



N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université de M'sila
Faculté des Sciences
Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par fb

BELOUADAH Halima

THEME

Théorie des invariants et la solution de l'équation de Schrödinger pour un oscillateur chargé dans un champ magnétique variable

Soutenu le : 00/00/2014

Devant le jury composé de :

A.Bakar	Prof Univ. de Sétif 1	Président
S. Menouar	MCA Univ. de Sétif 1	Rapporteur
A. Madjber	MCB Univ. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2014

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire nous remerciant ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

*J'adresse ma reconnaissance, ma gratitude à mon professeur encadrant **Mr.S.Menouar** pour l'orientation et pour leurs conseils, leur aide.*

Je voudrais remercier les membres des jurys pour l'effort qu'ils feront dans le but d'examiner ce modeste travail

Sans oublier tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Et sans oublier mon collègue cherief Sadeq pour leur aide.

Je remercie enfin tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réussite de ce travail et qui n'ont pas pu être cités ici.

MERCI

Dédicace

Je dédie ce travail aux êtres les plus chers à mon cœur,

Ma mère

Mon père

Pour tout les sacrifices et leur Soutien moral

Et matériel dont ils ont fait

Preuve pour que je réussisse.

Je le dédie également à :

Mes Frères

Djawid (rahimaho allah) et Mohamedet et sa femme Hanan

Mes soeures

Wafa , Fatima , Dalal , et ses enfants et Nadia , Iman

*Pour finir j'adresse mes remerciements à mes très chers amis qui
sont devenus des frères et sœurs pour moi, siham , Ahlam, Sabrina,*

Iman, Oumima, Fatiha

Et mes collègues Toufik, Abd essalam , Seifeddine

Et Tous Mes Amis promotion 2014

Table des matières

Introduction	2
1 Equation de Schrödinger dépendante du temps Méthodes et concepts	4
1.1 Introduction:	4
1.2 Equation de Schrödinger :	4
1.2.1 Propriétés de L'équation de Schrödinger:	5
1.2.2 La fonction d'onde	6
1.3 Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps: .	7
1.3.1 Opérateur d'évolution	7
1.3.2 Transformations unitaires:	8
1.4 Le recours vers les méthodes approximatives	9
1.4.1 La théorie des perturbations dépendant du temps :	10
1.4.2 Méthodes variationnelle :	11
1.4.3 Approximation soudaine :	11
1.4.4 L'approximation adiabatique :	11
1.4.5 Phase de Berry :	12
1.4.6 La théorie des invariants :	13
2 Théorie des invariants et les systèmes dépendants du temps	14
2.1 Théorème de Liouville et l'invariant mécanique:	14
2.2 La théorie de Lewis-Riesenfeld :	16
2.2.1 Les valeurs propres et les vecteurs propres de l'invariant:	16

3 Oscillateur harmonique à masse et fréquence variables à 2D en présence

d'un champ magnétique variable:	21
3.1 Introduction:	21
3.2 Formulation du problème:	22
3.2.1 Construction de l'invariant:	23
3.2.2 Valeurs et états propres de l'invariant:	25
3.2.3 Calcul de la phase totale et la solution de l'équation de Schrödinger: .	28
3.2.4 Applications :	29
 Conclusion	 30
 Bibliographie	 32

Introduction

Les systèmes quantiques régies par des Hamiltoniens dépendants explicitement du temps ont été de tout temps étudiés et non pas toujours été résolus complètement. Plusieurs méthodes ont été exploitées pour résoudre de tels problèmes, parmi lesquels la méthode des perturbations dépendants du temps, l'approximation soudaine et l'approximation adiabatique. Bien que ces dernières ne donnent pas des solutions analytiques exactes, elles sont généralement très puissantes et applicables à de nombreux systèmes physiques.

La théorie des invariants (ou de *Lewis* et *Riesenfeld*) [1] constitue une méthode puissante pour l'étude des phases géométriques ainsi que la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Depuis les travaux pionniers de Lewis [1-3], le comportement quantique de l'oscillateur harmonique dépendant du temps a suscité un intérêt considérable dans la littérature, car il offre des modèles qu'on peut les solutionner avec exactitude dans les différents domaines de physique. Il existe divers types des oscillateurs harmoniques dépendants du temps tels que l'oscillateur de Caldirola-Kanai [4, 5], l'oscillateur paramétrique [6], et l'oscillateur harmonique avec une masse dépendante du temps [7]. Selon les progrès de la recherche connus pour ces systèmes, une question pertinente a été posée de façon naturelle: Que feriez-t-il si un champ magnétique affecte une particule chargée?

En effet le champ magnétique extérieur est un facteur important qui affecte le mouvement d'une particule chargée dans plusieurs systèmes physiques. Quand un champ magnétique dépendant du temps est appliqué sur un électron, il est impossible de réduire le système à un problème unidimensionnel, au lieu de cela, on peut modéliser le système par deux oscillateurs harmoniques dépendants du temps en raison de l'existence d'un champ magnétique variable $B(t)$. Plusieurs recherches théoriques et expérimentales ont été menées par des nombreux

articles [8-20] sur les propriétés quantiques de ce système dans les dernières décennies en raison de son importance, non seulement en physique de la matière condensée, mais aussi en physique des plasmas, physique nucléaire et l'optique quantique. L'importance de ce modèle dans la physique classique et la physique quantique, nous a motivé de l'étudier dans le domaine des systèmes dépendants du temps en utilisant la théorie des invariants.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, on donne une description détaillée sur l'équation de Schrödinger dépendante du temps et les différentes méthodes utilisées pour la résoudre.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie des invariants dont on va l'expliquer selon l'article original de Lewis et Riesenfeld [1].

