenté par :
TAIBA Salah Eddine

Devant le jury composé de :

M^r *SELT* Omar	MCA,	Université de M'sila	**Président**.
M^r *LAKEHALI* Belkacem	MCA,	Université de M'sila	**Encadreur**.
M^r *GAGUI* Bachir	MCA,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Je tiens à remercier tout premièrement **ALLAH** le tout puissant pour la volonté, la santé
et la patience, qu'il nous a donnée durant toutes ces longues années.

Deuxième remerciement va à

Docteur. BELKACEM LAKEHALI

Docteur. BILAL BASTI

, qui a dirigé mes travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentillesse.
Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury

Pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce

Travail.

Également, un remerciement à tous mes collègues

de promotion 2021 pour les bons moments qui

Nous avons passé ensemble.

اهـــــــــــــداء:

الى أبـــــي وأمـــــي حفظهما الله وأطال في عمرهمـــــــــــــا....
الى إخوتي وأخواتي وأبنائهم وكل أفراد العائلة الكريمـــــــــة....
الى أساتذة قسم الرياضيات بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة وأخص بالذكر الأستاذ الفاضل بلقاسم لكحالي أطال الله في عمره...
الى كل الأصدقاء والزملاء ....
كما أهدي هذا العمل البسيط المتواضع الذي لا يخلو من نقائص ....
الى كل أستاذ مسلم مخلص يسعى جاهدا لتعليم و تنوير الأجيال الصاعدة التي تسعى جاهدة بدورها في انبثاق فجر الآمال في أن تسترد الجزائر حياتها الغالية ـ حياة وسيرة الشهداء ـ رحمهم الله أجمعين..... وأن نهتدي بهدي نبينا الأعظم محمد صلى الله عليه وسلم..... ونستعيد سيرة أبي بكر وعمر بن الخطاب وعثمان بن عفان وعلي بن ابي طالب رضي الله عنهم أجمعين آمين..... آمين

Dedication:

To My father and mother, may Allah preserve them and prolong their lives ....
To My brothers and sisters, their sons and all members of the honorable family...
To The professors of the Mathematics Department at Mohamed Boudiaf University of M'Sila, and in particular to the distinguished **Professor Belkacem Lakhali, may Allah prolong his life** ...
To All friends and colleagues ....
I Also dedicate this simple and humble work ....
To Every sincere Muslim professor who strives to educate and enlighten the rising generations that strive in their turn in the emergence of the dawn of hopes that Algeria will regain its precious life - the life and biography of the martyrs - may Allah have mercy on them all .... and that we are guided by the guidance of our **greatest prophet, Mohamed, may Allah bless him and grant him peace** ... ... And we recall the biography of Abu Bakr, Omar bin Al-Khattab, Othman bin Affan, and Ali bin Abi Talib, may Allah be pleased with them all, Amen .... Amen

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous traitons l'un des sujets les plus importants de l'analyse mathématique et numérique, qui est la solution numérique de l'équation intégrale de Volterra de type 1.

Le sujet de la résolution d'équations intégrales par des méthodes algébriques sont très complexe , c'est pourquoi nous avons résumé autant que possible dans ma présente d'étude en nous limitant à l'équation de Volterra de premier type en utilisant des méthodes numériques.

Dans le premier chapitre, nous avons traité un bref des concepts les plus importants de l'analyse fonctionnelle. Quant au deuxième chapitre, nous avons traité des définitions, des formes et de la classification de certaines équations intégratives avec un rappel de l'existence et de l'unicité de la solution.

Dans le troisième chapitre, nous avons traité de la solution numérique de l'équation intégrale de Volterra de premier type, en utilisant des méthodes numériques avec des exemples illustratifs.

Chapitre 1

Rappels d'Analyse Fonctionnelle

1.1 Définitions préliminaires

1.1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application, le plus souvent notée $\|\cdot\|$*

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

Ayant les trois propriétés suivantes :

(a) $\|x\| \geq 0$ *pour tout* $x \in E$ *et* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k},$ *(Homogénéité)*

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ *(Inégalité triangulaire)*

– L'orsqu'un espace vectoriel E est muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme, on dit que c'est un espace vectoriel normé, ou, plus simplement, un espace normé voir [5]. Il est immédiat de voir que si l'on pose, pour $x = (x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{k}^n$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \ldots\ldots + |x_n| \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1| + \ldots\ldots + |x_n|\} \end{aligned}$$

Alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux normes sur $\mathbb{k}^n$

Si p est un nombre reel vérifiant $1 < p < \infty$, on obtient une norme sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Définition 1.2 (Espace $L^2(\Omega)$) *On note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré sommable c-à-d*

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \int_\Omega (u(x))^2 < \infty\}$$

Théorème 1.1 (Inégalité de Cauchy – Schwartz) *Si u et w sont des fonctions de $L^2(\Omega)$, alors :*

$$\left| \int_\Omega uwdv \right| \leq \left(\int_\Omega u^2 dv \right)^{1/2} \left(\int_\Omega w^2 dv \right)^{1/2}$$

1.1.2 Espaces de Banach et de Hilbert :

Définition 1.3 (produit scalaire) *:*

Soit H un espace vectoriel réel, resp. Complexe. On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique, resp. Hermitienne, qui est définie

positive.On notera $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$.Cela signifie que l'application :

$$\langle ., . \rangle : H \times H \to \mathbb{k} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle$$

vérifie Pour tout $x, y \in H$,on a :

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ si l'espace est réel}$$

$$\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \text{ si l'espace est complexe}$$

pour tout $x \in H$,on a $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ ssi $x = 0$

Définition 1.4 *L'espace des fonctions continues définit par :*

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}/f : \text{continue}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \ f \in C([a, b])$$

est un espace vectoriel normé.

Définition 1.5 *Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions continues et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ alors $f \in C([a, b])$, i.e*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \forall x \in [a, b], \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Définition 1.6 *suite de cauchy*

Soit (f_n) *une suite d'éléments d'un espace normé* $C\left([a,b], \|.\|_\infty\right)$, *on dit que la suite* (f_n) *est de Cauchy si, on a la relation suivante*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall p,q \geq N_\varepsilon, \quad \text{on a} \quad \|f_p - f_q\| < \varepsilon$$

Définition 1.7 (l'espace complet) *Un espace vectoriel normé* $C\left([a,b], \|.\|_\infty\right)$, *est dit complet, si toute suite de Cauchy* (f_n) *d'éléments de* $C([a,b])$ *est une suite convergente dans* $C([a,b])$ *Autrement dit,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geq N_\varepsilon, \quad \text{on a} \quad \|f_p - f_q\| < \varepsilon$$

implique l'existence d'un élément $f \in C([a,b])$ *tel que*

$$f_n \to f$$

Toute suite converge est une suite de cauchy mais l'inverse n'est pas vrai.

