

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE

OPTION: AUTOMATIQUE

THEME

Simulation numérique du champ électrique
dans une décharge couronne par la méthode
des éléments finis

Proposé et dirigé par :

Monsieur: **NOURI Hamou**

Présenté par :

BAALI Aissa

Année Universitaire : 2011 / 2012

Remerciements

Sommaire

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre I

Approche physique de la décharge couronne

I.1 Introduction	3
I.2 Mécanismes de formation et processus physiques des décharges électriques	3
I.3 Processus élémentaire dans les gaz ionisés	5
I.3.1 Excitation atomique	6
I.3.2 L'ionisation par collision électronique	6
I.3.3 La photo ionisation (ionisation par photon).....	7
I.3.4 La recombinaison	7
I.3.5 L'attachement.....	7
I.3.6 Le détachement	8
I.4 Avalanche électronique	8
I.4.1 La décharge de Townsend	8
I.4.2 Notion du Streamers	12
I.4.3 Champ seuil de l'effet couronne	13
I.5 Les différents types de décharges couronne	15
I.5.1 Décharge couronne positive	17
I.5.2 Décharge couronne négative	18
I.5.3 Décharge couronne en régime alternatif	19
I.6 Conclusion	21

Chapitre II

Les méthodes numériques en électromagnétisme

III.1 Introduction	22
III.2 La Méthode des différences finies (MDF)	22
III.2.1 Principe de la méthode	23
III.2.2 Transformation de l'équation différentielle	24

III.2.3 Avantages de la MDF	26
III.2.4 Inconvénients de la MDF	26
III.3 La méthode des éléments finis (MEF)	26
III.3.1 Principe de la méthode	27
III.3.2 Définition des mailles de référence	31
III.3.3 Interpolation polynomiale sur les mailles de référence	35
III.3.4 Avantages de la MEF	36
III.4.5 Inconvénients de la MEF	37
III.4 La méthode des éléments finis de frontière (MEFF)	37
III.4.1 Formulation indirecte de la MEFF	37
III.4.2 Formulation directe de la MEFF	39
III.4.3 Avantages de la MEFF	39
III.4.4 Inconvénients de la MEFF	40
III.5 La méthode de Simulation de Charges (MSC)	40
III.5.1 Le principe de la MSC	40
III.5.2 Avantages de la MSC	41
III.5.3 Inconvénients de la MSC	42
III.6 Conclusion	42

Chapitre III

Les propriétés électriques de fines particules

III.1 Introduction.....	43
III.2 Mouvement des charges libres	44
III.2.1 La mobilité dynamique	44
III.2.2 La mobilité électrique	46
III.2.3 Diffusion des particules dans un gaz	48
III.3 Eléments théoriques sur les propriétés des ions	49
III.3.1 La classification des ions.....	49
III.3.1.1 Les petits ions	49
III.3.1.2 Les particules chargées.....	50
III.3.2 Les méthodes de productions des petits ions.....	50
III.3.2.1 Les rayonnements ionisants.....	50

III.3.2.2 L'effet couronne	53
III.3.2.3 Les autres moyens de production	54
III.3.3 L'évolution des ions dans le gaz	54
III.3.3.1 La recombinaison	55
III.3.3.2 La fixations des petits ions sur les aérosols	55
III.3.3.3 La diffusions sur les parois	57
III.3.4 Le vieillissement des ions	57
III.3.5 La durée de vie des ions	57
III.4 Théorie de la charge électrique des aérosols par diffusion d'ions bipolaires.....	58
III.4.1 Le coefficient de fixation ion – aérosol	58
III.4.1.1 Calcul du coefficient de fixation en régime continu	59
III.4.1.2 Calcul du coefficient de fixation en régime intermédiaire et moléculaire.....	60
III.4.1.3 Evolution de la charge moyenne de l'aérosol	62
III.4.1.4 Equation générale de l'évolution de la distribution des charges	62
III.4.2 L'état stationnaire de la charge électrique d'un aérosol (équilibre de Boltzmann)....	64
III.4.3 La durée de mise à l'état stationnaire	66
III.5 Mécanismes de charge des particules	67
III.5.1 Charge naturelle par attachement	68
III.5.2 Triboélectrisation	69
III.5.3 Charge par charge d'espace ionique	69
III.5.3.1 Charge par champ	70
III.5.3.2 Charge par diffusion	73
III.5.3.3 Charge mixte	75
III.6 Conclusion	77

Chapitre IV

Modélisation de la décharge couronne

IV.1 Introduction.....	78
IV.2 Description mathématique de la décharge couronne bipolaire.....	78
IV. 3 Hypothèse et approximation	81
IV.3.1 Mobilité ionique	81

IV.3.2	Approximation de Deutsch et Popkov	81
IV.4	Conditions aux limites.....	81
IV.4.1	Les conditions aux limites de Townsend et Kaptzov	81
IV.4.2	Domaine d'étude et limites artificielles.....	82
IV.5	Différentes étapes de la résolution numérique	83
IV.5.1	Tracé des lignes de champ et du maillage électrostatique.....	83
IV.5.2	L'évaluation d'erreur	87
IV.5.3	Première estimation de la charge d'espace.....	87
IV.5.4	Estimation du potentiel électrique.....	89
IV.5.5	Correction de la densité de la charge d'espace.....	89
IV.5.6	Reconstruire le maillage orthogonal.....	89
IV.6	Résolution de l'équation de Poisson par la MEF	91
IV.6.1	Formulations matricielles de la MEF	91
IV.6.2	Assemblage.....	93
IV.7	Résultats et discussion	94
IV.7.1	Le maillage.....	94
IV.7.2	Densité de la charge d'espace	95
IV.7.3	Densité de courant	97
IV.7.4	Le champ électrique	98
IV.7.5	La vitesse théorique de migration.....	99
IV.8	Conclusion	100
 Conclusion générale		101
 Références bibliographiques		103

*Introduction
générale*

Bien que les forces électriques et magnétiques aient été observées depuis plusieurs siècles, la plupart des lois gouvernant ces forces ne furent découvertes qu'au XIX^{ème} siècle. À ce jour, l'étude des implications théoriques de ces lois remarquables et le développement de leurs applications pratique restent des domaines de recherche très actifs. Nous avons différentes raisons d'étudier les propriétés des forces électriques et magnétiques en détail. Ces forces représentent des lois naturelles fondamentales et elles sont responsables de la structure et, en fait, de l'existence des atomes et des molécules. En conséquence, toute tentative sérieuse de comprendre les propriétés d'atomes ou d'agrégats d'atomes dépend de la connaissance de ces forces. Depuis près d'un siècle de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des décharges électriques dans l'air atmosphérique. Parmi celles-ci, on distingue des décharges à interactions locales (décharge couronne) et des décharges à interactions non locales (décharge de Townsend).

On peut considérer que le véritable pionnier de l'étude scientifique de l'effet couronne est un chercheur américain, R. W. Peek, qui vers 1929, établit une loi empirique exprimant le seuil d'apparition de la lueur, loi célèbre encore en usage de nos jours. Mais si la curiosité scientifique fut sans doute la motivation originale des chercheurs, les premiers transports d'énergie à haute tension montrèrent rapidement que l'effet de couronne était une source de pertes, et ce furent alors des préoccupations d'ordre économique qui incitèrent à poursuivre les recherches et approfondir les mécanismes liés à l'apparition d'une conductivité d'un gaz dans l'environnement d'un conducteur porté à une haute tension ; c'est l'importance du champ électrique à proximité de ce conducteur qui est à l'origine de l'ionisation du gaz, en particulier au voisinage des régions de forte courbure (effet de pointe) .

La décharge couronne apparaît dans de nombreux phénomènes naturels tels que la propagation de la foudre. Elle présente un aspect utile et recherché pour ses nombreuses applications (dépôt de charge en reprographie, traitement de surfaces métalliques et isolantes, textiles, physico-chimie, applications biologiques, dépoussiéreur électrique,) et un aspect nuisible (pertes d'énergie sur les lignes de transmission, perturbations radioélectriques, défaut d'isolement,).

Le travail que nous présentons dans ce mémoire fait partie d'un projet de recherche sur les décharges électriques bipolaire. La géométrie la plus réponde dans la conception est le système fil - plan. Le principe de fonctionnement est basé sur la décharge couronne. Cette décharge est caractérisée par des champs électriques intenses mais non disruptifs. L'intervalle

d'air inter électrodes commence à s'ioniser à partir d'une certaine valeur de la tension appliquée à la nappe, dite tension seuil d'apparition de la décharge couronne.

Ce mémoire étudie et développe les modèles mathématiques et numériques destinés à l'analyse de problèmes liés à la décharge électrique bipolaire. Ces modèles permettent de calculer la distribution du champ électrique et de la densité de courant électrique dans la configuration fil – plan. Nous nous sommes donc intéressés à l'étude de ce type de configuration d'électrodes.

Le modèle numérique est basé sur la discrétisation du domaine de calcul en appliquant la méthode des charges fictives pour déterminer la distribution du champ électrique et du potentiel en absence de la charge d'espace. Pour l'estimation de la charge d'espace on utilise la méthode simplifiée des caractéristiques. L'application de la méthode des éléments finis nous permet de résoudre l'équation de Poisson en utilisant les éléments triangulaires. La résolution se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle liée à l'énergie emmagasinée dans ces éléments.

Notre étude est présentée par quatre chapitres :

- Le premier est consacré aux rappels des phénomènes qui conditionnent le processus de la décharge couronne notamment les mécanismes gouvernant la formation des ions dans les gaz, le phénomène de la décharge couronne en polarités positive et négative en géométrie non uniformes et les champs seuils et critique.
- Le deuxième chapitre est réservé est consacré aux méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles gouvernant la décharge couronne. Nous présentons essentiellement la méthode des éléments finis et la méthode de simulation de charges. Ces deux méthodes sont utilisées pour les calculs du champ électrique et de la distribution de la charge d'espace.
- Le troisième chapitre est réservé à l'étude des propriétés électriques des particules en étudiant la théorie de la décharge et les différents mécanismes de migration.
- L'objet du quatrième chapitre est centré sur la résolution de l'équation de poisson en utilisant la méthode des éléments finis en tenant compte de la tension appliquée.

En fin, on termine par une conclusion générale où sera mise en évidence l'importance du modèle numérique élaboré.

Chapitre I

*Approche physique de la
décharge couronne*

I.1. Introduction

La décharge couronne désigne l'ensemble des phénomènes évoluant aux voisinages des conducteurs de faibles rayons de courbure lorsqu'ils sont soumis à des champs électriques intenses mais non disruptifs. Les phénomènes observés durant la décharge sont de nature optique, acoustique et électrique, ils dépendent de trois classes de paramètres :

- 1- Paramètres électrique (nature et polarité de la tension appliquée).
- 2- Paramètres du gaz interélectrodes (nature, température, pression et humidité).
- 3- Paramètres géométriques (forme et dimension des électrodes, distance inter-électrodes).

La décharge couronne est auto-entretenu (autonome), car elle ne nécessite aucune source extérieure pour se développer. Cependant, la présence d'un électron germe au voisinage de l'électrode active, est indispensable pour l'amorçage de la décharge.

Pour expliquer le mécanisme du développement de la décharge couronne les recherches ont abouti à distinguer deux processus de développement. Le premier fait intervenir l'intervalle inter-électrodes tout entier, c'est le cas de la décharge de Townsend [1]. Le second correspond à l'apparition dans l'intervalle de lueurs prenant l'aspect de filaments, c'est le streamers [2].

Dans ce chapitre, nous allons présenter, dans le cas des décharges couronnes, les processus physiques qui conduisent à la production d'espèces réactives et à leur dispersion. Ces phénomènes, qui ont largement été décrits pour des géométries pointe-plan, peuvent être généralisés à la configuration fil-cylindre, fil-plan et nappe de fils-deux plans que nous avons utilisée dans notre étude. Tout d'abord, les conditions d'obtention de la décharge couronne, ses différents régimes ou le mode de propagation de la décharge seront décrits. Ensuite, la caractérisation physique des différentes évolutions des réacteurs utilisés sera accompagnée d'une caractérisation électrique et mathématique.

I.2 Mécanismes de formation et processus physiques des décharges électriques

Un électron placé dans un champ électrique uniforme par exemple est accéléré et peut ioniser des atomes ou des molécules. L'ionisation d'une espèce conduit donc à la formation d'une particule chargée et à la libération d'un électron supplémentaire, qui à son tour va être accéléré et acquérir une énergie suffisante pour ioniser une seconde particule. Ce mécanisme

d'ionisation successive est connu sous le nom « d'avalanche électronique » ou « décharge de Townsend ».

Pour que la décharge soit auto-entretenu, il est nécessaire que tout électron qui quitte la zone d'ionisation soit remplacé. Chaque électron doit créer suffisamment d'ions positifs, de photons et d'espèces métastables pour qu'au moins l'un d'eux puisse produire un nouvel électron.

Sous l'influence du champ électrique appliqué, toutes les particules ainsi créées vont se déplacer dans l'espace interélectrodes et générer un courant électrique de décharge. La figure (1.1) décrit le comportement du courant en fonction de la valeur de la tension appliquée [3].

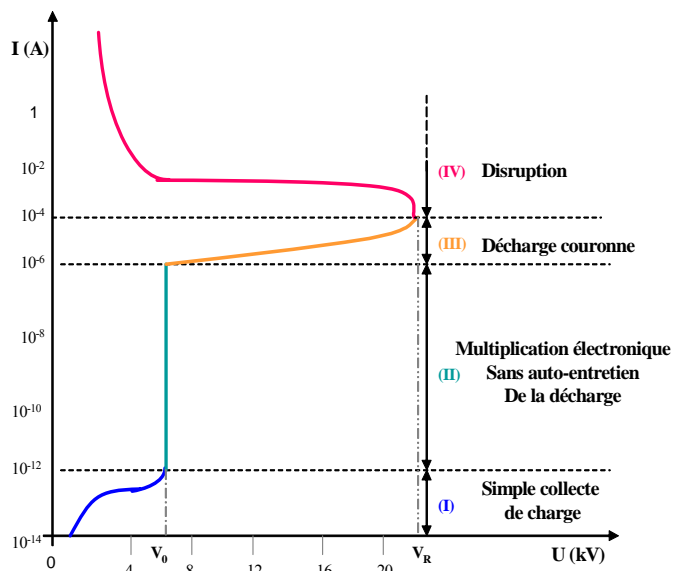


Figure 1.1 Caractéristique courant-tension des décharges à moyennes et faibles pressions

La courbe permet de distinguer quatre régimes [4 - 6]:

- **Régime I** : Le courant est très faible ($\approx 10^{-12}$ A/cm²), dû à la présence d'ions issus de la radioactivité naturelle ou rayonnement cosmique. Dans ce cas, le champ électrique est trop faible pour assurer l'avalanche électronique.

- **Régime II** : Lorsque la tension atteint une valeur seuil V_s , le champ est assez intense pour qu'un électron puisse ioniser une particule environnante. Le processus d'avalanche se déclenche alors sans que le critère d'auto-entretien soit pour autant satisfait. La décharge a besoin d'une source externe complémentaire : on parle de régime de Townsend non entretenu. Le courant reste faible ($\approx 10^{-9}$ A/cm²).
- **Régime III** : Ici la décharge ne s'éteint plus car la condition d'auto-entretien est atteinte. La composante continue (représentative de la charge d'espace) augmente avec la tension.
- **Régime IV** : Les courants de décharges deviennent très importants car toute l'énergie passe par un même canal préférentiel dans l'espace interélectrodes. C'est le régime des décharges disruptives tel que les arcs électriques.

I.3. Processus élémentaire dans les gaz ionisés

Les phénomènes qui ont lieu dans les milieux gazeux sont représentés par des mécanismes de collisions entre les particules du gaz. Lorsque l'énergie cinétique de ces particules, avant et après une collision, obéit au principe de conservation de l'énergie, on parle

de collisions élastiques, dans le cas contraire où le bilan énergétique est retrouvé en faisant intervenir des changements d'énergie interne d'une ou plusieurs particules, on parle de collisions inélastiques.

Ce sont ces dernières qui expliquent les phénomènes se produisant dans l'effet couronne, le tableau suivant résume les principales collisions inélastiques intervenants dans les mécanismes d'effet couronne (Tableau 1.1):

Processus	Partenaires initiaux	Particules résultantes	Processus inverse
Excitation atomique	A, e ⁻ A, P	A*, e ⁻ A*	- Collision super-élastique - Emission d'un photon
Ionisation par collision	A, e ⁻ A, B A, B ⁺	A ⁺ , e ⁻ , e ⁻ , A ⁺ , e ⁻ , B A ⁺ , e ⁻ , B ⁺	Recombinaison à trois corps

Photo-ionisation	A, P	A ⁺ , e ⁻	Recombinaison avec Emission d'un photon
Attachement électronique	A, e ⁻	A ⁻	Détachement

A, B: Atomes neutres ; A*: Atome excité; A⁺, A⁻ : ions positifs ou négatifs ; e⁻ : électrons ; P: Photon.

Tableau 1.1 : Processus élémentaire dans les gaz.

I.3.1 Excitation atomique

- Si un atome est excité par collision avec un électron, la réaction s'écrit :



Cette réaction n'est possible que si l'énergie cinétique de l'électron incident

$$C = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_e^2 \geq e \cdot V^* \quad (V : \text{potentiel d'excitation}).$$

- Si un atome est excité par absorption d'un photon la réaction s'écrit :



avec h : constante de Plank : $h = 6.635 \cdot 10^{-34}$ j.s et ∂ : fréquence

- Cette réaction n'a lieu que sur une plage de fréquence étroite : $\partial = \frac{e \cdot V^*}{h}$
- La désexcitation peut se produire spontanément lorsque l'électron d'un atome excité revient sur son orbite fondamentale, la perte d'énergie est compensée par l'émission d'un photon ayant une énergie égale au potentiel de désexcitation : $A^* \rightarrow A + h \cdot \partial$.

La désexcitation peut résulter du choc avec une particule, celle-ci bénéficie alors, sous forme d'énergie cinétique de la perte d'énergie interne subit par l'atome (Collision super-élastique).



I.3.2 L'ionisation par collision électronique

L'ionisation d'un gaz par les électrons libres accélérés dans le champ électrique est le processus essentiel de la formation des ions positifs, ce phénomène est appelé processus α ou avalanche.



Cette ionisation n'est possible que si l'énergie cinétique de l'électron incident est au moins égale à l'énergie d'ionisation de l'atome :

$$\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_e^2 \geq e \cdot v_i \quad (1.5)$$

où v_i est le potentiel d'ionisations.

I.3.3 La photo ionisation (ionisation par photon)

Les électrons accélérés par le champ électrique excitent par collision des molécules neutres qui reviennent à leur état fondamental avec émissions d'un photon.



Cette réaction n'est possible que si : $\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_e^2 = h \cdot \nu - w_i$

I.3.4 La recombinaison

a) La recombinaison entre ions

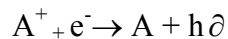
Ce phénomène est caractérisé par la présence de particules chargées différemment (ions positifs et négatifs) qui échangent leurs charges pour y revenir à l'état neutre. Ces réactions inverses des réactions d'ionisation, libèrent une certaine énergie, soit sous forme d'énergie cinétique cédée à une molécule de gaz voisine



Dans l'effet couronne, ces réactions se produiront dans les régions de champ électrique faible.

b) La combinaison ion+ - électron

Lorsqu'un électron se recombine avec un ion positif pour redonner un atome neutre, la réaction libère une énergie égale à l'énergie d'ionisation sous forme d'un photon.



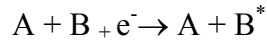
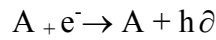
Les photons émis peuvent à leur tour ioniser le gaz à une certaine distance ce qui expliquerait le développement des streamers.

I.3.5 L'attachement

L'attachement d'un électron par un atome ou une molécule neutre conduit à la formation d'un ion négatif. Ce processus ne peut avoir lieu si les électrons sont trop énergétiques. Il s'avère qu'en champ électrique très faible et dans les conditions normales de l'air, que l'attachement des électrons est alors extrêmement rapide et que le nombre

d'électrons libres par unité de volume diminue de moitié en quelques 10^{-10} secondes. Ce mécanisme est exprimé par le coefficient d'attachement η .

Ces processus sont régis par les réactions suivantes :



I.3.6 Le détachement

C'est le processus inverse du précédent, l'énergie nécessaire pour provoquer le détachement est relativement faible : $\theta^- = \omega_d = 2.2\text{eV}$

Dans le cas du phénomène couronne, ce processus ne joue qu'un rôle négligeable.

I.4 Avalanche électronique

I.4.1 La décharge de Townsend

Soit un diélectrique gazeux contenu entre deux électrodes planes distantes de « d ». Figure (1.2). En absence de tout champ électrique, un certain nombre de particules chargés peuvent exister dans l'intervalle inter-électrodes. Ces particules sont produites, soit par des mécanismes naturels, soit par des mécanismes artificiels.

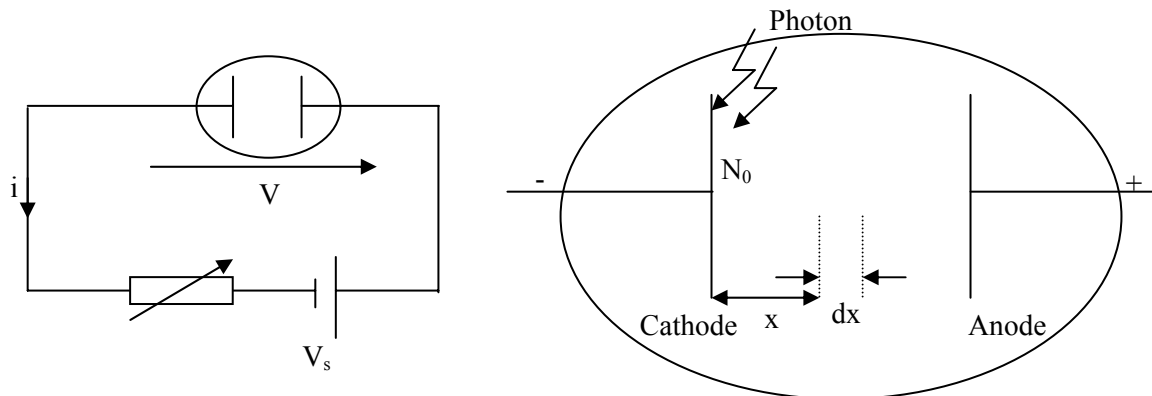


Figure 1.2: Tube à décharge.

En présence d'un champ électrique, l'existence de telle charge entraînera la circulation dans le circuit extérieur d'un courant de faible intensité. Dans le vide ou un gaz sous faible pression, la densité du courant est donnée par la formule de CHILD:

$$J = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \left(\frac{2 \cdot e}{m} \right)^{0.5} \cdot \frac{v^{1.5}}{d^2} \quad (1.8)$$

avec ε_0 : permittivité du vide,

e : charge de l'électron,

m : masse de l'électron,

v : tension appliquée,

d : densité interélectrodes

Cette formule n'est valable que pour $J < J_s$, tel que J_s est la densité du courant de saturation. Dans un gaz sous pression moyenne ou élevée, le mouvement de l'électron est freiné par la présence des molécules. En admettant qu'il n'y a pas création de nouvelles charges, la densité de courant devient :

$$J = \frac{4}{9} \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{v^2}{d^3} \quad (1.9)$$

où ε : la permittivité absolue ;

μ : la mobilité des électrons.

Dans les deux cas, les électrons émis par la cathode n'ont pas d'énergie pour arracher un électron aux molécules de gaz. Au début, le courant croît quasi-linéairement avec la tension appliquée aux électrodes, avant de se stabiliser à la valeur I_0 qui correspond au courant de saturation. Au delà d'une valeur V_2 de la tension appliquée, le courant croît rapidement (figure 1.1).

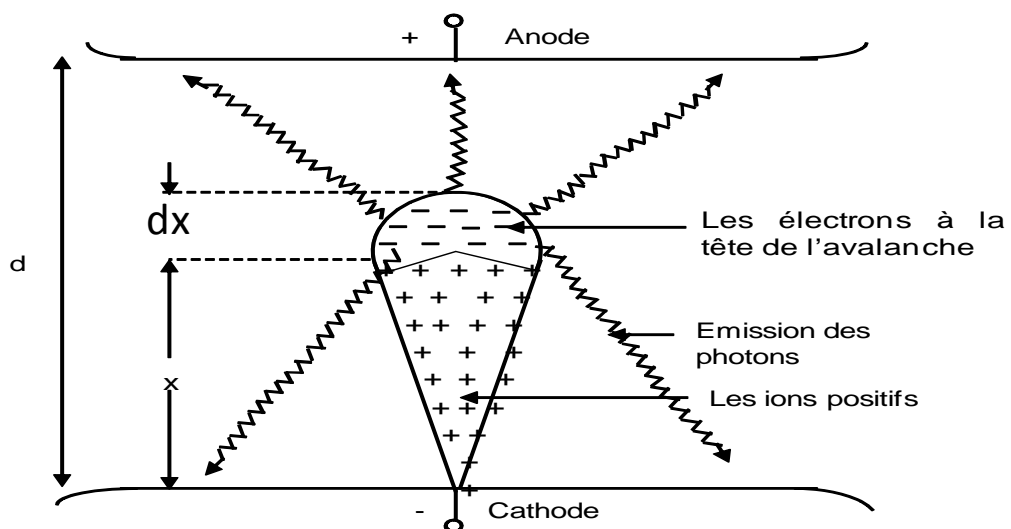


Figure 1.3 : Développement d'une avalanche en électrodes parallèles.

Townsend attribue cette croissance à l'ionisation du gaz par collision d'électrons. En effet, sous un champ électrique suffisamment élevé, les électrons libres quittant la cathode, sont accélérés et acquièrent une énergie cinétique supérieure à l'énergie d'ionisation, suffisante pour provoquer l'ionisation des molécules ou d'atomes neutres du gaz par choc. De nouveaux électrons libres sont ainsi créés, lesquels soumis au même champ, vont également ioniser d'autres molécules et ainsi de suite. Le processus prend une allure d'avalanche dite avalanche électronique.

Pour expliquer la croissance du courant, Townsend a introduit le coefficient d'ionisation α . Soit N le nombre d'électrons produit à une distance x de la cathode, alors entre x et $x+dx$ ils donnent naissance à dN électrons tel que :

$$dN = N \cdot \alpha \cdot dx \quad (1.10)$$

α est le nombre moyen de paires d'ion – électron formés par un électron sur un parcours de 1cm. α est appelé aussi le premier coefficient de Townsend. Il dépend de la nature et de la pression du gaz et du champ local E . En intégrant l'équation (1.10) nous obtenons :

$$N = N_0 \cdot e^{\alpha \cdot x} \quad (1.11)$$

Le courant mesuré à la cathode est donné par :

$$I = I_0 \cdot e^{\alpha \cdot d} \quad (1.12)$$

Les mesures effectuées par Townsend ont montré qu'en réalité le courant électronique croît plus rapidement que celui prévu par la formule précédente. Les travaux qu'il a entrepris, dans ce sens l'ont amené à considérer et à tenir compte de plusieurs effets secondaires. Il explique alors le phénomène par l'émission d'électrons secondaires résultants du bombardement de la cathode par les ions positifs. En effet, l'expérience a montré que la densité de courant de décharge dépend de la nature de la cathode. Townsend définit alors un nouveau coefficient « γ », appelé deuxième coefficient de Townsend. Il est égal au rapport du flux d'électrons secondaires au flux d'ions positifs incidents.

Les N_0 électrons primaires, émis par la cathode donnent naissance à $N_0(e^{\alpha \cdot d} - 1)$ paires d'ions électrons sur leur parcours. Les $N_0(e^{\alpha \cdot d} - 1)$ ions correspondants arrivent à leur tour

sur la cathode et en extraient $\gamma \cdot N_0(e^{\alpha \cdot d} - 1)$ nouveaux électrons qui subiront le même sort que les électrons primaires, le nombre d'électrons parvenant à l'anode devient :

$$N = \frac{N_0 e^{\alpha \cdot d}}{1 - \gamma(e^{\alpha \cdot d} - 1)} \quad (1.13)$$

Et le courant collecté à l'anode s'obtient par la relation suivante :

$$I = I_0 \frac{e^{\alpha \cdot d}}{1 - \gamma(e^{\alpha \cdot d} - 1)} \quad (1.14)$$

Le coefficient d'amplification de l'avalanche électronique M s'écrit :

$$M = \frac{N}{N_0} = \frac{I}{I_0} = \frac{e^{\alpha \cdot d}}{1 - \gamma(e^{\alpha \cdot d} - 1)} \quad (1.15)$$

Le critère de claquage de Townsend se traduit par l'existence d'une distance critique d_c pour laquelle M tend vers l'infini. Ce critère s'écrit :

$$1 - \gamma(e^{\alpha \cdot d_c} - 1) = 0 \quad (1.16)$$

Comme $e^{\alpha \cdot d_c} \gg 1$, l'équation (1.16) devient :

$$\gamma \cdot e^{\alpha \cdot d_c} = 1 \quad (1.17)$$

Dans le cas où le champ électrique dans l'intervalle interélectrodes n'est pas uniforme, le coefficient α n'est plus constant et le critère de claquage de Townsend s'exprime alors par la relation :

$$\gamma \left(e^{\int_0^{d_c} \alpha \cdot dx} - 1 \right) = 1 \quad (1.18)$$

Il y a lieu de noter dans les régions à faibles champ, l'attachement électronique ne peut plus être négligé. Ce phénomène est caractérisé par le coefficient η qui s'oppose au processus α . En présence de l'attachement, on définit un coefficient effectif d'ionisation $\bar{\alpha}$ qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\alpha} = \alpha - \eta \quad (1.19)$$

La décharge de Townsend fait intervenir tout l'espace inter électrode. Cette théorie perd sa validité pour des pressions élevées telle que la pression atmosphérique. En effet, les travaux de Fletcher [7] ont montré qu'à des pressions élevées le temps de formation de la décharge est très inférieur au temps de transit des ions positifs entre les électrodes. Ceci permet donc d'écarter le processus γ du à la cathode. Cependant cette théorie garde sa validité pour des valeurs du produit ($P.d$) inférieures à 200 tors.cm [8].

Dans le cas des fortes pressions, les processus mis en jeu ne sont plus ceux de la décharge de Townsend. Des études utilisant des techniques de photographie ultra-rapide ont conduit à invoquer un nouveau mécanisme de claquage lié à l'existence de dards lumineux ou Streamers.

I.4.2. Notion du Streamers

Un streamer ou dard est un fin canal ionisé qui se forme à partir de l'avalanche primaire, qui va croître vers les deux électrodes. Lorsque la jonction de plasma est faite entre les électrodes, le degré d'ionisation augmente considérablement, ainsi que l'intensité du courant, pour former la décharge étincelle qui a les propriétés physiques d'un arc électronique. Le processus fondamental est donc la transformation de l'avalanche primaire en traceur.

Le streamer ainsi formé se dirige vers la cathode et est dit cathode-directed ou positif. Dans le cas contraire, correspondant à des très fortes tensions et grandes distances inter électrodes on parle d'anode-directed streamer, la situation intermédiaire restant possible. On considère le cas d'une cathode-directed steamer. Lorsque l'avalanche a atteint l'anode, les électrons commencent à plonger dans le métal de l'électrode, les ions positifs forment une charge d'espace importante qui renforce l'effet du champ résultant. On émet alors l'hypothèse que le mécanisme prédominant réside dans la photo-ionisation par des photons énergétiques produits dans l'avalanche par des atomes excités. Les électrons ainsi formés au voisinage de l'avalanche génèrent des avalanches secondaires se dirigeant vers le sillon du nuage sous l'effet du champ résultant décrit précédemment.

Ces nouvelles avalanches rejoignent l'avalanche primaire pour former un plasma quasi-neutre de plus grande étendue dans la direction de la cathode. A cet endroit, des atomes sont excités et les mêmes processus peuvent avoir lieu à nouveau et le steamer croit. Lorsqu'il atteint la cathode un canal de plasma neutre reliant les électrodes s'est formé, se comportant électrostatiquement comme un fil métallique, ce qui a pour effet de diminuer le champ électrique entre les électrodes par polarisation du conducteur. Les avalanches secondaires

dues à la photo-ionisation sont attirées par le canal, ce qui limite sa croissance. Ainsi, la formation du steamer est possible lorsque le champ électrique E' dû à la charge d'espace est plus importante que le champ extérieur, afin que les avalanches secondaires se dirigent vers le sillon, on déduit un critère de formation s'écrivant :

$$E' = \frac{e}{R^2} e^{\alpha(E_0) \cdot x} = E_0 \quad (1.20)$$

Où R : est le rayon de la tête d'avalanche. Pour $x = d$ c'est la distance interélectrode on a le champ E' minimal. En calculant explicitement R , on peut ensuite écrire une forme simplifiée du critère dit condition de claquage de Meek :

$$\alpha \cdot d = 20; N_e = e^{\alpha \cdot d} = 10^8$$

Ces critères sont vérifiés en particulier dans l'air à pression atmosphérique avec d compris entre 1cm et 10cm. Lorsque la photo-ionisation est assez importante, le facteur limitant de la croissance du steamer est la neutralisation de la charge d'espace positive au niveau du sillon. En effet, à cet endroit, l'amplitude du champ est considérablement plus grande que celle du champ extérieur et les électrons se déplacent alors vers l'anode plus rapidement à la vitesse de dérive correspondante. La vitesse de croissance du steamer est de l'ordre de 10^6 m/s, par contre la vitesse de déplacement des électrons sous le champ extérieur est de 10^5 m/s.

I.4.3. Champ seuil de l'effet couronne

Le seuil d'effet couronne est la valeur du champ électrique pour laquelle il y a apparition brusque d'une conductivité de l'air au voisinage immédiat d'un conducteur soumis à une tension croissante pendant longtemps. La loi de Peek de 1929 [9] a été généralement employée pour l'évolution du champ seuil d'effet couronne E_s . Peek observa que l'apparition de la couronne était une fonction du champ superficiel, du rayon du conducteur et de la densité de l'air. Il donna à sa loi la forme empirique suivante :

$$E_s = 3.1 \cdot m \cdot \delta \cdot \left(1 + \frac{0.308}{\sqrt{\delta \cdot R}} \right) \quad (\text{kV/cm}) \quad (1.21)$$

avec m : est un facteur dépendant de l'état de surface de l'électrode active. En particulier

$m = 1$ pour une électrode bien polie ;

R : rayon du conducteur en cm ;

$\delta = \frac{P}{760} \cdot \frac{298}{273 + T}$ est la densité de l'air ;

P : pression de l'air en mm.Hg ;

T : la température de l'air ambiant en °C.