Le troisième chapitre représente l'essentiel de notre travail concernant la solution exacte de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur chargé à deux dimensions dans un champ magnétique variable en utilisant la théorie des invariants et l'approche algébrique $SU(1,1)$.

Une conclusion termine ce travail.

Chapitre 1

Equation de Schrödinger dépendante du temps

Méthodes et concepts

Chapitre 1

Equation de Schrödinger dépendante du temps Méthodes et concepts

1.1 Introduction:

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle fondateur que l'équation de Newton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle de l'état d'un objet quantique représenté par une fonction d'onde.

1.2 Equation de Schrödinger :

Le grand moment historique de la naissance de la description quantique de la matière s'est produit lorsque Schrödinger⁽¹⁾ a écrit pour la première fois son équation. Pendant de longues années, la structure atomique interne de la matière était restée un grand mystère. Dans le cadre de la mécanique classique, l'état d'un système physique est bien défini par la connaissance des variables dynamiques du système, solutions des équations de Newton ou celles de Hamilton et Lagrange, qui sont des quantités continues d'où la continuité des grandeurs

⁽¹⁾En 1926, le physicien autrichien Schrödinger proposait une équation pour trouver la fonction d'onde d'un système.

qui déterminent l'état du système tel que l'énergie [21-24]. Alors pour ce faire, il fallait d'abord trouver l'analogie des équations de la mécanique classique, une telle équation, qui ne peut pas être directement déduite d'une manière rigoureuse des anciens principes, mais intuitivement devinée sera l'un des postulats de la théorie, cette équation c'est celle qu'on appelle aujourd'hui l'équation de Schrödinger.

La découverte par Schrödinger des équations propres du mouvement des électrons à l'échelle atomique a fourni une théorie à partir de laquelle on peut calculer des phénomènes atomiques de façon quantitative, précise et détaillée. En principe, l'équation de Schrödinger permet d'expliquer tous les phénomènes atomiques sauf ceux qui font intervenir le magnétisme et la relativité.

La mécanique quantique postule qu'à un instant t_0 fixé, l'état d'un système physique est défini par la donnée d'un ket (vecteur d'état) $|\psi(t_0)\rangle$ appartenant à l'espace des états d'Hilbert ε . En outre l'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

où H est l'opérateur Hamiltonien (associé à l'énergie totale) du système considéré. Celui-ci est la somme des opérateurs d'énergie cinétique et potentielle :

$$H(t) = T + V(t). \quad (1.2)$$

1.2.1 Propriétés de L'équation de Schrödinger:

L'équation de Schrödinger a les propriétés suivantes :

Linéaire et homogène : si ψ_1 et ψ_2 sont des solutions de ces équations, toute combinaison linéaire

$$\psi = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \quad (1.3)$$

de ces fonctions est également solution. Ainsi ces solutions possèdent en générale la propriété de superposition caractéristique des ondes.

Les équations de Schrödinger dépendants du temps sont des équations différentielles du premier ordre par rapport au temps par conséquent, si on connaît ψ a un instant initial

t_0 on peut déterminer son évolution, ceci montre que l'état dynamique du système est entièrement déterminé par la fonction ψ .

Si l'Hamiltonien du système ne dépend pas du temps, la solution de l'équation de Schrödinger s'écrit sous la forme:

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (1.4)$$

avec $\psi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire:

$$\tilde{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.5)$$

E : La valeur propre de l'Hamiltonien.

Donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de trouver des états stationnaires parmi tous les états possibles du système qui est en effet un cas particulier d'une équation générale dépendante du temps qui donne l'évolution de la fonction d'onde quel que soit l'état du système [21-24].

1.2.2 La fonction d'onde

Considérons une particule quantique qui se déplace sur une droite. Si l'on fait une mesure de la position de la particule, la densité de probabilité de trouver la particule à l'endroit x au temps t est donné par le module au carré d'une amplitude de probabilité complexe $\psi(x, t)$:

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2. \quad (1.6)$$

Aussi, la probabilité infinitésimale de trouver la particule entre x et $x + dx$ est

$$dP(x, t) = |\psi(x, t)|^2 dx. \quad (1.7)$$

On appelle $\psi(x, t)$ la "fonction d'onde" qui décrit l'état de la particule. La probabilité de trouver la particule dans un intervalle compris entre $x = a$ et $x = b$ est donc

$$P_{ab} = \int_a^b dx |\psi(x, t)|^2. \quad (1.8)$$

Comme nous savons que la particule doit bien se trouver quelque part sur l'axe des x , la normalisation de la fonction d'onde est telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x, t)|^2 = 1 \quad (1.9)$$

1.3 Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps:

Différentes méthodes existent pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Le choix d'une méthode particulière repose généralement sur la forme du potentiel et sur celle de la fonction d'onde recherchée. En pratique, il existe plusieurs techniques de résolutions. Le but est de trouver la solution $|\psi(t)\rangle$ correspondant à la condition initiale $|\psi(t_0)\rangle$, pour cela on peut citer quelques méthodes intéressantes qui ont une relation directe avec ce qui va suivre de notre travail.