Théorème 1.2 *L'espace* $C\left([a,b], \|.\|_\infty\right)$ *est un espace complet pour la norme* $\|.\|_\infty$. *Donc* $C\left([a,b], \|.\|_\infty\right)$ *est de Banach. Pour voir plus de détails, voir [4].*

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.*

1.1.3 Les opérateurs

Proposition 1.1 *Soit* E *un espace de Hilbert et* $A : E \to E$ *une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A est continue.

(b) A est continue en 0.

(c) Il existe $x \in E$ tel que A est continue en x.

(d) Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|A\varphi\| \leq c\|\varphi\|$ pour tout $\varphi \in E$.

Définition 1.8 (Qu'est-qu'un opérateur ? ?) *:*

On appelle opérateur A sur E une application linéaire continue de E dans E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E .

si $A \in \mathcal{L}(E)$, on définit sa norme opérateur par :

$$\|A\| = \sup\left\{\|A\varphi\| : \varphi \in E, \|\varphi\| \leq 1\right\}$$

Proposition 1.2 *: voici quelques propriétés de la norme opérateur*

1. Si $A \in \mathcal{L}(E)$, alors $\|(A)\| = 0$ si et seulement si $A = 0$
2. Si $A, B \in \mathcal{L}(E)$,alors $A + B \in \mathcal{L}(E)$ et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
3. Si $\alpha \in \Bbbk$ et $A \in \mathcal{L}(E)$,alors $\alpha A \in \mathcal{L}(E)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha|.\|A\|$
4. Si $A, B \in \mathcal{L}(E)$,alors $AB \in \mathcal{L}(E)$ et $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$ (AB désigne la composition $A \circ B$) voir [9].

Définition 1.9 (Opérateurs continus) *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a, la propriété suivante*

pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$,c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0)$$

L'opérateur A est dit continu sur E , s'il est continu en chaque point de l'ensemble E. voir [12].

Définition 1.10 (opérateurs bornés) *Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que voir [12].*

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E \qquad , \quad \forall x \in E \tag{1.1}$$

Proposition 1.3 *La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1.1) est appelée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par voir [12].*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|_F$$

Proposition 1.4 *La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu. voir [12].*

Théorème 1.3 *Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.*

Définition 1.11 *A Un opérateur linéaire défini sur un espace normé E dans un espace normé F*

A est appelée un opérateur linéaire compact si pour tout un sous ensemble borné Ω de E,l'image $A(\Omega)$ est relativement compact dans F. voir [12].

Définition 1.12 (critère de compacité) *A Un opérateur linéaire défini sur un espace normé E dans un espace normé F*

A est appelée un opérateur linéaire compact si et seulement si pour tout suite borné (φ_n) dans E,le suite $(A\varphi_n)$ dans F contient une sous suite convergente

$(A\varphi_{nk})$. voir [12].

Définition 1.13 *Un opérateur A dans un espace de hilbert est appelée un opérateur compact si pour tout suite borné (x_n) dans H le suite*

(Ax_n) *contient une sous suite convergente. voir [10].*

Théorème 1.4 *Tout opérateurs compacts est bornée.*

mais l'inverse est faux. voir [10].

Chapitre 2

Équations intégrales

2.1 Classification des équations intégrales

En mathématique, une équation intégrale[1] est une équation dans laquelle l'inconnu ; généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparait sous le signe intégral. Cette définition générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique plusieurs types distincts surgissent. Pour cette raison, et afin de recouvrir les grands axes de notre thématique sans s'impliquer dans des situations particulièrement inadéquates, nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales linéaires de la forme

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b$$

et

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b$$

Qui sont des exemples typiques. Dans ces équations la fonction φ est l'inconnue, la fonction $K(x,t)$ qui s'appelle noyau avec le terme libre f sont données. Sous une autre forme simple en termes d'opérateurs, les équations précédentes s'écrivent successivement

$$A\varphi = f \quad et \quad \varphi - A\varphi = f$$

Une équation intégrale peut être classée comme étant soit une équation intégrale linéaire ou bien comme une équation intégrale non linéaire. Il y a une similitude parfaite avec la classification des équations différentielles ordinaires ou celle aussi des équations aux dérivées partielles. Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont les

[1]Le terme d'équation intégrale a été suggéré pour la premiére fois par du Bois-Reymond .ch . cerlle , vol . 103 (1888) , p .228

équations intégrales de Volterra $(1860-1940)$ et de Fredholm$(1866-1927)$. Qui constituent donc les deux principales catégories. A ces deux catégories d'équations intégrales, nous pouvons considérer encore deux autres types, à savoir les équations intéro-différentielles et les équations intégrales singulières.

La classification voir [16] des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrirent leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

1. Le type(espèce) d'une équation se rapport à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparait uniquement à l'intérieur du signe intégral, cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparait également à l'extérieur du signe intégral.
2. La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégration sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégration sont indéfinies.
3. L'adjective singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrant est non borné sur l'intervalle donné, évidement, une équation intégrale peut être singulière les deux sens.

Dans chacun des éléments suivants, une classification de certaines des équations intégrales les plus importantes.

2.2 Équations intégrales de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de second espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{2.1}$$

Où $\varphi(x)$ est la fonction inconnu, $K(x,t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles par courant l'intervalle $[a,b]$ et λ un facteur numérique.

La fonction $K(x,t)$ est le noyau de l'équation intégrale (2.1) ; on suppose que le noyau $K(x,t)$ est défini dans le carré $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ du plan (x,t) et continu dans Ω, ou bien présente

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dxdt < \infty$$

Soit fini.

Si $f(x) \neq 0$ l'équation (2.1) est dite non homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2.1) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{2.2}$$

et on dit qu'elle est homogène.

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{2.3}$$

Où la fonction inconnu $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce

Les bornes a et b dans les équations (2.1), (2.2) et (2.3) peuvent être aussi bien finies ou qu'infinies.

On appelle solutions des équations intégrales (2.1), (2.2) et (2.3) toute fonction $\varphi(x)$ talle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x \in [a, b]$, (voir [11]).

Quelquefois, l'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

et

$$\mu\varphi(x) = \mu f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

Où μ un paramètre (peut être défini une quantité physique) tel que $\lambda\mu = 1$. Donc l'équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce est donné par :

$$\mu g(x)\varphi(x) = \mu f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

Où $g(x)$ une fonction préattribuée. Voir [15].

