UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Licence**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Par

1- Boukra Salah 2- Boullal Messaouda 3-Oualid Hind

Sujet

Opèrateur pseudo-diffèrentiels

Dirigé par :

Mr. Lekhal Aissa

Promotion: 2014/2015

Remerciements

Table des matières

Introduction

Nous présentons dans ce trevail, les éléments principaux d'une théorie des opérateurs pseudo-différentiels: symboles, calcul symbolique des opérateurs, action dans les espaces de Sobolev, invariance par changements de coordonnées.

Pour une fonction $\alpha\,(\zeta)$ $\mathbb{C}^\infty$, à croissance lente on note $a(D)$ l'opérateur défini sur $\boldsymbol{s}'$ $(\mathbb{R}^n)$ par:

$$(a(D)u)\hat{}\,(\zeta) = a(\zeta)\hat{u}(\zeta).$$

La fonction $a(\zeta)$ s'appelle le symbole de l'opérateur $a(D)$. Pour $u \in \boldsymbol{s}$,

$$(a(D)u)(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp^{ix\zeta} a(\zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta,$$

par comparaison avec la formule d'inversion de Fourier:

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp^{ix\zeta} \hat{u}(\zeta)d\zeta,$$

montre que $a(D)$ ne modifie le fragment $\hat{u}(\zeta)\exp^{ix\zeta}$ de ≪fréquence≫ ζ de u qu'en multipliant son ≪amplitude≫ $\hat{u}(\zeta)$ par $a(\zeta)$.

Par ailleurs, on a la formule

$$a(D)b(D) = (ab)(D),$$

qui signifie que le symbole du composé de deux opérateurs n'est autre que le produit des symboles: on appellera ≪calcul symbolique≫ ce type de propriété.

On nommera plus tard (avec quelques restrictions supplémentaires sur la croissance de $a(\zeta)$) $a(D)$ un $\ll$opérateur pseudo-différentiel à coefficients contants$\gg$, voulant souligner par là le fait que son symbole ne dépend pas de x.

Chapitre 1

Rappels et Notations

Ce chapitre rassemble plusieurs résultats préliminaires indispensables pour développer la théorie des distributions.

Aprés quelques rappels de calcul différentiel–principalement destinés à fixer les notations– on étudiera plus particuliérement les fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et à support compact, ainsi que leurs premiéres applications en Analyse - - notamment à la localistion et la régularisation des fonctions.

1.1 Calcul différentiel

Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et une application

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ou $\mathbb{C}^n$ définie par

$$f(x) = (f_1(x_1.....x_n), ..., f_n(x_1.....x_n)).$$

l'application f est de classe $\mathbb{C}^p$ sur Ω – ce que l'on note

$$f \in \mathbb{C}^P\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$$

ou

$$f \in \mathbb{C}^P\left(\Omega, \mathbb{C}^n\right)$$

Si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à P des fonctions $f_1, ..., f_n$ sont continues sur Ω.

L'espase $\mathbb{C}^p(\Omega, \mathbb{R})-$ ou $\mathbb{C}^P(\Omega, \mathbb{C})$ selon le contexte – est noté $\mathbb{C}^P(\Omega)$.

De façon plus générale, pour $U \subset \mathbb{R}^N$, on notera $\mathbb{C}^P(U, \mathbb{R}^n)$ $\left(\text{resp.}\mathbb{C}^P(U, \mathbb{C}^n)\right)$ l'ensemble des restrictions à U d'applications de classe $\mathbb{C}^p$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant U et à valreurs dans $\mathbb{R}^n$(resp.$\mathbb{C}^n$).

Lemme 1.1.1 ***(Schwarz)***

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Si $\Phi \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, alors, pour tous $k \neq l = 1, ..., N$, on a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial_{xk}} sur \Omega.$$

Nous utiliserons systématiquement les notations suivantes pour les dérivées partielles d'une fonction f de classe $\mathbb{C}^1$ sur Ω,

ouvert de $\mathbb{R}^N$: $\partial_k f(x)$ désigne la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$

$$\partial_k f(x) \textit{désigne la dérivée partielle} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

pour tout $k = 1, ..., N$, ains que

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x1} f(x) \\ . \\ . \\ . \\ \partial_{xN} f(x) \end{pmatrix}.$$

également que, pour tout champ de vecteurs de classe $\mathbb{C}^1$

$$V \ : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \ \text{ où } \Omega \ \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N,$$

on note

$$\text{div } V(x) = \sum \partial_{x_k} V_k(x).$$

Passons au cas des dérivées partielles d'ordre supérieure.