1.3.1 Opérateur d'évolution

Du fait de la correspondance linéaire entre $|\psi(t_0)\rangle$ et $|\psi(t)\rangle$, il existe un opérateur linéaire unitaire $U(t, t_0)$, tel que

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (1.10)$$

Il est clair, d'après la formule ci-dessus, que le rôle de cet opérateur est de déterminer l'évolution de l'état à tout instant, pour cette raison il est appelé *opérateur d'évolution*. Dans le cas particulièrement simple où l'Hamiltonien H du système ne dépend pas du temps, l'opérateur $U(t, t_0)$ a une forme simple

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}. \quad (1.11)$$

Effectivement, en prenant la dérivée partielle par rapport au temps de la fonction (1.11) on obtient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0). \quad (1.12)$$

On note que l'équation (1.12) présente le même degré de difficulté que l'équation de Schrödinger, mais elle présente plus d'avantage lors de l'utilisation des méthodes d'approximation.

L'opérateur d'évolution total peut être ainsi décomposé en un produit d'opérateurs d'évolutions temporelles infinitésimales:

$$U(t, t_0) = U(t, t_k)U(t_k, t_{k-1})\dots U(t_2, t_1)U(t_1, t_0). \quad (1.13)$$

On peut choisir t_0, t_1, \dots, t_k de telle sorte que les intervalles entre eux soient égaux. Donc $U(t, t_0)$ peut s'écrire:

$$U(t, t_0) = \prod_{i=1}^N U_i(t_i, t_i - \Delta t). \quad (1.14)$$

On en arrive à conclure que le mouvement d'un ensemble quantique peut être assimilé à une succession de transformations unitaires.

Un cas particulier de la transformation (1.10), ayant de multiples applications dans la théorie de diffusion des particules, est celui où l'état initial est fixé non pas pour $t_0 = 0$, mais pour $t_0 = -\infty$, et l'état final $|\psi(t)\rangle$ est considéré pour $t = +\infty$; (1.10) s'écrit alors

$$|\psi(+\infty)\rangle = U(+\infty, -\infty) |\psi(-\infty)\rangle, \quad (1.15)$$

où il est explicitement indiqué que $t_0 = -\infty$, l'opérateur U étant défini par la formule

$$U = U(+\infty, -\infty) = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} U(t, t_0). \quad (1.16)$$

Cet opérateur porte le nom de matrice de diffusion.

1.3.2 Transformations unitaires:

Il est important de se rappeler que pour décrire l'évolution du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ dans l'espace de Hilbert, on doit choisir un système d'axes ou un référentiel. Le choix de référentiel n'a pas de raison d'être unique, c'est-à-dire que l'on est libre de passer à un autre système d'axes. Chaque fois que l'on change de référentiel, on change de point de vue et par conséquent on observe le système physique sous un angle différent. En pratique, pour passer d'un référentiel à un autre, on utilise des opérateurs unitaires U qui peuvent être indépendants ou dépendants du temps et qui satisfont à la condition :

$$UU^+ = U^+U = 1, \quad (1.17)$$

où U^+ est l'opérateur adjoint de U . Généralement, pour un Hamiltonien dépendant du temps, on utilise des opérateurs unitaires dépendants du temps qui transforment le vecteur d'état de la façon suivante :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = U^{-1}(t)|\psi(t)\rangle \quad (1.18)$$

Dans le nouveau référentiel, le nouveau Hamiltonien s'écrit :

$$\tilde{H}(t) = U(t)^{-1}H(t)U(t) - i\hbar U(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}U(t) \quad (1.19)$$

Le but général d'un changement de référentiel est de trouver une représentation dans laquelle l'évolution temporelle du système physique paraît la plus simple. Souvent, un changement de représentation peut nous apporter de nouvelles interprétations physiques ou des avantages techniques comme par exemple la qualité de convergence numérique d'un calcul. Donc les transformations unitaires servent d'outils de recherche de nouvelles représentations. Par exemple, dans le nouveau référentiel, on aimerait être capable d'effectuer une séparation de variables entre la partie temporelle et la partie spatiale du vecteur d'état $|\tilde{\psi}(t)\rangle$.

En d'autres termes, on cherche des opérateurs unitaires qui mettraient l'Hamiltonien original $H(t)$ sous une forme factorisable, i.e. $\tilde{H}(t) = \sum_n h_n(t)T_n$; où $\tilde{H}(t) = g(t)k$ où les T_n et k sont indépendants du temps. Dès lors, on pourrait intégrer analytiquement l'équation de Schrödinger impliquant $\tilde{H}(t)$ pour obtenir l'opérateur d'évolution temporelle dans le nouveau référentiel.

Dans cet esprit, de nombreuses études dans la littérature de physique mathématique ont porté sur la recherche ou l'identification de systèmes, surtout atomiques, qui admettent une solution exacte dans un certain type de référentiel. Efthimou et Spector ont ainsi identifié des classes de systèmes qui admettent une séparation exacte de variables espace/temps et ils ont donné aussi des transformations unitaires pour obtenir le nouveau référentiel dépendant du temps.

1.4 Le recours vers les méthodes approximatives

Hormis quelques cas extrêmement rares, il n'est en général pas possible de résoudre analytiquement l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Le plus souvent on est obligé d'avoir recours à des techniques permettant une approche plus ou moins complète et fidèle de la réalité du système étudié. Pour cette raison, on fait appel à des méthodes d'approximation. Bien qu'elles ne donnent pas des solutions analytiques, ces dernières sont généralement très puissantes et applicables à de nombreux systèmes physiques, selon la

méthode, où elles offrent des résultats à un ordre de précision élevé. On peut distinguer en gros trois techniques différentes qui s'adressent à des cas de figures assez bien définis

1.4.1 La théorie des perturbations dépendant du temps :

Il n'existe que peu de problèmes physiques pour lesquels on puisse trouver pour le modèle envisagé, une solution mathématique simple. Dans la plupart des cas une solution approchée doit être cherchée. La théorie des perturbations constitue une de ces approximations. L'idée générale de la méthode est de dégager les effets principaux qui rendent compte globalement du comportement du système, et ensuite de détailler certaines quantités qui découlent d'effets secondaires moins importants. Donc l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(t) = H_0(t) + \lambda\omega(t) \quad (1.20)$$

Où $H_0(t)$ est un Hamiltonien d'une équation de Schrödinger que l'on sait intégrer exactement et $\omega(t)$ une fonction quelconque et λ vérifie: $\lambda \ll 1$.