Depuis, de nombreuses formules empiriques est semi-empiriques du champ seuil de l'effet couronne ont été établie par divers auteurs. L'expression du champ seuil E_s est donnée sous la forme générale suivante :

$$E_s = F \cdot \left(1 + \frac{G}{R^\beta} \right) \quad (1.22)$$

où F , G et β : sont des constantes qui diffèrent d'un auteur à l'autre et R est le rayon de l'électrode active.

Un modèle physico-mathématique généralisant la loi de Peek a été établie [9, 10]. Il repose d'une part sur la notion de longueur d'avalanche L_c définie pour la première fois par Nasser et d'autre part sur le critère de Meek [9] et amélioré ultérieurement par Hartmans et Zebboudj [10, 11]. Ces derniers ont supposé qu'à la tête de l'avalanche près de l'anode, les électrons ne peuvent se multiplier en raison des champs E_s et E_ρ du à la charge d'espace qui s'opposent et dont la somme algébrique est égale au champ critique de minimum d'ionisation E_c tel que :

$$E_s + E_\rho = E_c \quad (1.23)$$

L'expression du champ seuil à la surface de l'anode est donnée par :

$$E_s = E_c \cdot \left(1 + \frac{L_c}{R_0} \right) \quad (1.24)$$

Les expressions de E_c et de L_c en fonction de la pression P , de la température T et de l'humidité absolu Ha sont données respectivement par les équations suivantes :

$$E_c(\delta, H_a) = E_c(1,0) \cdot \delta \cdot (1 + \alpha_H \sqrt{H_a}) \quad (1.25)$$

$$L_c(2R_0, \delta, H_a) = L(2R, 1, 0) \cdot \delta^{B_0} \cdot f(H_a) \quad (1.26)$$

avec : $\alpha_H = 16,03 \cdot 10^{-3} \left(\frac{g}{m^3} \right)^{-1/2}$

À partir des équations (1.24), (1.25) et (1.26), l'expression du champ seuil sera sous forme :

$$E_s(2R, \delta, H_a) = E_c(\delta, H_a) \left[1 + \frac{A_0}{2R} \left(\frac{2R e^{\frac{a_0}{2R} + Z_0}}{\delta} \right)^{B_0} \right] \cdot F(H_a) \quad (1.27)$$

$$\text{avec : } f(H_a) = 1 - \left[\left(1 + \frac{1}{\Delta(2R)} \right) (\alpha_H - \beta_{H(2R)}) \right] \sqrt{H_a} \quad (1.28)$$

$E(1,0)$ et $L_c(2R,1,0)$ sont respectivement les valeurs du champ critique du minimum d'ionisation et de la longueur critique de l'avalanche dans les conditions de température et de pression normale ($T = 20 \text{ °C}$ et $P = 760 \text{ mm.Hg}$) et dans l'air sec ($H_a = 0$) :

➤ $E_c(1,0) = 24,68 \text{ kV/cm}$

➤ $L_c(2R,1,0) = \frac{A_0}{2} \left(2 \cdot R \cdot e^{\left(\frac{a_0}{2R}\right)} + Z_0 \right)^{B_0}$

➤ $\Delta(2R) = \frac{A_0}{2R} \left(2 \cdot R \cdot e^{\left(\frac{a_0}{2R}\right)} + Z_0 \right)^{B_0}$

➤ $A_0 = 0.1088$, $B_0 = 0.59$, $a_0 = 3.10^{-6} \text{ m}$, $Z_0 = 17.10^{-6} \text{ m}$, $\alpha_H = 16.03.10^{-3} (\text{g/m}^3)^{-\frac{1}{2}}$

Le coefficient β_H dépend du diamètre de l'électrode active utilisée.

I.5 Les différents types de décharges couronne

En raison de la différence de rayons de courbure des électrodes, le champ électrique dans l'espace interélectrode est fortement non-uniforme, de sorte que l'ionisation de l'air et la génération de particules chargées s'effectuent seulement dans une zone proche de l'électrode de plus faible rayon de courbure. L'évolution spatio-temporelle du champ électrique au sein de l'espace interélectrode montre que cet espace peut être divisé en deux zones distinctes. Chacune d'entre elles est caractérisée par un type d'interactions prépondérant entre les particules chargées et neutres du gaz ionisé (figure 1.4).

Dans la première zone, dite "**d'ionisation**", localisée près de la pointe et assimilée à une sphère de rayon de quelques dizaines de micromètres, le champ électrique présente une amplitude et un gradient élevé ce qui favorise les processus d'ionisation. Les particules formées, en particulier les électrons qui sont plus légers et plus rapides, s'échauffent sous

l'action du champ électrique, et transfèrent de la chaleur aux molécules d'air lors des collisions. Les particules neutres de l'air diffusent alors cette quantité de chaleur sous l'effet de leur agitation thermique.

La seconde zone, dite de "**dérive**", occupe le reste de l'espace interélectrode et le champ électrique y est plus faible et relativement uniforme. Certains électrons issus des processus d'ionisation possèdent une énergie suffisamment élevée pour être éjectés de la zone d'ionisation et traverser l'espace interélectrode. En ce qui concerne les autres électrons, moins énergétiques, la création d'ions négatifs résulte de leur attachement sur les particules neutres. Le terme de "zone unipolaire" peut également être employé car les particules chargées qui circulent dans cette zone sont uniquement de polarité négative. Ces particules dérivent le long des lignes de champ électrique en direction de l'anode plane. En raison de leur inertie, ce sont majoritairement les ions négatifs qui cèdent une quantité de mouvement aux particules neutres lors des nombreuses collisions. Ce phénomène est responsable d'un écoulement global du gaz, qualifié de "vent électrique", dont la vitesse est de l'ordre de quelques mètres par seconde. La zone de dérive peut être assimilée à un volume tronconique. Cette forme en portion de cône s'approche approximativement de celle des lignes de champ électrique sur lesquelles dérivent les particules chargées responsables de l'émission acoustique.

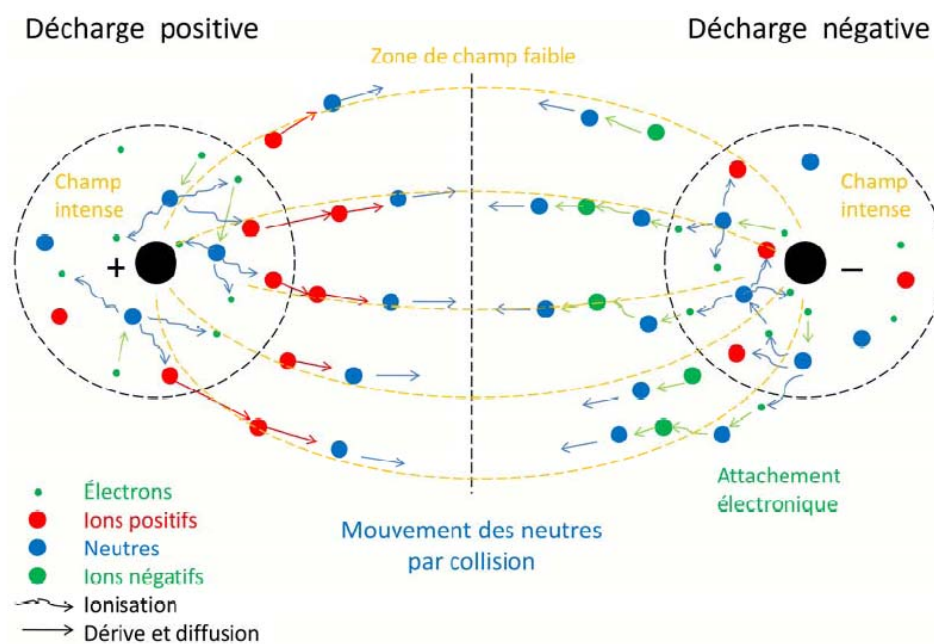


Figure 1.4 Mécanisme de la décharge couronne bipolaire [12]

Dans l'espace interélectrode, les particules chargées (électrons et ions négatifs principalement) interagissent donc avec les molécules neutres de l'air et leur imposent un mouvement (ordonné ou désordonné) par l'intermédiaire de collisions. En modulant électriquement ces interactions, soit par l'intermédiaire d'un courant alternatif qui traverse l'espace interélectrode, soit par une tension alternative appliquée entre les électrodes, il est possible de perturber l'air, et par conséquent de créer une onde acoustique. Pour une configuration géométrique d'électrodes pointe- plan, les deux zones distinctes de l'espace interélectrode précédemment définies sont respectivement associées aux deux différents types d'interactions entre particules chargées et particules neutres responsables de l'émission acoustique (transfert de chaleur et transfert de quantité de mouvement respectivement). Il est alors possible de considérer un mécanisme de transduction propre à chacune des deux régions : une source acoustique de chaleur associée à la zone d'ionisation, d'une part, et une source acoustique de force associée à la zone de dérive, d'autre part.

I.5.1 Décharge couronne positive

La décharge couronne positive est celle qui se produit quand la pointe est portée à un potentiel positif et la plaque à la terre. Dans ce cas, dans la zone de champ intense autour de la pointe, des électrons sont produits par photo-ionisation et sont accélérés vers l'anode (la pointe). Autour de celle-ci, se développe alors une région de forte ionisation : zone en pointillé à la figure (1.5).

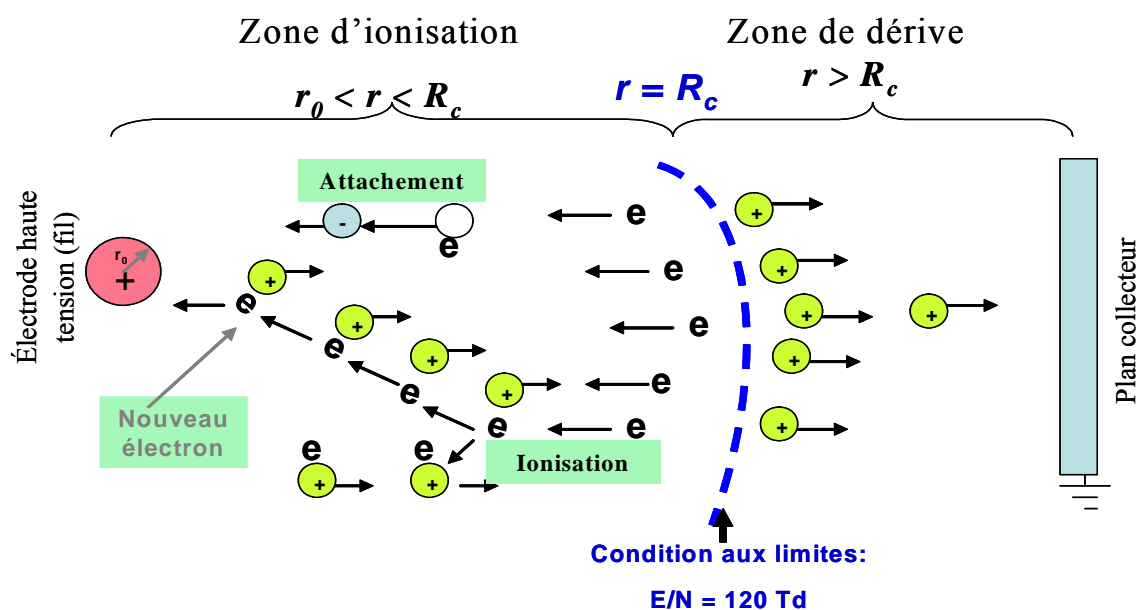


Figure 1.5 Descriptif de la décharge couronne positive [13]

Les ions positifs ainsi créés sont repoussés par l'anode, sous l'effet des forces de Coulomb, jusqu'à une distance de la pointe (inférieur au millimètre) au de là de laquelle le champ électrique trop faible ($< 30 \text{ kV/cm}$ dans l'air à pression atmosphérique) ne permet plus la création d'ions positifs.

Les ions positifs migrent donc vers la cathode (la plaque). Cette zone unipolaire, puisqu'il n'y a que des ions positifs, est appelée région de « dérive ». Pour cette décharge, il y'a avancement de streamers, qui se propage en quelque sorte comme une extension de l'anode. D'après les modélisations de Loiseau *et al.* [14], la décharge est composée d'une phase de propagation du streamer (durée de la propagation de 50 ns à la vitesse de 210 m/s) et d'une phase de restauration pendant laquelle les ions dérivent. Ces deux phases forment un cycle de fréquence de 10 kHz. Le courant de décharge n'est donc pas continu, mais correspond à une succession de phénomènes transitoires.

Goldman *et al.* en 1985 [15] indique qu'un courant positif de $50 \mu\text{A}$ se décomposerait en un courant unipolaire continu de $20 \mu\text{A}$, distribué uniformément à la surface de la cathode, et de streamers contribuant à $30 \mu\text{A}$ percutant la cathode à une fréquence de 10 kHz.

I.5.2 Décharge couronne négative

Dans le cas où la pointe est portée à un potentiel négatif, il y a toujours création d'électrons par photo-ionisation et apparition de la zone d'ionisation autour de la pointe.

Goldman et Sigmond en 1982 [16] expliquent que les ions positifs alors créés reviennent rapidement à la cathode (figure 1.6).

Seuls les ions négatifs créés par attachement dans une zone où le champ est plus faible peuvent migrer vers la plaque. De plus, lorsque la haute tension dépasse un seuil, il y a passage à l'arc. Le courant de cette décharge est du à des impulsions de Trichel où la fréquence qui dépend de la tension appliquée.

Ces impulsions sont régulières et sont dues au champ électrique qui s'affaiblit au voisinage de la cathode. Les ions négatifs empêchent en effet la multiplication des avalanches électroniques. Une fois ces ions migrés vers l'anode, de nouvelles avalanches apparaissent. L'intervalle entre deux pics de courant, impulsions de Trichel, dépend donc du temps nécessaire aux ions négatifs à atteindre l'anode.

Les mécanismes physico-chimiques au sein des décharges couronnes sont assez complexes et sont actuellement étudiés par les physiciens des plasmas, car ils ne sont pas encore totalement connus.

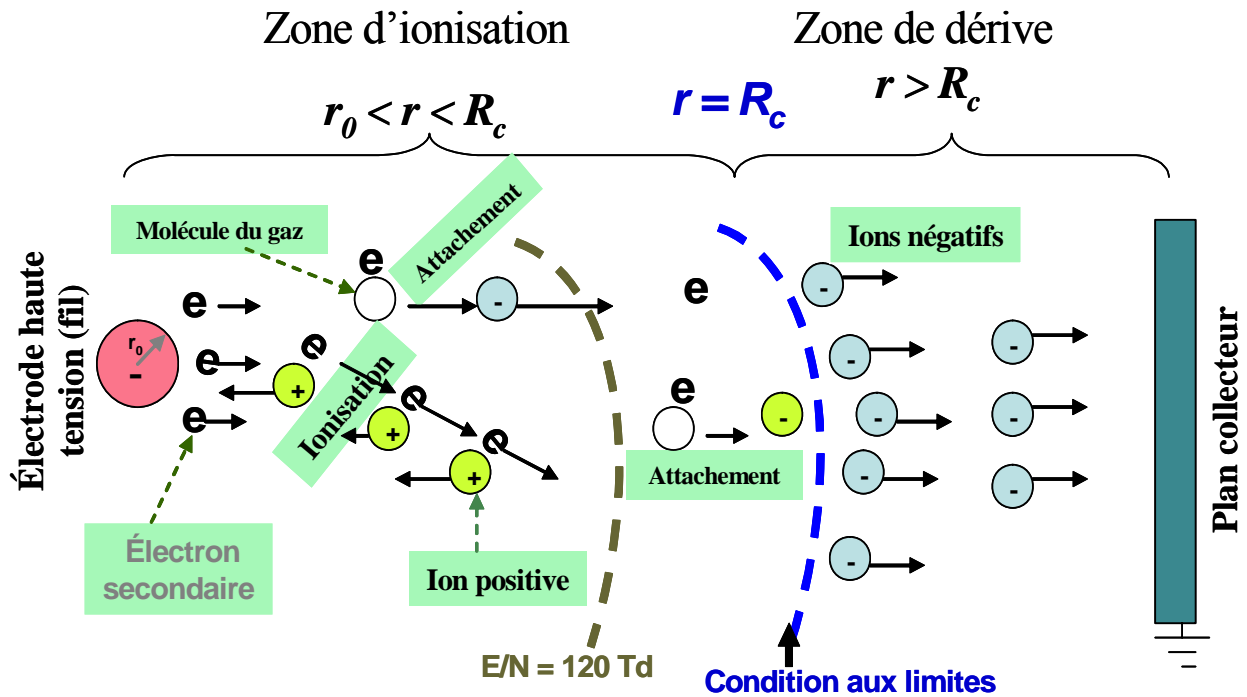


Figure 1.6 Descriptif de la décharge couronne négative [13].

I.5.3 Décharge couronne en régime alternatif

A la place d'un potentiel continu appliqué à la pointe, on peut également y appliquer un signal sinusoïdal à valeur moyenne nulle. Dans ce cas, les processus de la décharge soumise à une excitation alternative sont identiques à ceux décrits pour une excitation continue, dans la mesure où l'intervalle de temps entre les inversions de polarité est suffisamment long pour que toutes les charges résiduelles de l'alternance précédente soient écoulées. Ceci implique l'existence d'une fréquence f et d'une distance inter-électrodes d limites reliées par l'expression suivante [3]:

$$d_{\max} = \frac{\mu E}{\pi f} \Leftrightarrow f = \frac{\mu E}{\pi d_{\max}} \quad (1.29)$$

avec μ la mobilité des ions et E l'amplitude du champ électrique. Si l'excitation est supérieure à cette fréquence f , la charge d'espace va osciller et augmenter à chaque période entre les électrodes. Cet effet cumulatif aura pour conséquence des passages à l'arc pour des potentiels plus faible qu'en continu [5].

Si l'on applique un champ alternatif au gaz plasmagène, alors le comportement du système dépend de la distance interélectrode et de la fréquence de l'alimentation électrique. En effet, si le temps de parcours du gap par le gaz est inférieur au temps d'inversion de la

polarité, alors les charges d'espace créées par une décharge auront quitté l'espace interélectrode avant l'apparition de la décharge suivante. Le comportement élémentaire du système consistera donc en une alternance de décharges positives puis négatives indépendantes.

Si l'on augmente la fréquence du signal électrique, une charge d'espace résiduelle persistera dans l'espace interélectrode, favorisant le déclenchement de la décharge suivante. Ce phénomène peut se traduire par le maintien de la décharge avec une tension d'alimentation légèrement inférieure à la tension de claquage de la décharge. Cette accumulation de charges entraîne aussi une baisse de la tension de passage en régime d'arc.

Le courant de décharge présente trois composantes distinctes : le courant capacitif, le courant synchrone et le courant impulsionnel (figure 1.7). Le courant capacitif est observé lorsque le canal conducteur n'est pas établi. Le gaz qui se trouve dans l'espace interélectrode se comporte alors comme un condensateur (ou "capacité" d'où le nom de ce courant).

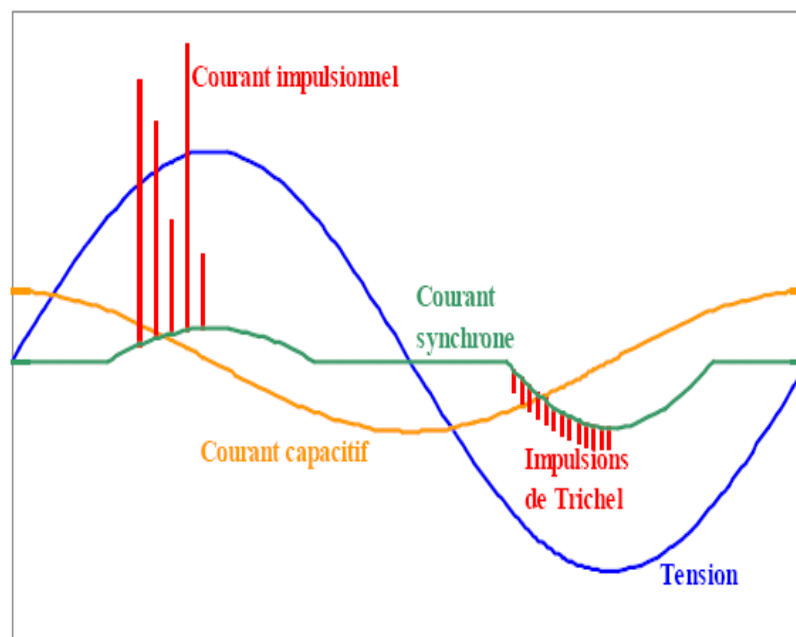


Figure 1.7 : Différentes composantes du courant pour une alimentation électrique alternative en géométrie pointe-plan à pression atmosphérique [4]

Ce courant est proportionnel à la tension appliquée avec laquelle il est déphasé de $\pi/2$: ($I_c = C.dV/dt$, où C désigne la capacité du gaz dans l'espace interélectrode). Le courant synchrone est, comme son nom l'indique, en phase avec la tension. Cette composante,

continue et fluctuante, est due à l'afflux d'espèces chargées contre l'électrode lorsque le champ électrique est élevé. Elle peut représenter, suivant la tension appliquée, la moitié du courant total pendant la demi-période positive et pratiquement la totalité du courant pendant la demi-période négative.

Nous pouvons aussi utiliser des décharges couronnes pulsées. Elles consistent à appliquer des pics de forte tension mais pendant un très court instant ($< 1 \mu\text{s}$) pour limiter le passage à l'arc. Dans ce cas, la valeur moyenne de la tension n'est pas nulle.

I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les phénomènes liés aux décharges électriques. L'étude de ces décharges dans des intervalles d'air présente un intérêt de point de vue technologique. Cette étude des mécanismes de la décharge électrique a montré que le phénomène était d'une très grande complexité. Malgré les grandes avancées effectuées dans les applications, beaucoup de processus physiques fondamentaux sont toujours sujets à des investigations. Les mécanismes de développement de l'avalanche électronique et de propagation des décharges ont été décrits.

Pour rendre compte des aspects de la décharge couronne, on a évoqué le champ seuil déterminé la première fois par Peek et le champ critique du minimum d'ionisation. Un modèle général incluant les paramètres physiques de l'air détermine ses champs, il est applicable en polarité positive. L'étude de ces champs est nécessaire dans le calcul numérique pour déterminer le potentiel à la frontière d'ionisation, mais le modèle décrit n'a pas été vérifié dans le cas de la polarité négative ce qui nous a amené à effectuer des essais de la tension seuil. Le champ critique étant considéré le même pour les deux polarités.

Chapitre II

*Les méthodes numériques en
électromagnétisme*

II.1 Introduction

Les progrès de l'informatique ont permis de développer des méthodes numériques de calcul afin de déterminer de façon précise la distribution du champ et du potentiel électrique [88]. Les méthodes numériques les plus connues et les plus utilisées dans ce type de problème sont donc la méthode des différences finies (MDF), la méthode des éléments finis (MEF), la méthode de simulation de charges (MSC) et la méthode des éléments finis de frontière (MEFF), la méthode des volumes finis (MVF), ... etc.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques méthodes numériques qui permettent de résoudre les équations différentielles gouvernant les phénomènes de l'électrostatique. Nous présenterons en particulier, la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode de simulation de charges et la méthode des éléments finis de frontière.

II.2 La Méthode des différences finies (MDF)

La méthode des différences finies a été, historiquement, la première méthode connue pour calculer sur ordinateur, la solution d'une équation différentielle. Elle consiste à remplacer dans les équations aux dérivées partielles et dans les conditions aux limites, les dérivées par des différences finies calculées sur les noeuds d'un maillage.

Selon l'utilisation des différences à gauche, à droite ou centrée, on obtient différents schémas de discrétisation aux différences finies. Tous ne sont pas équivalents, et une étude fine est nécessaire pour choisir le schéma représentant le meilleur compromis.

La générale de la méthode va nous permettre d'aborder les notions de consistance, de stabilité et de convergence.

- Consistance : une méthode numérique est consistante si l'erreur de discrétisation de l'équation tend vers zéros lorsque le pas de discrétisation tend vers zéros.
- Stabilité : une fois le schéma discret choisi, il va être nécessaire de la résoudre. Le processus de résolution, à la vue des équations sera la plupart du temps itératif. On calculera les valeurs de « Φ » de proche en proche : une valeur donnée de « Φ » sera donc calculée en utilisant le résultat du calcul d'autres valeurs de « Φ ». Les erreurs d'arrondi être inévitables sur machine, la méthode sera stable si ces erreurs ne s'amplifient pas (trop) au cours du calcul.
- Convergence : après s'être assuré que le schéma discret tend vers l'équation, que ce schéma conduit à un calcul stable, on dispose d'une solution. Le schéma utilisé est

dit convergence si sa solution ainsi obtenue tend vers la solution de l'équation de départ, lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéros.

Donc, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence.

II.2.1 Principe de la méthode

La méthode des différences finies a d'abord été appliquée pour résoudre les équations d'élasticité et de mécanique des structures [17]. Plus tard elle a été adaptée à l'électromagnétisme [18]. L'idée de la méthode est de chercher une solution approchée à une équation différentielle. La complexité des géométries fait qu'il est très difficile, le plus souvent impossible de trouver une approximation de la solution dans tout un domaine d'étude. Pour contourner cette difficulté on subdivise le domaine en sous domaines, appelés éléments, sur lesquels il est plus facile de faire l'approximation.

L'idée principale de la MDF est de fournir une approximation des dérivées partielles qui régissent les problèmes par des « différences » entre les valeurs nodales qui sont séparées par une distance finie. Elle est, historiquement, la première méthode connue pour calculer, sur ordinateur, la solution d'une équation différentielle.

La résolution d'une équation par la méthode des différences finies revient à remplacer la recherche d'une solution continue par la solution en un certain nombre de points. Toute distribution de points dans l'espace peut être utilisée. Elle consiste à décomposer le domaine d'étude en une grille rectangulaire uniforme dont chaque nœud est à équidistance de son voisin suivant les axes x et y et en chaque nœud, le système différentiel est satisfait.

L'utilisation d'un maillage régulier permet d'avoir, en tout point, la même forme pour les équations. Le plus simple de ces maillages réguliers est le maillage carré, figure (3.1).

L'équation aux dérivées partielles est alors remplacée par un système d'équations algébriques pour les valeurs nodales. Dans le calcul du potentiel et du champ électrique, ces équations sont linéaires et la solution de chaque valeur nodale est obtenue par itération ou inversion de matrice.

Une illustration de cette présentation est donnée en prenant l'équation de Laplace (2.1) en deux dimensions définie dans le domaine donné sur la figure (2.1).

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

Chaque point est situé sur un des sommets d'un carré. Il existe d'autres maillages réguliers comme le maillage en triangles équilatéraux et en hexagones équi-angulaires [19].

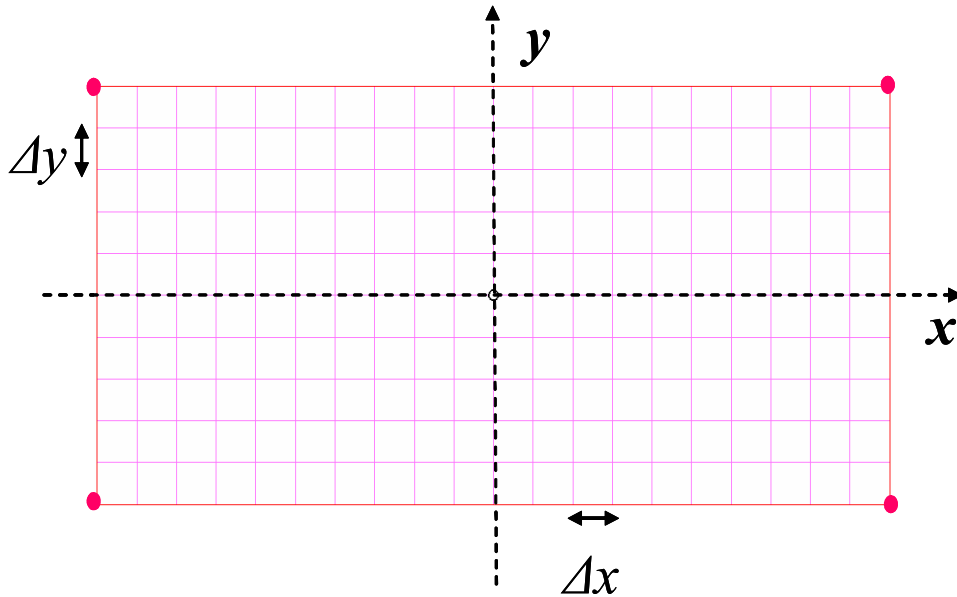


Figure 2.1 Maillage carré

La méthode des différences finies exploite un maillage à pas constant (quelque soit le type de coordonnées utilisées) et propose deux types de solutions : le premier est explicite, c'est à dire que les inconnues aux nœuds du maillage sont données explicitement par les équations. Le deuxième type est implicite, c'est – à – dire les inconnues constituent un système linéaire qu'il convient d'inverser, ce dernier est basé sur une forme matricielle « creuse ». Donc, on peut faire une approximation des opérateurs d'une équation différentielle par des différences finies calculées aux nœuds d'un maillage. Aussi on peut faire une approximation de la fonction inconnue d'une équation différentielle. Cette méthode est connue sous l'appellation de Méthode des Eléments Finis (MEF).

II.2.2 Transformation de l'équation différentielle

Soit les indices i et j , les coordonnées de la position d'un nœud quelconque (figure 2.2) avec $\Delta x = \Delta y = h$ dans le cas d'un maillage carré, et $\Phi_{i,j}$ la valeur du potentiel en ce nœud qui est donné par :

$$\Phi_{i,j} = \Phi(x_0 + i \cdot \Delta x, y_0 + j \cdot \Delta y) \quad (2.2)$$

où x_0 et y_0 représentent les conditions initiales.

Comme sur la figure (2.2), l'approximation algébrique de la dérivée $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est donnée par :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x} \cdot (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}) \quad (2.3)$$

Une approximation similaire donne :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} \cdot (\Phi_{i+1,j} - 2 \cdot \Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}) \quad (2.4)$$

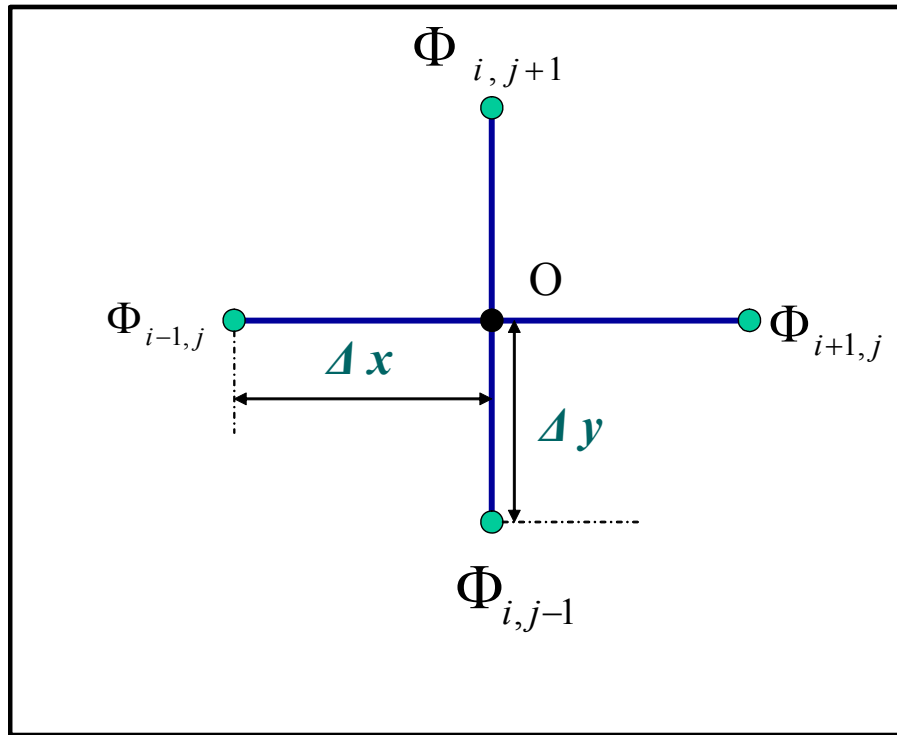


Figure 2.2 Point central et ses voisins

Les expressions (2.3) et (2.4) sont exactes lorsque Δx tend vers 0. Mais dans l'analyse numérique, Δx et Δy sont finis (d'où le terme de différences finies). De manière identique, nous pouvons écrire les expressions équivalentes suivant la direction y , ce qui donne :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cong \frac{1}{\Delta y} \cdot (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cong \frac{1}{\Delta y^2} \cdot (\Phi_{i,j+1} - 2 \cdot \Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}) \quad (2.6)$$

L'utilisation de la notation indicielle permet une programmation et une évaluation directe des expressions ainsi obtenues. Lorsque les équations (2.4) et (2.6) sont substituées dans l'équation de Laplace, nous obtenons la formulation algébrique suivante :

$$2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \right) \Phi_{i,j} \cong \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \cdot (\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1}) \quad (2.7)$$

où $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ dépend du choix de la taille du maillage.

Pour un maillage carré ($\Delta x = \Delta y$), l'équation (2.7) se simplifie comme suit :

$$\Phi_{i,j} \cong \frac{1}{4} \cdot (\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j}) \quad (2.8)$$

On obtient ainsi un système d'équations linéaires implicites lorsque les formulations analytiques sont considérées à chaque nœud. À partir du système d'équations, on obtient un système algébrique qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[A]\{\Phi\} = \{B\} \quad (3.9)$$

où $\{\Phi\}$ est le vecteur forme par les inconnues en potentiel de tous points intérieurs au domaine et $\{B\}$ le vecteur des conditions aux limites. La résolution du système (2.9) permet ainsi d'évaluer le potentiel en chacun des nœuds.

II.2.3 Avantages de la MDF

- ❖ La méthode des différences finies est une méthode simple à appliquer lorsque la géométrie le permet et c'est une méthode raisonnablement exacte.
- ❖ De plus, elle se programme facilement et nécessite peu de mémoire pour le stockage des données.

II.2.4 Inconvénients de la MDF :

- ❖ Lorsque la géométrie est de frontière courbe, le schéma ne peut s'appliquer près des frontières irrégulières et donc cette méthode devient difficilement applicable. On doit alors rechercher à la place une méthode qui est valide indépendamment de la géométrie.
- ❖ Elle n'est pas applicable pour des problèmes en 3 dimensions.
- ❖ Cette méthode nécessite la connaissance, sur toute la frontière entourant le domaine étudié, du potentiel, ce qui n'est pas toujours le cas en général.

II.3 La méthode des éléments finis (MEF)

La MEF, outil numérique très puissant, est beaucoup utilisé dans la résolution des problèmes à domaine spatial fini, surtout en mécanique où elle a connu son plus fort développement. Cette méthode a été appliquée avec succès dans les problèmes de calcul de potentiel et de champs électriques [20].