On nomme "multi-indice " tout élément $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N\ ) \in \mathbb{N}^N$.

A tout multi- indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on associe sa longueur

$$|\alpha| = \alpha_1\ + ...\alpha_N.$$

Pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on note les dérivées partielles itérées d'une fonction f de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur Ω comme suit :

$\partial_x^\alpha f(x)$ désigne $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x1}^{\alpha_1}...\partial x_N^{\alpha_N}}(x)$, c'est-à-dire que $\partial_x^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_N}^{\alpha_N}\ f(x)$.

Par analogie, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $\alpha \in N^N$, on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_N^{\alpha_N}$.

Notons encore, pour tout $\alpha \in N^N$ et tout $\beta \in N^N$

$$\beta \leq \alpha \text{ si et seulement si } \beta_k \leq \alpha_k \text{ pour } k = 1, ..., N.$$

On posera alors

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!}$$

où

$$\alpha! = \alpha_1!...\alpha_N!.$$

Avec ces notations, on peut écrire trés simplement

(a) la formule du binõme :

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha - \beta} y^\beta;$$

(b) la formule du multinõme :

$$(x_1 + ... +\ x_N)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha,$$

(c) et la formule de leibnitz : pour $f, g \in \mathbb{C}^P(\Omega)$ *et* $|\alpha| \leq p$

$$\partial^{\alpha}(f\ g) = \sum_{\beta\leq\alpha}\partial^{\alpha-\beta}f\ \partial^{\beta}g$$

Définition 1.1.1

une derniére notation que nous utiliserons fréquemment par la suite : le laplacien d'une fonction de classe $\mathbb{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ est

$$\triangle\ f = \operatorname{div}(\nabla\ f(x)) = \sum_{k=1}^{N}\partial_{x_k}^{2}f(x).$$

Nous allons maintenant passer en revue (sans démonstration) plusieurs énoncés classiques du calcul différentiel.

Commençons par la formule de dérivation des application composées .

Rappels

On rappelle que, pour tout $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ ouvert et tout $f\in\mathbb{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, on a

$$(\partial f(x)\ .\zeta)_k\ = \sum_{l=1}^{N}\partial x_l f_k(x)\zeta_l\quad , x\in\Omega\quad .\zeta\in\mathbb{R}^n\ , 1\leq k\leq n.$$

Ainsi, f'est une application continue de Ω dans l'espace $\pounds\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^n\right)$des applications linéaires de $\mathbb{R}^N$dans $\mathbb{R}^n$.

De plus, la matrice de $f'(x)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^N$et $\mathbb{R}^n$ est, pour tout $x\in\Omega$

$$(\partial_{x_l}f_k(x))\,1\leq k\leq n, 1\leq l\leq N$$

c'est-à-dire la matrice à n lignes et N colonnes, dont l'élément situé à la k-iéme ligne et la l-iéme colonne est $\partial_{x_l}\ f_k(x)$.

Théorème 1.1.1 ***Critère 1.1.1*** ***Théorème 1.1.2*** *(Dérivation des applications composées)*

Soient U ouvert de $\mathbb{R}^l$ et V ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Soient $f\in\mathbb{C}^1(U;\mathbb{R}^m)$ et $g\in\mathbb{C}^1(V;\mathbb{R}^n)$ telles que $f(U)\subset V$. Alors $g\circ f\in\mathbb{C}^1(U;\mathbb{R}^n)$ et on a $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ pour tout $x\in U$.

(la notation. désigne la composition d'application linéaires de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^m$ dans

$\mathbb{R}^n$.*)*

Les matrices de $(g \circ f)'(x)$. *de* $g'(f(x))$ *et de* $f'(x)$ *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^l$ $\mathbb{R}^m$ *et* $\mathbb{R}^n$ *sont donc reliées, pour tout* $x \in U$, *par la formule*$(\partial_{x_k}(g \circ f)_i(x))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant l}} = (\partial_{x_i} g_i(f(x)))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} .(\partial_{x_k} f_j($ *où, désigne le produit de matrices à* n *lignes et* m *colonnes par les matrices à* m *lignes et* l *colonnes.*

formule de Taylor avec reste intégral:

(a) pour Φ fonction de classe $\mathbb{C}^{p+1}$ sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$:

$$\Phi(b) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(b-a)^k}{k!} \Phi^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} \Phi^{(p+l)}(t) dt$$

pour tons $a, b \in I$:

(b) pour une fonction f de classe $\mathbb{C}^{p+l}$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$f(b) = \sum_{|a| \leq p} \tfrac{(b-a)^a}{a!} \partial^a f(a) + \sum_{|a|=p+1} \tfrac{(b-a)^a}{a!} \textstyle\int_0^1 (1-t)^p \partial^a f(a + t(b-a)) dt,$$

pour tous $a, b \in \Omega$ tels que le segment $[a, b] \subset \Omega$, pour démontrer cette derniére formule on se raméne au cas à une variable en posant

$$\Phi(t) = f(a + t(b-a)),$$

et ou vérifi que

$$\Phi^{(k)}(t) = \sum_{|a|=k} \tfrac{k!}{a!} \partial^a f(a + t(b-a))(b-a)^a,$$

Chapitre 2

Opérateur pseudo-différentiels

En analyse mathématique, un **opérateur pseudo-différentiel** est une extension du concept familier d'opérateur différentiel, permettant notamment l'inclusion d'ordres de dérivation non entiers.

Ces opérateurs pseudo-différentiels sont abondamment utilisés dans la théorie des équations aux dérivées partielles et en théorie quantique des champs.

2.1 Opérateur différentiel

Opérateur différentiel l'inéaire d'ordre $\boldsymbol{m}$ s'écrit:

$$L=\sum_{|a|=0}^{m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$$

où les $a_{\alpha}(x)$, appelées coefficients de l'opérateur L,sont des fonctions des n variables d'espace x^k, $k=1,...,n$.

2.1.1 La transformée de fourier

On définit ici la transformée de fourier de la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ de n variables par :

$$\hat{f}\,(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \exp^{-i\zeta x} f(x)dx$$

La formul de transformation inverse s'écrit alors:

$$f(x) = \tfrac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \exp^{+i\zeta x}\ \hat{f}\ (\zeta)d\zeta$$

2.2 Application aux opérateurs différentiels

Le symbole de l'opérateur différentiel L d'ordre m est la fonction $\sigma(x,\zeta)$ des $2n$ variables (x,ζ) polynomiale en ζ :

$$\sigma(x,\zeta) = \sum_{|a|=0}^{m} a_\alpha(x)\zeta^\alpha$$

L'opérateur différentiel L linéaire d'ordre m vérifie alors la relation:

$$(L\ f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{d\zeta}{(2\pi)^n} \exp^{+i\zeta x}\ \sigma(x,\zeta)\ \hat{f}\ (\zeta)$$

On constate que cette formule pourrait en fait permettre de définir l'opérateur L à partir de son symbole $\sigma\,(x,\xi)$.

Nous allons mettre cette idée à profit dans le paragraphe suivant.

2.3 Opérateur différentiel à coefficients constants

Si les coefficients a_α de l'opérateur différentiel L d'ordre m sont indépendants des n variables d'espase x^k, son symbole est seulement une fonction $\sigma\,(\xi\ )$ des n variables ξ polynomiale en ξ :

$$\sigma(\xi) = \sum_{|a|=0}^{m} a_\alpha \xi^\alpha$$

de telle sorte que :

$$(\mathfrak{D}\ f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(2\pi)^n} \exp^{+i\xi x} \sigma(\xi)\, \hat{f}\ (\zeta)$$

soit encore, en utilisant la transformation de Fourier inverse :

$$\left(\widehat{\mathfrak{D}\ f}\right)(\xi) = \sigma(\xi)\ \ \hat{f}(\xi)$$

Définition 2.3.1 *:* ***Opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants***
Soit une fonction $p(\xi)$ des n variables ξ.
On associe à cette fonction un opérateur pseudo-différentiel P_D à coefficients constants, dont l'action sur une fonction f est définie par l'intégrale suivante :

$$(P_D f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(2\pi)^n} \exp^{+i\xi x} P(\xi)\hat{f}(\xi)$$

pour que l'intégrale ait un sens, il faut qus le symbole $P(\xi)$ présente quelques « bonnes» propriétés:
la fonction $P(\xi)$ doit être lisse.
la fonction $P(\xi)$ doit avoir une croissance tempérée lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$, cette croissance tempérée devant de plus s'améliorer par dérivation.

Par analogie avec le cas d'un opérateur différentiel d'ordre m, où cette croissance est polynomiale, on est amené à demander ici qu'il existe un nombre m tel que:

$$\forall\alpha,\ \left|\partial_\xi^\alpha\ p(\xi)\right| \leq C_\alpha\ (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}$$

où les C_α sont des constantes, qui peuvent dépendre de α.