Il est montré que :

$$U(t, t_0) = U^{(0)}(t, t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) \quad (1.21)$$

Avec $U^{(0)}(t, t_0)$ est la solution de l'équation non perturbée. Les $U^{(n)}(t, t_0), \forall n \geq 1$ sont données par :

$$U^{(n)}(t, t_0) = (i\hbar)^{-n} \lambda^n \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_1}^{t_2} dt_1 U^{(0)}(t, t_n) \omega(t_n) U^{(0)}(t_n, t_{n-1}) \dots \omega(t_{n-1}) \dots U^{(0)}(t_2, t_1) \omega(t_1) U^{(0)}(t_1, t_0) \quad (1.22)$$

La théorie des perturbations s'applique en générale aux cas où $H_0(t)$ est indépendant du temps et la où la partie dépendant du temps $\omega(t)$ est petite par rapport à H_0 et peut être considérée comme une perturbation, c'est-à-dire on peut toujours l'écrire sous la forme $\omega(t) = \lambda V(t)$; $V(t)$ est de l'ordre de grandeur de H_0 .

A l'inverse de la théorie des perturbations indépendant du temps, on ne peut pas parler ici des corrections des valeurs propres car les énergies dans ce cas ne sont pas conservées. Mais cette méthode permet de calculer approximativement les fonctions d'onde à partir des états stationnaires du système non perturbé [21 – 24].

1.4.2 Méthodes variationnelle :

Cette méthode s'appuie sur la théorie de Ritz qui stipule que la valeur moyenne de l'Hamiltonien calculé par rapport à une fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$, c'est-à-dire :

$$\langle H(t) \rangle = \frac{\langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle}{\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle} \quad (1.23)$$

Est stationnaire si elle avoisine l'une de ces valeurs propres. Alors pour trouver les valeurs propres de l'Hamiltonien on choisit une fonction d'essai appropriée dépendante d'un certain paramètre α , et en variant par rapport au paramètre les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondent aux valeurs α_i , pour lesquelles la valeur moyenne est extrémale.

1.4.3 Approximation soudaine :

Dans le cas extrême où l'Hamiltonien du système varie subitement avec le temps on parle d'approximation soudaine, c'est-à-dire on appelle approximation soudaine, l'approximation appliquée dans le cas limite, elle s'énonce comme suit : « . . . A la limite où, c'est-à-dire dans le cas du passage infiniment rapide, l'état dynamique du système reste inchangé . . . » . C'est-à-dire l'opérateur d'évolution vérifie [21 – 24] :

$$\lim_{T \rightarrow 0} U(T, t_0, t_0) = 1 \quad (1.24)$$

1.4.4 L'approximation adiabatique :

Les premiers travaux sur l'approximation adiabatique en mécanique quantique sont dus à M. Born et V. Fock qui ont fait une extension des travaux d'Ehrenfest en mécanique classique et l'ancienne théorie des Quanta. Dès lors, aucune intention pour examiner l'approximation adiabatique n'est concernée. Mais à partir des années cinquante, il y avait eu un réveil d'intérêt intense dans ce sujet. Des applications pratiques ont été trouvées en physique des plasmas, technologie de fusion, accélérateurs des particules chargées, et même dans l'astronomie galactique.

Définitions quantiques

Un **processus diabatique** est un processus dans lequel les conditions (externes) changeant rapidement empêchent le système d'adapter sa configuration durant son déroulement, ce qui fait que la densité de probabilité reste inchangée. Typiquement, il n'y a pas d'état propre du Hamiltonien final de même forme fonctionnelle que pour l'état initial. Le système finit en une combinaison linéaire d'états dont la somme reproduit la densité de probabilité initiale.

Un **processus adiabatique** est un processus dans lequel les conditions (externes) permettent l'adaptation du système, ce qui résulte en une modification de la densité de probabilité. Si le système est initialement dans un état propre du Hamiltonien de départ, il sera au final dans l'état propre « correspondant » du Hamiltonien d'arrivée

Différentiation théorique

Pour un temps initial t_0 un système quantique a une énergie donnée par le Hamiltonien $\tilde{H}(t_0)$; le système est dans un état propre de $\tilde{H}(t_0)$ décrit par $\psi(x, t_0)$. Les conditions changeantes modifient le Hamiltonien de manière continue, ce qui donne un Hamiltonien final $\tilde{H}(t_1)$ à un temps t_1 . Le système évolue selon l'équation de Schrödinger, afin d'atteindre l'état final $\psi(x, t_1)$. Le théorème adiabatique indique que la modification du système dépend de manière critique du temps $\tau = t_1 - t_0$ durant lequel elle a lieu.