L'idée de cette méthode est de chercher une solution approchée à une équation différentielle après une reformulation sous forme d'identité intégrale appelée forme faible ou

variationnelle. Au lieu de rechercher à satisfaire l'équation aux nœuds, nous décomposons ici le domaine en sous domaines appelés éléments finis, et nous imposons la satisfaction des équations par sous domaine. L'introduction d'une approximation locale par sous domaine (dit élément fini), permet de contourner le problème de complexité des géométries car il suffit alors de choisir une approximation ou une décomposition (maillage) qui respecte la géométrie.

II.3.1 Principe de la méthode

La MEF repose sur deux principes : d'une part, la formulation d'un problème approché par la méthode de Galerkin, qui permet de remplacer un problème posé en dimension infinie par un système linéaire. D'autre part, la construction d'un espace d'approximation (de dimension finie) à l'aide d'un maillage, de fonctions polynomiales par morceaux et de degré de liberté sur chaque maille.

La première étape dans la construction de l'espace d'approximation S_b , consiste à mailler l'intervalle Ω en une dimension d'espace (figure 2.3). Un maillage $\Omega =]a_k, b_k[$ est une collection indexée d'intervalle $\{I_i = [x_{1,i}, x_{2,i}]\}_{1 \leq i \leq N_{ma}}$ tous de mesure non nulle et formant une partition de Ω .

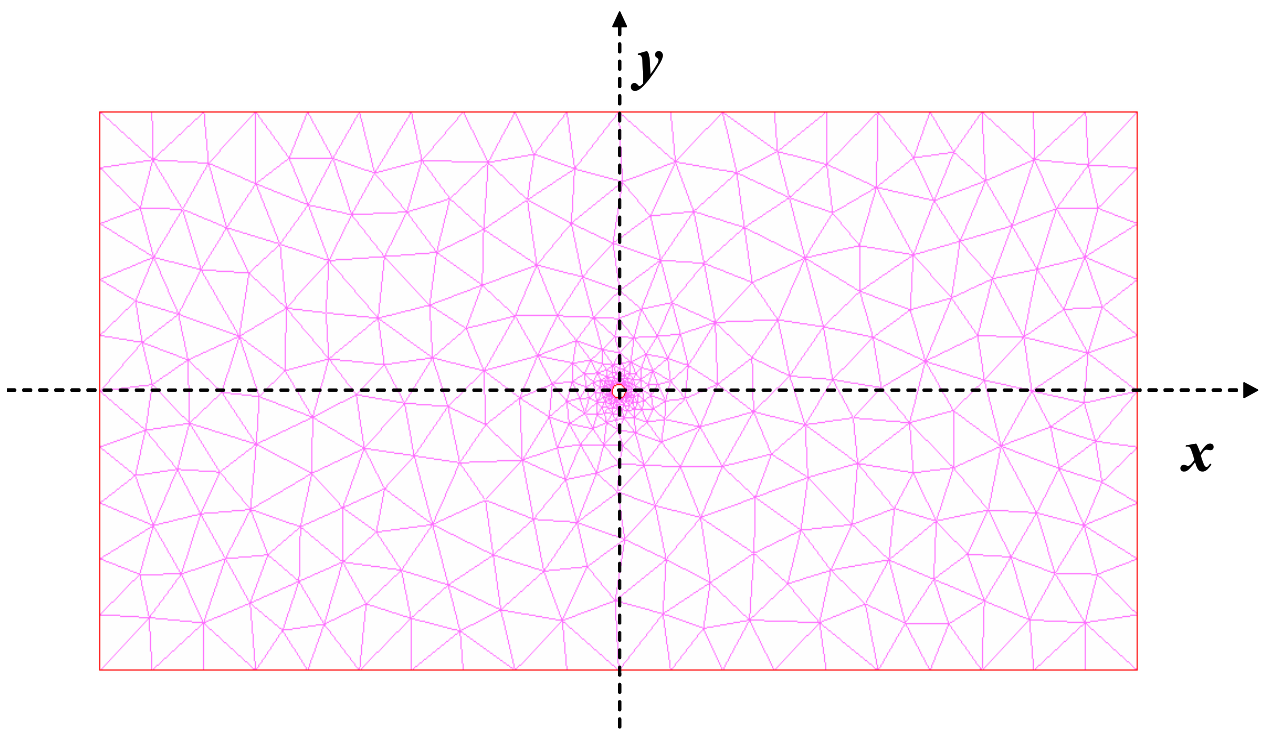


Figure 2.3 Le maillage en éléments finis triangulaires

En d'autres termes nous avons :

$$]a_k, b_k[= \bigcup_{i=1}^{N_{ma}}]x_{1,i}, x_{2,i}[\text{ et }]x_{1,i}, x_{2,i}[\cap]x_{1,j}, x_{2,j}[= \Phi \text{ pour } i \neq j \quad (2.10)$$

Les intervalles I_i sont appelés les mailles (ou les éléments ou les cellules de maillage), et l'entier N_{ma} désigné le nombre totale de mailles.

La façon la plus simple de construire un maillage est de choisir $(N_{ma} + 1)$ points distincts de Ω tels que :

$$a_k = x_1 < x_2 < \dots < x_{N_{ma}} < x_{N_{ma}+1} = b_i \quad (2.11)$$

et de poser $x_{1,i} = x_i$ et $x_{2,j} = x_j$ pour tout $i \in \{1 \dots N_{ma}\}$. Les points de l'ensemble $\{x_1 \dots x_{N_{ma}+1}\}$ sont appelés les sommets du maillage. Nous désignons par N_{s0} le nombre de sommets du maillage en une dimension d'espace. On a donc :

$$N_{s0} = N_{ma} + 1 \quad (2.12)$$

Le maillage est à priori de pas variable, on pose pour tout $i \in \{1 \dots N_{ma}\}$:

$$b_i = x_{N_{ma}+1} - x_i \quad \text{et} \quad b_k = \text{MAX}_{1 \leq i \leq N_{ma}} b_i \quad (2.13)$$

On dit que le maillage est uniforme lorsque $b_k = b_i$ pour tout $i \in \{1 \dots N_{ma}\}$ par la suite, le maillage est désigné sous la forme $T_b = \{I_i\}_{1 \leq i \leq N_{ma}}$.

La deuxième étape dans la construction de l'espace d'approximation consiste à choisir des fonctions de forme sur chaque maille, en d'autre termes, les fonctions de S_b sont telles que leur restriction à chaque maille $I_i \in T_b$ et dans tel espace polynomial.

Ces fonctions d'interpolation permettent alors de donner une approximation du potentiel Φ , notée $\tilde{\Phi}$, sur chaque élément en fonction de ses valeurs aux nœuds de l'élément comme suit :

$$\tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{N_e} N_i \Phi_i \quad (2.14)$$

Avec N_e le nombre de nœuds d'interpolation, N_i les fonctions d'interpolation et Φ_i les valeurs nodales du potentiel.

Pour illustrer le principe de la MEF, on reprend l'exemple de l'équation de Laplace (2.1) en deux dimensions définie dans le domaine donné. Et on recherche à minimiser la quantité R_M telle que :

$$R_M = (\nabla^2 \tilde{\Phi}) \quad (2.15)$$

Parmi toutes les méthodes qui permettent d'annuler une grandeur dans un domaine Ω , la méthode des résidus pondérés est bien connue et souvent utilisée. Elle consiste à choisir un ensemble de fonctions linéairement indépendantes W_n , appelées fonctions de projection, et annuler ainsi toutes les intégrales (2.15) sur chacun des éléments finis [21].

$$I_n = \int_{\Omega} W_n R d\Omega \quad (2.16)$$

L'intégration par partie de l'équation (2.16) donne :

$$I_n = - \int_{\Omega_e} \text{grad} \tilde{\Phi} \cdot \text{grad} W_n d\Omega + \int_{S_e} (\text{grad} \tilde{\Phi} \cdot \vec{n}) W_n dS_e \quad (2.17)$$

Pour chaque élément, on annule les n intégrales I_n (2.17) qui correspondent aux n fonctions de projection. On obtient un ensemble de n équations à n inconnues formant ainsi un système élémentaire pouvant s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[A_e] \{\Phi_e\} = \{b_e\} \quad (2.18)$$

avec $[A_e]$: est la matrice associée à l'élément considéré ;

$\{\Phi_e\}$: ses composantes sont les inconnues du potentiel aux nœuds du même élément ;

$\{b_e\}$: est le vecteur qui tient compte des éventuelles conditions aux limites présentées sur certains nœuds de l'élément considéré.

La résolution du système final est simple puisque les équations obtenues sont linéaires et les matrices ainsi formées sont symétriques. Pour déterminer la distribution du champ électrique, il faut calculer la dérivée du potentiel par une méthode numérique adaptée. Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède donc par les étapes successives suivantes (figure 2.4) :

1. On pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivés partielles à satisfaire en tout point d'un domaine Ω , avec des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$ nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.
2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : C'est la formulation variationnelle du problème.

3. On divise Ω en sous domaines : C'est le *maillage*. Les sous domaines sont appelés *mailles*.
4. On choisit la famille de champs locaux, c'est à dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée *élément*.
5. On ramène le problème à un problème discret : C'est la *discrétisation*. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux noeuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée.
6. On résout le problème discret: C'est la *résolution*
7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs : C'est le *post-traitement*.
8. On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et juger si elle satisfait les critères du cahier des charges : C'est *l'exploitation des résultats*.

Les étapes 1, 2, 3,4 et 5 sont souvent rassemblées sous le nom de *prétraitement*.

La méthode des éléments finis utilise des approximations simples à variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Les noeuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation. L'approximation peut fournir une solution approchée en tout point (x, y) d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points et une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles. Lorsque la frontière du domaine est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée "erreur de discrétisation géométrique". Elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments.

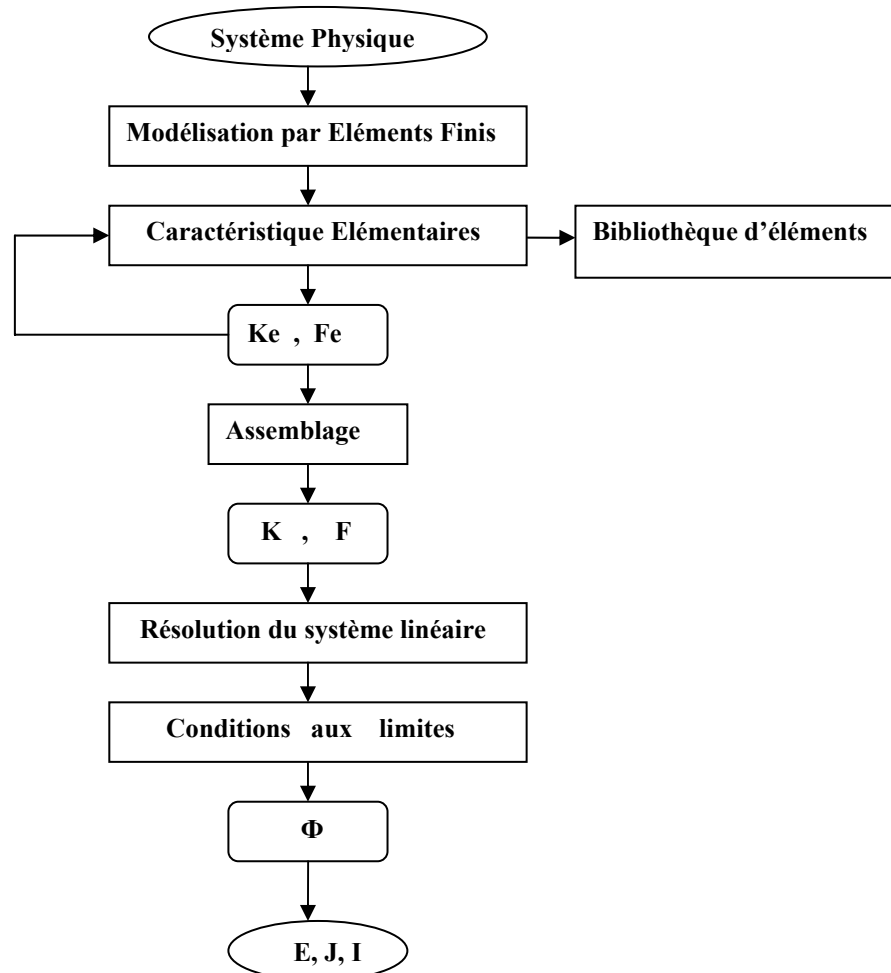


Figure 2.4 Organigramme simplifié de l'analyse par la méthode des éléments finis.

II.3.2 Définition des mailles de référence

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence (fig.2.5) : un élément de référence Ω^r est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel Ω^e par une transformation géométrique. Cette transformation dépend de la forme et de la position de l'élément réel.

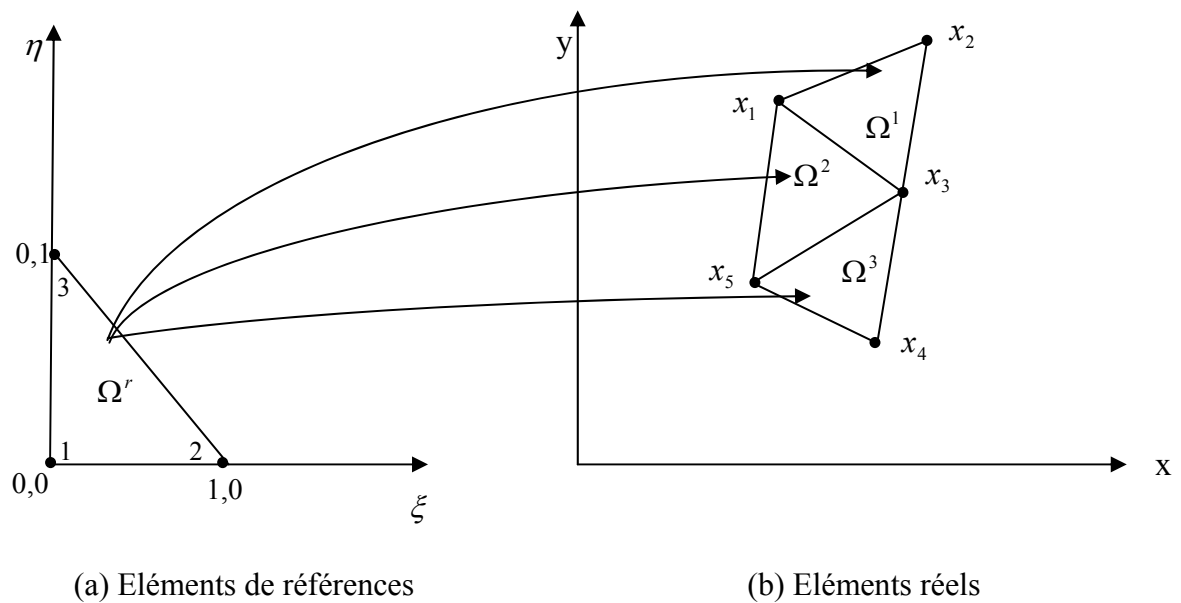


Figure 2.5 Relation entre l'élément réel et l'élément de référence

Chaque transformation est choisie de manière à présenter les propriétés suivantes :

- Elle est bijective en tout point situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière : à tout point de Ω^r .
- Les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds de l'élément réel.
- Chaque portion de frontière de l'élément de référence, définie par les nœuds géométriques de cette frontière, correspond à la portion de frontière de l'élément réel définie par nœuds correspondants.

Soulignons que même l'élément de référence Ω^r (par exemple un triangle à 3 nœuds) se transforme en éléments réels Ω^e de même type par des transformations différentes (fig. 2.5). Nous présentons ci-dessous la forme et la définition analytique des éléments de référence correspondant aux éléments classiques. Dans un maillage, toutes les mailles ont des formes et des dimensions différentes. On trouve des mailles linéiques, des mailles surfaciques et des mailles volumiques de toutes formes et de toutes tailles. Dans le but d'uniformiser et d'automatiser les calculs, on introduit la notion de maille de référence. Nous ne donnons ici que les mailles les plus classiques. Par convention généralement admise.

✚ La maille de référence linéique est le segment (figure 2.6) :

$$x_1 \in [-1,1]$$

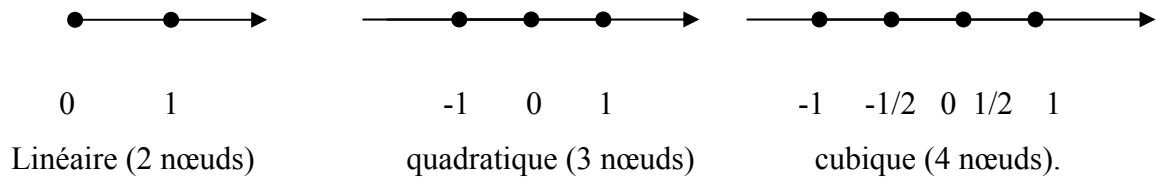


Figure 2.6 Eléments de referens à une dimension

✚ La maille de référence surfacique triangulaire est le triangle (figure 2.7):

$$x_1 \geq 0 ; \quad x_2 \geq 0 ; \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

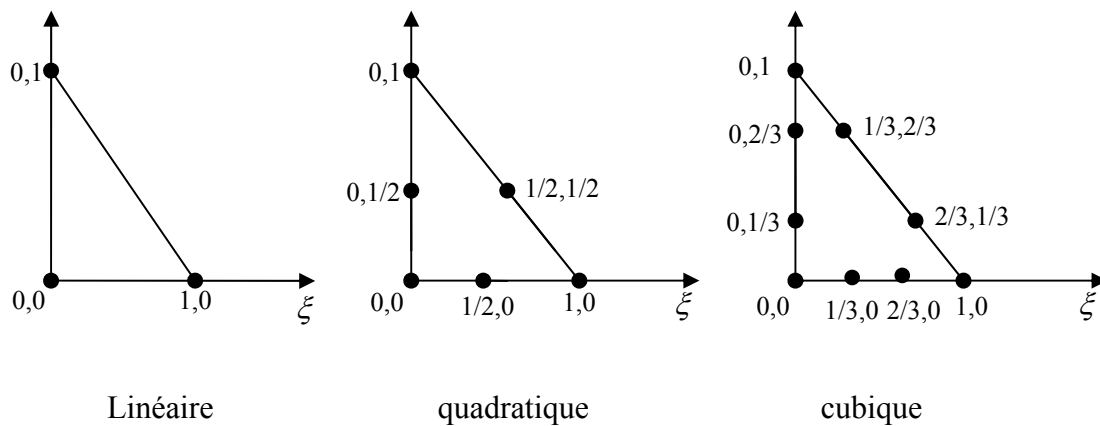


Figure 2.7 Eléments de referens triangulaires

✚ La maille de référence surfacique quadrangulaire est le carré (figure 2.8):

$$x_1 \in [-1,1] ; \quad x_2 \in [-1,1]$$

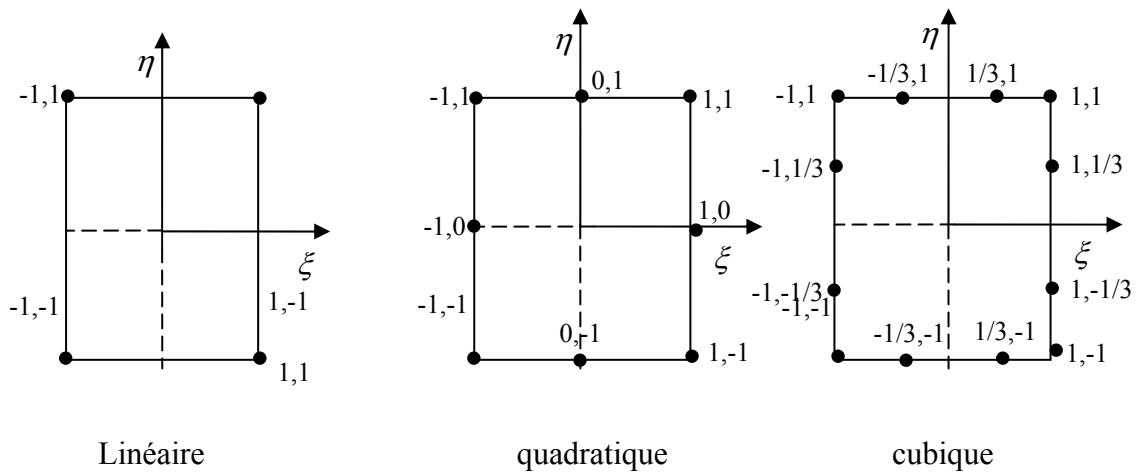


Figure 2.8 Eléments de références carrés

✚ La maille de référence volumique tétraédrique est le tétraèdre (figure 2.9):

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 ; x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

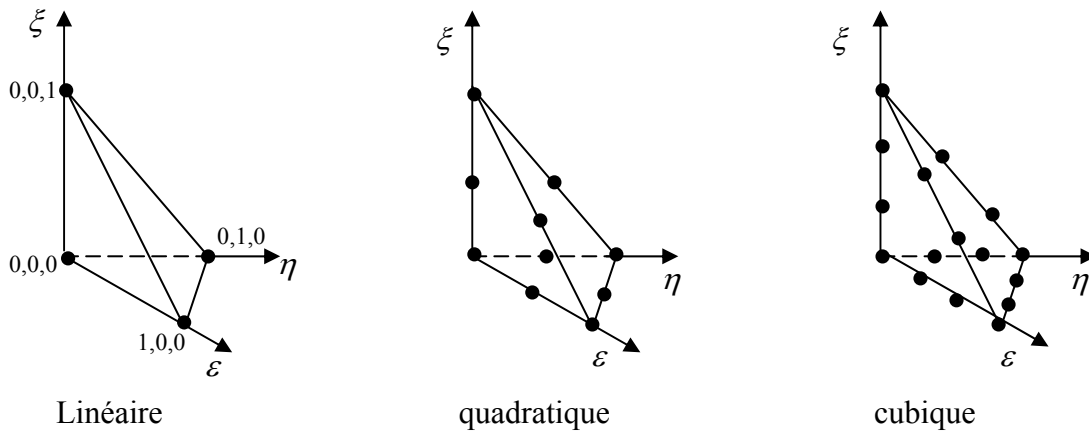


Figure 2.9 Eléments de référence tétraédrique

✚ La maille de référence volumique hexaédrique est le cube (figure 2.10):

$$x_1 \in [-1,1] ; x_2 \in [-1,1] ; x_3 \in [-1,1]$$

Où x_1, x_2 et x_3 sont les coordonnées d'un point courant m de la maille de référence.

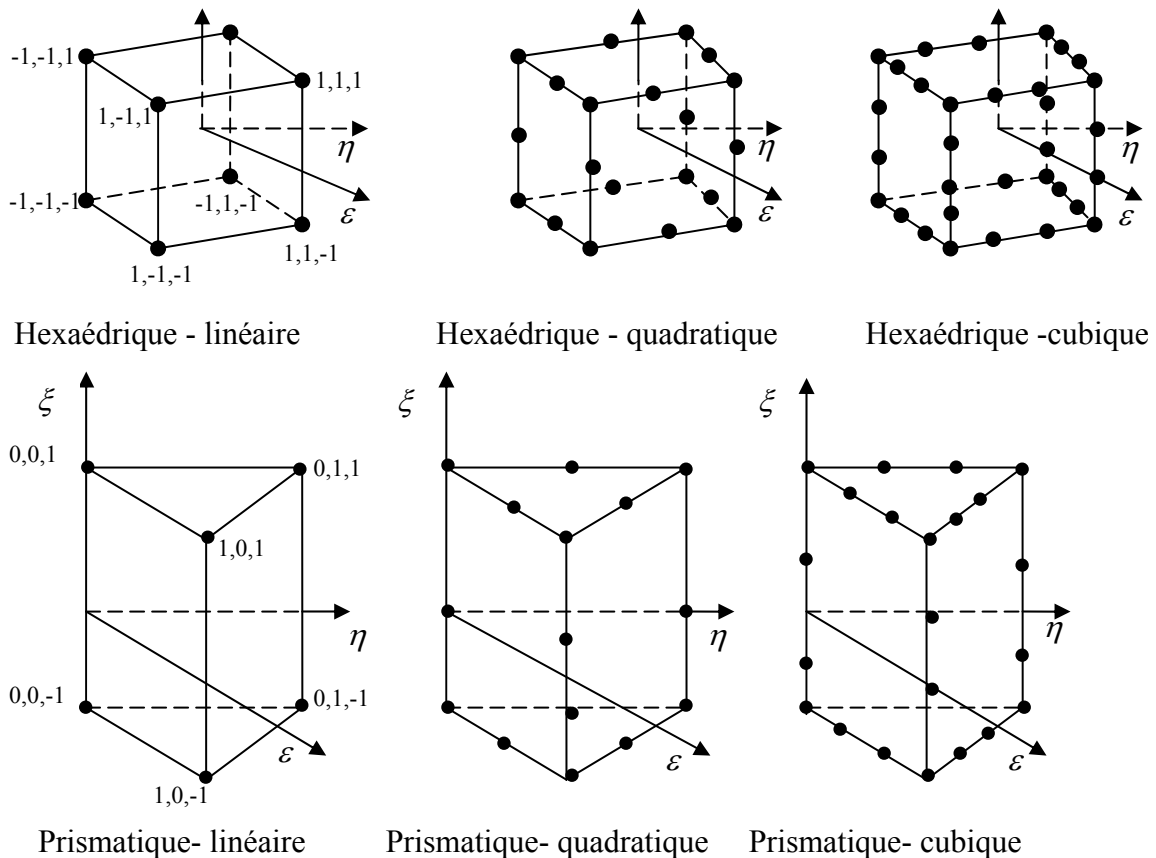


Figure 2.10 La maille de référence volumique hexaédrique

II.3.3 Interpolation polynomiale sur les mailles de référence

Les concepts de transformation géométrique et d'élément de référence simplifient la construction des fonctions d'interpolation pour des éléments de formes compliquées. Les fonctions $\Phi(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont souvent choisies de manière à être faciles à évoluer sur ordinateur, à intégrer ou dériver explicitement. Ainsi l'approximation peut fournir :

- Une expression approchée en tout point (x, y) d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points ;
- Une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles.

Le polynôme d'interpolation d'ordre n à deux dimensions, est donné sous la forme [22]:

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + \dots + a_{2n+1}y^n \tag{2.19}$$

Pour $n=1$, nous avons l'équation d'interpolation linéaire suivante (fig. 2.11) :

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.20)$$

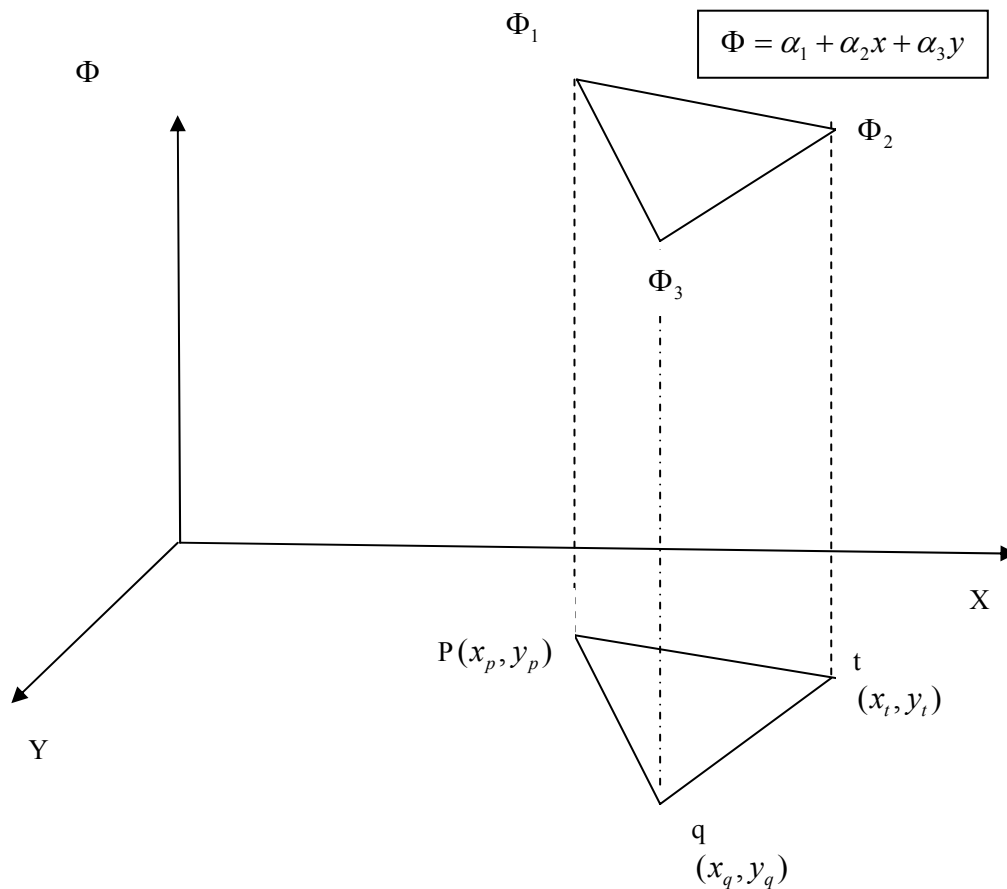


Figure 2.11 Paramètres de l'élément triangulaire linéaire

Pour $n=2$, nous avons l'équation d'interpolation quadratique sous la forme :

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy. \quad (2.21)$$

Pour notre cas, nous utilisons l'élément triangulaire comme élément de référence. Alors nous pouvons utiliser une équation d'interpolation linéaire de premier ordre.

II.3.4 Avantages de la MEF

- ❖ La flexibilité est l'un des plus importants avantages de la MEF. Les éléments peuvent avoir plusieurs formes variées et peuvent donc s'adapter facilement à n'importe quelles formes géométriques complexes et aussi tenir compte des propriétés inhomogènes et non linéaires des matériaux.

- ❖ La programmation de la méthode est assez simple surtout lorsqu'il s'agit de tenir compte de l'introduction des conditions aux limites.
- ❖ La MEF a fait ses preuves dans beaucoup de domaine en ingénierie. De plus, avec son développement important, il existe de très bons logiciels commerciaux qui sont basés sur cette méthode et qui la rendent très accessible. Et par conséquent, elle est applicable à beaucoup de problèmes sans que nous connaissions nécessairement la MEF en détail.
- ❖ Les matrices formant le système final d'équations sont symétriques ce qui simplifie grandement la résolution de celui ci.

II.3.5 Inconvénients de la MEF

- ❖ L'utilisation de la MEF pour la résolution d'un problème donné, nécessite la connaissance parfaite de la géométrie du problème mais aussi des conditions aux limites, ce qui n'est pas toujours le cas.
- ❖ Une fois le potentiel connu en chaque nœud, il faut procéder à un autre calcul numérique pour déterminer le champ électrique en tout point. Ce qui peut engendrer d'autres erreurs.
- ❖ Il a été dit que la MEF était une méthode flexible car elle s'adapte facilement aux différentes géométries, mais ce n'est pas le cas du maillage car celui ci doit être entièrement refait si une modification sur une partie de la géométrie du problème considéré intervient.

II.4 La méthode des éléments finis de frontière (MEFF)

On utilise cette méthode dans les problèmes de calcul de potentiel et de champ électrique. On trouve deux formulations différentes pour la MEFF : la formulation indirecte et la formulation directe. Pour la formulation directe, on évalue directement le potentiel et le champ électrique normal. Pour la formulation indirecte, la distribution de charges est évaluée dans un premier temps et en déduit ensuite le potentiel et le champ électrique [23].

II.4.1 Formulation indirecte de la MEFF :

Une expression par formulation indirecte peut être obtenue si les conditions aux frontières peuvent s'exprimer sous forme de potentiel de simple couche en tout point. Pour la formulation indirecte, nous avons l'équation suivante :

$$\Phi = \int_s \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} G dS \quad (2.22)$$

où ρ_s est la distribution de charges surfaciques et G la fonction de Green.

En prenant la dérivée de l'équation (2.22) suivant la normale n , nous obtenons:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \int_s \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (2.23)$$

Soit un point situé sur une surface diélectrique – diélectrique Γ_{ij} où la normale n est dirigée du diélectrique (i) vers le diélectrique (j). En considérant un point appartenant au diélectrique (j) et approchant la surface Γ_{ij} le long de la normale n , nous obtenons :

$$\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j = -\frac{1}{2} \rho_s + \int_{\Gamma} \rho_s \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \quad (2.24)$$

En répétant le procédé pour un point appartenant au diélectrique (i), on obtient :

$$\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i = +\frac{1}{2} \rho_s + \int_{\Gamma} \rho_s \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \quad (2.25)$$

Le terme $\pm \frac{1}{2} \rho_s$ de (2.24) et (2.25) est dû à la discontinuité de la composante normale du champ électrique $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ à travers l'interface Γ_{ij} à cause de la présence des charges de polarisation.

En multipliant (2.24) par ε_j et (2.25) par ε_i (ε_j et ε_i : permittivités respectives), en les additionnant, on obtient donc :

$$\rho_s = -2 \left(\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \right) \int_{\Gamma} \rho_s \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) est valide pour tous les points situés sur l'interface diélectrique – diélectrique. Donc, pour les points situés sur les électrodes, on utilise l'équation suivante :

$$V_i = \int_{\Gamma} \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} G d\Gamma \quad (2.27)$$

Les équations (2.26) et (2.27) permettent de calculer la densité de charges équivalentes à la surface des conducteurs et du diélectrique.

En fin, nous pouvons dire que la résolution des équations intégrales (formulation directe ou indirecte) se fait par la méthode des éléments finis sur la frontière du domaine étudié. La frontière est discrétisée en éléments géométriques par une méthode numérique, en général par quadrature de Gauss.

II.4.2 Formulation directe de la MEFF :

Résoudre l'équation (2.1) revient à inverser l'opérateur Laplacien. Cette inversion se fait en utilisant la méthode de l'identité de Green. On transforme l'équation de Laplace en une équation intégrale qui lie la valeur du potentiel $\Phi(P)$ en un point P à l'intérieur du domaine Ω , à la valeur du potentiel Φ et sa dérivée normale $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ sur l'ensemble des points de sa frontière Γ .

Le potentiel $\Phi^*(P)$ créé en un point p appartenant à un domaine Ω par une charge unitaire placée en un point M est solution de l'équation :

$$\nabla^2\Phi^*(P) = \delta(M, P) \quad (2.28)$$

avec $\delta(M, P)$ défini comme suit :

$$\delta(M, P) = \begin{cases} 1: P = M \\ 0: P \neq M. \end{cases} \quad (2.29)$$

C'est la solution de l'équation (2.28) qu'on appelle fonction de Green $G (=G(M, P))$ de l'équation de Laplace. Sa valeur est égale à $G = \frac{1}{4\pi R}$ en 3D et $G = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{R}\right)$ en 2D avec R la distance entre les points M et P ($R = |PM|$).