2.3 Équations intégrales de Volterra

Une équation, à un inconnu $\varphi(x)$ de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.4}$$

Où $K(x,t)$, $f(x)$ sont des fonctions connues et λ est paramètre numérique, est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

La fonction $K(x,t)$ est le noyau de l'équation de Volterra.
Si $f(x)=0$, l'équation (2.4) s'écrit

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.5}$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce.
Une équation, à un inconnu $\varphi(x)$, de la forme

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt=f(x) \tag{2.6}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

On appelle solution de l'équation intégrale (2.4),(2.5) et (2.6) une fonction $\varphi(x)$ qui dès qu'elle est portée dans cette équation, la change en identité (en x). voir [11].

Quelquefois, l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce s'écrit sous la forme

$$\mu\varphi(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \quad , \quad a\le x\le b$$

Où μ Un paramètre (peut être défini une quantité physique) tel que $\lambda\mu=1$.donc l'équation intégrale linéaire de Volterra de troisième espèce est donné par :

$$\mu g(x)\varphi(x)=\mu f(x)+\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \quad , \quad a\le x\le b$$

Où $g(x)$ Une fonction préattribuée. voir [15].

1. On remarquera que l'équation de Volterra est cas particulier de l'équation de Fredholm. En effet, dans l'équation de Volterra l'intégration peut être effectuée par rapport à t de $t=a$ à $t=b$.

2. Comme exemple d'équation de Volterra de première espèce nous avons l'équation d'Abel. voir [17].

Les équations intégrales de Volterra interviennent dans des problèmes de physique ou il existe une direction privilégiée de variation de la variable indépendante (par exemple, du temps, de l'énergie, . . .) voir [11].

2.4 Équations intégrales du type convolution

Sont des équations intégrales linéaires dont le noyau $K(x, t)$ dépendant que de la différence des arguments c'est-à-dire $K(x, t) = K(x - t)$, donc l'équation intégrale du type convolution est de la forme suivante

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x - t)y(t)dt$$

Cette classe d'équations voir [1]. comprend par exemple l'équation d'Abel généralisée.

2.5 Équations intégrales Volterra-Fredholm

Le formulaire standard de l'équation intégrale Volterra Fredholm est donné par :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b K_2(x, t)\varphi(t)dt$$

Où $K_1(x, t)$ et $K_2(x, t)$ sont les noyaux de l'équation voir [2].

2.6 L'éxistence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale

2.6.1 Régle de leibniz pour différenciation les intégrales

soit $f(x,t)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues dans un domaine $x-t$ plane inclue dans un rectangle $a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq t_1$ et soit voir [2].

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt \tag{2.7}$$

donc la differenciation de l'integrale (2.13) est existe et donnée par

$$F^{'}(x) = \frac{dF}{dx} = f(x,h(x))\frac{dh(x)}{dx} - f(x,g(x))\frac{dg(x)}{dx} + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt \tag{2.8}$$

si $g(x) = a$ et $h(x) = b$ ou a et b sont des constantes ,donc par la régle de leibniz

$$F^{'}(x) = \frac{dF}{dx} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt \tag{2.9}$$

soit l'intégrale suivante

$$F(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

nous appliqouns la régle de leibniz ,on a

$$F^{'}(x) = K(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}u(t)dt$$

2.6.2 Théorème d'existence et d'unicité (Méthode de Piccard)

Le principe de la méthode de Piccard voir [12]. est le principe des approximations successives que l'on utilise pour la démonstration de nombreux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles, fonctionnelles et intégrales.

Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{2.10}$$

où $f(t,x)$ est une fonction continue de deux variables (t,x) sur l'ensemble

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |t-t_0| \leq a, |x-x_0| \leq b\} \subset U$$

et satisfait à la condition de Lipschitz en x

$$|f(t,x_2) - f(t;x_1)| \leq L\,|x_2 - x_1| \ \ , \forall\,(t,x_1)\,,(t,x_2) \in D$$

Alors, il existe une solution et une seule $x = \varphi(t)$ de l'équation (2.10) définie sur l'intervalle $T =]t_0 - d; t_0 + d[$ avec $d \leq a$ et satisfait à la condition

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2.11}$$

soit $x = \varphi(t)$ une solution de l'équation (2.10) de sorte que l'on a la relation

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \tag{2.12}$$

et soit

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2.13}$$

la condition initiale à laquelle cette solution doit satisfaire.

Il est à remarquer que les deux relations (2.12) et (2.13) sont équivalentes à l'équation intégrale

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \tag{2.14}$$

Pour la vérification de cette relation, supposons que l'identité (2.14) est réalisée, portant $t = t_0$ dans (2.14) nous aurons l'égalité (2.13) et dérivons par rapport à t nous obtenons la relation (2.12).

Supposons maintenant que les relations (2.12) et (2.13) sont vérifiées, alors intégrant (2.12) entre t_0 et t, nous obtenons la relation (2.14)

Existence de la solution :

La fonction $f(t, x)$ étant continue dans l'ensemble D fermé et borné, alors il existe une constante positive M telle que

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall (t, x) \in D \tag{2.15}$$

Soit maintenant la suite de fonctions

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), ...\varphi_i(t), ...$$

définie par

$$\varphi_0(t) = x_0; \ \varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_{i-1}(\tau)) d\tau, i = 1, 2, ... \tag{2.16}$$

– Montrons que toutes les fonctions $\varphi_i(t)$ de la suite (2.16) sont définies et continues sur le segment T,autrement dit

$$\varphi_i(t) \in C\left(T, \mathbb{R}\right),\ i = 0, 1, 2, ...$$

– Montrons que les graphes de ces fonctions appartiennent à l'ensemble D , autrement dit

$$\left\{\left(t, \varphi_i(t)\right), t \in T\right\} \subset D, i = 0, 1, 2, ...$$

de la relations (2.16) , on a pour $i = 1$

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau$$

d'où il est clair de voir que la fonction $\varphi_1(t)$ est définie et continue sur le segment $T =]t_0 - a, t_0 + a[$ et, on a en vertu de (2.15)

$$|\varphi_1(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0) d\tau \leq M\,|t - t_0|$$

d'où, on remarque que le graphe de la fonction φ_1 appartient à D si

$$|t - t_0| \leq \frac{b}{M}$$

posons

$$d = \min(a, \frac{b}{M}) \tag{2.17}$$

on obtient

$$\left\{\left(t, \varphi_1(t)\right), t \in T\right\} \subset D$$

Autrement dit que le graphe de la fonction φ_1 se trouve dans D si $t \in T$

Supposons que la relation est vraie pour $i \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire

(a) La fonction $\varphi_i(t) \in C\left(T, \mathbb{R}\right)$ est une fonction définie et continue sur T.