Pour un processus adiabatique véritable, on utilise $\tau \rightarrow \infty$; dans ce cas, l'état final $\psi(x, t_1)$ est un état propre du Hamiltonien final $\tilde{H}(t_1)$, avec une configuration modifiée [24] :

$$|\psi(x, t_1)|^2 \neq |\psi(x, t_0)|^2 \quad (1.25)$$

1.4.5 Phase de Berry :

La découverte de la phase géométrique de Berry (1984) [25] a constitué un complément au théorème adiabatique quantique. Berry a montré que l'évolué d'un état propre de l'Hamiltonien reste état propre à une phase près qui est la somme d'une contribution dynamique $\frac{-\phi_n(t)}{\hbar}$ et d'une contribution géométrique γ_n^G :

$$|\Psi_n(t)\rangle = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [-\phi_n(t) + \gamma_n^G(t)] \right\} |\varphi_n(t)\rangle \quad (1.26)$$

$$\gamma_n^G(t) = \int_{t_0}^t \langle \varphi_n(t') | i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} | \varphi_n(t') \rangle dt' \quad (1.27)$$

La phase de Berry a été généralisée aux : Evolutions cycliques, Evolutions non adiabatiques, Evolution des systèmes non hermitiens.

1.4.6 La théorie des invariants :

La théorie des invariants (ou de *Lewis* et *Riesenfeld*) [1] constitue une méthode puissante pour l'étude des phases géométriques ainsi que la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Elle représente une extension de la phase géométrique de Berry pour les cas non adiabatique. Cette dernière a été l'objet de notre travail dans le chapitre suivant dont nous donnerons quelques notions essentielles concernant sa puissance et sa souplesse dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

Chapitre 2

Théorie des invariants et les systèmes

dépendants du temps

Chapitre 2

Théorie des invariants et les systèmes dépendants du temps

2.1 Théorème de Liouville et l'invariant mécanique:

L'équation de Liouville décrit l'évolution temporelle de la densité de probabilité ρ dans l'espace des phases. Cette densité de probabilité est définie comme la probabilité pour que l'état du système soit représenté par un point à l'intérieur du volume Γ considéré.

En mécanique classique

On utilise les coordonnées généralisées (q, p) où N est la dimension du système. La densité de probabilité est définie par la probabilité $\rho(p, q)d^N q d^N p$ de rencontrer l'état du système dans le volume infinitésimal $d^N q d^N p$

Lorsqu'on calcule l'évolution temporelle cette densité de probabilité $\rho(p, q)$, on obtient :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] = 0 \quad (2.1)$$

On peut utiliser les équations canoniques de Hamilton en les remplaçant dans l'équation précédente :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.2)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.3)$$

on obtient le résultat

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(p, q, t) = -\{\rho(p, q, t), H\} = \{H, \rho(p, q, t)\} \quad (2.4)$$

En mécanique quantique

La mécanique classique apparaît comme une limite de la mécanique quantique, lorsqu'on fait tendre la constante de Planck \hbar vers 0. L'équation de Liouville devrait se présenter comme une limite de l'équation dite de Liouville-Von Neumann que nous allons établir.

Considérons l'équation de Schrödinger de seconde espèce :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad \text{où} \quad -i\hbar \frac{d}{dt} \langle\psi| = \langle\psi| \hat{H}$$

L'opérateur densité est $\hat{D} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Ce qui nous intéresse, comme dans le cas classique, c'est l'évolution dans le temps de cet opérateur. C'est-à-dire :

$$\frac{d\hat{D}}{dt} = \frac{d|\psi\rangle}{dt} \langle\psi| + |\psi\rangle \frac{d\langle\psi|}{dt} \quad (2.5)$$

Avec l'équation de Schrödinger cette dérivée s'écrit sous la forme

$$\frac{d\hat{D}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\psi\rangle\langle\psi| - \frac{1}{i\hbar} |\psi\rangle\langle\psi| \hat{H} \quad (2.6)$$

L'évolution dans le temps de l'opérateur densité est donc régie par l'équation, dite de Liouville-Von Neumann :

$$i\hbar \frac{d\hat{D}}{dt} = \hat{H} \hat{D} - \hat{D} \hat{H} = [\hat{H}, \hat{D}] \quad (2.7)$$

$[\hat{H}, \hat{D}]$ est le **crochet de Lie**, dit commutateur des deux opérateurs \hat{H} et \hat{D} .

Notons que d'une manière générale, une fonction F de la mécanique classique des variables q_i, p_i et t a une dérivée totale qui s'écrit :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [\hat{F}, \hat{H}] \quad (2.8)$$

Il faut comparer à l'équation générale d'un opérateur \hat{F} , dite équation de Heisenberg :

$$i\hbar \frac{d\hat{F}}{dt} = [\hat{F}, \hat{H}] + i\hbar \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \quad (2.9)$$

On peut montrer que le commutateur $\frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{H}]$ tend vers le crochet de Poisson $[F, H]$ dans la limite $\hbar \rightarrow 0$.

2.2 La théorie de Lewis-Riesenfeld :

L'objectif donc est de résoudre l'équation de Schrödinger ($|\psi(t)\rangle$) pour un système dont l'Hamiltonien $H(t)$ est explicitement dépendant du temps, d'après Lewis et Riesenfeld [1] on peut toujours supposer l'existence d'un autre opérateur Hermitien non trivial $I(t)$, ce dernier est dit invariant s'il satisfait l'équation de Liouville-Von Neumann

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0 \quad (2.10)$$

$$I(t) = I^+(t) \quad (2.11)$$

En appliquant l'équation (2.10) sur $|\psi\rangle$ et en utilisant l'équation ($|\psi(t)\rangle$), on obtient la relation

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} |\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] |\psi\rangle = 0 \quad (2.12)$$

d'où

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [I(t)|\psi\rangle] = H(t) [I(t)|\psi\rangle] \quad (2.13)$$

Cette dernière formule implique que l'action de l'invariant sur un vecteur d'état, solution de l'équation de Schrödinger, produit une autre solution. Ce résultat est valable pour tout invariant, même si ce dernier implique des opérations de dérivation par rapport au temps.