2.4 Calcul symbolique exact

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudo-différentiels à coefficients constants, définis respectivement par les symboles $P_1(\xi)$ et $P_2(\xi)$.

Alors, l'opérateur $P = P_1 P_2$ est encore un opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants, dont le symbole est le produit $P_1(\xi)\ P_2(\xi)$.

2.5 Opérateur pseudo-différentiel :cas général

Soit une fonction $P(x,\xi)$ des $2n$ variables (x,ξ).

On associe à cette fonction un opérateur pseudo-différentiel P_D, dont l'action sur une fonction f est définie par l'intégrale suivante:

$$(P_D\ f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \exp^{+i\xi x} p(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

On note parfois cet opérateur pseudo-différentiel à partir de son symbole de la façon suivante: $P_D = P(x,D)$

2.5.1 Propriétés requises du symbole

Pour que l'intégrale ait un sens, il faut que le symbole $P(x,\xi)$ présente quelques $\ll$ *bonnes* $\gg$ propriétés ,énoncées ci-dessous:

la fonction $P(x,\xi)$ doit avoir une croissance tempérée lorssque $|\xi| \longrightarrow \infty$, cette croissance tempérée devant de plus s'améliorer par dérivation. Par analogie avec le cas d'un opérateur différentiel d'ordre m, où cette croissance est polynomiale, on est amené à demander ici qu'il existe un nombre m tel que

$$\forall a, \quad |\partial_{\varepsilon}^{\alpha}\ \ P(x,\xi)| \quad \leq C_\alpha (1+|\zeta|\ )^{m-|\zeta|}$$

où les C_α sont des constantes, qui peuvent dépendre de α.

la fonction $p(x,\zeta)$ doit avoir une variation lente dans les variables d'espace x.

On demande explicitement que

$$\forall \alpha, \quad \left|\partial_{\zeta}^{\alpha}\ P(x,\zeta)\right| \leq C_\alpha (1+|\zeta|)^m$$

Ces deux conditions peuvent être combinées en une seule, utilisée ci-dessous pour définir plus précisément la classe des symboles d'ordre m.

2.5.2 Classe des symboles d'ordre m

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un compact, et $P(x,\xi)$ une fonction lisse de $\mathbb{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Soit m un nombre réel quelconque.La classe $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ des symboles d'ordre m est définie par :

$$S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n) = \{P(x,\xi) \ / \ \left|\partial_\xi^\alpha \ \partial_x^\beta \ P(x,\xi)\right| \ \leq C_{\alpha,\beta,\Omega} \ (1 + |\xi| \ )^{m-|\alpha|}\}$$

pour tout $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, et pour tous les multi-indices α, β .

Les $C_{\alpha,\beta,\Omega}$ sont des constantes, qui peuvent dépendre de α, β et Ω.

Lorsque la mention du compact Ω est indifférente, on note simplement :

$$S^m = S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$$

On note souvent Ψ^m l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels à symbole dans S^m

2.6 propriété de pseudo-localité

2.6.1 support singulier d'une distribution

On appelle support singulier d'une distribution u le complémentaire de l'ensemble des points au voisinage desquels u est une fonction $\mathbb{C}^\infty$.

2.7 Calcul symbolique

Soient Pj , $(j = 1, 2)$ des éléments de $S^{mj}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Alors l'opérateur $P_1(x, D) \circ P_2(x, D)$ est aussi un opérateur pseudo-différentiel, dont le symbole, qui appartient á $S^{m_1+m_2}$ est donné par une somme asymptotique dont le premier terme est $P_1(x,\zeta) \ P_2(x,\zeta)$

2.8 continuité dans les espaces de sobolev

On note $H^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace de sobolev standard d'ordre s sur $\mathbb{R}^n$.

Soient s et m deux nombres réels . Un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$ (i.e un élément de Ψ^m)est continu de $H^S(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

2.9 propriété de pseudo-localité

Soit $\alpha \in S^m$ et soit k le noyau de $\alpha(x, D)$.

Alors K est C^∞ pour $x \neq y$.

En particulier, pour toute distribution tempérée u, supp sing $a(x, D)\ u \subset$ supp sing u.

2.10 applications

2.11 Symboles

2.11.1 Définition et exemples

Soit $m \in \mathbb{R}$. On note $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des $a \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ tels que:

$\forall\ \alpha, \forall\beta\ ,\ \left|\partial_x^\alpha\, \partial_\zeta^\beta\ a(x,\zeta)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\ (1 + |\zeta|)^{m-|\beta|}$.