(b) Le graphe de la fonction φ_i appartient à D.

$$\left\{\left(t, \varphi_i(t)\right), t \in T\right\} \subset D \tag{2.18}$$

De la relation (2.16),on a pour $i = 1$

$$\varphi_{i+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_i(\tau)) d\tau$$

il vient que la fonction $\varphi_{i+1}(t)$ est bien définie et continue sur T. De plus,

$$\left|\varphi_{i+1}(t) - x_0\right| \leq \int_{t_0}^{t} \left|f(\tau, \varphi_i(\tau))\right| d\tau \leq M\,|t - t_0| \leq Md \leq b \tag{2.19}$$

tenant compte des relations (2.15) , (2.17) , (2.18) . on obtient

$$\left\{\left(t, \varphi_{i+1}(t)\right), t \in T\right\} \subset D$$

Il est à noter que la convergence uniforme de la suite (2.16) sur le segment T est équivalente à celle de la série des fonctions

$$\varphi_0(t) + [\varphi_1(t) - \varphi_0(t)] + ... + \left[\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\right] + ... \tag{2.20}$$

Voir que,

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_0(\tau))| \, d\tau \leq M \, |t - t_0| \tag{2.21}$$

alors

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_0(t))| \, d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} |\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)| \, d\tau \\ &\leq M \, L \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0| \, d\tau \\ &= M \, L \frac{|t - t_0|^2}{2!} \end{aligned}$$

Par récurrence, supposons que

$$\left|\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t)\right| \leq M L^{i-1} \frac{|t - t_0|^i}{i!} \tag{2.22}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned} \left|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\right| &\leq \int_{t_0}^{t} \left|f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi_{i-1}(t))\right| d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} \left|\varphi_i(\tau) - \varphi_{i-1}(\tau)\right| d\tau \\ &\leq M \, L^i \int_{t_0}^{t} \frac{|\tau - t_0|^i}{i!} d\tau = M \, L^i \frac{|t - t_0|^{i+1}}{(i+1)!} \end{aligned}$$

finalement, on obtient

$$\left|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\right| \leq M \, L^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!} \quad , \forall t \in T \quad , i = 0, 1, 2, ...$$

d'où

$$\left\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\right\| = \max \left|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\right| \leq M L^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!}, i = 0, 1, 2, ...$$

Pour la série (2.20) , on a la série majorante

$$
\begin{aligned}
& |x_0| + Md + ML\frac{d^2}{2!} + ML^2\frac{d^3}{3!} + ... + ML^i\frac{d^{i+1}}{(i+1)!} + ... \\
= \quad & |x_0| + \sum_{i=0}^{\infty} ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!} \\
= \quad & |x_0| + \frac{M}{L}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(Ld)^i}{i!} \\
= \quad & |x_0| + \frac{M}{L}(e^{Ld}-1) < \infty
\end{aligned}
$$

Donc la série (2.20) converge uniformément sur T vers une fonction $\varphi(t)$ continue sur T (en vertus du critère de Weistrauss) c'est-à-dire

$$\lim_{i\to\infty}\|\varphi_i - \varphi\| = 0 \tag{2.23}$$

Démontrons que le graphe de la fonction φ appartient à D. Autrement dit

$$\{(t,\varphi(t)), t \in T\} \subset D$$

en effet,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau, \forall t \in T$$

est obtenue en faisant tendre i vers ∞ dans la relation (2.19) , il vient

$$|\varphi(t) - x_0| \leq b,\ \forall t \in T$$

d'où

$$\{(t,\varphi(t)), t \in T\} \subset D$$

Il reste maintenant à montrer que la fonction $\varphi(t)$ est solution de l'équation (2.14) , on a

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{t_0}^{t}(f(\tau,\varphi_i(\tau)) - f(\tau,\varphi(\tau)))d\tau\right| \quad & \leq \quad \int_{t_0}^{t}|f(\tau,\varphi_i(\tau)) - f(\tau,\varphi(\tau))|\,d\tau \\
& \leq \quad L\int_{t_0}^{t}|\varphi_i(\tau) - \varphi(\tau)|\,d\tau \\
& \leq \quad Ld\,\|\varphi_i - \varphi\|
\end{aligned}
$$

En tenant compte de (2.23) , on obtient

$$\lim_{i\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi_i(\tau))d\tau = \int_{t_0}^{t}(f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\ , t \in T$$

Faisant tendre i vers ∞ dans l'expression (2.16) , on obtient

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_{i+1}(t) = x_0 + \lim_{i\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi_i(\tau))d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

d'où

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau, \quad t\in T$$

Unicité de la solution :

Pour la démonstration de l'unicité de la solution de l'équation différentielle, on doit utiliser le lemme de (Gronwalle-Bellman) suivant.

Lemme 2.1 (Gronwalle-Bellman)

Soient $x(t)$et $y(t)$ deux fonctions scalaires continues et positives sur $[t_0,\infty[$, avec

$$x(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau, \quad \forall t\in [t_0,\infty[\,, c>0 \tag{2.24}$$

alors, on a

$$x(t) \leq c\exp\int_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau \ \ ,\forall t\in [t_0,\infty[\tag{2.25}$$

Le lemme reste valable si on prend $c=0$.
en effet ,passant à la limite quand $c\to 0$ dans les expressions (2.24) et (2.25)
Si l'on considère l'intervalle $[-\infty,t_0[$ et l'inégalité

$$x(t) \leq c + \int_{t}^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau, \quad \forall t\in [-\infty,t_0[\,, c>0 \tag{2.26}$$

au lieu de (2.24) on peut avoir l'inégalité

$$x(t) \leq c\exp\int_{t}^{t_0} y(\tau)d\tau \ \ ,\forall t\in [-\infty,t_0[$$

au lieu(2.25),En effet, de (2.26) , on obtient

$$\frac{-x(t)y(t)}{c+\int_t^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau} \geq -y(t)$$

d'où par intégration, on obtient

$$\ln c - \ln\left[c + \int_{t}^{t_0} x(\tau)y(\tau)d\tau\right] \geq -\int_{t}^{t_0} y(\tau)d\tau$$

en tenant compte de l'inégalité (2.26) , alors

$$x(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} x(\tau)y(\tau)d\tau \leq c \exp \int_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau$$

Passons maintenant à l'unicité. Soient $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ deux solutions avec la conditions initiales

$$\varphi(t_0) = x_0 \text{ et } \psi(t_0) = x_0$$

alors pour $t \in [t_0, t_0 + d]$,on a

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| \, d\tau \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau \end{aligned}$$

Posons la fonction

$$x(t) = |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|$$

et la fonction

$$y(t) = A$$

et la constante $c = 0$

Applique le lemme de Gronwalle-Bellman à la relation au dessus, on ob-tient $x(t) = 0$ sur l'intervalle $[t_0, t_0 + d]$ c'est à dire

$$\varphi(t) = \psi(t) \ \ , \forall t \in [t_0, t_0 + d]$$

et d'une manière analogue, on traite la cas où $t \in [t_0, t_0 + d]$.