2.2.1 Les valeurs propres et les vecteurs propres de l'invariant:

Comme tout opérateur en mécanique quantique, I ayant des valeurs propres et des vecteurs propres.

On suppose que l'invariant $I(t)$ a un ensemble complet de fonctions propres. Soit λ_n les valeurs propres de $I(t)$ et $|\varphi_{n,k}(t)\rangle$ ses fonctions propres, où k représente tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier les états propres. L'équation aux valeurs propres s'écrit comme.

$$I(t)|\varphi_{n,k}(t)\rangle = \lambda_n |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.14)$$

$$\langle \varphi_{n,k}(t) | \varphi_{\dot{n},\dot{k}}(t) \rangle = \delta_{n,\dot{n}} \delta_{k,\dot{k}} \quad (2.15)$$

En vertu de l'équation (2.11), les valeurs propres λ_n sont réelles et indépendantes du temps, comme on peut le déduire facilement en dérivant l'équation (2.14) par rapport au

temps

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle + I(t) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle + \lambda_n \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.16)$$

On applique l'équation (2.10) sur l'état propre $|\varphi_{n,k}(t)\rangle$, ce qui donne

$$i\hbar \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle + I(t) H(t) |\varphi_{n,k}(t)\rangle - \lambda_n H(t) |\varphi_{n,k}(t)\rangle = 0 \quad (2.17)$$

le produit scalaire de l'équation (2.17) par un état $|\varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t)\rangle$ est

$$i\hbar \langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle + (\lambda_{\hat{n}} - \lambda_n) \langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | H(t) |\varphi_{n,k}(t)\rangle = 0 \quad (2.18)$$

ce qui implique

$$\langle \varphi_{n,k}(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle = 0 \quad (2.19)$$

en prenant maintenant le produit scalaire de l'équation (2.16) avec $\langle \varphi_{n,k}(t) |$, on obtient

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = \langle \varphi_{n,k}(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle = 0 \quad (2.19)$$

Comme les valeurs propres sont indépendantes du temps, il est clair que les états propres doivent être dépendants du temps.

Pour trouver le rapport entre les états propres de $I(t)$ et les solutions de l'équation Schrödinger, Lewis et Riesenfeld ont écrit en premier lieu l'équation du mouvement de $|\varphi_{n,k}(t)\rangle$, en commençant par l'équation (2.16) et en utilisant l'équation (2.19), ils ont abouti à

$$(\lambda_n - I(t)) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle = \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.20)$$

En prenant le produit scalaire avec $\langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) |$ et en utilisant l'équation (2.18) pour éliminer $\langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle$ ils ont obtenu

$$i\hbar (\lambda_n - \lambda_{\hat{n}}) \langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle = (\lambda_n - \lambda_{\hat{n}}) \langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | H(t) |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.21)$$

pour $\lambda_n \neq \lambda_{\hat{n}}$, on trouve

$$i\hbar \langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle = \langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | H(t) |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.22)$$

L'équation (2.21) n'implique pas

$$i\hbar \langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{n,k}(t)\rangle = \langle \varphi_{\hat{n},\hat{k}}(t) | H(t) |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.23)$$

Si l'équation (2.22) est valable pour $\lambda_n = \lambda_{\hat{n}}$ aussi bien que pour $\lambda_n \neq \lambda_{\hat{n}}$, alors on déduit immédiatement que $|\varphi_{n,k}(t)\rangle$ est une solution particulière de l'équation de Schrödinger.

Jusqu'ici, on n'a pas parlé de la phase de $|\varphi_{n,k}(t)\rangle$: on peut définir un nouvel ensemble des vecteurs propres de $I(t)$ lié à l'ensemble précédent par une transformation de jauge dépendant du temps.

$$\langle \varphi_{n,\hat{k}}(t) |_{\alpha} = \exp [i\alpha_{n,k}(t)] |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.24)$$

où $\alpha_{n,k}$ est une fonction réelle du temps arbitrairement choisie. Ces $|\varphi_{n,k}(t)\rangle_{\alpha}$ sont des états propres orthonormaux de $I(t)$ associés à λ_n , aussi bien que les $|\varphi_{n,k}(t)\rangle$. Pour un choix approprié des phases $\alpha_{n,k}(t)$, l'équation (2.22) sera vérifiée pour $\lambda_n = \lambda_{\hat{n}}$ et donc l'objectif sera atteint, à condition d'avoir

$$\hbar \delta_{\hat{k},k} \frac{d\alpha_{n,k}}{dt} = \langle \varphi_{n,\hat{k}}(t) | \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right] |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.25)$$

Pour satisfaire cette équation, les états $|\varphi_{n,k}(t)\rangle$ doivent être choisies de sorte que le membre à droite s'annule pour $\hat{k} \neq k$. La diagonalisation est toujours possible car l'opérateur $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t)$ est hermitien. Une fois on a choisi les états, les phases $\alpha_{n,k}(t)$ sont choisies pour qu'elles satisfassent l'équation simple

$$\hbar \frac{d\alpha_{n,k}}{dt} = \langle \varphi_{n,k}(t) | \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right] |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.26)$$