II.4.3 Avantages de la MEFF:

- ❖ La transformation des équations aux dérivées partielles en équations intégrales réduit la dimension du problème en un ou en deux si le problème présente une symétrie de révolution.
- ❖ La discrétisation du milieu infini ne cause plus de problème puisque tout est ramené sur la frontière du milieu étudié.
- ❖ Les inconnues du problème (c'est à dire le potentiel et sa dérivée normale) peuvent être évaluées soit sur la frontière du domaine, soit à l'intérieur de celui-ci, et de plus, elles sont calculées avec le même niveau d'erreur. Cette méthode donne plus grande précision par rapport aux autres méthodes.

- ❖ La modification au niveau de la géométrie intervient, il n'est pas nécessaire de reconsidérer tout le maillage comme pour la MEF. Il suffit de modifier les paramètres de la portion de la frontière considérée.

II.4.4 Inconvénients de la MEFF :

- ❖ La méthode indirecte ne permet pas de calculer directement le potentiel et le champ électrique. Cela nécessite donc des calculs supplémentaires qui peuvent s'avérer coûteux pour des problèmes de grandes tailles.
- ❖ L'extension de la MEFF aux problèmes non linéaires est difficile car dans ces conditions, on doit discrétiser la totalité du domaine où se produit la non linéarité matérielle ou géométrique, perdant ainsi l'avantage de la MEFF d'une discrétisation de la frontière uniquement.

II.5 La méthode de Simulation de Charges (MSC)

II.5.1 Le principe de la MSC

Dans la MSC, le champ électrique est simulé par un champ électrique engendré par un nombre de charges discrètes, qui sont placées en dehors de la région dans laquelle le champ électrique doit être calculé. Les valeurs affectées aux charges discrètes sont déterminées par la satisfaction des conditions aux limites à des points de contour bien déterminés [24].

Donc, le principe de base de cette méthode est simple. Il y a plusieurs charges discrètes de formes différentes sont présentés dans une région, le potentiel électrostatique, à n'importe quel point (x_i, y_i) appartenant à cette région, peut être déterminé par la sommation des potentiel résultant des charges ponctuelles tant que le point (x_i, y_i) n'est pas situé sur aucune charge ponctuelle. L'équation prend la forme suivante :

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot Q_j \quad (2.30)$$

où : C_{ij} : représente le coefficient de potentiel, dépendant du type de charges utilisées et qui peut être évalué analytiquement par résolution de l'équation de Laplace ou de Poisson ;

Q_j : représente la charge ponctuelle au point (x_j, y_j) .

Dans la MSC, les charges de simulation sont placées à l'extérieur de l'espace dans lequel on veut connaître le champ électrique. Si le point (x_i, y_i) est situé sur la surface d'un

conducteur, alors Φ_i en ce point sera égal au potentiel du conducteur. Lorsque cette procédure est appliquée à m points situés sur le contour de l'espace considéré, nous obtenons un système de m équations linéaires pour n charges connues, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ Q_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \cdot \\ \Phi_m \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Le choix du type de charges dans l'utilisation de la MSC est un facteur très important. De manière générale, les types de charges les plus couramment utilisés sont les charges ponctuelles, les lignes chargées de longueur infinie ou semi-finie et les charges en anneau. Ces nouveaux types de charges de simulation incluent des cylindres elliptiques, des charges sphéroïdales, des disques chargés, des charges de volume, etc. Dans le but d'utiliser les différents types de charge de simulation, il est essentiel de déterminer les coefficients de champ et de potentiel associés à chaque type de charges. Donc, pour des configurations de charges plus compliquées, les différents coefficients doivent être déterminés numériquement.

Il est possible d'utiliser une configuration de charges complexes afin de réduire le nombre de charges utilisées pour un problème donné et ainsi diminuer le temps de calcul. L'utilisation de charges complexes peut être recommandée pour :

- Calculer le champ électrique dans des problèmes à plusieurs diélectriques ;
- Réduire le nombre de charges de simulation et la taille du système d'équations ;
- Modéliser des problèmes à trois dimensions présentant des symétries ou non ;
- Modéliser des systèmes avec des électrodes fines.

II.5.2 Avantages de la MSC

- ❖ La MSC permet de calculer le champ électrique et le potentiel pour des problèmes à plusieurs diélectriques présentant des formes géométriques complexes (comme par exemple les isolateurs haute tension) ;
- ❖ Elle n'exige aucune discrétisation du domaine d'étude, c'est-à-dire, on travaille au voisinage de la frontière de cette dernière ;
- ❖ Le grand intérêt porté à cette méthode pour les problèmes de calcul de champ électrique a permis à celle-ci d'acquérir une grande notoriété, ce qui lui permet d'être soumise à diverses améliorations pour la rendre encore plus efficace et précise.

II.5.3 Inconvénients de la MSC

- ❖ La MSC est une méthode numérique d'expression simple, mais leur application est très difficile. La précision requise dépend de nombreux paramètres (type de charges, leur localisation, ...etc.). Il est donc nécessaire d'effectuer un nombre assez important d'essais par itération ou d'utiliser des procédés d'optimisation afin d'atteindre la précision désirée. Ceci agit par conséquent sur le temps de calcul qui devient de plus en plus long en fonction de la complexité du problème à traiter ;
- ❖ Lorsque le problème à étudier présente plus de deux diélectriques, l'utilisation de MSC devient alors complexe et la programmation d'un tel modèle s'en trouve détériorée.

II.6 Conclusion

Le calcul des différents paramètres de la décharge couronne dans un précipitateur électrostatique d'aérosols passe par la résolution de l'équation de Poisson ou de Laplace. Il s'agit donc de la détermination de la répartition spatiale du champ électrostatique (E) du potentiel (Φ), de la densité de charge (ρ) et de la densité de courant (J) en fonction de la répartition connue des charges et des conditions aux limites, c'est à dire de la répartition donnée du potentiel sur les surfaces limitant le volume pour lequel le champ est calculé. Le calcul du champ peut être effectué par plusieurs méthodes: analytiques, graphiques, expérimentales et numériques. Le choix de la méthode pour résoudre les équations de Maxwell (équation de Poisson) dépend de la complexité du problème et des conditions aux limites, le but étant d'obtenir les résultats les plus précis en un minimum de temps de calcul.

Le développement des méthodes numériques a ouvert des champs d'applications très divers et plus particulièrement celui de la détermination des caractéristiques des précipitateurs électrostatiques. La performance de ces méthodes numériques a été démontrée par plusieurs chercheurs [102-106]. Les progrès de l'informatique ont permis de développer des méthodes numériques de calcul afin de déterminer de façon précise la distribution du champ et du potentiel électrique.

Pour notre étude, nous avons choisi la méthode des éléments finis et la méthode de simulation de charges. Les deux méthodes sont associées à la méthode des caractéristiques. Ces méthodes sont nécessaires et largement suffisantes pour résoudre les problèmes d'électrostatique avec une grande précision.

Chapitre III

*Les propriétés électriques
de fines particules*

III.1 Introduction

Les aérosols jouent un rôle essentiel dans l'atmosphère et dans des processus techniques. Souvent il est souhaitable d'extraire de l'aérosol des particules d'une grandeur variable déterminée.

Les poussières fines en suspension dans les gaz sont formées par la désintégration de liquides ou de solides ou par la conversion des gaz en particules. Ils peuvent aussi résulter de la mise en suspension de poudre ou de désagrégation d'agglomérats. Ces particules en suspension dans l'air, encore appelées aérosols, sont donc constituées de substances solides et/ou liquides, présentant une vitesse de chute le plus souvent négligeable. Les particules en suspension constituent un ensemble extrême hétérogène de polluants divers, minéraux ou organiques et ont une taille variant de quelques nanomètres à une centaine de micromètres. La taille de particules est le paramètre le plus important pour caractériser le comportement des aérosols.

Le problème de la charge acquise par une particule dans un champ électrique ionisé a été en effet posé par la précipitation industrielle des poussières et des fumés. Mais il est intéressant de l'étudier à un point de vue plus théorique en se plaçant dans des conditions expérimentales qui permettent de pousser les calculs jusqu'au bout et de faire des contrôles précis.

La charge électrique portée par des particules d'un aérosol est un paramètre important, car elle peut fortement influencer son évolution. En effet, les forces électrostatiques sont souvent largement supérieures aux autres forces exercées sur les particules. Or la plupart des aérosols d'origines naturelle ou artificielle sont électriquement chargés, les mécanismes de chargement étant très diversifiés. On peut citer, par exemple : la friction, la pulvérisation, la diffusion d'ions, l'émission thermo-ionique ou photoélectrique ou bien l'émission de fragments chargés dans le cas des aérosols radioactifs [25].

Dans ce chapitre, nous présentons essentiellement les caractéristiques électriques des particules en suspension dans l'air. Nous étudierons particulièrement la situation dans laquelle la diffusion des petits ions positifs et négatifs conditionne la charge électrique des aérosols. Cette partie concerne l'état de charge électrique des aérosols en milieu fortement ionisé. Dans ce cas, les propriétés des petits ions présents dans le gaz vont jouer un rôle important, et leur étude est indissociable de celle des charges électriques portées par les particules d'aérosols. C'est pourquoi, nous consacrons également une partie de ce chapitre à l'étude des petits ions.

III.2 Mouvement des charges libres

Les phénomènes de mobilité et de diffusion sont des effets macroscopiques résultant plus ou moins directement de l'action d'agents extérieurs (champ électrique, inhomogénéité).

Les effets de mobilité et de la diffusion étant fondamentaux dans la compréhension des mécanismes de production et d'entretien des décharges.

Les particules chargées subissent normalement un mouvement désordonné d'agitation thermique et de diffusion. En présence d'un champ électrique, ces particules sont soumises de plus à une force unidirectionnelle de valeur $Q\vec{E}$ qui leur communique une accélération dans la direction du champ ; mais sous l'effet des collisions élastiques, cette accélération est constamment contrariée.

Sous l'effet de cet ensemble de forces, les particules acquièrent en définitive une composante de vitesse moyenne \vec{v} , proportionnelle à l'intensité du champ électrique et inversement proportionnelle à la fréquence des collisions. Cette description reste valable, à pression et température normales, dans tout le domaine des champs utilisés en physique des décharges.

III.2.1 La mobilité dynamique

La mobilité dynamique des particules est un paramètre permettant de caractériser le mouvement d'un aérosol soumis à un champ de forces extérieures. Ce paramètre est utilisé lorsque la vitesse de la particule est proportionnelle à la force qui agit sur elle, suivant la relation :

$$\vec{V}_p = \mu_d \cdot \vec{F} \quad (3.1)$$

où V_p représente la vitesse de la particule en $m.s^{-1}$, μ_d mobilité dynamique de la particule exprimée en $m.s^{-1}.N^{-1}$ et F la force en N .

La mobilité dynamique est couramment utilisée pour caractériser la sédimentation d'un aérosol dans une enceinte. En effet, lorsque les particules sont soumises à la force de pesanteur, elles atteignent rapidement une vitesse limite de chute dans le gaz. Pour un nombre de Reynolds faible ($Re < 1$), en utilisant la loi Stokes, l'expression de la mobilité dynamique est la suivante:

$$\mu_d = \frac{C_u}{3\pi \cdot \mu_v \cdot d_p}, \text{ avec } C_u = 1 + K_n \cdot (1,142 + 0,558 \cdot \exp(-0,999 / K_n)) \quad (3.2)$$

où C_u représente le coefficient de correction de Cunningham, μ_v la viscosité dynamique du

fluide ($\mu_v = 1,832 \times 10^{-5} Pa.s$ pour l'air dans les conditions STP), d_p le diamètre de la particule (m) et K_n le nombre de Knudsen.

Le nombre de Knudsen est défini par le rapport entre le libre parcours moyen des molécules du gaz et le rayon des particules. Ce nombre permet de caractériser le régime continu ou moléculaire des interactions entre le gaz et les particules. La figure 3.1 montre les variations du nombre de Knudsen en fonction du diamètre d_p des aérosols.

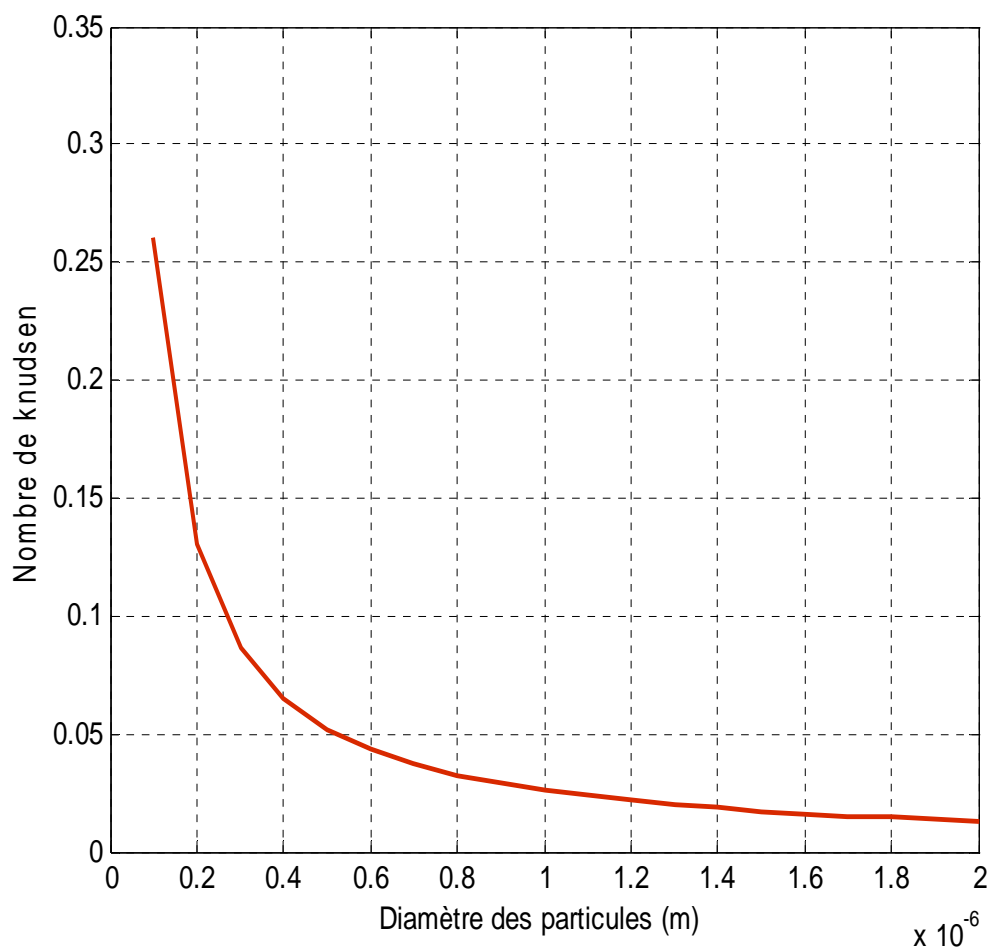


Figure 3.1 Variation du nombre de Knudsen en fonction du diamètre des particules

III.2.2 La mobilité électrique

La mobilité électrique est utilisée pour caractériser le mouvement d'un ion ou d'une particule chargée dans un champ électrique. La vitesse de dérive de la particule dans le champ électrique est donnée par la relation :

$$\vec{V}_p = \mu \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{j \cdot e \cdot B}{3\pi \cdot \mu_v \cdot d_p}, \quad \text{soit} \quad \mu = \frac{q_n \cdot e \cdot C_u}{3\pi \cdot \mu_v \cdot d_p} \quad (3.3)$$

où V_p représente la vitesse de la particule (ms^{-1}), μ sa mobilité électrique ($m^2V^{-1}s^{-1}$), E le champ électrique (Vm^{-1}), q_n le nombre de charges élémentaires portées par la particule et e la charge élémentaire ($1,6 \times 10^{-19} C$). La figure 3.2 montre les variations de la mobilité électrique en fonction du diamètre d_p des aérosols.

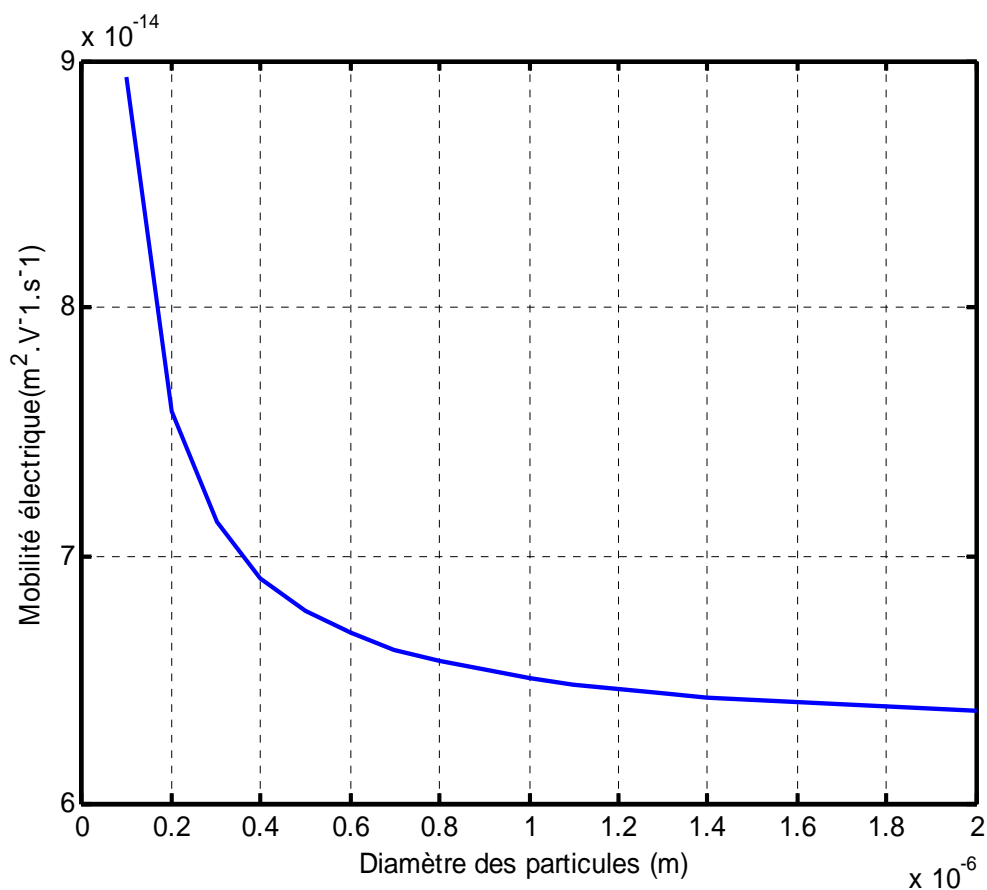


Figure 3.2 Mobilité des aérosols en fonction de leur diamètre

L'expression (3.3) qui définit la mobilité μ n'a de sens que si l'énergie acquise par l'ion entre deux chocs sous l'effet du champ électrique \vec{E} est négligeable devant l'énergie

moyenne d'agitation thermique, ce qui est réalisé si le module E du champ électrique est tel que :

$$\frac{E}{n} \leq \frac{q_d \cdot k_B \cdot T + \left(1 + \frac{m_+}{M}\right)^{1/2}}{e \left(\frac{m_+}{M} + \frac{M}{m_+}\right)} \quad (3.4)$$

avec n : nombre par unité de volume, des molécules du gaz porteur à la température $T(K)$,

k_B : constante de Boltzmann,

m_+ : masse d'un ion,

M : masse d'une molécule du gaz,

q_d : section droite de collisions ion- molécules [26].

On suppose également que la concentration ionique est suffisamment faible pour qu'on puisse négliger les interactions entre les ions, soit du fait de la charge d'espace, soit du fait des fluctuations statistiques de la densité ionique. Cela n'est possible si :

$$n < \frac{E}{4\pi \cdot e \cdot L_a} \quad (3.5)$$

avec L_a : dimension caractéristique de l'appareillage.

La mobilité d'un ion varie en raison inverse de la masse volumique du gaz porteur et, à température constante, en raison inverse de la pression. De la sorte, on définit la mobilité réduite μ_0 qui correspond à une température $T = 273$ K sous la pression de 760 mm de Hg par la relation :

$$\mu = \mu_0 \frac{760}{P} \frac{T}{273} \quad (3.6)$$

avec μ : mobilité à $T(K)$,

P : pression (mm de Hg).

Généralement, les forces d'origines électriques sont bien supérieures aux forces de pesanteur, de diffusion ou bien de thermophorèse. Le tableau 1.1 montre l'importance de la force électrique par rapport à la sédimentation d'un aérosol.

$d_p (\mu m)$	$v_s (ms^{-1})$	$\mu (m^2 V^{-1} s^{-1})$	Nombre de charges élémentaires (e)	
			$120 Vm^{-1}$	$300 kVm^{-1}$
0,01	$3,78 \cdot 10^{-7}$	$9,43 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$
0,1	$8,71 \cdot 10^{-7}$	$2,71 \cdot 10^{-8}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$
0,5	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$2,50 \cdot 10^{-9}$	33,3	$1,3 \cdot 10^{-2}$
1	$3,51 \cdot 10^{-5}$	$1,10 \cdot 10^{-9}$	267	$1,1 \cdot 10^{-1}$
2	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$5,07 \cdot 10^{-10}$	$2,15 \cdot 10^3$	$8,6 \cdot 10^{-1}$
10	$0,31 \cdot 10^{-2}$	$9,57 \cdot 10^{-11}$	$2,67 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^2$

Tableau 3.1 Comparaison des effets dynamique et électrique [25].

Nous avons calculé pour chaque diamètre de particule, la vitesse limite de chute dans l'air (v_s) ainsi que le nombre de charges électriques nécessaire pour obtenir la même vitesse dans un champ électrique égal à $300 kVm^{-1}$. Dans ce calcul, la particule est supposée sphérique et de densité unité, les conditions de pression et de température sont standard (STP : $P=1013 hPa$, $T=293,15 \text{ }^\circ K$). Les valeurs des champs électriques utilisées sont des moyennes respectives du champ électrique terrestre par beau temps au niveau du sol, ou du champ électrique de rupture rencontré pendant un orage.

III.2.3 Diffusion des particules dans un gaz

Dans leur mouvement au hasard, les particules entrent continuellement en collision et échangent de l'impulsion. Si la densité du gaz de particules n'est pas uniforme, les particules situées dans les régions de forte densité (n), en plus grand nombre, échangent plus d'impulsion dans la direction orientée vers les faibles densités que dans la direction contraire. Il en résulte une force moyenne, appliquée aux particules vers les régions à faible densité,

C'est-à-dire dans le sens de $-\vec{\nabla}n$. On exprime que la densité du flux de particules dans la direction x , $\Gamma_x = nv_x$, est proportionnelle à $\partial n / \partial x$.

$$\Gamma_x = -D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (3.7)$$

Le coefficient de proportionnalité D est le coefficient de diffusion, et la vitesse Γ/n , la vitesse de diffusion.

La théorie cinétique conduit à $\Gamma_e = k_B T_e / m_e v_c$ pour les électrons. La même expression, écrite pour les ions, avec une vitesse thermique beaucoup plus faible, donne une contribution ionique beaucoup plus faible aussi ; il résulte d'après les relations d'Einstein :

$$\frac{\mu}{D} = \frac{e}{k_B T} = \frac{n_e}{p_c} \quad (3.8)$$

où $p_c = n k_B T$ est la pression cinétique et μ est la mobilité des ions.

Puisque $\mu \sim \sqrt{T/p}$ il en résulte que, à température constante, D et μ sont proportionnelles : ils varient donc d'une manière comparable.

Le coefficient de diffusion d'un ion peut être déterminé à partir de sa mobilité électrique, en utilisant la relation d'Einstein :

$$D = \mu k_B T / q_n e \quad (3.9)$$

où D représente le coefficient de diffusion ($m^2 s^{-1}$), T la température (K), k_B la constante de Boltzmann ($k_B = 1,38 \times 10^{-23} JK^{-1}$), q_n le nombre de charges élémentaires portées par l'ion et e la charge élémentaire.

III.3 Eléments théoriques sur les propriétés des ions

III.3.1 La classification des ions

Généralement, les ions sont classés dans plusieurs catégories suivant leur dimension. Ces différentes catégories sont également le reflet des différents modes de formation des ions dans l'atmosphère. On distingue les cinq catégories suivantes : les petits ions, les petits ions intermédiaires, les gros ions intermédiaires, les ions de Langevin et les ultra gros ions. Cependant dans le cadre de notre étude et par analogie avec d'autres auteurs nous distinguerons seulement deux catégories d'ions : les petits ions et les particules chargées. Afin de marquer cette distribution, nous utiliserons par la suite la lettre μ pour désigner la mobilité électrique des petits ions.

III.3.1.1 Les petits ions

Les petits ions sont constitués par des molécules ou des agrégats moléculaires portant une seule charge et dont la mobilité électrique est supérieure à $0,1 \times 10^{-4} m^2 V^{-1} s^{-1}$. Cette limite de mobilité correspond à un diamètre d'environ $1,5 \times 10^{-9} m$. Ces petits ions sont également appelés petits ions primaires, car ils sont formés par excitation des molécules gazeuses.

Plusieurs auteurs ont étudiés en détail les mécanismes de formation des petits ions positifs et négatifs [27].

Les ions positifs se forment lorsqu'un électron est arraché d'une molécule tandis que les ions négatifs résultent de la diffusion d'électrons libres sur des molécules neutres, qui ont des affinités électronégatives. La taille et la mobilité des ions peuvent évoluer en fonction des conditions environnantes, par exemple, la nature du gaz porteur, la présence de vapeur d'eau ou bien la présence d'impuretés gazeuses. Dans le cas des petits ions créés dans l'atmosphère, la mobilité moyenne des ions positifs est $\mu_+ = 1,14 \times 10^{-4} m^2 V^{-1} s^{-1}$ et celle des ions négatifs est $\mu_- = 1,25 \times 10^{-4} m^2 V^{-1} s^{-1}$, dans le cas des ions produits dans l'air « pur » les mobilités moyennes sont respectivement $\mu_+ = 1,33 \times 10^{-4} m^2 V^{-1} s^{-1}$ pour les ions positifs et $\mu_- = 1,84 \times 10^{-4} m^2 V^{-1} s^{-1}$ pour les ions négatifs.

III.3.1.2 Les particules chargées

Les gros ions ou les ions de Langevin sont en effet des particules chargées dont la mobilité est inférieure à $0,001 \times 10^{-4} m^2 V^{-1} s^{-1}$. Ces particules chargées naissent de la collision entre les petits ions et les particules neutres présentes dans le gaz. Le domaine intermédiaire comprend des ions dont la mobilité dépend de la formation de clusters ou bien de l'agglomération avec d'autres molécules.

III.3.2 Les méthodes de productions des petits ions

III.3.2.1 Les rayonnements ionisants

Dans l'air, la méthode la plus commune pour créer des petits ions d'une désintégration α , β ou γ le transfert d'énergie du rayonnement dans le gaz, permet l'ionisation d'un nombre considérable de molécules. L'énergie absorbée pour créer une paire d'ions correspond au potentiel d'ionisation des molécules. Dans l'air, ce potentiel est environ $w_i = 35,5 eV$ pour les émissions α et $w_i = 34 eV$ pour les émissions β .

• Le rayonnement alpha

Les parcours des rayonnements alpha dans l'air sont très faibles (quelques centimètres), plusieurs relations donnent le parcours du rayonnement alpha en fonction de son énergie. Morgan et Turner [28] proposent les relations suivantes pour les conditions standards de pression et de température :

$$\begin{cases} R_\alpha = 0,56.E_i \text{ pour } E_i < 4 \text{ Mev,} \\ R_\alpha = 1,24.E_i - 2,62 \text{ pour } 4 < E_i < 8 \text{ Mev,} \end{cases} \quad (3.10)$$

où R_α représente le parcours du noyau d'hélium dans l'air (cm) et E_i l'énergie du rayonnement (Mev).

On trouve également la relation empirique suivante :

$$R_\alpha = 0,32.E_i^{3/2} \quad (3.11)$$

La procédure des ions varie le long de la trajectoire des émissions α . Cependant, nous pouvons estimer l'ionisation spécifique globale lors d'une désintégration en utilisant la relation suivante :

$$Ni = E_i / w_i \quad (3.12)$$

où Ni représente le nombre de paires d'ions créés pendant une désintégration, E_i l'énergie du rayonnement (eV) et w_i le potentiel d'ionisation de l'air pour les émetteurs α ($w_i = 35,5$ eV).

• Le rayonnement bêta

Le processus d'ionisation de l'air par les émetteurs bêta est plus complexe que celui des émetteurs alpha. En effet, les émissions bêta ne sont pas mono-énergétiques, mais il existe un spectre d'énergie de l'émission pour chaque radioélément. Le parcours des électrons bêta est également plus complexe que celui des alpha, l'électron étant dévié de sa trajectoire lors des chocs avec les molécules du gaz.

Le parcours du rayonnement bêta est caractérisé par le coefficient d'absorption linéaire μ_a définit par :

$$\mu_a = 1,7 \cdot \rho_g \cdot E_{\max}^{-1,14} \quad (3.13)$$

où μ_a représente le coefficient d'absorption linéaire (m^{-1}), ρ_g la masse volumique du gaz (kgm^{-3}) et E_{\max} l'énergie maximale du rayonnement (Mev).

Le flux d'électron à une distance x de la source est alors déterminé par la relation :

$$\psi_e(x) = \psi_{e0} \cdot \exp(-\mu_a \cdot x) \quad (3.14)$$

où ψ_e représente le flux d'électrons en un point ($m^{-2} \cdot s^{-1}$), ψ_{e0} le flux à la source et x la distance entre le point et la source (m).

Il existe des relations empiriques permettant de déterminer le parcours maximal d'un rayonnement bêta. Nous citerons ici les expressions du parcours correspondant à une atténuation d'un facteur 10^3 du flux d'électrons, le parcours des électrons dans la matière étant exprimé en masse par unité de surface (kg m^2):

$$\begin{cases} R_\beta = 4.E_{\max}^{1,38} & \text{pour } E_{\max} < 0,8 \text{ Mev,} \\ R_\beta = 5,4.E_{\max} - 2,62 & \text{pour } E_{\max} > 0,8 \text{ Mev,} \end{cases} \quad (3.15)$$

où R_β représente le parcours de l'électron (kg m^2), défini par le produit de l'épaisseur du milieu par sa masse volumique et E_{\max} l'énergie maximale du rayonnement bêta (Mev).

Pendant le parcours d'un électron bêta dans un matériau, il peut céder son énergie par l'ionisation des molécules rencontrées ou bien par la création de rayonnement de freinage. Le transfert d'énergie par rayonnement de freinage entraîne la production de photons, ce phénomène étant négligeable pour les électrons de faibles énergies ($E_i < 1 \text{ Mev}$) ou pour les matériaux de faibles nombres atomiques.

Par ailleurs, comme le spectre d'énergie des émetteurs bêta est continu, nous devons utiliser une valeur moyenne de l'énergie des émissions bêta afin de pouvoir calculer le nombre moyen de paires d'ions créées à chaque désintégration. Si on néglige la perte d'énergie par rayonnement de freinage, l'énergie moyenne disponible E_i (eV) pour l'ionisation du matériau est définie par la relation:

$$E_i \cong \frac{1}{3} E_{\max} \quad (3.16)$$

où E_{\max} représente l'énergie maximale du spectre d'émission du radioélément (eV).

Le nombre moyen de paires d'ions créés à chaque désintégration est donc :

$$Ni = E_i / w_i \quad (1.17)$$

où w_i est le potentiel d'ionisation de l'air pour les émetteurs bêta ($w_i = 34 \text{ eV}$).

• Le rayonnement gamma

Le processus d'ionisation de l'air par un rayonnement gamma est lui aussi complexe. En effet, le rayonnement gamma est indirectement ionisant : les photons incidents vont produire des électrons énergétiques capables d'ioniser le milieu. Il existe trois principaux types d'interactions entre les photons incidents et la matière : l'effet photo-électrique, l'effet Compton et la création de paires. Selon l'énergie du rayonnement incident et le numéro atomique du matériau, un des trois effets peut prédominer les interactions.

Il est possible de définir de façon analogue aux émetteurs bêta un coefficient d'absorption linéaire (μ_a). Cependant, l'expression d'un tel coefficient est complexe car il faut tenir compte de l'importance relative des trois types d'interactions. De plus, le calcul analytique de la production d'ions dans un gaz sous l'action d'un rayonnement gamma est difficile, et nécessite l'utilisation d'un logiciel de calcul de débit de dose.

L'unité de dose est le Gray (Gy) correspondant à des $J.kg^{-1}$. Toutefois, afin de calculer le taux d'ionisation dans un gaz, il est plus commode d'utiliser une ancienne unité historique appelée Roentgen (R). Cette unité représente la quantité de charges électriques positives ou négatives produites par unité de masse ($1R = 2,58 \times 10^{-4} C.kg^{-1}$).

La correspondance entre le Gray et le Roentgen, s'exprime à l'aide de la relation suivante : $1C.kg^{-1} \Leftrightarrow 33,8Gy$. L'intensité d'ionisation dans l'air $I_\gamma (p.i.m^{-3}s^{-1})$ en fonction du débit de dose $Dd (Gy.h^{-1})$ s'exprime donc à l'aide de la relation :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_\gamma = \frac{\rho_g}{33,8.1,6 \times 10^{-19}.3600} . Dd, \\ \text{Or } \rho_g = 1,205 \text{ kgm}^{-3} \text{ pour l'air dans les conditions STP d'où,} \\ I_\gamma = 6,189 \times 10^{13} . Dd . \end{array} \right. \quad (3.18)$$

III.3.2.2 L'effet couronne

Les décharges de type couronne sont caractérisées par la dissymétrie des électrodes, l'une au moins des deux électrodes présentant une forte courbure. Le champ électrique réduit produit dans l'espace inter-électrodes (gap) lors de l'application d'une haute tension est fortement inhomogène.

L'appellation de décharge couronne vient du halo lumineux en forme de couronne qui apparaît autour de l'électrode à forte courbure lors de l'initiation de la décharge. La haute tension appliquée à l'électrode à forte courbure peut être positive ou négative.

L'une des difficultés principales rencontrées avec les décharges de type couronne est la transition à l'arc électrique. Ce phénomène est caractérisé par une forte élévation du courant circulant dans la décharge et une hausse importante de la température du gaz. Le plasma généré est alors proche de l'équilibre thermodynamique, avec une énergie moyenne des électrons de l'ordre de 1 eV. La puissance injectée dans le gaz est alors majoritairement dissipée par effet Joule, l'énergie cinétique moyenne des électrons étant insuffisante pour permettre l'ionisation, l'excitation ou la dissociation des molécules du milieu.

La quantité d'ions produits dépend de la géométrie des électrodes, du champ électrique et des caractéristiques du gaz.

Soulignons ici que l'utilisation de deux systèmes à effet couronne fonctionnant en courant continu, ou bien un système fonctionnant en courant alternatif, permettent de contrôler la production d'ions positifs et négatifs en quantités différentes. En revanche, l'utilisation des sources radioactives implique une production d'ions positifs et négatifs en quantités égales.