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales

3.1 Rappel intégration numérique

Le but de ce rappel est donner des méthodes permettant de calculer la valeur approchée d'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sur le plan pratique, pour obtenir une approximation lorsque les primitives de f ne sont pas calculables. Sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitude aussi petite que souhaitée. Lorsque la fonction f est de classe C^m sur l'intervalle réel $I = [a, b]$ on note

$$M = max|f^{(i)}| \quad ; \qquad x \in [a, b] \ , \ i = 0, 1, 2, 3, \dots\dots.., n$$

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $n \in \mathbb{N}^*$ de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$que l'on appelle le pas de la subdivision.et pour tout $i = 0, 1, 2, 3, \dots\dots.., n$,on note $x_i = a + ih$. voir [13].

3.2 Méthodes numériques et estimation d'erreur

la solution numérique voir [14] de l'équation intégrale de volterra du premiere éspece

$$\int_0^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \tag{3.1}$$

peut être accompli en convertissant par la différentiation un équation de second éspece

$$y(x) + \int_0^x \frac{K^{10}(x,t)}{K(x,x)} y(t)dt = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \tag{3.2}$$

3.2.1 Hypothèses et notations

dans l'analyse suivante,nous ferons les hypothéses suivantes :

(a) $f(0) = 0$.

(b) $K(x,x) \neq 0$ pour toute x dans le domaine de l'intégration.

(c) $K(x,t)$ et $f(x)$ sont bornées et suffisamment lisses pour que les dérivés utilisés dans l'analyse suivante existent.c'est un résultat standard que dans ces conditions l'équation (3.1) a une solution unique et continue .en outre à $K(x,t)$ et $f(x)$ conditions qu 'ils soient suffisamment lisses la solution $y(x)$ sera aussi suffisamment lisse, ce qui découle immédiatement de la différenciation de (3.2).

pour résoudre (3.1) dans un intervalle $[0,a]$ on le divise en intervalles plus petits de largeur h le iéme point de subdivision étant noté x_i tel que $x_i = ih \quad i = 0,1,2,...N$ et $Nh = a$.

la solution approchées sera définie à ces points de maillage et notée Y_i.

Théorème 3.1 *soit $Y_0(h), Y_1(h), ...$l'approximation obtenue par une méthode donnée utilisant la taille de pas h .alors la méthode est dite convergente si et seulement si*

$$\max_{0 \leq i \leq N} |Y_i(h) - y(x_i)| \to 0$$

comme $h \to 0, N \to \infty$,tel que $Nh = a$.

Définition 3.1 *une méthode est dite d'ordre p si p est le plus grand nombre pour lequel il existe une constante finie C telle que*

$$\max_{0 \leq i \leq N} |Y_i(h) - y(x_i)| \leq Ch^p$$

pour toute $0 < h \leq a$.

nous aurons également besoin de lemme suivant :

si

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B, \ pour\ n = 1, 2, ...$$

avec $A > 0, B > 0$
ensuite

$$|\xi_n| \leq (B + A|\xi_0|)(1 + A)^{n-1} \tag{3.3}$$

si $A = hK$ et $nh = x$,donc

$$|\xi_n| \leq (B + hK|\xi_0|)e^{Kx} \tag{3.4}$$

la preuve de ce lemme suite directement par induction .notre objectif principal est l'investigation des propriétés de convergence de certains algorithmes courants.

3.2.2 La méthode du point milieu

ici, nous remplacons $K(x,t)$ par sa valeur au point central
$t = x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$ alors

$$h\sum_{i=0}^{n-1} K(x_n, x_{i+1/2})Y_{i+1/2} = f(x_n) \tag{3.5}$$

$$Y_{n-1/2} = \frac{f(x_n)}{hK(x_n, x_{n-1/2})} - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{K(x_n, x_{i+1/2})}{K(x_n, x_{n-1/2})} Y_{i+1/2} \tag{3.6}$$

Théorème 3.2 *l'approximation (3.6) est convergente avec commander au moins deux.*

Preuve. *encore une fois ,à partir (3.1) et (3.5)*

$$h\sum_{i=0}^{n-1} K(x_n, x_{i+1/2})\epsilon_{i+1/2} = h\sum_{i=0}^{n-1} K(x_n, x_{i+1/2})y(x_{i+1/2}) - \int_0^{x_n} K(x_n,t)y(t)dt$$

$$K(x_n, x_{i+1/2})\epsilon_{i+1/2} + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{K(x_{n+1}, x_{i+1/2}) - K(x_n, x_{i+1/2})\right\} \epsilon_{i+1/2} =$$

$$K(x_{n+1}, x_{n+1/2})y(x_{n+1/2}) - \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} K(x_{n+1},t)y(t)dt +$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{K(x_{n+1}, x_{i+1/2}) - K(x_n, x_{i+1/2})\right\} y(x_{i+1/2}) - \frac{1}{h}\int_0^{x_n} \left\{K(x_{n+1},t) - K(x_n,t)\right\} y(t)dt$$

■

pour toute $n = 1, 2, ...$

puisque la méthode du point milieu est une méthode de quadrature du second ordre , le coté droit est $O(h^2)$ et encore une fois , nous pouvons trouver des constantes N_1, N_2, N_3 telle que

$$\left|\epsilon_{n+1/2}\right| \leq hN_1 \sum_{i=0}^{n-1} \left|\epsilon_{i+1/2}\right| + h^2 N_2$$

pour toute $n = 1, 2, ...$

avec $\left|\epsilon_{1/2}\right| \leq h^2 N_3$

$$\left|\epsilon_{n+1/2}\right| \leq \left(h^2 N_2 + h^3 N_1 N_3\right) e^{N_1 x_n}$$

ce qui prouve le théorème.