Du fait que chacun de ces nouveaux états propres de $I(t)$ satisfait l'équation de Schrödinger, la solution générale est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n,k} C_{n,k} e^{i\alpha_{n,k}(t)} |\varphi_{n,k}(t)\rangle \quad (2.27)$$

où $C_{n,k}$ sont des coefficients indépendants du temps correspondant à $|\psi(t_0)\rangle$

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_{n,k} C_{n,k} e^{i\alpha_{n,k}(t_0)} |\varphi_{n,k}(t_0)\rangle \quad (2.28)$$

Construction de l'invariant

Pour trouver un invariant il faut construire une algèbre de Lie engendrée par $H(t)$ et constituée par des générateurs hermitiens.

$$\Lambda = \{L_1, L_2, L_3, \dots, L_n\} \quad (2.29)$$

Définition : une algèbre de Lie d'opérateurs est un ensemble d'opérateurs auto-adjoints formants un espace vectoriel réel de dimension fini n est stable par l'opération de commutation.

En notant Λ une telle algèbre de dimension n , cela signifie, qu'il existe des opérateurs auto-adjoints $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$ indépendants, formants une base de Λ , et que tout élément $L \in \Lambda$ s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients réels [26] :

$$L = \sum_{i=1}^n a_i L_i \quad \in \Lambda, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

Et il faut aussi que $\forall A, B \in \Lambda$, alors : $\frac{1}{i} [A, B] = \frac{1}{i} (AB - BA) \in \Lambda$

Dans notre cas on prend $I(t)$ sous la forme :

$$I(t) = \sum_{l=1}^n \alpha_l(t) L_l. \quad (2.31)$$

Pour trouver les fonctions $\alpha_l(t)$ il faut calculer les relations de commutations $[H, T_l]$:

$$[H, T_l] = \sum_{j=1}^n C_l^j L_j, \quad (2.32)$$

il faut calculer aussi les coefficients C_l^j , où les fonctions $\alpha_l(t)$ doivent vérifier la relation suivante qui donne un ensemble des équations différentielles :

$$i\hbar \dot{\alpha}_l(t) = \sum_{j=1}^n C_j^l \alpha_j(t) \quad (2.33)$$

On démontre cette relation :

En remplaçant les relations (2.31) et (2.32) dans l'équation (2.10), on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) L_j + \frac{1}{i\hbar} \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) L_j, H \right] = 0 \quad (2.34)$$

$$\sum_{j=1}^n L_j \dot{\alpha}_j(t) + \frac{1}{i\hbar} \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) [L_j, H] = 0 \quad (2.35)$$

$$\sum_{j=1}^n L_j \dot{\alpha}_j(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \sum_{l=1}^n C_l^j L_l \quad (2.36)$$

On remplace l par j et j par l dans le coté droit, on obtient :

$$i\hbar \sum_{j=1}^n L_l \dot{\alpha}_l(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_l(t) \sum_{j=1}^n C_j^l L_l \quad (2.37)$$

$$i\hbar \dot{\alpha}_l(t) = \sum_{j=1}^n C_j^l L_l \quad (2.38)$$

On voit bien que les fonctions $\alpha_l(t)$ doivent vérifier un système d'équation différentielles, où à chaque ensemble de $\alpha_l(t)$ qui justifient la relation (2.38) est associé un invariant :

$$I(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_l(t) L_l \quad (2.39)$$

Ce résultat nous permettra de construire l'invariant à condition que l'Hamiltonien s'écrit sous la base de ces générateurs. Tous les résultats obtenus dans ce chapitre seront appliqués ultérieurement dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Oscillateur harmonique à masse et fréquence variables

à 2D en présence d'un champ magnétique variable

Chapitre 3

Oscillateur harmonique à masse et fréquence variables à 2D en présence d'un champ magnétique variable:

3.1 Introduction:

L'oscillateur harmonique (OH) dépendant explicitement du temps est un modèle exactement soluble et qui a une large application dans différents domaines de la physique ; par exemple en physique moléculaire, chimie quantique, optique quantique, physique des plasmas et en théorie quantique des champs. Plusieurs méthodes ont été proposées pour déterminer les solutions exactes telles que, la méthode des invariants de Lewis et Riesenfeld (LR) [1, 27, 28, 29, 30], la méthode des intégrales de chemins [31, 32, 33], la méthode directe [34], la méthode algébrique [35, 36] et le principe d'action de Schwinger [37, 38].

D'autre part, le champ magnétique extérieur est un facteur important qui affecte le mouvement d'une particule chargée dans plusieurs systèmes physiques. Quand un champ magnétique dépendant du temps est appliqué sur un électron, il est impossible de réduire le système à un problème unidimensionnel. Au lieu de cela, il est préférable de modéliser le système étudié par deux oscillateurs harmoniques dépendants du temps en raison de l'existence d'un champ magnétique variable $B(t)$. L'importance de ce modèle dans la physique classique

et la physique quantique, nous a motivé de l'étudier dans le domaine des systèmes dépendants du temps.