III.3.2.3 Les autres moyens de production

Il est possible de produire des ions dans un gaz par effet photoélectrique en utilisant un rayonnement ultra violet. Celui-ci provoque l'excitation et l'émission d'électrons appartenant à des molécules gazeuses. Il est également possible de produire des ions à l'aide de la flamme. En effet, dans une combustion, des ions sont produits par réactions chimiques entre le carburant et l'oxygène au niveau de la flamme [29].

III.3.3 L'évolution des ions dans le gaz

Après leur création dans le gaz, les ions vont évoluer de différentes façons. La concentration des ions résulte de plusieurs processus physiques comme leur recombinaison, leur fixation sur l'aérosol ou bien leur diffusion sur des parois. De plus, la mobilité et donc la diffusion peuvent évoluer suivant « l'âge » des ions ou bien suivant les conditions de pression, de température et d'humidité.

III.3.3.1 La recombinaison

Le processus de recombinaison des ions s'apparente à la coagulation d'un aérosol. Les petits ions de signes opposés peuvent se rencontrer sous l'action de la diffusion ou bien des attractions électrostatiques. Dès lors, leurs charges électriques se neutralisent et ils disparaissent en tant qu'ions. La variation des concentrations en ions positifs et négatifs due à la recombinaison est symétrique, puisque les ions se recombinaison par paires. Ce processus est décrit par la relation:

$$\frac{dn_{\pm}}{dt} = -\alpha.n_{+}.n_{-} \quad (3.19)$$

où n_{\pm} représentent les concentrations en ions positifs ou négatifs (m^{-3}) et α le coefficient de recombinaison ($m^3 s^{-1}$).

En présence d'un taux de production de paires d'ions τ_q ($m^{-3} s^{-1}$), si la recombinaison est le seul mécanisme à intervenir dans la disparition des ions, la concentration en ions positifs est égale à celle des négatifs, et atteint un équilibre déterminé par la relation :

$$n_{\infty} = \sqrt{\frac{\tau_q}{\alpha}} \quad (3.20)$$

où n_{∞} représente la concentration en ions positifs ou négatifs à l'équilibre (m^{-3}). Cette concentration d'équilibre est atteinte pour un temps $t \gg \frac{1}{\sqrt{\alpha.\tau_q}}$.

Le calcul du coefficient de recombinaison et sa mesure ont été effectués par plusieurs auteurs dans l'air et à pression atmosphérique, ils ont mesuré des valeurs de α comprises entre $1,2 \times 10^{-12}$ et $2,1 \times 10^{-12} m^3 s^{-1}$. Malgré cette dispersion des résultats, la valeur $\alpha = 1,6 \times 10^{-12} m^3 s^{-1}$ est couramment employée.

III.3.3.2 La fixations des petits ions sur les aérosols

Les petits ions peuvent se fixer sur les particules d'aérosols et ainsi les charger électriquement. Cette fixation peut être fonction de différents types d'interactions entre les ions et les particules : la diffusion brownienne, l'attraction électrostatique ou bien la force due à l'image électrique de l'ion.

Ces phénomènes sont décrits par un coefficient de fixation β ($m^3 s^{-1}$) des ions sur l'aérosol, défini par le rapport entre le flux d'ions sur la particule et la concentration ionique dans le milieu :

$$\beta = \psi_i / n_\infty \quad (3.21)$$

où ψ_i représente le flux d'ions sur la surface d'une particule (s^{-1}) et n_∞ la concentration d'équilibre en ions dans le milieu (m^{-3}).

En présence d'un aérosol fortement concentré, la fixation des ions sur les particules peut devenir le mécanisme dominant leur disparition. Ce mécanisme intervient par exemple dans la détermination des concentrations des petits ions atmosphériques. Si on néglige la recombinaison des ions, la concentration en ions positifs ou négatifs à l'équilibre s'exprime alors par :

$$n_\infty = \frac{\tau_q}{\beta \cdot C_t} \quad (3.22)$$

où n_∞ représente la concentration en ions positifs ou négatifs à l'équilibre (m^{-3}), q le taux de production de paires d'ions ($p.i.m^{-3}.s^{-1}$) et C_t la concentration de l'aérosol (m^{-3}).

Les méthodes de calcul du coefficient de fixation dépendent du rapport entre le libre parcours moyen des ions et la dimension de l'aérosol. Nous pouvons distinguer différents régimes à l'aide du nombre de Knudsen, défini par la relation :

$$K_n = \frac{\lambda_i}{r_p} \quad (3.23)$$

où λ_i représente le libre parcours moyen des ions dans l'air (pour les petits ions atmosphériques, $\lambda_i = 1,3 \times 10^{-8}$ m) et r_p le rayon de la particule (m).

Ainsi, lorsque $K_n > 0,25$: le régime est dit continu et la particule est considérée comme immobile par rapport aux ions environnants. Dans ce cas, nous pouvons appliquer l'équation classique de diffusion (loi de Fick).

Lorsque $K_n \ll 1$: le régime est moléculaire et la vitesse d'agitation thermique de la particule n'est plus négligeable devant celle des ions. Entre ces deux valeurs de K_n nous se trouvons dans le régime intermédiaire.

Nous expliciterons par la suite le calcul du coefficient de fixation dans le régime continu, pour déterminer la distribution des charges électriques d'un aérosol en milieu bipolaire.

III.3.3.3 La diffusion sur les parois

La diffusion des ions sur les parois d'une enceinte est un phénomène important, qui peut influencer leur évolution dans le milieu. Les effets de la diffusion sont souvent étudiés et utilisés en métrologie, que ce soit pour la conception de systèmes de mesures (batteries de diffusion) ou bien pour l'interprétation des résultats expérimentaux.

Il faut distinguer deux types de diffusion : la diffusion turbulente qui caractérise le transfert global d'une quantité vers la paroi (l'intensité de cette diffusion va dépendre des écoulements aérodynamiques dans l'enceinte), et la diffusion moléculaire (mouvement brownien). Plusieurs auteurs [30] montrent que la diffusion moléculaire des ions sur les parois peut jouer un rôle important dans la réalisation et dans l'interprétation d'études expérimentales.

III.3.4 Le vieillissement des ions

Plusieurs études montrent que le spectre de mobilité des petits ions dans l'air peut varier en fonction de leur « âge ». En effet, Bricard et al. [31] constatent une telle variation, ils supposent alors que les ions ne sont pas à l'équilibre thermodynamique au moment de leur création, et qu'ils peuvent grossir par condensation de vapeur pour atteindre cet équilibre. Par la suite, il y a des études qui montrent qu'il faut également tenir compte de la présence d'impuretés gazeuses pour décrire la mobilité des ions.

Il existe également de nombreuses études sur l'évolution de la mobilité des petits ions atmosphériques, ces études montrent que la fixation de molécules gazeuses ainsi que des réactions chimiques entraînent un grossissement des ions atmosphériques.

III.3.5 La durée de vie des ions

A partir de leur création, la durée de vie des ions dépend principalement, du mécanisme qui domine leur évolution. Par exemple, lorsque la concentration en ions est élevée, leur recombinaison est le mécanisme déterminant l'évolution de leur concentration. La constante de temps permettant de caractériser le processus de recombinaison s'exprime par [32] :

$$\tau_r \cong \frac{1}{\alpha \cdot n} \quad (3.24)$$

où τ_r représente la constante de temps pour la recombinaison (s), α le coefficient de recombinaison des petits ions ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) et n la concentration en ions positifs ou négatifs dans le milieu (m^{-3}).

En revanche, lorsque la fixation des petits ions sur l'aérosol est prépondérante sur leur recombinaison, la constante de temps du processus est déterminée par la relation:

$$\tau_f = \frac{\varepsilon_0}{4\pi.e.(\mu_+.n_+ + \mu_-.n_-)} \cong \frac{k_B.T.\varepsilon_0}{4\pi.D.n_t} \quad (3.25)$$

où τ_f représente la constante de temps caractéristique de la fixation des petits ions positifs et négatifs ($m^2 V^{-1} s^{-1}$), n_+ et n_- les concentrations respectives en ions positifs et négatifs (m^{-3}), D le coefficient de diffusion des ions ($m^2 s^{-1}$) et n_t leur concentration totale (m^{-3}).

Dans le cas de la diffusion sur les parois, la constante de temps du processus est déterminée par :

$$\tau_D = \frac{S_p}{D} \quad (3.26)$$

où τ_D représente la constante de temps de la diffusion sur les parois (s), S_p la surface de la paroi (m^2) et D le coefficient de diffusion des ions ($m^2 s^{-1}$).

Dans l'atmosphère, la durée de vie moyenne d'un petit ion varie en fonction de la pollution, donc en fonction de la concentration de l'aérosol. Cette durée de vie peut aussi varier entre 10 s (forte pollution) et 10 min (faible concentration).

III.4 Théorie de la charge électrique des aérosols par diffusion d'ions bipolaires

Considérons maintenant un aérosol constitué par un ensemble de particules, initialement chargées ou neutres, soumises à l'action des petits ions des deux signes. On suppose, pour établir la théorie, que les particules sont immobiles par rapport aux petits ions qui, eux, sont animés du mouvement brownien, et on admet que leur nombre est suffisamment faible pour que la concentration ionique au voisinage d'une particule ne soit pas perturbée par la présence des autres.

Ce phénomène est important du point de vue pratique, puisqu'il intervient toutes les fois qu'on charge un aérosol avec une source radioactive, technique utilisée dans un certain nombre d'appareils permettant d'obtenir la granulométrie des aérosols.

III.4.1 Le coefficient de fixation ion – aérosol

Nous avons vu dans la partie précédente que la fixation des ions sur les aérosols peut être un mécanisme important vis-à-vis de leur disparition. C'est également ce mécanisme qui

détermine l'état de charge électrique des aérosols en milieu bipolaire. Nous nous intéressons ici surtout au cas du régime continu pour lequel le mouvement brownien des particules est négligeable devant la vitesse d'agitation thermique des ions.

III.4.1.1 Calcul du coefficient de fixation en régime continu

Lorsque le régime continu ($K_n < 0,25$), nous pouvons utiliser l'équation classique de la diffusion. Il est alors possible de calculer le coefficient de fixation des petits ions sur les particules en fonction de leur coefficient de diffusion et du rayon des particules supposées sphériques. Le calcul du flux d'ions sur une sphère électriquement neutre de rayon r_p , permet d'exprimer le coefficient de fixation par la relation:

$$\beta_{\pm} = 4.\pi.D_{\pm}.r_p \quad (1.27)$$

où β_{\pm} représentent le coefficient de fixation des petits ions positifs ou négatifs ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) sur une particule neutre, D_{\pm} le coefficient de diffusion des ions positifs ou négatifs ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) et r_p le rayon de la particule d'aérosol (m).

Lorsque la particule est conductrice et électriquement chargée, il faut alors tenir compte de l'image électrique de l'ion et de l'action du champ électrostatique. Si nous supposons que la particule est sphérique, de rayon (r_p) supérieur au libre parcours moyen des ions dans l'air, plusieurs auteurs [33, 34], ont montré qu'on peut écrire les coefficients de fixation sous la forme :

$$\beta_{1q_n} = \frac{4\pi.D_+.r_p}{\zeta(D_+,r_p,q_n)} \text{ et } \beta_{-1q_n} = \frac{4\pi.D_-.r_p}{\zeta(D_-,r_p,q_n)} \quad (3.28)$$

où β_{1q_n} et β_{-1q_n} représentent respectivement le coefficient de fixation ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) d'un ion positif sur une particule portant q_n charges élémentaires positives ou négatives et le coefficient de fixation d'un ion négatifs sur une particule portant j charges, D_+ et D_- représentent respectivement les coefficients de diffusion des ions positifs et négatifs ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) et r_p le rayon des particules (m). $\zeta(D,r_p,q_n)$ est une intégrale qu'on peut calculer graphiquement ou numériquement, elle exprime l'effet de la force coulombienne et de la force image sur les flux d'ions à la surface d'une particule.

Lorsque l'action de l'image électrique est négligeable, Gunn [35] établit une expression analytique des coefficients de fixation qui est fonction des coefficients de diffusion. Toutefois, les formules couramment utilisées sont exprimées en fonction des mobilités électriques des ions positifs et négatifs et sont définies par les relations :

$$\beta_{1q_n} = \frac{q_n \cdot e \cdot \mu_+}{\varepsilon_0 \cdot [\exp(2\lambda \cdot q_n) - 1]} \quad \text{et} \quad \beta_{-1q_n} = \frac{q_n \cdot e \cdot \mu_-}{\varepsilon_0 \cdot [1 - \exp(-2\lambda \cdot q_n)]} \quad (3.29)$$

$$\text{Avec } \lambda_a = \frac{e^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_p \cdot k_B \cdot T} \quad (3.30)$$

où μ_+ et μ_- représentent respectivement les mobilités électriques des petits ions positifs et négatifs ($\text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$), ε_0 la permittivité du vide ($\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$) et λ_a un paramètre adimensionnel de l'aérosol correspondant au rapport entre l'énergie électrostatique de la particule et le facteur d'énergie de Boltzmann ($k_B \cdot T$).

Les expressions précédentes sont valables seulement dans le régime continu, c'est-à-dire pour des particules de diamètres supérieurs à $0,1 \mu\text{m}$. Pour des diamètres inférieurs, nous ne pouvons pas utiliser la théorie de la diffusion en milieu continu.

III.4.1.2 Calcul du coefficient de fixation en régime intermédiaire et moléculaire

Lorsque le nombre de Knudsen augmente, on passe successivement dans le régime intermédiaire puis dans le régime moléculaire. Dans ces cas, plusieurs auteurs montrent que la fraction chargée des particules ultra-fines est sous-estimée lorsqu'on utilise la théorie du régime continu ou bien la répartition statistique de Boltzmann.

Dans le régime moléculaire, le coefficient de fixation s'exprime en fonction de la vitesse moyenne d'agitation thermique des ions et de leur répartition statistique au voisinage de la particule. Plusieurs théories et validations expérimentales sont disponibles dans la littérature. Nous pouvons citer, les travaux théoriques de Bricard, de Fuchs, ou bien de Gentry et Brock. Les différentes théories se distinguent les unes des autres par les approximations effectuées. Par exemple, Gentry et Brock négligent l'action de l'image électrique dans leur calcul, tandis que Fuchs en tient compte au voisinage de la particule.

De nombreux travaux expérimentaux existent, et sont toujours en développement conjointement avec les nouvelles techniques de métrologie des aérosols. Nous pouvons citer, par exemple, les premiers travaux de Nolan et Kennan [36] sur la mesure de la fraction chargée des particules en fonction de leurs diamètres. Plus récemment, Adachi et al. [37] ont

montré que le rapport entre les fractions chargées positivement et négativement dépend des propriétés des ions bipolaires. Toutefois, les auteurs indiquent que la théorie de Fuchs décrit correctement les résultats expérimentaux si on tient compte des différences des propriétés entre les ions positifs et négatifs.

Pour déterminer le coefficient de fixation dans le régime intermédiaire, il est nécessaire de coupler les deux approches (continu et moléculaire). La méthode consiste à décomposer l'espace environnant la particule en deux zones. La limite entre ces deux zones, communément appelée sphère limite, correspond à la distance entre la surface de la particule et le lieu de la dernière collision entre un ion et une molécule gazeuse. A l'extérieur de la sphère limite le flux d'ions s'exprime de façon classique, à l'aide de la diffusion et des forces électrostatiques. En revanche, l'intérieur de la sphère limite étant considéré comme un espace vide, on suppose que les ions ne subissent plus de collisions avec les molécules du gaz.

Bricard [33] a calculé les coefficients de fixation en supposant que le trajet des ions est rectiligne à l'intérieur de la sphère limite, tandis que Fuchs a pris en compte la courbure de la trajectoire de l'ion due à la force image. Plus récemment, Hoppel et Frick [38] ont introduit un processus de capture par rencontre avec un troisième corps ("three-body trapping") dans le calcul des coefficients de fixation, leurs calculs tenant compte également de la force image. Cependant, ces auteurs soulignent le fait qu'il existe peu de résultats expérimentaux où la métrologie est suffisamment précise pour permettre la validation des différentes théories.

Il existe plusieurs façons de décrire l'évolution de la charge électrique d'un aérosol lorsqu'il est en présence d'ions bipolaires. Nous pouvons considérer, en première approximation, que toutes les particules portent le même nombre moyen de charges électriques (q_m), et calculer les flux d'ions positifs et négatifs sur ces particules. Cette approche peut être affinée en tenant compte des l'évolution des concentrations en ions positifs et négatifs dans le milieu. Une deuxième approche plus réaliste, consiste à décrire de façon individuelle l'évolution des fractions de particules portant un nombre donné (q_n) de charges élémentaires. Nous obtenons alors un système d'équations d'autant plus important que le nombre maximum de charges rencontré est grand

III.4.1.3 Evolution de la charge moyenne de l'aérosol

Liu et Pui [39] ont modélisé de façon simple l'évolution de la charge électrique d'un aérosol en milieu bipolaire. Afin d'étudier la cinétique du processus de neutralisation d'un aérosol, ils utilisent la relation :

$$\frac{dq_m}{dt} = \psi_+ - \psi_- \quad (3.31)$$

où q_m représente le nombre moyen de charges élémentaires de particules, ψ_+ et ψ_- les flux d'ions respectivement positifs et négatifs sur la surfaces des particules (nombre de charges par seconde) et t le temps (s).

Si nous supposons que les ions positifs et négatifs ont la même mobilité ($\mu_+ = \mu_- = \mu$) et la même concentration ($n_+ = n_- = n$), nous obtenons, dans le régime continu, en utilisant les relations 3.21 et 3.29:

$$\frac{dq_m}{dt} = -\frac{4\pi e}{\varepsilon_0} \cdot \mu \cdot n \cdot q_m \quad (3.32)$$

Cependant, dès 1954, Gunn propose déjà une modélisation plus générale de l'évolution de la charge moyenne d'un aérosol monodispersé. En effet, son modèle prend en compte une asymétrie entre les mobilités et les concentrations des petits ions positifs et négatifs. L'auteur exprime ainsi l'évolution du nombre moyen de charges électriques en fonction des coefficients de fixation et obtient donc la relation suivante :

$$\frac{dq_m}{dt} = \beta_{1q_m} \cdot n_+ - \beta_{-1q_m} \cdot n_- \quad (3.33)$$

où β_{1q_m} et β_{-1q_m} représentent respectivement les coefficients de fixation des petits ions positifs et négatifs sur des particules portant un nombre de charges moyen q_m ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) et n_+ puis n_- les concentrations respectives des ions positifs et négatifs (m^{-3}).

Signalons que la charge électrique moyenne (\bar{q}_m) de l'aérosol s'écrit: $\bar{q}_m = q_m \times e$.

III.4.1.4 Equation générale de l'évolution de la distribution des charges

Certains auteurs ont proposé un système d'équations permettant de modéliser l'évolution de la distribution des charges d'un aérosol monodispersé. Ce système prend en compte l'évolution de la charge d'une particule en fonction de l'évolution de la charge des autres particules constituant l'aérosol.

L'équation 3.34 détermine alors l'évolution de la concentration des particules portant q_n charges élémentaires (positives ou négatives) en fonction de la concentration des particules portant $q_n - 1$ et $q_n + 1$ charges.

$$\frac{dC_{q_n}}{dt} = \beta_{1q_n-1} \cdot n_+ \cdot C_{q_n-1} + \beta_{-1q_n+1} \cdot n_- \cdot C_{q_n+1} - \beta_{-1,q_n} \cdot n_- \cdot C_{q_n} \quad (3.34)$$

où C_{q_n} représente la concentration de particules portant q_n charges élémentaires (m^{-3}), β_{1q_n-1} le coefficient de fixation d'un ion positif sur une particule portant $q_n - 1$ charges ($m^3 s^{-1}$), β_{-1q_n+1} le coefficient de fixation d'un ion négatif sur une particule portant $q_n + 1$ charges ($m^3 s^{-1}$) et n_+ puis n_- les concentrations respectives des ions positifs et négatifs (m^{-3}).

Les deux premiers termes de l'équation correspondent à la source des particules portant q_n charges par fixation de petits ions positifs ou négatifs, respectivement sur des particules portant $q_n - 1$ et $q_n + 1$ charges. Les deux derniers termes de l'équation décrivent la disparition des particules portant q_n charges par fixation d'un ion positif ou négatif.

Lorsque q_n varie entre $-\infty$ et $+\infty$, le système d'équations ($\frac{dC_{q_n}}{dt}$) obtenu permet de décrire complètement l'évolution de la distribution des charges d'un aérosol monodispersé. En fait, la modélisation correcte des flux d'ions positifs et négatifs sur les particules nécessite de coupler le système d'équations précédent avec l'évolution des concentrations en ions positifs et négatifs dans le milieu. Si nous supposons qu'il existe un terme source pour les ions égal à s_i , et que la disparition des ions est seulement due à leurs recombinaison ou à la fixation sur l'aérosol, les équations d'évolution des concentrations en ions positifs et négatifs dans le milieu sont alors:

$$\frac{dn_+}{dt} = s_i - \alpha \cdot n_+ \cdot n_- - \sum_{q_n=-\infty}^{+\infty} \beta_{1q_n} \cdot n_+ \cdot C_{q_n} \quad (3.35)$$

$$\frac{dn_-}{dt} = s_i - \alpha \cdot n_+ \cdot n_- - \sum_{q_n=-\infty}^{+\infty} \beta_{-1q_n} \cdot n_- \cdot C_{q_n} \quad (3.36)$$

où s_i représente la source d'ions ($m^{-3} s^{-1}$) et α le coefficient de recombinaison des petits ions ($m^3 s^{-1}$).

Si nous voulons déterminer la fraction de particules portant q_n charges, il est nécessaire de résoudre simultanément l'ensemble des équations. Cependant, il n'existe pas de solution

analytique de l'ensemble de ces équations en fonction du temps. Leur résolution a été étudiée numériquement par plusieurs auteurs.

III.4.2 L'état stationnaire de la charge électrique d'un aérosol (équilibre de Boltzmann)

Lorsqu'un aérosol se trouve en présence d'une source constante d'ions bipolaires, il est possible de montrer que la charge électrique de l'aérosol, ainsi que les concentrations en ions atteignent un état stationnaire. A cet égard, il existe plusieurs approches différentes pour déterminer la répartition des charges électriques sur un aérosol à l'état stationnaire.

- ❖ La première approche est basée sur la théorie de la diffusion des ions positifs et négatifs, dont nous avons présenté les éléments dans le paragraphe précédent. Cette approche est utilisée dans les travaux de Gunn [35] et Poluektov et al. [40].
- ❖ Une seconde approche est basée sur le principe d'équipartition de l'énergie de Boltzmann, le fondement de cette approche repose sur la fréquence des collisions entre les ions et les particules [36]. Cette deuxième approche est très largement utilisée en physique des aérosols du fait de sa simplicité, on parle alors de la loi "d'équilibre de Boltzmann".

Dès 1940, Lissowski [37] suggère que la répartition des charges d'un aérosol exposé à des ions bipolaires s'effectue suivant une loi normale, en s'appuyant sur ses mesures de la charge électrique d'un nuage de gouttelettes d'huile exposées à des ions bipolaires. C'est en 1959 que Keefe et al. [36] évoquent la loi de distribution de Boltzmann pour décrire la répartition exponentielle des charges électriques sur un aérosol. En supposant que l'aérosol est en équilibre électrique et thermodynamique avec les ions, les auteurs proposent d'inclure l'énergie électrique des particules dans la loi de distribution de Boltzmann.

Si nous appelons δE la différence entre l'énergie potentielle d'une particule neutre et celle d'une particule portant q_n charges élémentaires (cette énergie correspond en fait à l'énergie électrostatique de la particule chargée), le principe d'équipartition de l'énergie de Boltzmann permet d'écrire le rapport entre la fraction de particules neutres, et la fraction de particules portant q_n charges électriques :

$$\frac{C_j}{C_{0p}} = \exp\left(-\frac{\delta E}{k_B \cdot T}\right), \text{ avec } \delta E = \frac{j^2 \cdot e^2}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_p} \quad (1.37)$$

où C_{q_n} représente la concentration de particules portant q_n charges élémentaires (m^{-3}), C_{0p} la

concentration de particules neutres (m^{-3}), k_B la constante de Boltzmann, T la température (K), r_p le rayon de la particule (m), e la charge élémentaire (C) et δE l'énergie électrostatique de la particule (J).

Nous pouvons mettre la relation précédente sous la forme d'une loi normale centrée sur zéro et d'écart type σ , ce qui donne :

$$\frac{C_{q_n}}{C_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} \cdot \exp\left(\frac{-q_n^2}{2\sigma_d^2}\right), \text{ avec } \sigma_d^2 = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{k_B \cdot T \cdot r_p}{e^2} \quad (3.38)$$

où $C_t = \sum_j C_j$ représente la concentration totale de l'aérosol (m^{-3}) et σ_d l'écart type de la distribution (nombre de charges élémentaires).

Nous remarquons que cette loi ne tient pas compte des différences de propriétés des ions bipolaires. Elle décrit une répartition symétrique des charges sur l'aérosol, conduisant à une charge électrique globalement nulle. Toutefois, Keefe et al. (1959) ont montré que cette loi est en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Nolan et Kennan [41].

Cette forme de la loi de Boltzmann est pourtant critiquée par Fuchs [39], qui remet en question l'hypothèse d'équilibre thermodynamique. En effet, Fuchs considère que la charge électrique de l'aérosol en milieu bipolaire ne résulte pas d'un état d'équilibre, mais d'un état stationnaire des flux des ions sur les particules. Puisque les ions fixés sur l'aérosol ne peuvent pas être ensuite arrachés. A la même époque, Pollak et Metnieks [38] ont montré que la loi de Boltzmann n'est pas applicable pour les particules de très petits diamètres ($d_p < 0,03 \mu m$). Ils suggèrent alors, que l'énergie électrostatique de ces particules ne peut pas être exprimée à partir de l'énergie électrostatique d'une sphère chargée de diamètre équivalent. Dès lors, de nombreuses études ont été conduites en physique des aérosols pour rechercher le fondement de cet équilibre.

Matsoukas [42] a argumenté la validité de l'équilibre de Boltzmann par des considérations énergétiques. Il montre que, lorsque le régime est continu, le travail nécessaire à la désorption d'un ion de la surface de la particule est équivalent au travail de la force électrostatique nécessaire pour capture d'un ion de signe opposé à celui de la particule.

En revanche, dans le cas du régime moléculaire, l'approche à partir du travail de la force électrostatique n'est plus valable, car les effets électrostatiques sont négligeables devant la vitesse d'agitation thermique (sauf au voisinage de la surface de particule où la force image est importante). Matsoukas a également établi un critère afin de délimiter un domaine d'application de l'équilibre de Boltzmann. D'après ce critère, l'équilibre de Boltzmann peut

être utilisé pour des particules de diamètre supérieur à $0,12 \mu\text{m}$ (dans les conditions standard de pression et de température).

Malgré ces controverses, la loi de Boltzmann reste très utilisée du fait de sa simplicité. Plusieurs études montrent qu'il est également d'utiliser cette loi pour décrire la distribution des charges sur des aérosols composés de fibres ou bien d'agglomérats de particules, pourvu que nous utilisons un diamètre équivalent approprié.

La figure 3.3 illustre les variations de C_{q_n}/C_t en fonction de r_p . Nous obtenons des courbes symétriques, d'autant plus aplaties que r_p est plus grand.

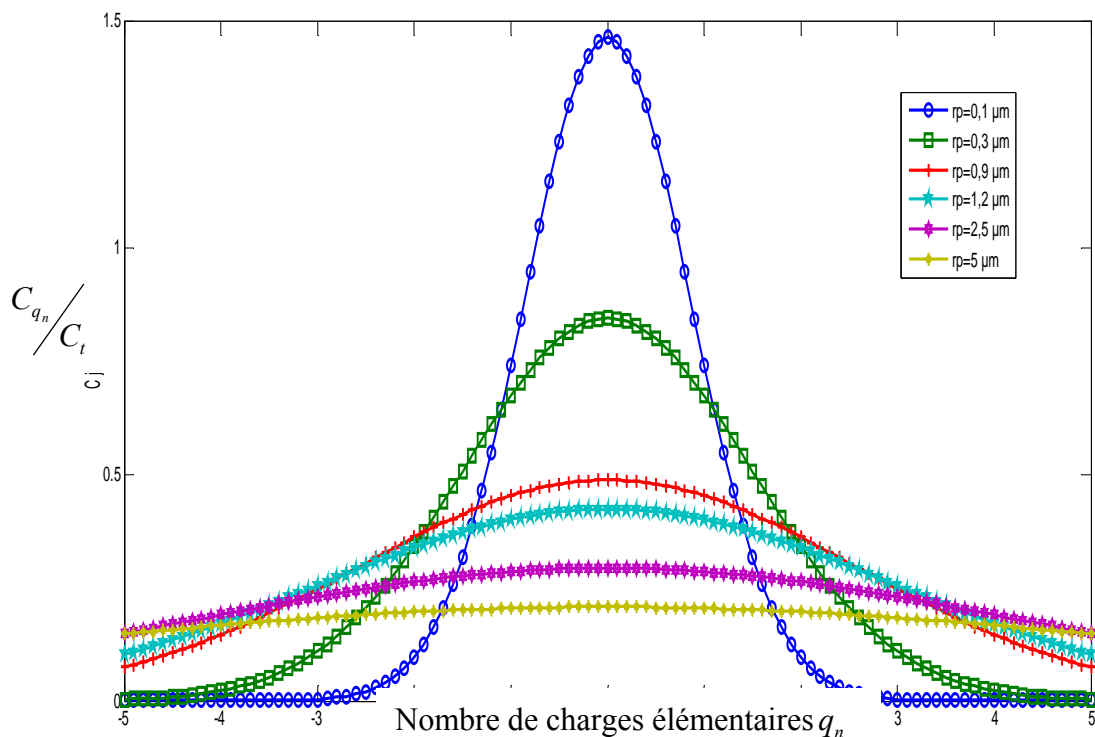


Figure 3.3 Courbes représentatives de l'équilibre de Boltzmann pour différentes dimensions d'aérosols.

III.4.3 La durée de mise à l'état stationnaire

Nous avons vu précédemment que la distribution des charges d'un aérosol évolue en fonction des caractéristiques ioniques du milieu rencontré. Néanmoins, lorsque la concentration en ions dans un milieu est stable (présence d'un terme source), l'aérosol acquiert une distribution des charges électriques stationnaire. Le temps mis pour atteindre cet

état stationnaire dépend de l'état de charge initial de l'aérosol et de la concentration en ions à l'équilibre. La connaissance de ce temps d'évolution est particulièrement importante en métrologie des aérosols.

Gunn [35] a montré que le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre de Boltzmann dans le cas d'un aérosol dont toutes les particules sont initialement neutres, s'exprime par la relation :

$$\tau_e = \frac{\varepsilon_0}{4\pi \cdot e \cdot n_t \cdot \bar{\mu}} \quad (3.39)$$

où τ_e représente le temps de mise en équilibre (s), n_t la concentration totale en ions (m^{-3}) et $\bar{\mu}$ la mobilité moyenne des ions positifs et négatifs ($\text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$).

Par la suite, Cooper et Reist [43] montrent que ce temps de mis à l'équilibre peut être considéré comme un temps caractéristique de charge ou de neutralisation d'un aérosol par diffusion des ions. En effectuant une analogie avec les propriétés dynamiques des aérosols, ce temps peut de définir comme un temps de relaxation électrique.

L'utilisation pratique de ce paramètre nécessite la connaissance des propriétés des petits ions présents dans le milieu. En se reposant sur des valeurs indiquées par Whitby et Clark, Cooper et Reist ont utilisé l'expression suivante du temps de mise à l'équilibre, afin de caractériser différents neutraliseurs :

$$\tau_e = 0,28 \times 10^{12} / n_t \quad (3.40)$$

où n_t représente la concentration totale en ions (m^{-3}).

III.5 Mécanismes de charge des particules

Les fines particules en suspension dans l'air peuvent recueillir des charges électriques grâce à plusieurs mécanismes qui sont : la charge naturelle par attachement des ions existant dans l'atmosphère et la triboélectrisation (les ions gazeux étant produit dans ce cas principalement à l'aide d'une source radioactive ou d'une décharge électrique). La densité d'ions peut être unipolaire (positive ou négative utilisée pour la charge des particules) ou bipolaire (utilisée pour la neutralisation de l'aérosol).

III.5.1 Charge naturelle par attachement

Dans l'atmosphère terrestre, il existe des ions positifs et négatifs générés sans interruption par l'action des radiations cosmiques et des gaz radioactifs émanant du sol. Comme présenté par Hinds [44], l'air contient environ 1000 ions/cm² avec en première approximation un nombre égal d'ions positifs et négatifs. Les particules d'aérosol qui sont initialement neutres, peuvent acquérir une charge par collision (due à leur mouvement thermique aléatoire) avec des ions. Les particules chargées vont avoir tendance à perdre leur charge lentement en attirant des ions de signe opposé. Donc, ce processus tend vers un état d'équilibre appelé « distribution de charge en équilibre de Boltzmann ». Cet équilibre de Boltzmann représente la distribution de charge d'un aérosol en présence d'ions bipolaires. Pour des concentrations égales d'ions positifs et négatifs dans l'air, en première approximation la fraction des particules f_n de taille donnée ayant n charges élémentaires positives ou négatives est donnée par :

$$f_n = \left(\frac{K_E \cdot e^2}{\pi d_p \cdot k_B \cdot T} \right)^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{-K_E \cdot n^2 \cdot e^2}{d_p \cdot k_B \cdot T} \right) \quad (3.41)$$

où K_E , constante proportionnalité électrique ; e , charge élémentaire ; d_p , diamètre de la particule ; k_B , constante de Boltzmann ; T , température.

Le tableau 3.2 montre le pourcentage de particules de taille donnée ayant la charge indiquée. La distribution est symétrique ; la fraction des particules avec n charges positives étant égale à la fraction avec n charges négatives.

d_p (μm)	Pourcentage des particules portant le nombre indiqué de charges								
	<-3	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	>+3
0,01				0,3	99,3	0,3			
0,02				5,2	89,6	5,2			
0,05			0,6	19,3	60,2	19,3	0,6		
0,1		0,3	4,4	24,1	42,6	24,1	4,4	0,3	
0,2	0,3	2,3	9,6	22,6	30,1	22,6	9,6	2,3	0,3
0,5	4,6	6,8	12,1	17,0	19,0	17,0	12,1	6,8	4,6
1,0	11,8	8,1	10,7	12,7	13,5	12,7	10,7	8,1	11,8
2,0	20,1	7,4	8,5	9,3	9,5	9,3	8,5	7,4	20,1
5,0	29,8	5,4	5,8	6,0	6,0	6,0	5,8	5,4	29,8
10,0	35,4	4,0	4,2	4,2	4,3	4,2	4,2	4,0	35,4

Tableau 3.2 Distribution de charge sur une particule en équilibre de Boltzmann [44].