si $e(x)$ est la solution de

$$\begin{aligned} e(x) \quad = & \\ & -\int_0^x \frac{K^{10}(x,t)}{K(x,x)} e(t)dt - \frac{1}{24K(x,x)} \{K^{02}(x,x)y(x) + 2K^{01}(x,x)y'(x) + \\ & K(x,x)y''(x) + K^{11}(x,x)y(x) + \\ & K^{10}(x,x)y'(x) - K^{11}(x,0)y(0) - K^{10}(x,0)y'(0)\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

ensuite

$$\epsilon_{n+1/2} = h^2 e(x_{n+1/2}) + O(h^3)$$

3.2.3 La méthode des trapèzes

Divisons l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots\ldots., [x_{n-1}, x_n]$ et appliquons à chacune d'elle la formule des trapèzes

On a donc

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2} (y_i + y_{i-1})$$

$$\int_a^b f(x)dx = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

Cette formule est appelée formule des trapèzes généralises.voir [6]

pour l'équations intégrales,en utilisant le schéma de quderature trapézoidal voir [**?**],nous obtenons

$$\frac{1}{2} K(x_n, x_0) Y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} K(x_n, x_i) Y_i + \frac{1}{2} K(x_n, x_n) Y_n = \frac{f(x_n)}{h}$$

$$Y_n = \frac{2f(x_n)}{hK(x_n, x_n)} - \frac{K(x_n, x_0)}{K(x_n, x_n)} Y_0 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K(x_n, x_i)}{K(x_n, x_n)} Y_i \quad , pour\ n = 1, 2, .. \tag{3.8}$$

la première valeur Y_0 peut étre obtenue exactement puisque

$$y(0) = \frac{f^{'}(0)}{K(0,0)}$$

Théorème 3.3 *la méthode d'approximation (3.8) est convergente d'ordre au moins deux.*

Preuve. *la preuve de ce théorème peut étre effectuée d'une maniére similaire aux deux cas précédents,mais elle est plus fastidieuse et sera donc omise ici.*

la preuve des noyaux de convolution a été donnée par Jones 1961 et une preuve détaillée pour le cas général peut etre trouvé è Linz 1967. ■

dans ce cas, nous constatons que les résultats ne peuvent plus être représentés sous la forme ci-dessus.il est évident d'après les résultats numériques que l'approximation montre quelques petites oscillations sur la vraie solution.Ce phénomène a été souligné par Jones. qui a également suggéré une méthode pour lisser les résultats .

si nous introduisons l'erreur moyenne

$$\eta_r = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{r+1} + \epsilon_r\right)$$

alors on peut montrer que

$$\eta_r = h^2 \eta\left(x_r\right) + O(h^3)$$

ou $\eta\left(x\right)$ est la solution de

$$\begin{aligned} \eta\left(x\right) &= -\int_0^x \frac{K^{10}(x,t)}{K(x,x)}\eta(t)dt + \\ & \frac{1}{12K(x,x)}\{K^{02}(x,x)y(x) + 2K^{01}(x,x)y'(x) + \\ & K(x,x)y''(x) + K^{11}(x,x)y(x) + \\ & K^{10}(x,x)y'(x) - K^{11}(x;0)y(0) - K^{10}(x,0)y'(0) \end{aligned} \tag{3.9}$$

ce résultat fournit une justification rigoureuse de la méthode Jones quelque chose qui est une suivante.étant donné la solution initial $Y_0, Y_1, ...$on forme

$$\overline{Y}_k = \frac{1}{2}\left(Y_{k-1} + Y_{k+1}\right)$$

et

$$\widetilde{Y}_k = \frac{1}{2}\left(\overline{Y}_k + Y_k\right)$$

il est facile de montrer que si $\widetilde{\epsilon}_k$ indique l'erreur dans $\widetilde{Y}_k$ alors

$$\widetilde{\epsilon}_k = \eta_k + \frac{h^2}{4}y''(x_k) + O(h^3)$$

c'est-à-direque les $\widetilde{Y}_k$ sont lisses à l'ordre h^2.

3.2.4 La méthode de quadrature Simpson

Soit $\{x_0, x_1, x_2, \ldots.., x_n\}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$,ou $n = 2m$, m entier positif, et $h = \frac{b-a}{2m}$

Remarquons que :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$$

En appliquant la formule de Simpson à chaque intervalle double $[x_{2i-2}, x_{2i}]$,$i = 1, 2, \ldots.., m$

L'équation nous donne :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{h}{3} \left(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}\right) \right)$$

Ou encore :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left((y_0 + y_{2m}) + 4 \sum_{i=1}^{m} y_{2i-2} + \sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} \right)$$

Posons

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} y_{2i-2} \ \ , \ \ \delta_2 = \sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}$$

Nous obtenons :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left((y_0 + y_{2m}) + 4\delta_1 + \delta_2\right)$$

Cette formule est appelée : formule de Simpson généralisée.voir [6].

générelement ,si N est paire, alors la régle de quadrature de Simpsons voir [7] peut etre appliquée à chaque sous-intervalle

$$[x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}] \ ; \ i = 0, 1, \ldots.., \frac{N}{2} - 1$$

donnant individuellement une approximation

$$\frac{h}{3} \left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]$$

la somme de ces $\frac{N}{2}$ approximations donne la version composite de la régle de quadrature de simpsons

$$S(h) = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a + h) + 2f(a + 2h) + 4f(a + 3h) + \ldots + 2f(b - 2h) + 4f(b - h) + f(b)]$$

pour tout l'intervalle.

soit l'intervalle $[a, b]$ fini et partitionné par N points également espacés

$$\begin{cases} x_0 = a = 0 \ , \ x_N = b \\ x_i = x_0 + ih \ \ ; i = 0, 1, 2, 3, \ldots., N \end{cases}$$

L'approximation de l'équation (3.1) aux noeuds pairs x_{2m} est donnée par

$$\int_0^{x_{2m}} K(x_{2m},t)y(t)dt = f(x_{2m})$$

au lieu de cette équation,considérons l'équation suivante

$$\sum_{l=0}^{m-1}\int_{x_{2l}}^{x_{2l+2}} K(x_{2m},t)y(t)dt = f_{2m}$$

en utilisant la régle de quadrature de simpson répétée, nous avons

$$\sum_{l=0}^{m-1}\frac{h}{3}\left(K_{2m,2l}y_{2l} + 4K_{2m,2l+1}y_{2l+1} + K_{2m,2l+2}y_{2l+2}\right) = f_{2m}$$

et

$$y_{2l+1} \cong \frac{y_{2l}+y_{2l+2}}{2}$$

ensuite nous avons

$$\sum_{l=0}^{m-1}\frac{h}{3}\left(K_{2m,2l}y_{2l} + 4K_{2m,2l+1}\frac{y_{2l}+y_{2l+2}}{2} + K_{2m,2l+2}y_{2l+2}\right) = f_{2m}$$