On notera de plus $S^{-\infty} = \underset{m}{\cap} S^m$.

Un élément $a \in S^m$ est appelé symbole d'ordre m.

Exemple 2.11.1

Si $a\ (x,\zeta) = \left[\sum\limits_{|a|\leq m}\right]\ a_\alpha(x)\ \zeta^\alpha$, avec $a_\alpha \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, bornée ainsi que toutes ses dérivées, $a \in S^m$: on dit que a est un symbole différentiel.

Exemple 2.11.2

Soit $a(\zeta)$ une fonction (positivement) homogéne de degré m (c'est-à-dire $\forall\ \lambda \succ 0,\ a(\lambda\ \zeta)$ $= \lambda^m\ a(\lambda\ ))$ et $\mathbb{C}^\infty$ pour $\zeta \neq 0$.

Si $X \in \mathbb{C}_0^\infty$, $X = 1$ *prés de* 0, *la fonction* $\tilde{a}(\zeta) = (1 - X(\zeta))\ a(\zeta)$ *est un symbole d'ordre* m.

Exemple 2.11.3

Soit $p(x,\zeta)$ *un symble différentiel d'ordre* m *défini pour* $x \in \Omega$ *ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Supposons* p *elliptique dans* Ω, *c'est-à-dire:*

$$\forall x \in \Omega, \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \zeta \neq 0, p_m(x,\zeta) \neq 0.$$

Pour $\Phi \in \mathbb{C}_0^\infty\ (\zeta)$ *et* $X \in \mathbb{C}_0^\infty$, $X = 1$ *prés de 0, la fonction* $a(x,\zeta) = \Phi(x)\ \frac{1-X(\zeta/C)}{p(x,\zeta)}$ *est un symbole d'ordre -* m *si* $\mathbb{C}$ *est assez grand.*

Exemple 2.11.4

Soit $\varphi \in s$: *la fonction* $\varphi(\zeta)$ *est un symbole d'ordre* $-\infty$.

Exemple 2.11.5

La fonction $a(x,\zeta) = e^{ix\zeta}$ n'est pas un symbole.

Notons les porpriétés élémentaires suivantes:

Si

$$a \in S^m, \partial_x^\alpha \partial_\zeta^\beta a \in S^{m-|\beta|}$$

Si

$$a \in S^m, b \in S^{m\prime}, ab \in S^{m+m'}$$

Si

$$a \in S^m, a \in s'(\mathbb{R}^{2n}).$$

Enfin, le lemme suivant est utile.

Lemme 2.11.1

Si $a_1, ..., a_k \in S^0$ *et* $F \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{C}^k)$, *alors* $F(a_1, ..., a_k) \in S^0$.

Démonstration.

comme Re a_k et Im a_k sont dans S^0, on peut supposer a_i à valeurs réelles et $F \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^k)$. Maintenant:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\hat{\jmath}}} F(a) = \sum \frac{\partial F}{\partial a_k} \partial_{x\hat{\jmath}} a_k,$$
$$\frac{\partial}{\partial \zeta_{\hat{\jmath}}} F(a) = \sum \frac{\partial F}{\partial a_k} \partial_{\zeta\hat{\jmath}} a$$

Nous allons démontrer par récurrence sur p , que les estimations pour tout fonction de type $F(a)$ sont vraies pour

$|\alpha| + |\beta| \leq p$.

Le cas $P = 0$ est clair.

Par ailleurs, pour $|\alpha| + |\beta| \leq p+1$, la formule de Leibniz appliquée l'hypothése de récurrence appliquée aux dérivées de $\frac{\partial F}{\partial a_k}(a)$, permettent de conclure.

On prendra garde au fait qu'un symbole $a(x, \zeta)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$) n'est pas un symble en les variables $y = (x, x')$, $\eta = (\zeta, \zeta')$

($x' \in \mathbb{R}^m$, $\zeta' \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$), sauf s'il est différentiel. ■

De nombreuses autres classes de symboles sont aussi utiles dans la pratique: quelquesunes sont introduites .

Bibliographie

[1] Serge ALINHAC-potrik gérard opérateurs pseudo-differentiels et théorieme de NASH-Moser.

[2] BABA-HAMEDC-BENHABIBK Rappels de cours et Exercices avec solution.

[3] Zuily et queffélee-ANALYSE pour l'agrégation.

[4] Systémes differentiels Rappels de cours et exercices Farid AMMAR Khodja.