III.5.2 Triboélectrisation

La triboélectrisation regroupe deux causes d'électrisation : le frottement et le contact. Dans la charge par frottement, c'est-à-dire quand deux particules différentes frottent l'une contre l'autre, il y a un transfert d'électrons (charges) à partir de la surface d'une particule vers celle de l'autre. Ce processus utilise la différence de structure électronique des deux surfaces en fonction desquelles une des particules devient positivement chargée et l'autre négativement chargée. Ce phénomène fait que dans les nuages de particules entraînées par un flux d'air, une forte proportion des particules est chargée par contact avec les parois ou par collisions.

La charge par contact se produit pendant la séparation de particules sèches et non conductrices de surfaces solides [44, 45]. Dans ce processus, quand une particule touche une surface, des charges sont transférées, si bien que la particule acquiert une charge nette positive ou négative quand elle se sépare de la surface. La polarité de la particule chargée et le nombre de charges sur celle-ci dépendent des matériaux et de leurs positions relatives dans les séries triboélectriques. Le frottement augmente le nombre de charges acquises. Parce qu'il requiert des surfaces sèches, le phénomène de charge par contact devient inefficace en conditions d'humidité relative plus grande que 65% environ.

III.5.3 Charge par charge d'espace ionique

Nous présentons dans cette section la phénoménologie de la charge des particules dans un champ électrique affecté par une charge d'espace ionique. Les mécanismes de charge sont expliqués et nous présentons, d'une manière critique, les modèles théoriques de charge les plus souvent utilisés dans l'étude de la précipitation électrostatique.

La principale cause de mise en mouvement des particules dans les filtres électrostatiques est la force de coulomb. Une augmentation de la charge des particules est donc nécessaire afin de produire leur migration vers les électrodes collectrices du précipitateur. Cela peut être provoqué par une forte densité d'ions due à une décharge couronne dans l'espace interélectrodes. Ce mécanisme de décharge sera décrit par la suite dans le deuxième chapitre. Le processus de décharge dépend alors de plusieurs facteurs parmi lesquels les plus importants sont la densité de charge ionique, l'intensité du champ électrique local, ainsi que la taille des particules. De nombreuses études ont montré que le procédé de charge peut être principalement attribué aux mécanismes :

- la charge par champ
- la charge par diffusion

- la charge mixte

Quel que soit le mécanisme, la charge électrique acquise par une particule est le résultat des interactions entre celle-ci et les ions résultant de la décharge couronne. Les deux mécanismes de décharge interviennent ensemble et leur importance relative est déterminée principalement par les dimensions des particules et l'intensité du champ électrique.

III.5.3.1 Charge par champ

Comme le suggère son nom, ce mécanisme de charge est relié à l'action du champ électrique. Une particule présente dans un gaz provoque une distorsion locale du champ électrique et les lignes de champ aboutissent à la surface de celle-ci. Cette distorsion locale du champ dépend de la nature de la particule: Lorsque la particule est conductrice la distorsion du champ est maximale. Pour une particule non-conductrice (isolante), la perturbation du champ dépend de sa permittivité. Ainsi, l'intensité du champ électrique augmente à la surface de la particule. Dans ce cas, les ions présents qui se déplacent le long des lignes de champ électrique, peuvent atteindre la surface de la particule. Chaque ion qui atteint la particule change la distribution locale du champ électrique. Tant que le champ électrique créé par la charge de la particule est inférieur au champ électrique maximum qui existe à la surface de celle-ci. Lorsque la charge acquise est suffisante, les lignes de champ contournent la particule, on dit que la particule a acquis la charge de saturation par champ q_p^s (figure 3.4).

Une première théorie concernant la charge par champ a été développée en 1923 par Rohmann et elle a été complétée par Pauthenier en 1932. Ces deux auteurs montrent que les ions arrivent sur une particule tant que la charge de celle-ci n'est pas suffisante pour les repousser, on parle alors d'une charge limite par champ q_s . Pauthenier a montré qu'à cause du phénomène de répulsion électrostatique, seule une partie réduite de la surface des particules est atteinte par les ions. Continuant dans le même esprit, d'autres auteurs ont apporté des contributions complémentaires. D'après McDonald [46], ce mécanisme de charge acquise par les particules dépend de leur diamètre, du champ électrique, de la densité d'ions présents, du temps de présence des particules dans le champ électrique, de la mobilité des ions et de la constante diélectrique ϵ_r de la matière constituant les particules. Ce processus de charge par champ cesse lorsque la particule porte une charge de saturation qui s'écrit [47]:

$$q_p^s = 3\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 2} d_p^2 \cdot E \quad (3.42)$$

où ϵ_0 la permittivité du vide ($\approx 8.85 \times 10^{-12}$ F/m), ϵ_r la permittivité relative de la matière constituant la particule, d_p le diamètre de la particule (m) et E le champ électrique (V/m).

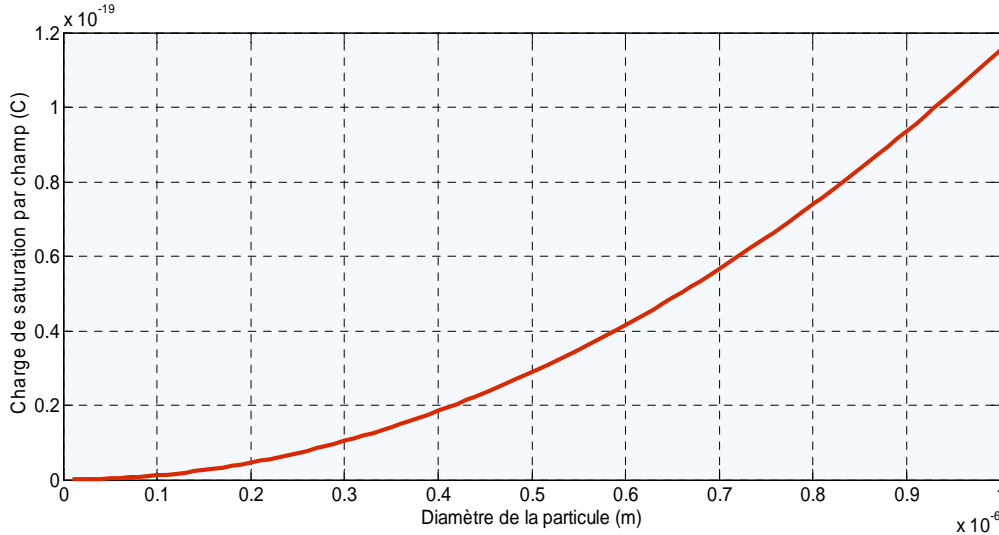


Figure 3.4 Variation de la charge de saturation en fonction du diamètre des particules.

$$(T = 293 \text{ K}, \epsilon_r = 4,5).$$

La quantité de charge d'une particule sphérique est donnée par l'équation de la charge par champ de Pauthenier [48] :

$$q_{pc}(t) = q_p^s \frac{t/\tau_c}{1 + t/\tau_c} \quad (3.43)$$

$$\text{avec : } \tau_c = \frac{4\epsilon_0}{\rho_i \cdot \mu_i} = \frac{4\epsilon_0}{e \cdot n_i \cdot \mu} = \frac{4\epsilon_0 \cdot E}{J} \quad (3.44)$$

où q_p^s est la charge de saturation (C), t le temps de charge (s), τ_c la constante de temps de charge par champ (s), J la densité de courant (A/m^2), ρ_i la densité de charges (C/m^3), μ la mobilité ionique ($m^2/V \cdot s$), e la charge électronique élémentaire ($\approx 1,6 \times 10^{-19}$ C) et n_i la concentration des ions dans l'espace (m^{-3}).

La charge dépend de la charge de saturation, du temps de charge et des propriétés physiques des particules (figure 3.5).

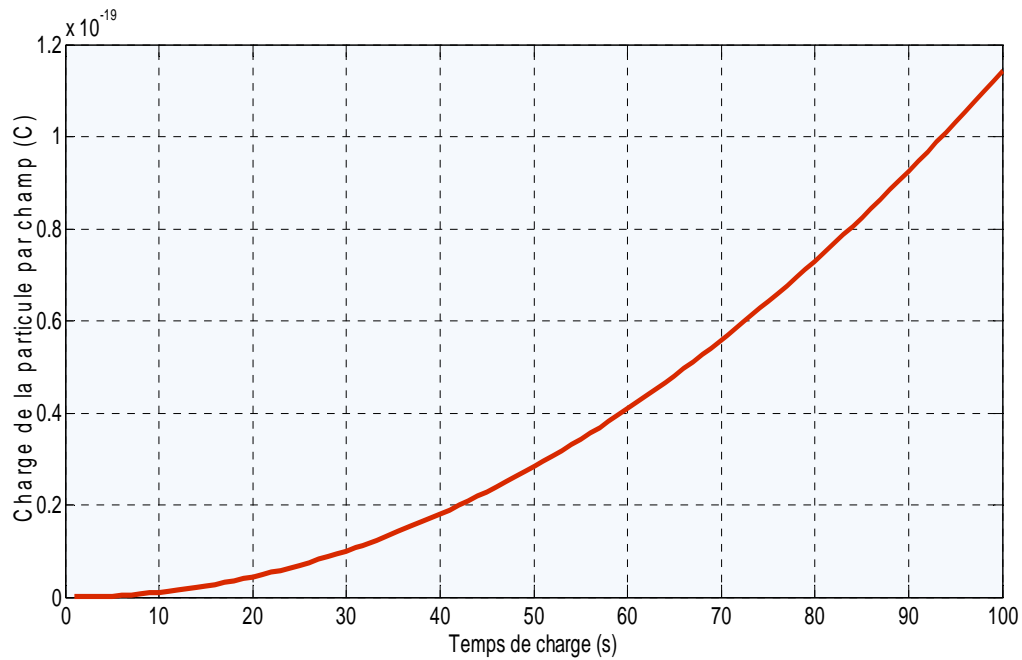


Figure 3.5 Variation de la charge de la particule par champ dans l'air atmosphérique

Nous constatons que la charge de particules par champ peut atteindre la charge maximale de saturation pour un temps de charge suffisamment grand (figure 3.6)

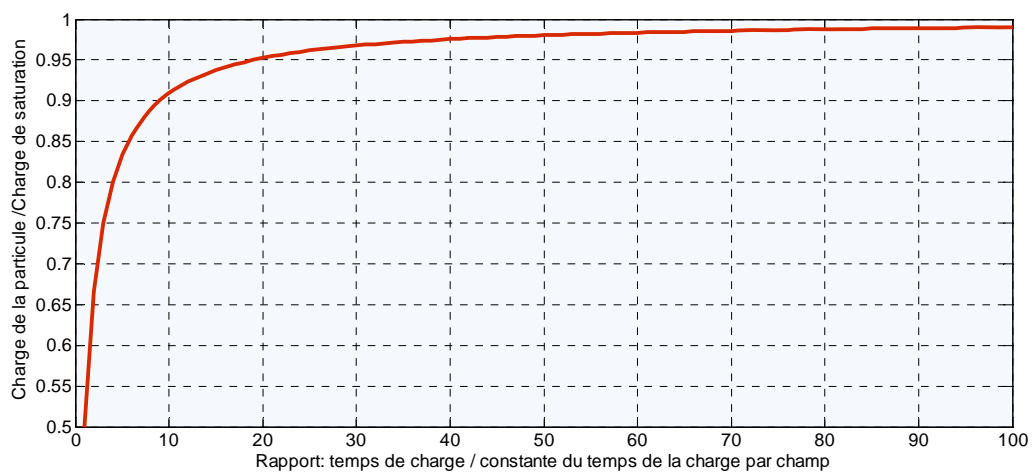


Figure 3.6 Caractéristique du rapport de charge sur le rapport du temps pour la charge des particules par champ

III.5.3.2 Charge par diffusion

Le processus de charge par diffusion a été imaginé pour expliquer la charge des particules lorsque le champ électrique appliqué est faible (ou même nul) et lorsque la taille des particules est suffisamment petite (figures 3.7 et 3.8). Il est alors nécessaire de prendre en compte le phénomène de diffusion des ions dans le processus de charge. Ce mécanisme mis en jeu la probabilité de collision entre les particules et les ions animés d'un mouvement aléatoire d'agitation thermique. Dans une zone où le champ électrique appliqué est nul, les ions ont une répartition uniforme autour des particules. Dans ces conditions, tous les éléments de surface d'une particule ont la même probabilité de choc avec les ions et la particule peut accumuler une certaine charge électrique. Ce mécanisme de charge par diffusion a une importance plus grande pour les particules très fines, d'un diamètre inférieur à $0,5\mu\text{m}$. Dans la charge par diffusion, la quantité de charge accumulée dépend de la taille des particules, de la densité des ions, de la vitesse moyenne d'agitation thermique des ions, de la constante diélectrique de la particule, de la température absolue du gaz, du temps de présence des particules au sein du champ. Selon Friedlander, l'expression de la charge d'une particule en fonction du temps s'écrit :

$$q(t) = \frac{d_p \cdot k_B \cdot T}{2e^2} \ln \left[1 + \left(\frac{2\pi}{m_+ \cdot k_B \cdot T} \right)^{1/2} \cdot d_p \cdot e^2 \cdot n_+ \cdot t \right] \quad (3.45)$$

où n_+ est la concentration des ions, k_B est la constante de Boltzmann, m_+ est la masse des ions, T est la température et t est le temps de charge.

La charge acquise est proportionnelle à d_p^2 pour le mécanisme de charge par champ et à d_p pour la charge par diffusion. La charge par champ est le phénomène dominant pour les particules plus grandes que $1\mu\text{m}$, et la charge par diffusion est le mécanisme dominant pour les particules plus petites que $1\mu\text{m}$, même en présence d'un champ électrique. Entre $0,1$ et $1\mu\text{m}$, ces deux mécanismes fonctionnent en même temps et la situation est beaucoup plus compliquée.

L'expression de la charge par diffusion $q_{pd}(t)$ d'une particule donnée par White [49] est :

$$q_{pd}(t) = q_d^s \cdot \ln \left(1 + \frac{t}{\tau_d} \right) \quad (1.46)$$

$$\text{avec } q_d^s = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot d_p \cdot k_B \cdot T}{e} \quad (1.47)$$

$$\tau_d = \frac{8\varepsilon_0 \cdot k_B \cdot T}{d_p \cdot v_{th} \cdot n_i \cdot e^2} = 8\varepsilon_0 \cdot \left[\frac{m_i \cdot k_B \cdot T}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{\mu \cdot E}{d_p \cdot J \cdot e} \right] \tag{3.48}$$

Où q_d^s est la charge maximale par diffusion ou constante de charge (C), τ_d la constante de temps de charge par diffusion (s), k_B la constante de Boltzmann ($\approx 1,38 \times 10^{-23}$ J/K), T la température (K), e la charge électronique élémentaire ($\approx 1,6 \times 10^{-19}$ C), v_{th} la vitesse d'agitation thermique des ions (m/s), n_i la concentration des ions dans l'espace (m^{-3}), m_i la masse d'un ion (kg) et μ la mobilité d'un ion ($m^2/V \cdot s$).

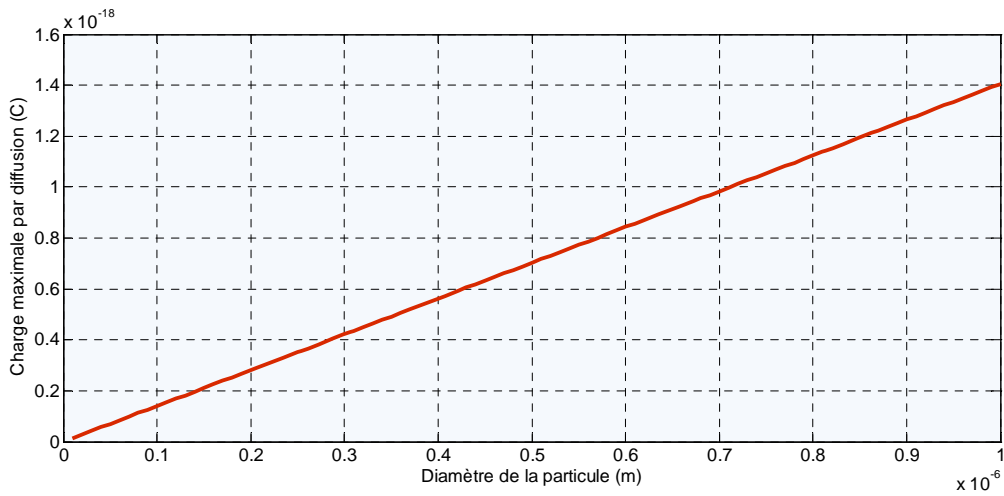


Figure 3.7 Variation de la charge maximale par diffusion en fonction du diamètre des particules ($T = 293$ K, $\varepsilon_r = 4,5$)

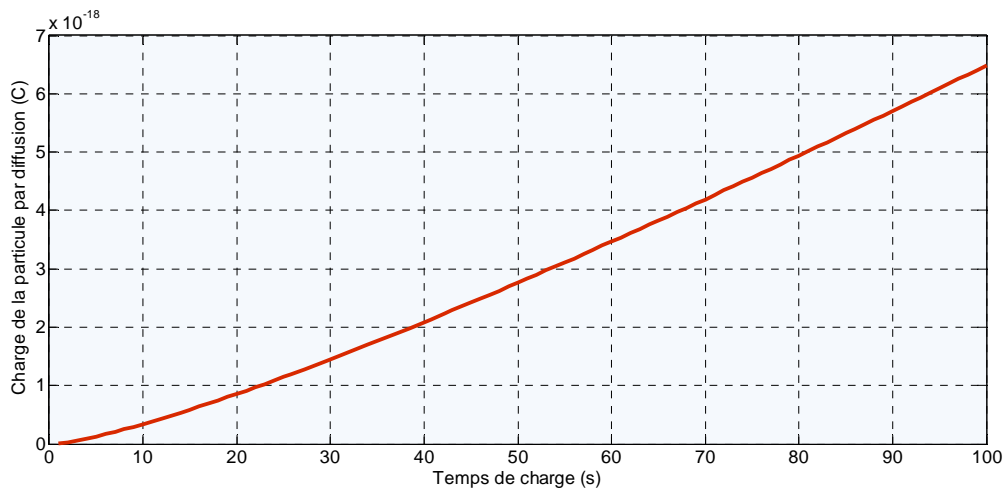


Figure 3.8 Variation de la charge par diffusion dans l'air atmosphérique ($T = 293$ K, $\varepsilon_p = 4,5$)

Nous constatons que la charge de particules par diffusion n'est pas limitée par une charge maximale de saturation quelque soit le temps de charge. C'est le cas inverse pour la charge par champ (figure 3.9).

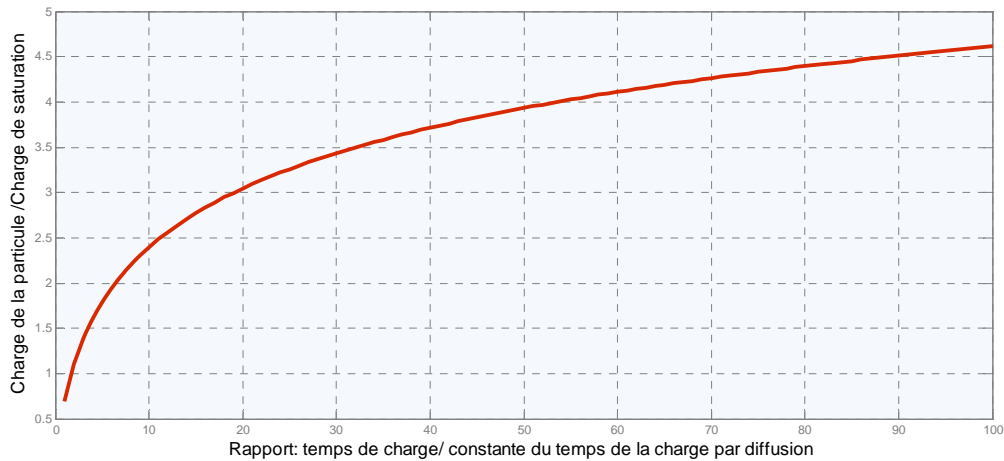


Figure 3.9 Caractéristique du rapport de charge sur le rapport du temps pour la charge des particules par diffusion

III.5.3.3 Charge mixte

Pratiquement, les deux mécanismes agissent ensemble pour les particules de taille comprise entre 0,5 et 1 μ m dans l'air. Cependant, la charge totale acquise par une particule n'est pas simplement la somme de la charge par champ et de la charge par diffusion. Les deux mécanismes interagissent et plusieurs traitements approchés ont été proposés pour résoudre ce problème très complexe.

Smith et McDonald [50] ont développé un modèle de charges de particules basé sur la théorie cinétique et qui tient compte simultanément des mécanismes de charge par champ et de charge par diffusion. En considérant que la charge des particules est très largement due au mouvement d'agitation thermique des ions, le champ électrique externe ne représente qu'un facteur perturbateur du phénomène de charge par diffusion. Ces auteurs considèrent qu'au voisinage d'une particule chargée, la distribution des ions est modifiée par le champ électrique.

Des travaux plus récents sur le processus de charge ont été développés par Fjeld [51] en 1989. L'auteur considère qu'une particule peut accumuler une certaine charge sous l'effet du champ électrique ou par diffusion, suivant l'importance des deux mécanismes. Il établit des relations pour la charge par champ et par diffusion en tenant compte du couplage entre les

deux mécanismes. Pour cela il distingue deux régimes de charge : un régime où la charge par champ et la charge par diffusion sont présentes en même temps. Un autre où la particule a atteint la charge limite par champ et où seule la charge par diffusion intervient. Les relations établis par Fjeld conduisent à des valeurs de charges cohérentes avec les résultats expérimentaux obtenues en 1957 par Hewitt mais seulement dans le cas où le champ électrique extérieur est faible.

Lawless et Altman [52] ont amélioré le modèle de Fjeld en modifiant les lois de charge qui, cette fois-ci, conduisent à de bons résultats même dans le cas où le champ électrique extérieur est important. A partir d'arguments physiques, ils obtiennent des relations assez simples qui prennent en compte les interactions des mécanismes de charge.

En définitive, pour relier la vitesse de migration w_E à la taille des particules on utilise la relation (3.44). Elle donne la charge limite d'une particule qui se trouve dans un champ électrique d'intensité E en tenant compte de manière indirecte de l'effet de la charge par diffusion (elle offre une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux pour $d_p > 0,3 \mu\text{m}$:

$$q_p' = \left[\left(1 + \frac{2\lambda}{d_p} \right)^2 + \left(\frac{2}{1 + 2\lambda/d_p} \right) \left(\frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2} \right) \right] \pi \varepsilon_0 \cdot d_p^2 \cdot E \quad (3.44)$$

avec λ le libre parcours moyen des molécules et ε_0 la permittivité du vide. La figure 3.10 présente les variations de la charge limite en fonction du diamètre des particules ($\varepsilon_p = 4,5$) en considérant plusieurs valeurs de l'intensité du champ électrique E .

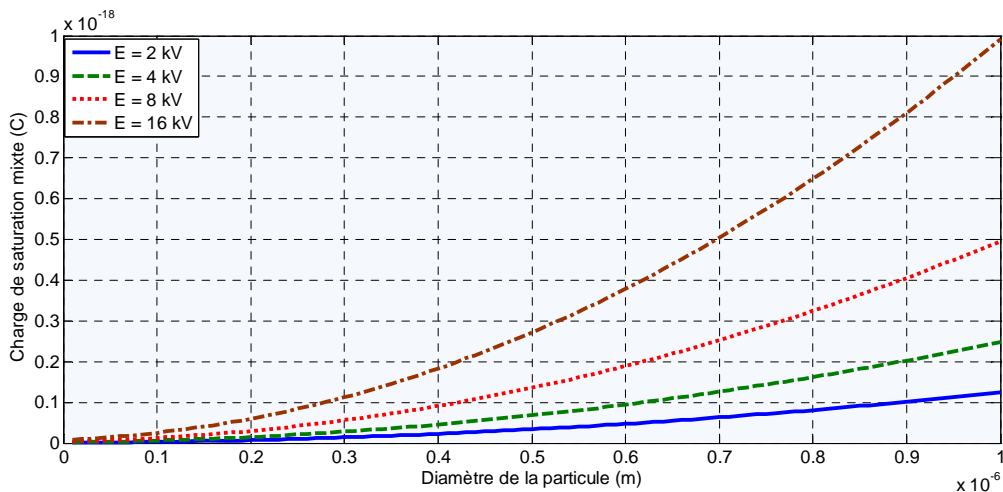


Figure 3.10 Variation de la charge de saturation des particules en fonction du diamètre d_p Pour différentes valeurs du champ électrique

$$(\lambda = 0,065\mu\text{m}, \varepsilon_r = 4,5, T = 20^\circ\text{C}).$$

III.6 Conclusion

Nous avons vu qu'il existe beaucoup d'études sur les petits ions, que ce soit sur les ions atmosphériques, ou sur ceux créés artificiellement et utilisés en métrologie des aérosols. Nous remarquons de plus, qu'il existe une assez grande variabilité des résultats, donc des caractéristiques des petits ions. Cette variabilité provient des divers mécanismes complexes, intervenant dans la création et dans l'évolution des ions, ces mécanismes étant sensibles aux conditions environnementales.

En revanche, nous avons trouvé très peu d'études expérimentales où les propriétés des ions sont étudiées conjointement avec la charge électrique des aérosols. Pourtant, les études théoriques montrent que la charge électrique d'un aérosol est sensible aux propriétés des ions présents dans le milieu et que cette sensibilité peut être importante lors de la métrologie fine de la charge d'un aérosol.

Nous pouvons remarquer que le nombre moyen de charges est fonction d'un "paramètre d'asymétrie des ions". Ce paramètre représente le rapport entre les conductibilités électriques unipolaires dues aux ions positifs et négatifs, et donc l'asymétrie entre les flux d'ions positifs et négatifs sur une particule. Signalons que lorsque ce rapport est égal à 1, nous retrouvons la distribution définie par l'équilibre de Boltzmann.

L'équilibre de Boltzmann peut décrire la distribution des charges électriques d'un aérosol en milieu bipolaire. Toutefois cette loi ne tient pas compte des propriétés physiques des petits ions présents dans le gaz (coefficients de diffusion, mobilités électriques, concentrations).

A l'heure actuelle, les principaux développements des moyens de métrologie des particules ultrafines concernant notamment les mesures de granulométrie en temps réel, les mesures de surfaces et la détection de particules de natures spécifiques (chimique, biologique).

Quoiqu'il en soit, l'augmentation des connaissances au sujet des propriétés électriques des aérosols tend à confirmer leur rôle majeur dans la précipitation électrostatique et une meilleure connaissance de leurs propriétés électriques paraît aujourd'hui indispensable.

Chapitre IV

*Modélisation de la décharge
couronne*

IV.1 Introduction

L'usage des ordinateurs de toutes puissances a conduit à l'émergence d'une discipline nouvelle : la modélisation. Elle consiste à représenter l'évolution des paramètres les plus importants d'un système par un ensemble d'équations n'admettant généralement pas de solution analytique mais pouvant être résolues numériquement. L'intérêt considérable de ces modèles est qu'ils permettent de simuler le fonctionnement d'un système dans une très vaste plage de conditions expérimentales à un coût très inférieur à celui des expériences en vraie grandeur.

En vue du passage d'un problème exact et continu au problème discret et approché, nous disposons de plusieurs techniques concurrentes. A priori, nous allons susciter un aperçu général sur les techniques numériques largement utilisées soit pour le calcul du potentiel électrique soit pour l'évaluation de la densité de la charge d'espace, par la suite, nous présenterons une étude détaillée de la méthode des éléments finis et son application aux calculs de la répartition du potentiel électrique et de la distribution de la charge d'espace.

IV.2. Description mathématique de la décharge couronne bipolaire

La configuration bipolaire étudiée consiste en deux électrodes cylindriques de rayon R , suspendues horizontalement à une hauteur H au dessus d'un plan mis à la terre, et distantes d'une distance D (figure 4.1).

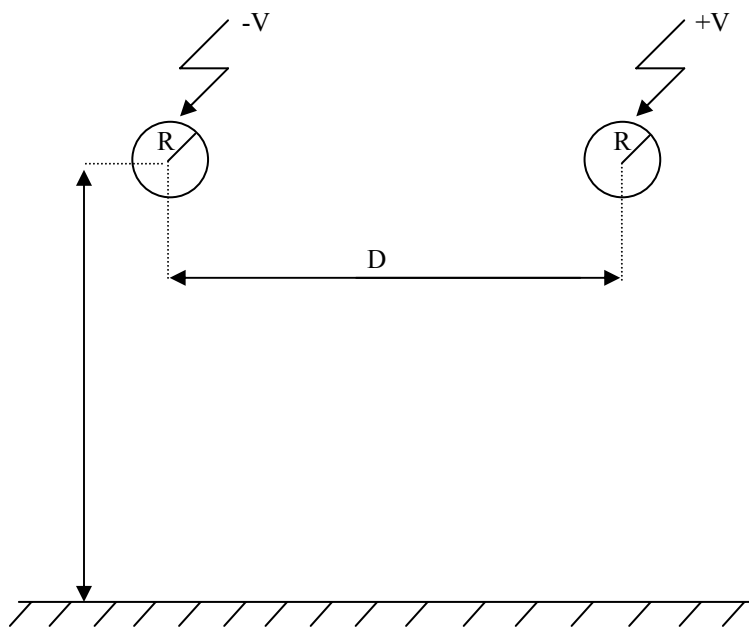


Figure 4.1 : Configuration d'une ligne bipolaire

Les équations mathématiques décrivant le problème dans l'intervalle d'air inter-électrodes lors de la décharge couronne bipolaire sont [53]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{(\rho_+ - \rho_-)}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_+ = \frac{-R_i \cdot \rho_+ \cdot \rho_-}{q_e} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_- = \frac{R_i \cdot \rho_+ \cdot \rho_-}{q_e} \quad (4.3)$$

$$\vec{J}_+ = \rho_+ \cdot \mu_+ \cdot \vec{E} - D_+ \cdot \nabla \cdot \rho_+ \quad (4.4)$$

$$\vec{J}_- = \rho_- \cdot \mu_- \cdot \vec{E} + D_- \cdot \nabla \cdot \rho_- \quad (4.5)$$

L'espace inter-électrodes est rempli d'ions des deux polarités positive et négative tel que : $\rho = \rho_+ - \rho_-$

Avec : ρ_+ et ρ_- sont respectivement, les densités de charge d'espace des ions positifs et des ions négatifs;

q_e : la charge de l'électron;

E : est le champ électrique ;

ϵ_0 : est la permittivité de l'air ;

R_i : est le coefficient de recombinaison des ions;

J : est le vecteur de la densité du courant.

μ_+ et μ_- sont respectivement, les mobilités moyennes des ions positifs et des ions négatifs;

D_+ et D_- sont respectivement, les coefficients de diffusion des ions positifs et des ions négatifs.

L'équation de Poisson s'écrit :

$$\nabla^2 \varphi = - \left(\frac{(\rho_+ - \rho_-)}{\epsilon_0} \right) \quad (4.9)$$

Dans le cas de la décharge couronne monopolaire, l'effet couronne est gouverné par un ensemble d'équations qui représentent une forme réduite des équations de Maxwell [53, 54] :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \pm \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.11)$$

$$\vec{J} = \pm \rho \cdot \mu \cdot \vec{E} + D \cdot \nabla \rho \quad (4.12)$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (4.13)$$

où ρ : est la densité de la charge d'espace;

μ : est la mobilité moyenne des ions;

D : coefficient de diffusion ionique ici nous ne tenons pas compte de diffusion ($D = 0$).

En remplaçant (4.13) dans (4.10), nous obtenons l'équation de poisson dans le cas de la décharge couronne monopolaire sous la forme suivante :

$$\nabla^2 \phi = \mp \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.14)$$

En remplaçant (4.13) et (4.12) dans (4.11), nous obtenons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$-\nabla(\rho \cdot \nabla \phi) = 0 \quad (4.15)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$-\nabla(\rho \cdot \nabla \phi) = -(\nabla \rho \cdot \nabla \phi + \rho \cdot \nabla^2 \phi) = 0 \quad (4.16)$$

En remplaçant (4.14) dans (4.16), nous obtenons :

$$\nabla \rho \cdot \nabla \phi = \frac{\rho^2}{\varepsilon_0} \quad (4.17)$$

Les équations aux dérivées partielles couplées doivent être résolues par rapport au potentiel électrique ϕ et la densité de charge ρ , qui sont fonctions de la position dans l'espace inter- électrodes.

La substitution de ρ dans l'équation (4.15) nous conduit à décrire le problème par l'équation générale des champs ionisés suivante :

$$\nabla((\nabla \nabla \phi \nabla \phi)) = \nabla(\nabla^2 \phi) + \nabla^2 \phi = 0 \quad (4.18)$$

La résolution de cette équation non-linéaire aux dérivées partielles du troisième ordre, nécessite la connaissance des conditions aux limites. En déterminant le potentiel électrique, nous pouvons déduire facilement les autres grandeurs intéressantes.

IV.3. Hypothèse et approximation

IV.3.1. mobilité ionique

Dans la résolution du problème de la décharge couronne, la mobilité des ions est une grandeur physique importante. Pour cela sa valeur moyenne pour les ions positifs de l'air reste difficile à évaluer. Les valeurs attribuées par divers auteurs sont diversifiées. La valeur la plus élevée est voisine de $2,5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Elle dépend de la chute de tension dans la zone de dérive et de l'humidité absolue.

IV.3.2. Approximation de Deutsch et Popkov

L'analyse approximative de Deutsch date de 1933 [55], elle inclut deux hypothèses simplificatrices :

- La présence de la charge d'espace modifie l'amplitude du champ électrique laplacien et non sa direction;
- La densité de la charge d'espace est constante dans l'espace inter-électrodes;

En 1949, Popkov a apporté d'autres suppositions supplémentaires [56]:

- La zone d'ionisation est négligeable, l'espace inter-électrodes est constitué uniquement de la zone de dérive caractérisée par une charge d'espace monopolaire;
- La mobilité des ions est constante;
- La diffusion thermique des ions est négligeable ;
- Le champ électrique à la surface de l'électrode active est égal au champ seuil lorsque la tension appliquée est supérieure ou égale à la tension seuil.

IV.4 Conditions aux limites

IV.4.1 Les conditions aux limites de Townsend et Kaptzov

Townsend suppose que le champ électrique sur l'électrode active (fil) demeure constant partout égal à la valeur seuil. Kaptzov suppose que la distribution du champ à la surface du conducteur couronné reste constante et est égale à sa valeur seuil même si la tension appliquée augmente [56].