$$\sum_{l=0}^{m-1}\frac{h}{3}(K_{2m,2l}y_{2l} + 2K_{2m,2l+1})y_{2l} + \sum_{l=1}^{m-1}\frac{h}{3}(2K_{2m,2l-1}y_{2l} + K_{2m,2l})y_{2l} = f_{2m}$$

$$\begin{aligned} &\frac{h}{3}(K_{2m,0}+K_{2m,1})y_0 + \frac{h}{3}(2K_{2m,2m-1}+K_{2m,2m})y_{2m} \\ &+\frac{2h}{3}\sum_{l=1}^{m-1}(K_{2m,2l-1}+K_{2m,2l}+K_{2m,2l+1})y_{2l} \\ =\ & f_{2m} \end{aligned}$$

$$y_{2m} = \frac{f_{2m} - \frac{h}{3}(K_{2m,0}+K_{2m,1})y_0 - \frac{2h}{3}\sum_{l=1}^{m-1}(K_{2m,2l-1}+K_{2m,2l}+K_{2m,2l+1})y_{2l}}{\frac{h}{3}(2K_{2m,2m-1}+K_{2m,2m})}$$

$$m = 1,2,3,.......\frac{N}{2}$$

pour l'intervalle entier,l'erreur voir [7] de $S(h)$ est la somme de toutes les $\frac{N}{2}$erreurs individuelles

$$eS(h) = \int_a^b f(x)dx - S(h) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} f^{(4)}(\xi_i) \quad ;\xi_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$$

et nous concluons que

$$eS(h) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \quad ;\xi \in [a,b]$$

pour plus d'informations, voir [8].

3.3 Exemples numériques :

Exemple 3.1 (from jones,1961)

$$\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt = \sin x$$

solution exacte : $y(x) = 1$,tableau (3.1) contient les résultats par la méthode du point milieu .l'erreur.de manière assez surprenante,mais cela est prédit par l'équation d'erreur (3.7) de (3.7) nous trouvons

$$\epsilon_k = \frac{h^2}{24} + O(h^3)$$

x	$h = 0,1$	x	$h = 0,5$
$0,45$	$0,99958$	$0,475$	$0,99990$
$0,95$	$0,99958$	$0,975$	$0,99990$
$1,45$	$0,99958$	$1,475$	$0,99990$
$1,95$	$0,99958$	$1,975$	$0,99990$

TAB. 3.1 – exemple1 par la méthode du point milieu

tableau (3.2) contient les résultats par la méthode des trapèzes .
les oscillations et l'effet de la méthode de lissage sont apparents

x	*approx initiale*	*résultats lissés*
$0,1$	$1,00166$	$1,00083$
$0,2$	$1,00000$	$1,00083$
$0,3$	$1,00166$	$1,00083$
$0,4$	$1,00000$	$1,00083$
$0,5$	$1,00166$	$1,00083$
$0,6$	$1,00000$	$1,00083$

TAB. 3.2 – exemple 1 par la méthode des trapèzes pour h=0,1

Exemple 3.2

$$\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt = 1 - \cos x$$

x	$h = 0,3$	$h = 0,1$
$0,15$	$0,15057$	$0,15006$
$0,45$	$0,45171$	$0,45019$
$0,75$	$0,75285$	$0,75031$
$1,05$	$1,05398$	$1,05044$
$1,35$	$1,35512$	$1,35056$
$1,65$	$1,65626$	$1,65069$
$1,95$	$1,95740$	$1,95081$

TAB. 3.3 – exemple 2 par méthode du point milieu

solution exacte : $y(x) = x$,les résultats, en utilisant la méthode point milieu sont doonés dans le tableau (3.3)

Exemple 3.3 *considérons l'équation intégrale de Volterra linéaire du premier type*

$$\int_0^x e^{-x+t} y(t)dt = x \qquad ; 0 \leq x \leq 1$$

solution exacte : $y(x) = x + 1$

les résultats, en utilisant la méthode de quadrature Simpson sont donnés dans le tableau 3.4

x	*approx pour* $h = 0,1$	*approx pour* $h = 0,01$	*solution exacte*
$0,0$	1	1	1
$0,2$	$1,199994521631$	$1,199999999971$	$1,2$
$0,4$	$1,399999431759$	$1,399999999943$	$1,4$
$0,6$	$1,599994623000$	$1,599999999916$	$1,6$
$0,8$	$1,79998906759$	$1,799999999891$	$1,8$
$1,0$	$1,999994685149$	$1,999999999868$	$2,0$

TAB. 3.4 – exemple 3 par la méthode de quadrature Simpson pour h=0,1 et h=0,01 avec les solutions exactes

Exemple 3.4 *considérons l'équation intégrale de Volterra linéaire du premier type*

$$\int_0^x (x^2 - t + 2)y(t)dt = (x^2 - x + 2)\sin(x) + 1 - \cos(x) \qquad ; 0 \leq x \leq 1$$

solution exacte : $y(x) = x + 1$

les résultats, en utilisant la méthode de quadrature Simpson sont doonés dans le tableau (3.5)

x	$approx\ pour\ h = 0,1$	$approx\ pour\ h = 0,01$	$solution\ exacte$
$0,0$	1	1	1
$0,2$	$0,986809392421$	$0,980064730550$	$0,980067000000$
$0,4$	$0,920543831922$	$0,921055872106$	$0,921061000000$
$0,6$	$0,831826452332$	$0,825325913587$	$0,825336000000$
$0,8$	$0,695157439617$	$0,696691310578$	$0,696707000000$
$1,0$	$0,546117616973$	$0,540280323213$	$0,540302305868$

TAB. 3.5 – exemple 4 par la méthode de quadrature Simpson pour h=0,1 et h=0,01 avec les solutions exactes

Conclusion

Nous avons montré que les approximations d'équations intégrales de volterra du premier type peuvent être obtenues en utilisant certaines règles de quadrature numérique simples, mais que de nombreuses méthodes de quadrature d'ordre supérieur conduisent à des algorithmes instables, il est généralement raisonnablement de fournit également une certaine estimation de l'erreur. la règle trapéze, fréquemment proposée dans la littérature, est un peu moins satisfaisante en raison des oscillations dans les résultats. même après le lissage. a tendance à être moins précise que la méthode du point milieu, ce qui peut être vu en comparant les équations (3.7) et (3.9) le terme non homogène en (3.9) est exactement deux fois plus grand que le terme correspondant en (3.7).