IV.4.2. Domaine d'étude et limites artificielles

Le choix des frontières qui doivent délimiter le domaine de calcul n'est pas évident si nous considérons des conditions aux limites de Dirichlet c'est-à-dire, les valeurs du potentiel sur ces frontières doivent être connues (figure 4.2). Le potentiel ne peut être considéré égal à zéro que si ces frontières représentent l'infinie. Dans notre cas nous délimitons le domaine de calcul de la manière suivante :

- La longueur du plan mis à la terre est prise égale à la longueur du plan utilisé au laboratoire;
- La frontière au dessus des électrodes actives est prise égale à une hauteur bien déterminée;
- La configuration étudiée est ramenée à deux dimensions dans le plan (ox, oy) ;
- Le domaine d'étude est ramené à la moitié du plan d'où la construction du maillage autour d'un seul conducteur (conducteur à couronne positive).

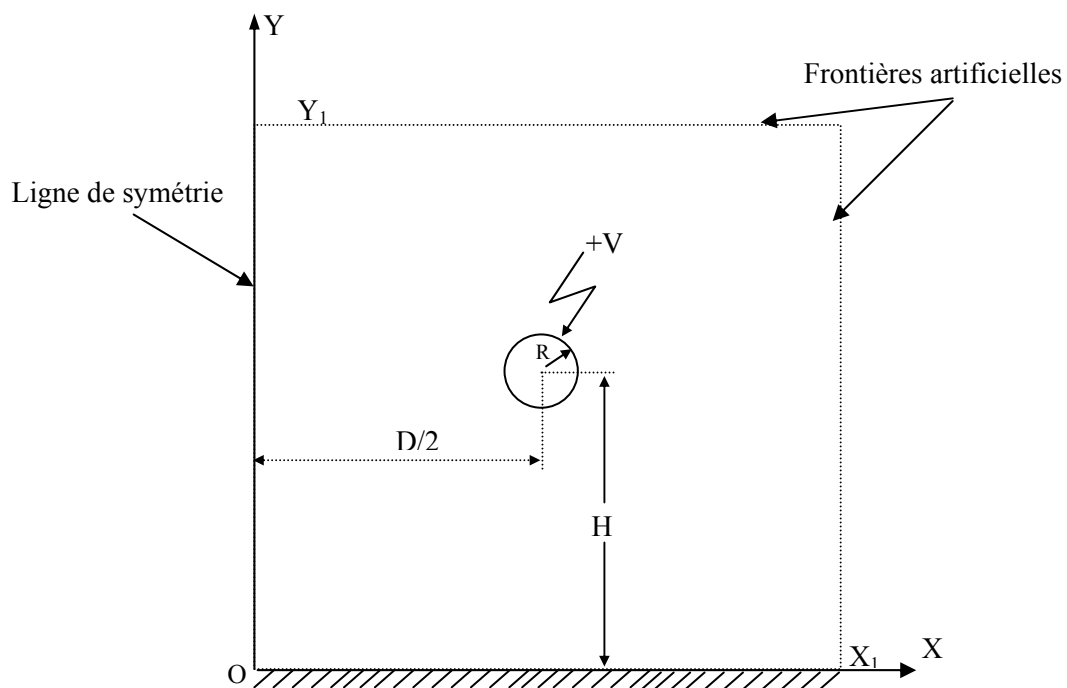


Figure 4.2 : Domaine d'étude et limites artificielles

La résolution des équations gouvernant la décharge couronne dans le domaine d'étude, peut donner plusieurs solutions ; cependant, seulement une d'elle est la solution réelle du problème. Pour trouver cette solution, nous devons connaître les conditions aux limites

associées au domaine pour le potentiel électrique φ et la densité de charge d'espace ρ , ces conditions sont les suivantes :

- i* - La valeur du potentiel sur l'électrode active est égale à la tension appliquée V_{app} ;
- ii* - Le potentiel à la surface du plan est nul ;
- iii* - Le champ électrique sur le conducteur est égal au champ seuil E_s (critère de Peck [37] et l'approximation de Kaptzov [57]) ;
- iv* - Les valeurs du potentiel aux points qui se situent sur les frontières artificielles sont relevées et utilisées par la suite dans la formulation par élément finis.

IV.5 Différentes étapes de la résolution numérique

Le maillage utilisé pour la discrétisation du domaine de résolution est obtenu à partir d'une distribution d'un certain nombre de nœuds définis par l'intersection des contours avec les lignes de champ électrique. Les éléments triangulaires linéaires sont obtenus par la division en deux de chaque quadrilatère formé par l'intersection de deux contours consécutifs avec deux lignes de champ consécutives.

La procédure de résolution du maillage électrostatique est décrite dans les étapes suivantes :

IV.5.1 Tracé des lignes de champ et du maillage électrostatique

Les lignes de champ prennent naissance à la surface de l'électrode et se terminent sur la frontière artificielle ou sur le plan mis à la terre.

Le traçage de ces lignes se fait à l'aide de la méthode des images électrique, qui est décrite comme suit figure (4.3) :

Pour un point $P_1(x_1, y_1)$ sur la surface du conducteur, le potentiel φ en ce point est donné par :

$$\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2 R_3}{R_1 R_4}\right) \quad (4.19)$$

Avec :

$$R_1 = \sqrt{(x_q - x_1)^2 + (y_q - y_1)^2} \quad (4.20)$$

$$R_2 = \sqrt{(x_q + x_1)^2 + (y_q - y_1)^2} \quad (4.21)$$

$$R_3 = \sqrt{(x_q - x_1)^2 + (y_q + y_1)^2} \quad (4.22)$$

$$R_4 = \sqrt{(x_q + x_1)^2 + (y_q + y_1)^2} \quad (4.23)$$

Où x_q et y_q sont les coordonnées de la charge linéique q . $P_1(x_1, y_1)$ est le point sur la surface pour $R_1 = R$; $R_2 = D$; $R_3 = 2H$ et $R_4 = \sqrt{(2H)^2 + D^2}$ avec R est le rayon des électrodes.

Avec : R est le rayon des électrodes ;

D est la distance inter-électrodes ;

H est la hauteur des électrodes par rapport au plan.

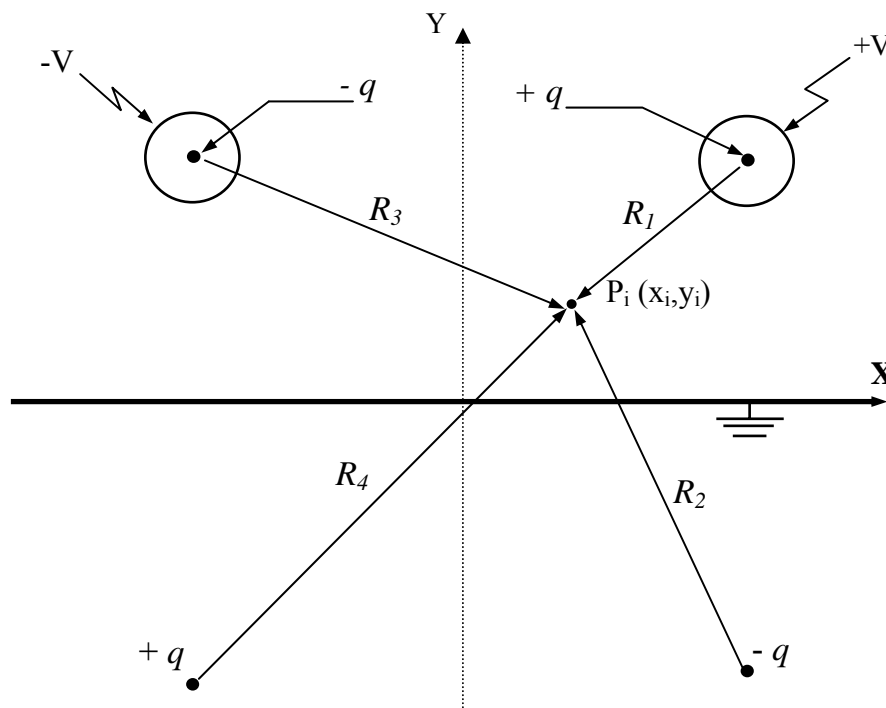


Figure 4.3 : Représentation par des charges et de leurs images des conducteurs de la ligne de transmission bipolaire.

La charge d'espace est donnée par :

$$\pm q = 2\pi\epsilon_0 V \left/ \ln \left(\frac{2HD}{R\sqrt{(2H)^2 + D^2}} \right) \right. \quad (4.24)$$

Les composantes E_{x1} et E_{y1} , du champ électrique sont données par la relation suivante :

$$E_{x1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[-\frac{(x_q - x_1)}{R_1^2} - \frac{(x_q + x_1)}{R_2^2} + \frac{(x_q - x_1)}{R_3^2} + \frac{(x_q + x_1)}{R_4^2} \right] \vec{a}_x \quad (4.25)$$

$$E_{y1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[-\frac{(y_q - y_1)}{R_1^2} + \frac{(y_q - y_1)}{R_2^2} - \frac{(y_q + y_1)}{R_3^2} + \frac{(y_q + y_1)}{R_4^2} \right] \vec{a}_y \quad (4.26)$$

$$E_{r1} = \sqrt{(E_{x1}^2 + E_{y1}^2)} \quad (4.27)$$

Une fois que nous avons déterminé le potentiel et le champ électrique au point $P_1(x_1, y_1)$ considéré comme point de départ, nous cherchons les coordonnées du point $P_2(x_2, y_2)$, à un incrément de distance Δr du point $P_1(x_1, y_1)$, et cela se fait par itération jusqu'à l'atteinte de la frontière figure(4.4).

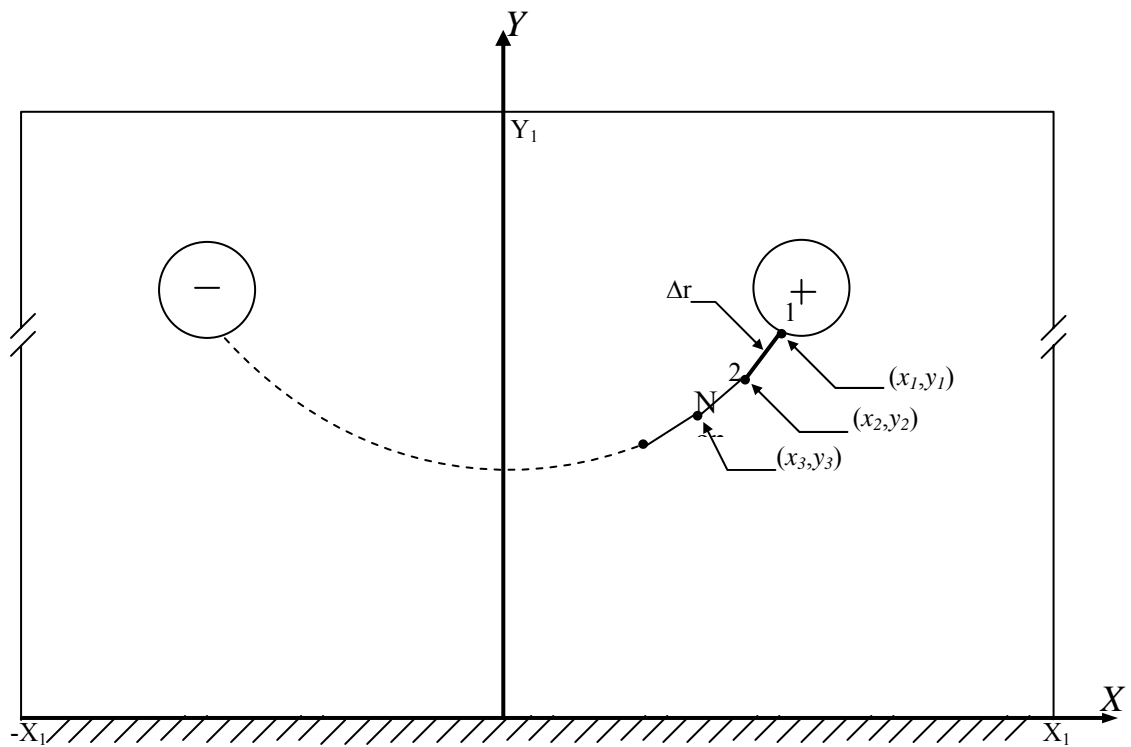


Figure 4.4: Tracé d'une ligne de champ.

La méthode est décrite comme suit :

- ✳ Choisir le point de départ $P_1(x_1, y_1)$;
- ✳ Calcul du potentiel et du champ électrique E_x et E_y en ce point ;
- ✳ Fixé un incrément de distance Δr ;
- ✳ Calcul des coordonnées du nouveau point $P_2(x_2, y_2)$ de la ligne de champ par :

$$x_2 = x_1 + \frac{E_{x1}}{E_{r1}} \Delta r \quad (4.28)$$

$$y_2 = y_1 + \frac{E_{y1}}{E_{r1}} \Delta r \quad (4.29)$$

- ✱ La même procédure pour le calcul des coordonnées du point $P_3(x_3, y_3)$, et ainsi de suite jusqu'à le tracé complet de la ligne de champ.

Cette démarche est répétée selon le nombre de lignes de champ que nous désirons à tracer.

Les lignes de champ émanent de N nœuds de la circonférence du conducteur, sont localisés chacune par l'angle θ_j (figure 4.5):

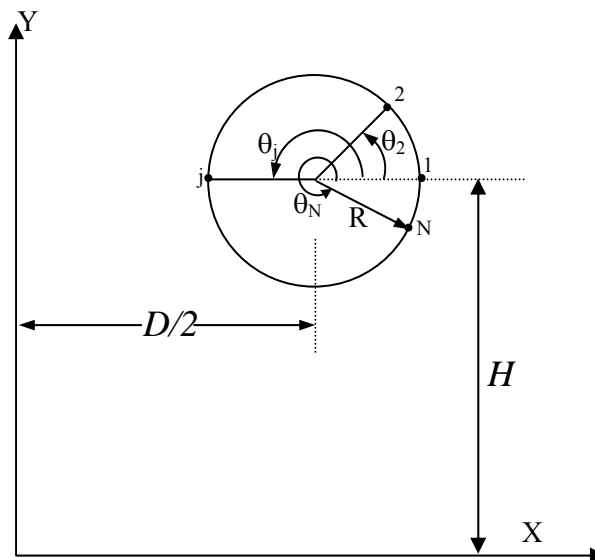


Figure 4.5: Localisation des nœuds sur la surface du conducteur d'où émanent les lignes de champ.

Pour la $i^{\text{ème}}$ ligne de champ qui a son $j^{\text{ème}}$ nœud équipotentiel à l'extérieur des limites artificielles (figure 4.6), une interpolation linéaire entre les coordonnées des nœuds $(i, j-1)$ et (i, j) est effectuée pour déterminer les coordonnées appropriées du nouveau nœud sur cette frontière [58].

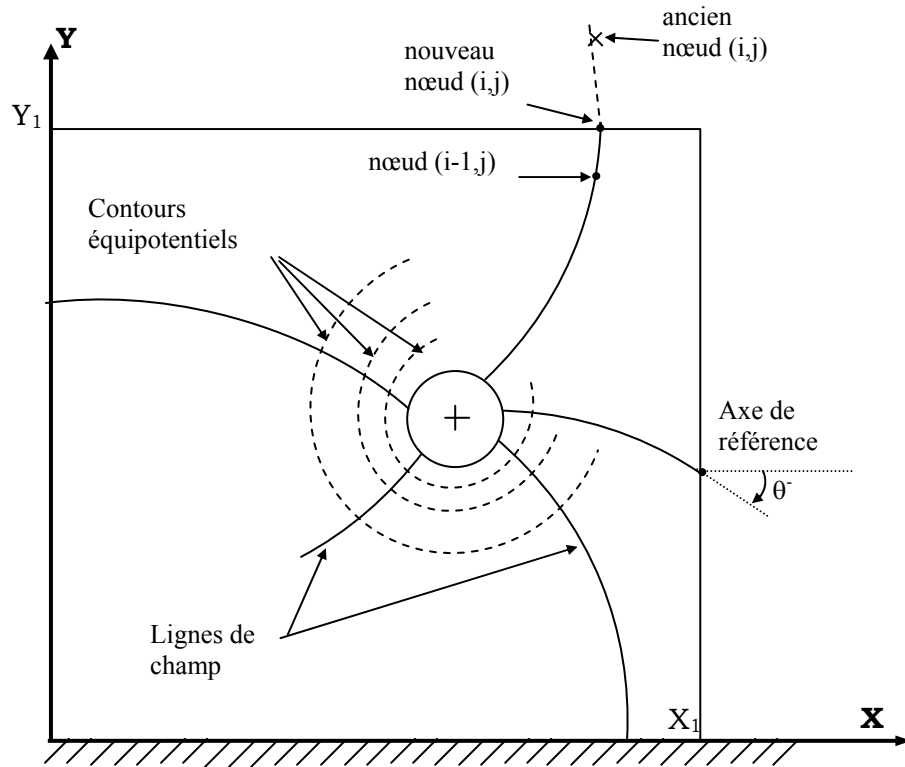


Figure 4.6: interpolation linéaire entre nœuds et Construction de quelques lignes de champ et contours équipotentiels.

IV.5.2 L'évaluation d'erreur

Les résultats obtenus de $\varphi^{(1)}$ et $E^{(1)}$ dans l'étape (1) seront comparés à ceux que l'on obtiendra en utilisant la méthode des éléments finis (MEF).

Pour commettre moins d'erreurs, on est amené à réestimer le champ électrique $E_{i,j}^{(1)}$ aux nœuds du maillage par la méthode d'interpolation/extrapolation, et ce résultat sera utilisé pour estimer la densité de la charge d'espace.

IV.5.3 Première estimation de la charge d'espace

L'estimation initiale des densités positive et négative de la charge d'espace localisées, au nœud (i, j) autour de la périphérie du conducteur à couronne positive est donné par :

$$\rho_{+1,j} = \rho_e \cdot \cos\left(\frac{\pi - \theta_i}{2}\right), \quad j=1 : N \quad (4.30)$$

$$\rho_{-1,j} = 0.01 \cdot \rho_{+1,j}, \quad j=1 : N_c \quad (4.31)$$

Sachant que N est le nombre total de lignes de champ, et N_c le nombre de lignes de champ dans la région bipolaire. ρ_e est la valeur de $\rho_+(1, j)$ à $\theta_j = \pi$.

La valeur de ρ_e est estimée en utilisant une expression approximative de la densité de la charge d'espace sur l'axe y .

$$\rho_e = \frac{E_y D}{E_{\text{crit}} R} 8\varepsilon_0 V_0 (V - V_0) / [D^2 V (5 - 4V_0/V)] \quad (4.32)$$

où E_y est le champ électrique Laplacien au point se trouvant sur l'axe y à une distance H du plan, V_0 et E_{crit} sont respectivement la tension seuil et le champ critique de l'apparition de l'effet couronne.

En remplaçant les équations (4.4) et (4.5) respectivement, dans les équations (4.2) et (4.3) et après réarrangement nous obtenons en chaque nœud (i, j) :

$$\frac{\partial \rho_{+i,j}}{\partial \ell} = -\frac{\rho_{+i,j}}{E} \left[R_i \frac{\rho_{-i,j}}{e_{k+}} + \frac{(\rho_{+i,j} - \rho_{-i,j})}{\varepsilon_0} \right] \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \rho_{-i,j}}{\partial \ell} = \frac{\rho_{-i,j}}{E} \left[R_i \frac{\rho_{+i,j}}{e_{k-}} - \frac{(\rho_{+i,j} - \rho_{-i,j})}{\varepsilon_0} \right] \quad (4.34)$$

où ℓ est la longueur mesurée le long de l'axe du tube de flux.

Pour la résolution des équations (4.33) et (4.34), nous avons utilisé la méthode d'Euler corrigé qui est décrite par l'organigramme suivant :

- Donner ρ_e ;
- Calculer h ;
- Pour i allant de 0 à $n-1$;

$$\rho_+(i+1, j) = \rho_+(i, j) + h \left[-\frac{\rho_+(i, j)}{E(i, j)} \left(R_i \frac{\rho_-(i, j)}{e_{k+}} + \frac{\rho_+(i, j) - \rho_-(i, j)}{\varepsilon_0} \right) \right] \quad (4.35)$$

- Les valeurs corrigées :

$$\rho_+(i+1, j) = \rho_+(i, j) + h \left[\frac{\rho_+(i, j)}{E(i, j)} \left(R_i \frac{\rho_-(i, j)}{e_{k+}} + \frac{\rho_+(i, j) - \rho_-(i, j)}{\varepsilon_0} \right) \right] - h \left[\frac{\rho_+(i+1, j)}{E(i+1, j)} \left(R_i \frac{\rho_-(i+1, j)}{e_{k+}} + \frac{\rho_+(i+1, j) - \rho_-(i+1, j)}{\varepsilon_0} \right) \right] \quad (4.36)$$

- Fin.

IV.5.4 Estimation du potentiel électrique

Dans l'étape précédente, un estimé initial de la densité de la charge d'espace est donné en tout nœud du maillage. Le premier calcul du potentiel Laplacien est donné en absence de la charge d'espace. La deuxième estimation du potentiel électrique en présence de la charge d'espace est donnée en utilisant la technique des éléments finis.

IV.5.5 Correction de la densité de la charge d'espace

Comparant les deux dernières estimations du potentiel aux nœuds $\varphi_{i,j}^{(m)}$ et $\varphi_{i,j}^{(m+1)}$, e_n est l'erreur relative du potentiel qui est donné par :

$$e_n = \left| \varphi_{i,j}^{(nm)} - \varphi_{i,j}^{(nm+1)} \right| / \varphi_{\text{moy}} \quad (4.37)$$

$$\text{avec : } \varphi_{\text{moy}} = \left(\varphi_{i,j}^{(nm)} + \varphi_{i,j}^{(nm+1)} \right) / 2 \quad (4.38)$$

Si le maximum de e_n le long de l'axe du $j^{\text{ème}}$ tube de flux excède la valeur spécifiée, une correction de la densité de la charge d'espace positive et négative sur la surface du conducteur sera effectuée.

$$\rho_{\pm 1, j_{\text{new}}} = \rho_{\pm 1, j_{\text{old}}} \left[1 + \omega \cdot \max(\varphi_{i,j}^{(nm+1)} - \varphi_{i,j}^{(nm)}) / \varphi_{\text{moy}} \right], i = 1, M \quad (4.39)$$

où ω est un facteur d'accélération de la convergence.

IV.5.6 Reconstruire le maillage orthogonal

Les étapes nécessaires à la génération du second maillage sont les mêmes que dans le cas précédent. Il faut noter que dans ce cas le tracé des lignes de champ et des équipotentielles n'est pas du seulement à la tension appliquée, mais aussi à toutes les charges estimées précédemment.

Les étapes (3) à (6) sont répétées jusqu'à ce que la différence en valeur de la densité de la charge d'espace entre deux maillages successifs soit inférieure à une erreur définie au préalable.

La procédure de résolution est résumée dans l'organigramme de la figure (4.7).

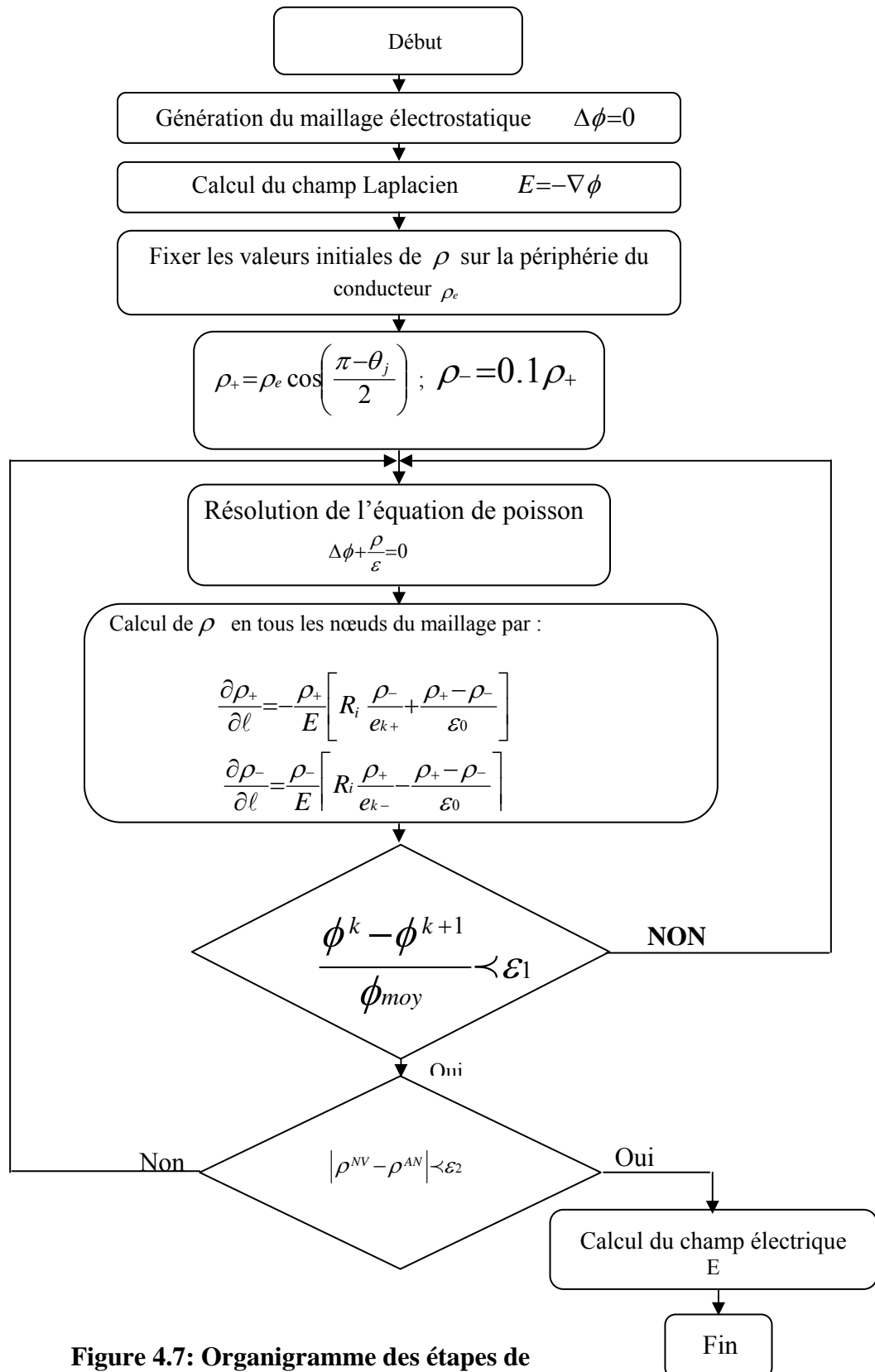


Figure 4.7: Organigramme des étapes de résolution numérique.

IV.6 Résolution de l'équation de Poisson par la MEF

Cette étape constitue l'étape de résolution de l'équation de Poisson par la MEF dont la procédure d'exécution est donnée ci-dessous [21, 59, 60].

IV.6.1 Formulations matricielles de la MEF

Lorsque nous utilisons les techniques matricielles, nous sommes amenés successivement à s'intéresser à deux niveaux de formulation :

- La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini ;
- La formulation globale au niveau de la structure complète.

L'équation de Poisson pour deux dimensions, est donnée sous la forme:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + \rho(x, y) / \varepsilon_0 = 0 \quad (4.40)$$

D'après le théorème d'Euler, la résolution de cette équation différentielle est équivalente à minimiser la fonctionnelle d'énergie W qui s'écrit :

$$W = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] - \rho / \varepsilon_0 \right] dx dy \quad (4.41)$$

L'intégrale est étendue à un ensemble du domaine de calcul, que l'on subdivise en petits éléments par maillage triangulaire où chaque triangle est repéré par ses trois sommets (nœuds) Les polynômes d'interpolations du potentiel aux sommets du triangle sont donnés par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ \phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{cases} \quad (4.42)$$

La résolution du système (4.42), nous donne les coefficients α_i :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2\Delta_e} [a_1 \cdot \phi_1 + a_2 \cdot \phi_2 + a_3 \cdot \phi_3] \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta_e} [b_1 \cdot \phi_1 + b_2 \cdot \phi_2 + b_3 \cdot \phi_3] \\ \alpha_3 = \frac{1}{2\Delta_e} [c_1 \cdot \phi_1 + c_2 \cdot \phi_2 + c_3 \cdot \phi_3] \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} a_1 = x_2 \cdot y_3 - x_3 y_2 & b_1 = y_2 - y_3 & c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3 \cdot y_1 - x_1 y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1 \cdot y_2 - x_2 y_1 & b_3 = y_1 - y_2 & c_3 = x_2 - x_1 \end{cases} \quad (4.44)$$

$$2 \cdot \Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = b_1 c_2 - b_2 c_1 : \text{L'aire de l'élément triangulaire.} \quad (4.45)$$

Le potentiel en tout point d'un élément (e) est exprimé par la relation:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \phi_i \cdot N_i(x, y) = [N_1 N_2 N_3] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\text{Avec: } N_i(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \Delta_e} (a_i + b_i x + c_i y) \quad ; i=1, 2, 3 . \quad (4.47)$$

Les fonctions N_i sont appelées fonctions de formes. Elles doivent vérifier la condition suivante :

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (4.48)$$

La minimisation de la fonctionnelle W est réalisée quand les dérivées partielles par rapport à tous les potentiels des nœuds sont nulles, c'est-à-dire : $\frac{\partial W}{\partial \{\phi\}} = 0$. Avec $\{\phi\}$ est le vecteur potentiel pour tous les nœuds du système.

L'équation (4.41) montre que nous pouvons restreindre l'intégrale double au domaine formé des n éléments $(e_i)_n$ comportant le sommet i . Nous déduisons:

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \left[\left(\frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial y} \right) \right) - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial \phi_i} \right] dx \cdot dy \quad (4.49)$$

Ce qui devient, compte tenu de (4.41) à (4.49) :

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \left[\left(\frac{b_i}{2\Delta} \sum_j \frac{b_j \phi_j}{2\Delta} + \frac{c_i}{2\Delta} \sum_j \frac{c_j \phi_j}{2\Delta} \right) - \frac{\rho}{\varepsilon_0} N_i \right] dx \cdot dy \quad (4.50)$$

Nous aboutissons à un système linéaire de forme matricielle :

$$K \cdot \Phi = F \quad (4.51)$$

avec : K : Matrice de raideur ;

Φ : Matrice des potentiels aux nœuds ;

F : Second membre du système.

Le terme K_{ij} se calcule par intégration sur les triangles comportant les nœuds i et j , soit :

$$K_{ij} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta^2} dx dy = \frac{1}{4\Delta} \sum_n (b_i b_j + c_i c_j) = \iint_{\Delta_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy \quad (4.52)$$

Tandis que le second membre F_i est déterminé par :

$$F_i = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \frac{\rho}{\epsilon_0} N_i dx dy = \sum_n \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{\Delta}{3} \quad (4.53)$$

La matrice K comporte un fort pourcentage de termes nuls, car K_{ij} n'est calculé que si le nœud i est relié au nœud j .

Pour le calcul de ces intégrales, nous utilisons la transformation suivante:

$$\iint_{\Delta_e} (N_1)^l (N_2)^m (N_3)^n dx dy = \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.54)$$

IV.6.2 Assemblage

La phase d'assemblage consiste à construire la matrice globale K et le vecteur global F de la structure complète à partir de la matrice et de vecteur caractéristiques des différents éléments K_e , F_e préalablement calculés. L'assemblage s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous – matrices nodales de chaque élément, les indices de ligne et colonne correspondant à la numérotation des nœuds de cet élément dans la matrice globale $[K]$ et le vecteur global $\{F\}$. Avec :

$$\begin{cases} [K] = \sum_{e=1}^{N=\text{nbre.d'éléments}} [K_e] \\ \{F\} = \sum_{e=1}^{N=\text{nbre.d'éléments}} \{F_e\} \end{cases} \quad (4.55)$$

Une fois K et F construites, les potentiels inconnus sont obtenus en multipliant l'inverse de K par F . Dans le cas de l'équation de Laplace la même procédure est à suivre en prenant $\rho = 0$.

IV.7 Résultats et discussion

En absence de la charge d'espace, le champ électrique est obtenu à partir de l'équation de Laplace. Ce champ (Laplacien) est alors utilisé pour le calcul de la distribution initiale de la densité de la charge d'espace, nécessaire pour la résolution de l'équation de Poisson.

IV.7.1 Le maillage

La figure (4.8) illustre un exemple du premier maillage par éléments finis de la configuration étudiée. La charge d'espace affecte la direction des lignes de champ, ce qui met en doute l'hypothèse de Deutsch. Le nœud (i, j) est obtenu par l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne avec le $j^{\text{ème}}$ contour. Le maillage est plus fin au fur et à mesure qu'on s'approche du fil. Dans la zone de dérive, les aires des éléments triangulaires augmentent en fonction des déplacements selon X et Y.

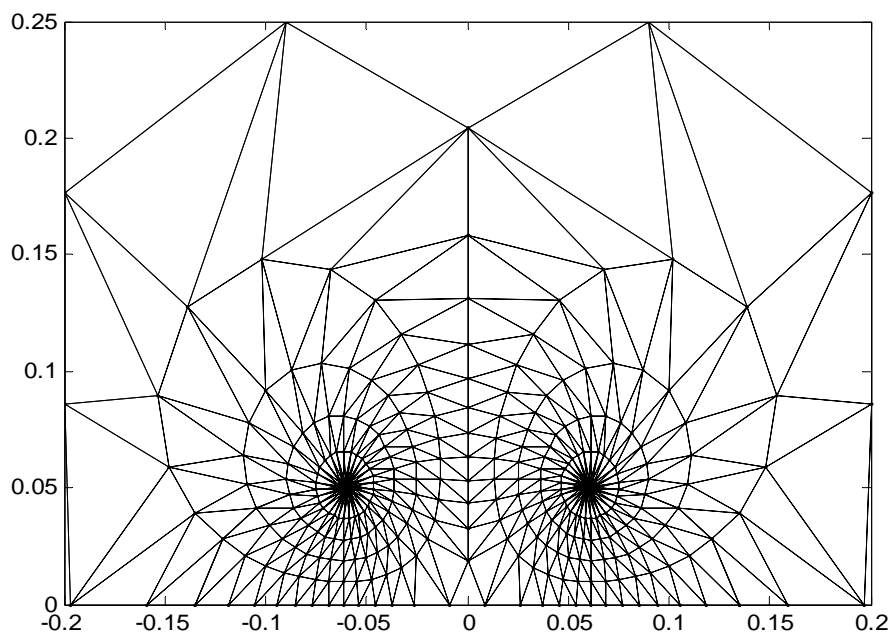


Figure 4.8: Le maillage électrostatique

IV.7.2 La densité de la charge d'espace

Nous avons adapté la méthode des caractéristiques pour résoudre des problèmes de convection-diffusion et de déterminer les variations de la charge d'espace. L'avantage de cette méthode est la transformation de l'équation aux dérivées partielles, gouvernant l'écoulement

de la charge d'espace, en une équation différentielle ordinaire dans le temps et le long d'une ligne caractéristique qui correspond à la trajectoire d'une charge électrique. La loi du mouvement d'une charge (ion lourd) dans un gaz neutre s'écrit :

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{E} \quad (4.56)$$

où \vec{v} : est la vitesse de l'ion;

E : est le champ électrique;

μ : est le mobilité de l'ion.

Si nous prenons la variable r comme étant la coordonnée rectiligne qui présente la position de la charge par rapport à l'axe du conducteur, alors la loi présente s'écrit :

Si nous prenons la variable r comme étant la coordonnée rectiligne qui présente la position de la charge par rapport à l'axe du conducteur, alors la loi présente s'écrit :

$$\frac{dr}{dt} = \mu \cdot E \quad (4.57)$$

La résolution de cette équation donne les trajectoires des charges. La méthode des caractéristiques nomme ces trajectoires « les lignes caractéristiques ».

La combinaison des équations (4.10), (4.11) et (4.12) conduit à une équation non linéaire gouvernant l'évolution de la densité de charge :

$$E \cdot \nabla \rho = -\frac{\rho^2}{\varepsilon_0} \quad (4.58)$$

Les résultats de la résolution numérique de l'équation (4.58) sont représentés sur les figures (4.9 et 4.10).

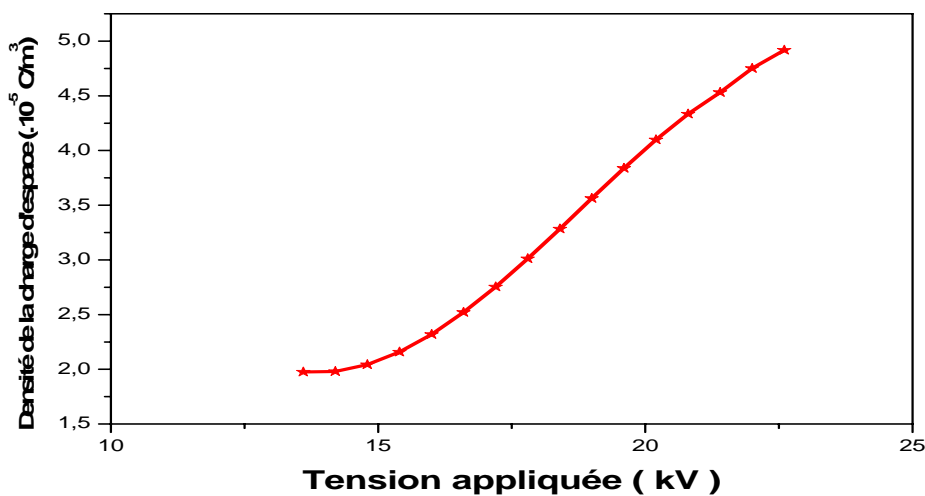


Figure 4.9 : Variation de la densité de la charge d'espace en fonction de la tension appliquée.

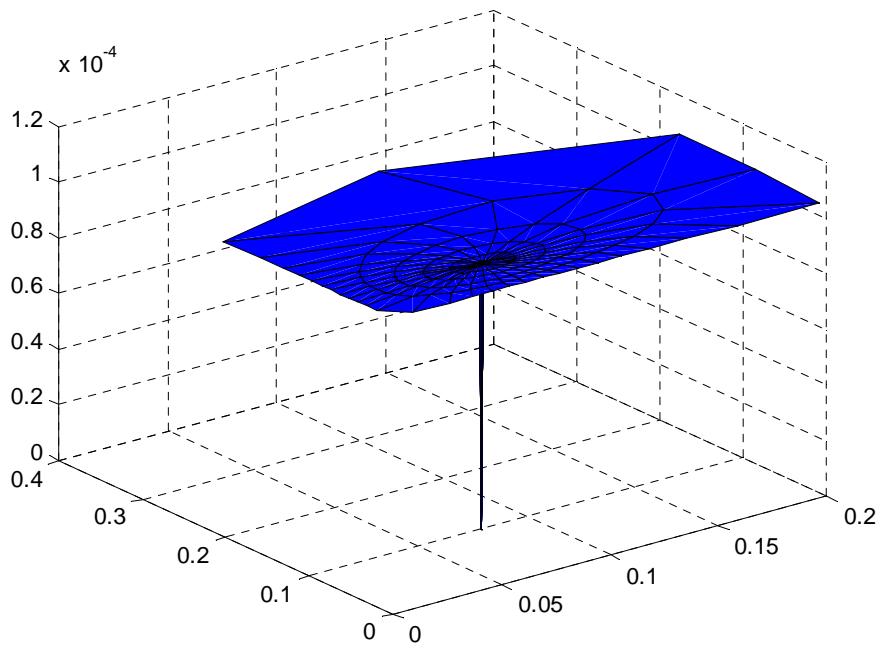


Figure 4.10 : Distribution spatiale de la densité de la charge d'espace

À partir des équations (4.57) et (4.58) nous pouvons écrire :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\mu \cdot \frac{\rho^2}{\varepsilon_0} \quad (4.59)$$

La solution analytique de cette équation est :

$$\rho(t) = \frac{1}{\frac{1}{\rho_0} + \frac{\mu \cdot t}{\varepsilon_0}} \quad (4.60)$$

où ρ_0 : est la valeur de la densité de charge au point de départ de la ligne caractéristique.

L'évolution de la densité de la charge d'espace en fonction du temps est représenté à partir de la solution analytique (Fig. 4.11). La densité maximale est dans la frontière ZI/ZD et pour une valeur de t qui tend à l'infinie, elle est égale à zéro.

La méthode des caractéristiques n'est pas limitée aux problèmes stationnaires seulement. Elle peut être appliquée aux systèmes dynamiques puisqu'elle décrit l'évolution de la densité de charge pour un observateur mouvant le long de la ligne caractéristique.

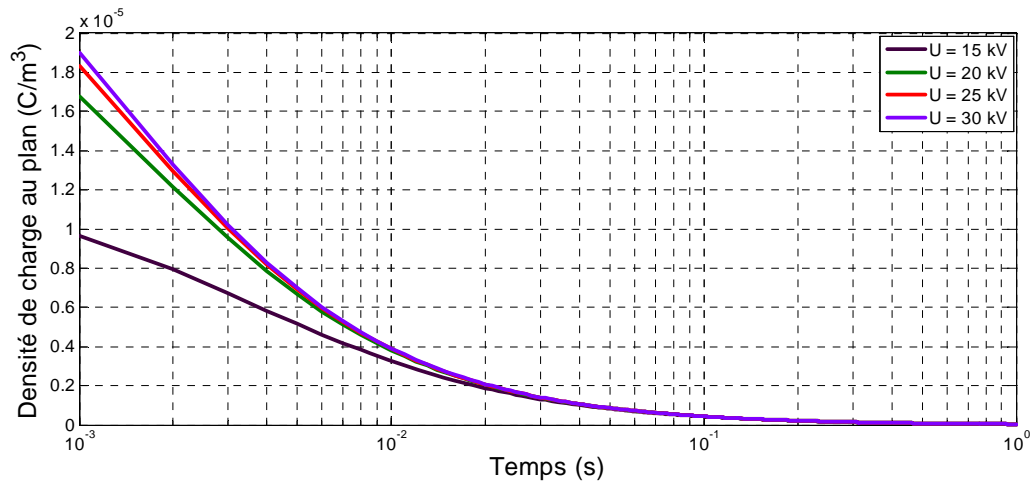


Figure 4.11 Variation de la densité de la charge d'espace en fonction du temps et en fonction de la tension appliquée.

IV.7.3 La densité de courant

Les figures (4.11 et 4.12) montrent les variations au plan de la densité du courant J comparées aux valeurs mesurées par Aissou [53]. Nous remarquons que la densité de courant varie avec la variation de la mobilité ionique. Cela peut être expliqué par l'augmentation de la vitesse de dérive des ions positifs ou négatifs dans la direction du champ électrique. La mobilité ionique varie en fonction de la tension appliquée, elle prend des valeurs plus élevées dans la partie de la polarité négative.

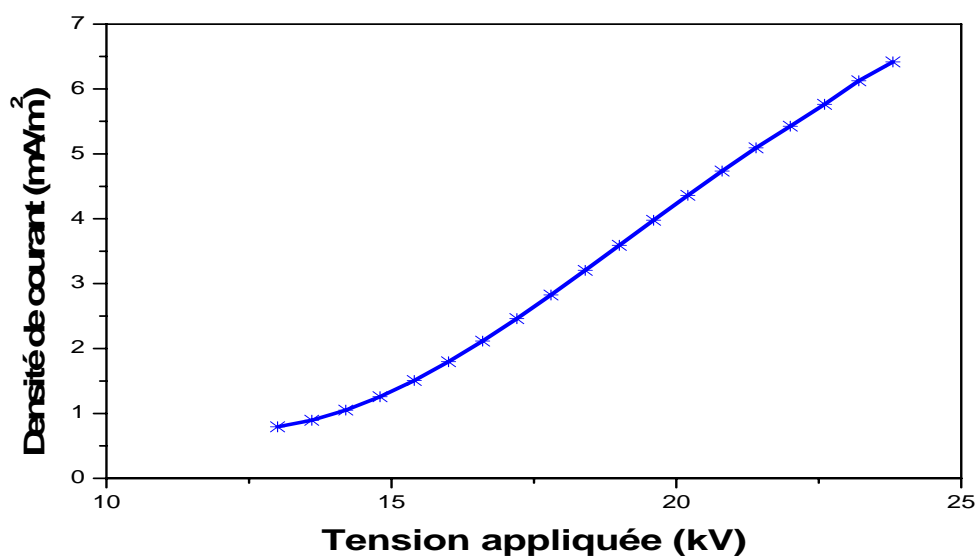


Figure 4.11 Variation de la densité du courant en fonction de la tension appliquée

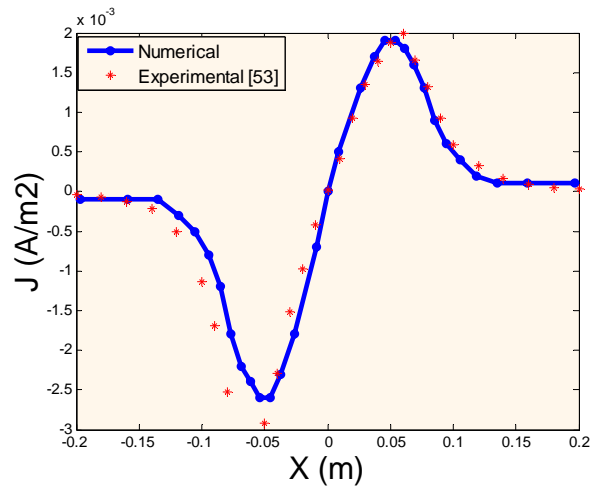


Figure 4.12 : Variation de la densité du courant au plan en bipolaire.

IV.7.4 Le champ électrique

Nous remarquons que le champ électrique sur le plan n'est pas sensible à la variation de la mobilité ionique. Les distributions du champ électrique sont représentées sur les figures (4.13 – 4.15).

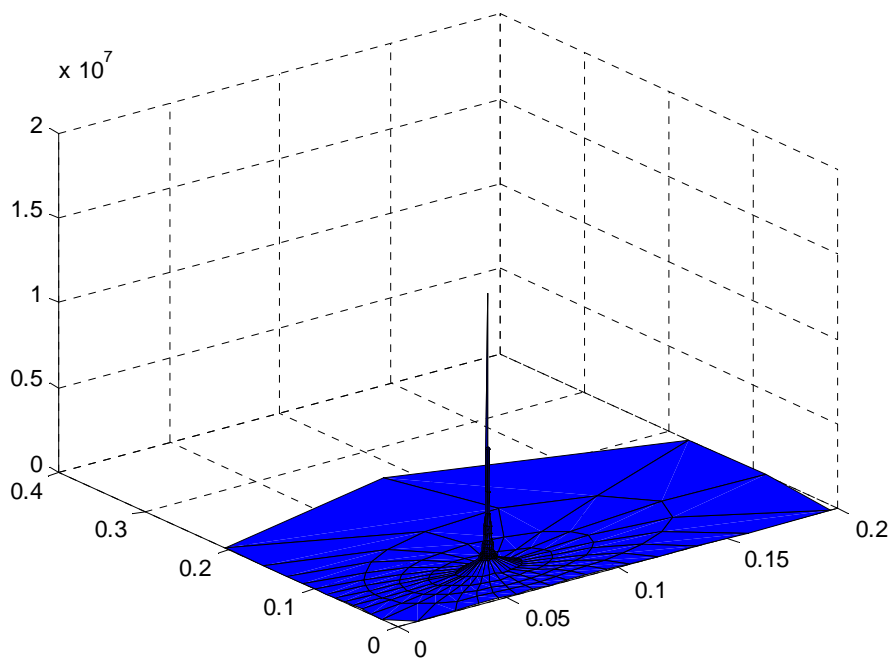


Figure 4.13: Distribution spatiale du champ électrique.

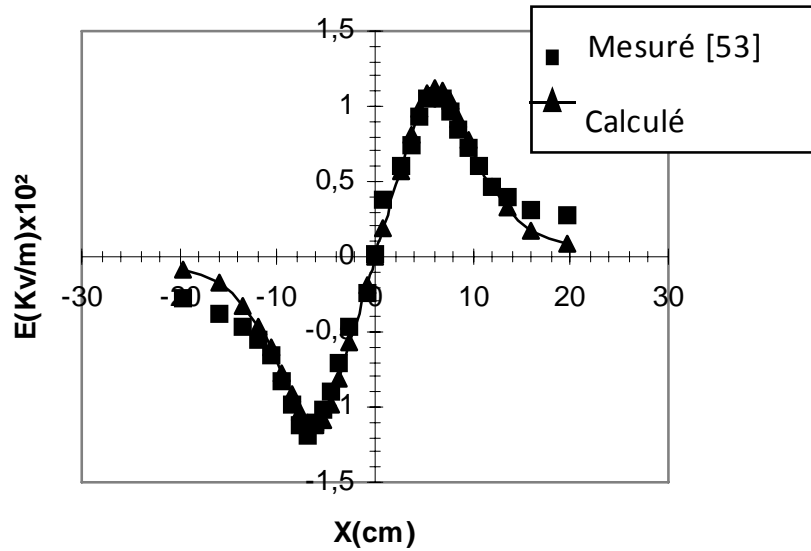


Figure 4.14 : Distribution du champ électrique sur le plan

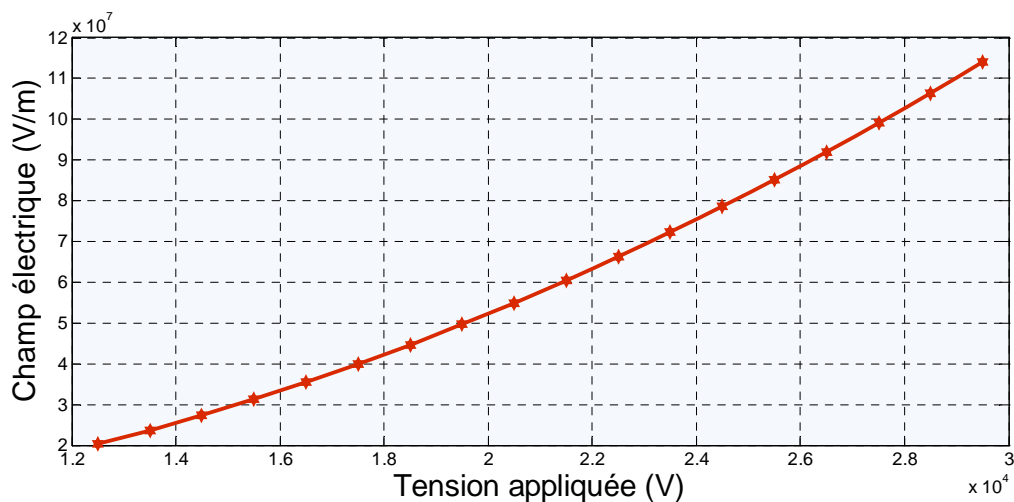


Figure 4.15 Variation du champ électrique en fonction de la tension appliquée.

IV.7.5 La vitesse théorique de migration

Une étude de la vitesse théorique de migration nécessite la connaissance de la charge électrique des particules en fonction de leur taille (figure 4.16). Pour montrer la variation de w_{th} en fonction de la taille des particules, on utilise une relation simple de calcul de la charge, établie par Cochet (voir chapitre 3). Cette relation donne la charge limite par champ d'une particule qui se trouve dans un champ électrique d'intensité E .

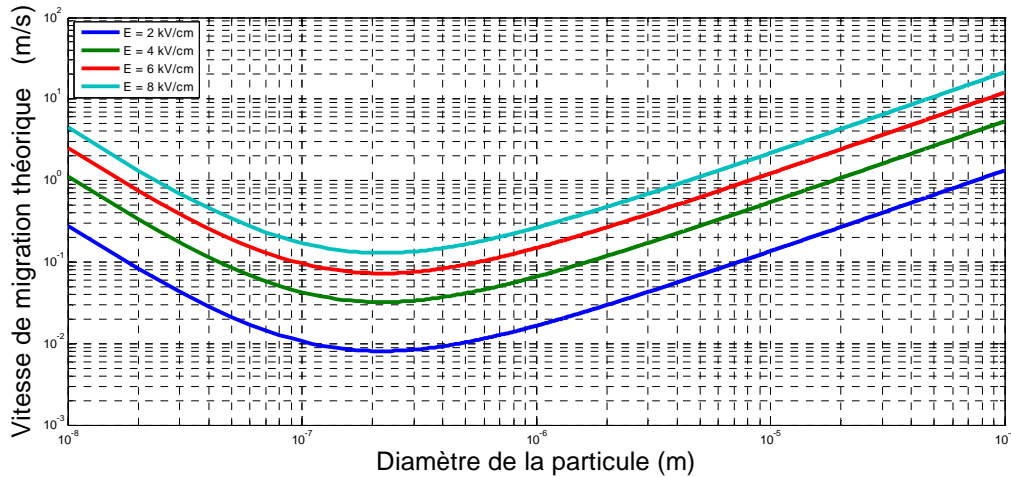


Figure 4.16 Variations de la vitesse de migration théorique w_{th} en fonction de la taille des particules.

La variation de la vitesse w_{th} en fonction du diamètre des particules passe par une valeur minimale pour $d_p \cong 0,25 \mu\text{m}$. Une faible vitesse de migration diminue le transport des particules vers les plaques collectrices et par conséquent l'efficacité de collecte. Ainsi donc, la vitesse de migration des particules étant à son plus bas niveau pour les tailles de particules comprises entre $0,1 \mu\text{m}$ et $1 \mu\text{m}$, il en est de même en ce qui concerne l'efficacité de collecte.

IV.8 Conclusion

Le calcul numérique que nous avons proposé élimine la boucle permettant de vérifier la constance du champ électrique à la limite de la zone d'ionisation (équivalent au champ critique du minimum d'ionisation). En effet cette condition a été illustrée par la grandeur du potentiel électrique correspondant et est introduite dans la formulation en éléments finis et les résultats sont d'autant plus fiables que les contours équipotentiels sont tracés avec une bonne précision.

Bien que ce modèle nous a épargné d'une étape de résolution, mais l'estimation de la densité de la charge d'espace sur la frontière de la zone d'ionisation reste à vérifier. En effet, pour le premier de cette dernière, nous l'avons pris au hasard et nous l'avons ajusté en comparant aux travaux antérieurs. Une fois, l'erreur est acceptable, l'estimé est ajusté, il sera utilisé dans les procédures qui suivent et est maintenu constant.

A vrai dire, la résolution numérique de la décharge couronne n'est qu'à son premier âge et beaucoup de travail reste à faire pour améliorer les modèles.

*Conclusion
générale*

Théoriquement, un gaz constitue un isolant parfait puisqu'il ne contient que des atomes ou des molécules neutres. Pour qu'il puisse devenir conducteur, il est donc nécessaire qu'apparaisse, à l'intérieur, un certain nombre de particules chargées. En pratique, un gaz contient toujours un certain nombre de particules chargées. Celles-ci proviennent principalement des cascades d'électrons et d'ions résultant du rayonnement cosmique ou bien de la désintégration des gaz radioactifs émis par le sol. L'application d'une tension, même très faible, aux bornes d'électrodes plongées dans le gaz se traduit par l'apparition d'un courant dans le circuit extérieur consécutif au déplacement des charges à l'intérieur du gaz. Une augmentation importante de la tension appliquée entraîne une croissance rapide de ce courant, le gaz passant ainsi d'un état quasi isolant à un état plus ou moins conducteur. Le gaz est alors le siège d'une décharge électrique.

Le travail numérique développé dans ce mémoire a donné des résultats satisfaisants pour des tensions supérieures aux tensions seuil d'apparition de la décharge couronne sur la distribution du champ électrique, de la densité de courant et de la densité de charges d'espace. Nous avons utilisé une méthode hybride basée sur la technique des éléments finis et la méthode des charges fictives. Les conditions aux limites considérées dans ces algorithmes sont de deux types : conditions de Neumann homogènes sur les frontières de symétries et conditions de Dirichlet sur les autres limites. Dans ces dernières, en plus de la tension appliquée sur le fil et la mise à la terre de l'électrode passive, nous avons considéré le champ critique du minimum d'ionisation, dont la valeur est bien connue dans l'air, comme condition aux limites indirectes sur la convergence de la charge d'espace sur la frontière séparant la zone d'ionisation de la zone de dérive.

Notre étude numérique est basée sur un modèle séparant le domaine de calcul en deux zones : la zone d'ionisation où la charge d'espace est considérée nulle et la zone de dérive des ions positifs produits par les divers mécanismes de développement de la décharge couronne.

La précision dans les calculs peut être améliorée si on arrive à déterminer avec une grande précision la frontière séparant la zone d'ionisation de la zone de dérive ainsi que la mobilité moyenne des ions positifs. Les résultats que nous avons obtenus peuvent constituer un solide support pour les recherches futures.

Ce modèle peut être adapté non seulement dans le transport d'énergie en bipolaire, mais aussi dans les différents cas très utiles en pratique notamment pour traitement des surfaces, le fonctionnement des électrofiltres et peinture électrostatique. Le calcul numérique par ordinateur offre la possibilité de limiter les expériences. Cette étude est consacrée à la résolution numérique des équations gouvernant la décharge couronne bipolaire. Nous avons

vu que cette décharge peut être décrite mathématiquement par un ensemble d'équations dérivant de celles de Maxwell, sont calculés par la résolution de l'équation de Poisson, par la technique des éléments finis, et de l'équation de la continuité du courant à l'aide de la méthode des caractéristiques.

L'évolution spatio-temporelle du champ électrique au sein de l'espace inter-électrode montre prépondérance d'interactions entre les particules chargées et neutres du gaz ionisé. Dans la première zone dite « d'ionisation » localisée près de l'électrode active là où le champ électrique présente une amplitude et un gradient élevé favorisant le processus d'ionisation. La seconde zone, dite zone de « dérive », occupe le reste de l'espace inter-électrode et le champ électrique y est plus faible.

L'hypothèse de Deutsch n'a pas été retenue. En effet, la comparaison entre les lignes de champ tracées en absence de la charge d'espace (champ Laplacien) et les lignes de champ tracées en présence de celle-ci (champ Poissonien), montre clairement que la charge d'espace affecte réellement la direction des lignes de champ, ce qui démontre que cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Finalement, Nous espérons que d'autres travaux pratiques et numériques soient poursuivis pour améliorer la précision de calcul, en déterminant la zone d'ionisation avec précision ainsi que la charge d'espace.

*Références
bibliographiques*

- [1] J. M. Townsend, *Electricity in gases*, Oxford university press, 1914.
- [2] J. M. Meek, A theory of spark discharge. *Physical Review*, Vol. 57, pp. 722-728, 1940.
- [3] L. Parissi, *Etude d'un procédé de traitement d'air chargé en composé organiques volatiles par décharge moyenne fréquence avec barrière diélectrique : mécanisme mis en œuvre et recherche d'optimisation*", Thèse doctorat de l'université Paris VI, France, 1999.
- [4] A. Vincent, *Conception et simulation d'un réacteur fil-cylindre à décharge couronne avec barrière diélectrique adapté au traitement des oxydes d'azote dans des effluents marqués par un isotope*. Thèse de doctorat de l'université Paris VI, France, 2002.
- [5] A. Labergue, *Etude de décharges électriques dans l'air pour le développement d'actionneurs plasmas – Application au contrôle de décollements d'écoulements*. Thèse de doctorat de l'université de Poitiers, France, 2005.
- [6] D. Dubois, *Réalisation et caractérisation d'un réacteur plasma de laboratoire pour des études sur la dépollution des gaz d'échappement*. Thèse de doctorat de l'université de Toulouse III, France, 2005.
- [7] R. C. Fletcher, *Phys. Rev.*, Vol.76, pp.1501, 1949.
- [8] C. Gary, «les propriétés diélectriques de l'air dans les liantes et très liantes tensions», Eyrolles, 1984.
- [9] F.W. Peek, «Dielectric phenomena in H.V Engineering», M.C.Graw Hill, pp.52-80, 1929.
- [10] G. Hartmann, Theoretical evaluation of Peek's law. *IEEE Trans. Ind. App.*, 20 (6), PP.1647-1651, 1984.
- [11] Y. Zebboudj, G. Hartmann, Current and electric field measurements in coaxial system during the positive DC corona in humid air. *Eur. Phys. J. AP* 7, 167-176, 1999.
- [12] P. Bérard, *Contrôle d'écoulement par décharge plasma à pression atmosphérique*. Thèse de doctorat de l'école central de Paris, France, 2008.
- [13] Junhong C. (2002) *Direct current corona-enhanced chemical reactions*. Thèse de doctorat de l'université Minnesota, Etats-Unis.

- [14] J. F. Loiseau, J. Batina, F. Noël, R. Peyrous, Hydrodynamical simulation of the electric wind generated by successive streamers in a point-to-plane reactor. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 35, pp. 1020-1031, 2002.
- [15] M. Goldman, A. Goldman, R.S. Sigmond, The corona discharge, its properties and specific uses. *Pure and Appl. Chem.* 57, n°9, pp. 1353-1362, 1985.
- [16] M. Goldman, R.S. Sigmond, Corona insulation. *IEEE Trans. Elec. Ins.*, EI. 12/2, pp. 90-105, 1982.
- [17] Z. Yeo, Modélisation numérique de conduction surfacique dans les dispositifs bidimensionnels - Prise-en compte de non linéarités. Thèse de doctorat de l'école centrale de Lyon, France, 1997.
- [18] A. Bossavit, C. Emson, D. Mayergoyz, Méthodes numériques en électromagnétisme. Editions Eyrolles, Paris, 1991.
- [19] K.J. Binns and P.J. Lawrenson, Analysis and computation of electric and magnetic field problems. Pergamon Press ltd, 1973.
- [20] E. Asenjo, N. Morales et E. A. Valdenegro, Solution of low frequency complex fields in polluted insulators by means of the finite element method. *IEEE Trans, On dielectrics and electrical insulation*, Vol. 4, N°. 1, pp. 10- 16, 1997.
- [21] G. Dhatt, G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine S. A. Editeur, Paris, pp. 199-271, 1981.
- [22] S. C. Chapra, P. R. Canale, Numerical methods for engineers. Université de Michigan, New York, edition 3, pp. 849 – 875, 1998.
- [23] T. Misaki, H. Tsuboi, Computation of 3-Dimensional eddy current problems by using boundary element method. *IEEE Trans. on magnetics*, vol. MAG-21, N° 6, pp. 2227-2230, 1985.
- [24] R. G. Olsen, Integral equations for electrostatics problems with thin dielectric or conducting layers. *IEEE Trans. on electrical insulation*, Vol. EI-21, pp. 565-573, 1986.

- [25] Gensdarmes F. (2000) Les processus de charge électrique : Des aérosols non radioactifs en milieu fortement ionisé- des aérosols radioactifs artificiels émetteurs bêta, thèse de doctorat, université Paris 7.
- [26] G – Goudet, Traité d'électricité, l'électricité et la matière, tome 3, pp 92 -95.
- [27] Loeb L. B. (1961) Basic processes of gaseous electronics, University of California Press, Berkeley and Los Angeles
- [28] Morgan K. Z. and Turner J. E. (1967) Principles of Radiation Protection. Wiley ed., NewYork.
- [29] Burtscher H, Reis A. and Schmidt-Ott A. (1986) Particle charge in combustion aerosols. J. Aerosol Science. 17-1, 47 – 51.
- [30] Billard F., Bricard J., Madelaine G. et Pradel J. (1965) Etude expérimentale de la charge électrique des aerosols ultra fins par marquage radioactive. Journal de Physique appliquée. 26-5, 169 – 176.
- [31] Bricard J., Cabane M., Madelaine G. et Vigla D. (1970) Spectre de mobilité des petits ions de l'air. J. de recherche atmospheriques, 107 – 113.
- [32] Reed L. D., Jordan H. and Gieseke J. A. (1977) Charging of radioactive aerosols. J. Aerosol Science. 8, 457 – 463.
- [33] Bricard J. (1962) La fixation des petits ions atmosphériques sur les aérosols ultra fins. Geophys. Pura. Appl. 51, 237 – 242.
- [34] Fuchs N. A. (1963) On the stationary charge distribution on aerosol particles in a bipolar ionic atmosphere, Geophys. Pura. Appl. 56, 185 – 193.
- [35] Gunn R. (1954) Diffusion charging of atmospheric droplets by ions and the resulting combination coefficients, Journal of meteorology, 11, 339 – 349.
- [36] Keefe D., Nolan P. J. and Rich T. A. (1959) Charge equilibrium in aerosols according to the Boltzmann law. Proc. Royal Irish Acad. 60, 27- 45.
- [37] Lissowski P. (1940) Das laden von aerosolteilchen in einer bipolaren ionenatmosphäre. Acta physicochimica URSS Vol XIII N°2, 157 – 192.

- [38] Pollak L. W. and Metnieks A. L. (1962) On the validity of the Boltzmann's distribution law for the charges of aerosol particles in electrical equilibrium. *Geofis. Pura. App.* 53, 111-132.
- [39] Liu B. H. Y. and Pui D. H. Y. (1974) Electrical neutralization of aerosols. *J. Aerosol Science.*5, 465- 472.
- [40] Poluektov P. P., Emets E. P. and Kascheev V. A. (1991) On steady – state distribution of aerosol particle electric charges. *J. Aerosol Science.* 22, Suppl. 1, s237– s240.
- [41] Nolan P. J. and Kennan E. L. (1949) condensation nuclei from hot platinum: size coagulation coefficient and charge- distribution. *Proceeding of the Royal Irish Academy.* 52A, 171 – 190.
- [42] Matsoukas T. (1994) Charge distributions in bipolar charging. *J. Aerosol Science.*25-4, 599- 609.
- [43] Cooper D. W. and Reist P. C. (1973) Neutralizing charged aerosols with radioactive sources. *J. of Colloid and Interface Science.* 45- 1, 17- 26.
- [44] Hinds W. C. (1999) *Aerosol Technology: Properties, Behavior and Measurement of Airborne Particles*, 2nd Edition, Wiley- Interscience, New York.
- [45] Sternovsky Z., Sickafoose A., Colwell J., Robertson S. and Horányi M. (2002) Contact charging of Lunar and Martian dust simulants. *J. of Geophysical Research*, Vol. 72, N°E11, 5105.
- [46] McDonald J. R., Smith W. B. & Spencer H. W. (1978) A mathematical model for calculating electric conditions in wire-duct electrostatic precipitation devices. *J. of Applied physics*, 48, N°6, 2231 – 2243.
- [47] Mizuno A., “Electrostatic precipitation”, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.*, Vol. 7, pp.615-624, 2000
- [48] Pauthenier M. and Moreau-Hanot M. (1932) La charge des particules sphériques dans un champ ionisé. *J. de Physique et le Radium*, 3, 590- 613.
- [49] White H. J. (1963) *Industrial electrostatic precipitation*, Wesley Publishing company, Inc.

- [50] Smith W. B. & McDonald J. R. (1976) Development of a theory for the charging of particles by unipolar ions. *J. Aerosol Science*. 7, 151- 166.
- [51] Fjeld R. A. & McFarland (1989) Evaluation of select approximations for calculating particle charging rates in the continuum regime. *Aerosol Science and Technology*. 10, 535-549.
- [52] Lawless P. A. & Altman R. F. (1994) ESPM: an advanced electrostatic precipitator model. *IEEE ind. Appl. Conf. 29th IAS Annual Meeting Denver*, 1519 – 1526.
- [53] M. Aissou, Modélisation de la décharge couronne bipolaire, Mémoire de magister, Université A. M. Béjaia, 2005.
- [54] N. Oussalah, Détermination de la distribution du champ et de la densité de courant lors de la décharge couronne monopolaire négative, Mémoire de magister, Université A. M. Béjaia, 2002.
- [55] W.Deutsh.1993, *Ann-Phys*, vol.5, PP.588-612.
- [56] V.I. Popkvo, 1949, *Electrichestvo*, Vol.1, pp. 33-48.
- [57] M. Abdel Salam, Z. Al-hamouz, 1993, *IEEE*, «A universal finite-element analysis of the bipolar ionized field ».
- [58] Z. Al-hamouz, M. Abdel-Salam,1998, *IEEE trans. ind. App.*, vol.34,n°2.
- [59] Kuffel E.(1984) *High Voltage engineering*, Pergamon presse, Oxford, pp. 266 – 277.
- [60] Pérez J.-P., Carles R., Fleckinger R. (1990) *Electromagnitisme*. Edition Masson, p.p. 628-639.

OPTION: AUTOMATIQUE

Proposé et dirigé par : Monsieur: H. NOURI

Présenté par : BAALI Aissa

Thème :

Simulation numérique du champ électrique dans une décharge couronne par la méthode des éléments finis

Résumé :

Un certain nombre d'applications électrostatiques, notamment les dépoussiéreurs électrostatiques, mettent en œuvre le phénomène de décharge couronne dans les gaz à partir d'électrodes ayant une forte courbure. Ces électrodes injectent des charges dans le gaz et la charge d'espace qui en résulte modifie la distribution du champ électrique.

Le but de ce travail est de développer un code numérique pour déterminer les distributions du champ électrique et de la densité de courant. La validation du modèle se réalise par la comparaison à des travaux réalisés.

L'utilisation de la méthode des éléments finis permet de résoudre l'équation de Poisson et la méthode des caractéristiques pour résoudre l'équation de la conservation de charges. La redéfinition du maillage est la partie la plus importante du travail.

Mots Clés: Simulation, densité de courant, champ électrique, potentiel électrique, méthode des éléments finis.