D'aprés les résultats numériques obtenus à partir des exemples illustratifs nous concluons que pour h suffisamment petit nous obtenons une bonne précision car en réduisant la longueur de la taille de pas l'erreur des moindres carrés sera réduite. la meme approche peut étre utilisée pour résoudre d'autres problémes.le calcul de cette approche est simple et exécuté efficacement à l'aide de codes informatiques symboliques sur n'importe quel ordinateur personnel.

Bibliographie

[1] Abdesselam Soukeur, "sur l'aspect numérique des solutions intégrales de Volterra linéaires et non linéaires au moyen d'une nouvelle méthode quadratique intégrale généralisée (QIG)", université Mohamed khider, biskra-algérie-2004

[2] Abdul-Majid Wazwaz, "A first course in integral equations", Saint Xavier University, USA, second Edition,by world scientific publishing Co. Pte.Ltd,2015

[3] Abdul-Majid Wazwaz, "Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications", Saint Xavier University Chicago, Higher Education Press, Beijing and springer-Verlag berlin Heidelberg,2011

[4] Yves CAUMEL "Cours d'analyse fonctionnelle et complexe", Cépaduès-Éditions , 2009.

[5] Daniel Li, "cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés", Ellipse édition marketing S.A2013

[6] Derradji Salah, "analyse numérique 1", office des publications universitaires place centrale-ben -aknoun -Alger ,07-1990

[7] Farshid Mirazaee,Numerical Solution For Volterra Integral Equations Of The First Kind Via Quadrature Rule",Vol.6,2012,no.20,969-974.

[8] G.M.Phillips,P.J.Taylor,Theory and applications of numerical analysis ,Academic Press,New York,(1973).

[9] Guillaume Aubrun, -publications -, "théorie des opérateurs, M1 Mathématique", université de la réunion, aubrun@math.univ-lyon1.fr

[10] Lokenath Debnath, Piotr Mikusinski, "Introduction to Hilbert spaces with application", Elsevier academic press USA, third edition,2005

[11] M.Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, "Equations Intégrales problèmes et exercices", traduction du russe par Irina Petrova, traduction française, Editions mir, moscou,1977

[12] M.NADIR. -"publications et documents" -http ://mostefanadir.com/

[13] Mouffok Mohamed Oussama, "Solution approximative pour les équations intégro-différentielles linéaire de Fredholm", mémoire de master, université Mohamed Boudiaf de m'sila, algerie,2019/2020.

[14] Peter linz ,"Analytical and numerical methods for volterra integral equations ",society for industrial and applied mathematics,siam,philadelphia,USA,1985.

[15] Prem K. Kythe, Pratap Puri, "Computational Methods for Linear Integral Equations", Springer Science Business Media, New York,2002

[16] Rahmoune Azedine, "Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales", thèse présentée pour obtenir le grade de docteur en science, université de Batna, Algerie,2011.

[17] V. Smirnov, "Cours de Mathématique Supérieures", tome IV, première partie, traduit du russe par Djilali Embarek, traduction française. Éditions Mir.moscou,1975.

ملخص:

تطرقنا في هاته المذكرة لموضوع من أهم مواضيع التحليل الرياضياتي والعددي والمتمثل في الحل العددي للمعادلة التكاملية لفولتيرا النوع الأول.

فقد حاولنا قدر المستطاع بمجهود جد متواضع الالمام بأهم التعاريف، النظريات الخواص لجميع فصول هاته المذكرة.

في الفصل الأول تذكير بأهم مفاهيم التحليل التابعي الفصل الثاني تصنيف معادلات التكاملية واشكالها العامة وجود ووحدانية الحل.

وأخيرا الفصل الثالث الذي هو لب وقلب موضوعنا تطرقنا لحل المعادلة التكاملية لفولتيرا النوع الأول باستخدام بعض الطرق العددية مع أمثلة توضيحية لذلك.

أردنا ان تكون هاته المذكرة موضوعا رياضياتيا بحتا فكانت تطبيقاته رياضياتية بحتة لا أكثر.

وعليه نرجو ان نكون قد وفقنا ولو بالشيء القليل في إفادة الطلبة الأعزاء -طلبة قسم الرياضيات بجامعة محمد بوضياف -المسيلة -الجزائر- وكل من له ولوج في علم الرياضيات والفيزياء على حد سواء.

كلمات مفتاحية: المعادلات التكاملية - معادلات فولتيرا – طريقة شبه المنحرف – التكامل العددي – تصنيف المعادلات التكاملية -

Abstrait

Dans cette thèse, nous avons traité l'un des sujets les plus importants de l'analyse mathématique et numérique, qui est la solution numérique de l'équation intégrale de Volterra de type 1.

Nous avons essayé, autant que possible, avec un effort très modeste, de nous familiariser avec les définitions, les théories et les propriétés les plus importantes de tous les chapitres de cette thèse.

Dans le premier chapitre, un rappel des concepts les plus importants de l'analyse fonctionnelle. Chapitre deux : Classification des équations intégratives et de leurs formes générales, l'existence et l'unité de la solution.

Enfin, le troisième chapitre, qui est le cœur et le cœur de notre sujet, nous avons traité de la résolution de l'équation intégrale de Volterra, le premier type, en utilisant des méthodes numériques avec des exemples illustratifs.

Nous voulions que cette thèse soit une matière purement mathématique, ses applications étaient donc purement mathématiques.

En conséquence, nous espérons avoir réussi, même par un petit truc, au témoignage de chers étudiants - étudiants du département de mathématiques de l'Université Mohamed Boudiaf de M'Sila - Algérie - et de tous ceux qui ont accès aux mathématiques et à la physique. Pareil.

Mots clés : Équation intégrale - Équations de Volterra – Méthode de trapèze – Intégrale numérique - Classification des équations intégrales –

Abstract:

In this dissertation, we dealt with one of the most important topics of mathematical and numerical analysis, which is the numerical solution to the integral equation of Volterra type 1.

We have tried, as much as possible, with a very modest effort to become familiar with the most important definitions, the theories and properties of all chapters of this dissertation.

In the first chapter, a reminder of the most important concepts of functional analysis. Chapter Two: Classification of integrative equations and their general forms, the existence and unity of the solution.

Finally, the third chapter, which is the core and heart of our topic, we dealt with solving the integral equation of Volterra, the first type, using some numerical methods with illustrative examples.

We wanted this dissertation to be a purely mathematical subject, so its applications were purely mathematical.

Accordingly, we hope that we have succeeded, even by a little thing, in the testimony of dear students - students of the mathematics department at Mohamed Boudiaf University of M’Sila - Algeria - and everyone who has access to mathematics and physics alike.

Key words: Integral Equation - Volterra Equations – Trapeze method - Numerical Integral - Classification of integrative equations-