3.2 Formulation du problème:

Dans le chapitre précédent nous avons présenté par simplicité la théorie des invariants d'une manière générale. Dans ce chapitre nous montrons comment le formalisme du chapitre précédent s'étend pour décrire le cas d'une particule chargée qui subit l'influence⁽¹⁾ d'un champ magnétique décrit par les champs de potentiel \vec{A} . La dynamique d'une particule quantique est décrite par l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, y, t) = H(x, y, t) \Psi(x, y, t). \quad (3.1)$$

Dans cette équation intervient l'opérateur Hamiltonien qui contient toutes les informations sur la nature de la particule et les forces qu'elle subit. En général, cet opérateur \hat{H} s'obtient à partir de la fonction de Hamilton classique (qui est l'énergie totale) qui sert à décrire la dynamique de la particule dans le cadre de la mécanique classique, et l'on remplace les variables classiques x, y par les opérateurs \hat{x}, \hat{y} . Cette opération s'appelle le principe de correspondance.

Comme expliqué ci-dessus, l'Hamiltonien s'écrit sous la forme:

$$H(x, y, t) = \frac{[p - qA(t)]^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)(x^2 + y^2), \quad (3.2)$$

tel que $M(t)$, $\omega(t)$ sont la masse et la fréquence dépendantes du temps, $\vec{P} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j}$, q est la charge électrique de la particule et $A(t)$ représente le potentiel vecteur. Pour un jauge⁽²⁾ appropriée symétrique, on peut choisir $\vec{A}(t)$ sous la forme:

$$\vec{A} = \frac{B(t)}{2}(-y \vec{i} + x \vec{j}). \quad (3.3)$$

⁽¹⁾On cherche à décrire une particule quantique subissant les effets d'un champ magnétique extérieur classique. On supposera donc que l'influence de la particule sur le champ est négligeable.

⁽²⁾Il faut penser à la transformation de Jauge comme à un changement de repère ou de référentiel en mécanique : les coordonnées des objets sont modifiées mais les phénomènes physique sont inchangés.

Insérons l'équation (3.3) dans l'équation (3.2), nous obtenons l'expression de L'Hamiltonien:

$$H(x, y, t) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)^2\omega(t)(x^2 + y^2) + \frac{\varpi_c(t)}{2}(xp_x - yp_y), \quad (3.4)$$

avec $\omega(t)$ est une fréquence de modulation $\omega(t) = \varpi^2(t) + \frac{\varpi_c(t)}{4}$, $\varpi_c = \frac{qB(t)}{M(t)}$ est la fréquence de Larmor, et $L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$ représente le moment orbitale angulaire sur l'axe oz .

Dans le but d'éliminer le dernier terme $\frac{\omega_c(t)}{2}(xp_x - yp_y)$ de l'équation (3.4), utilisons la transformation unitaire

$$\Psi(x, y, t) = U(t)\psi(x, y, t), \quad (3.5)$$

où $U(t)$ est un opérateur unitaire choisi sous la forme :

$$U(t) = \exp\left(-\frac{\hat{L}_z}{2\hbar} \int \tilde{\omega}_c(t)dt\right), \quad (3.6)$$

et par conséquent, l'équation de Schrödinger original du système décrit par l'Hamiltonien (3.2) s'écrit sous la forme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, y, t) = \tilde{H}(x, y, t)\psi(x, y, t), \quad (3.7)$$

où le nouveau Hamiltonien

$$\tilde{H}(x, y, t) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)(x^2 + y^2). \quad (3.8)$$

3.2.1 Construction de l'invariant:

Pour la construction d'un invariant du système décrit par l'Hamiltonien dépendant du temps (3.8), on utilise l'approche algébrique (algèbre de Lie) [39], soit la base hermitienne suivante :

$$L_1 = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2), \quad (3.9)$$

$$L_2 = [\{P_x, x\} + \{P_y, y\}], \quad (3.10)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (3.11)$$

avec les relations de commutation :

$$\left\{ \begin{array}{l} [L_1, L_2] = -2i\hbar L_1 \\ [L_2, L_3] = -2i\hbar L_3 \\ [L_1, L_3] = -i\hbar L_2 \end{array} \right. . \quad (3.12)$$

Maintenant, on cherche l'invariant sous la forme :

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) L_i \\ &= \alpha_1(t) L_1 + \alpha_2(t) L_2 + \alpha_3(t) L_3, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $\alpha_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) sont des coefficients dépendants du temps. En utilisant l'équation de Liouville-Von Neumann $\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [I, \tilde{H}]$, et la comparaison des coefficients d'un système d'équations linéaires de premier ordre pour les inconnues $\alpha_i(t)$ dans (3.13) on aboutit à:

$$\dot{\alpha}_1(t) = -\frac{2}{M(t)} \alpha_1(t) , \quad (3.14)$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = -\frac{2}{M(t)} \alpha_3(t) + M\omega^2 \alpha_1(t), \quad (3.15)$$

$$\dot{\alpha}_3(t) = 2M\omega^2 \alpha_2(t). \quad (3.16)$$

Ce système peut être simplifié en posant $\alpha_1 = \rho^2$ où $\rho(t)$ est la solution de l'équation auxiliaire de Pinney [40] :

$$\ddot{\rho}(t) + \frac{\dot{M}(t)}{M(t)} \dot{\rho}(t) + \rho(t) \omega^2(t) = \frac{1}{M^2(t) \rho^3(t)}. \quad (3.17)$$

En utilisant (3.14) – (3.16) on arrive à déterminer :

$$\alpha_2 = -M\rho\dot{\rho}, \quad (3.18)$$

et

$$\alpha_3 = \frac{1}{\rho^2} (1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2). \quad (3.19)$$

Finalement l'invariant s'écrit sous la forme:

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \rho^2(t)(p_x^2 + p_y^2) - M(t)\rho(t)\dot{\rho}(t)(xp_x + p_x x + yp_y + p_y y) \\ + \frac{1}{\rho^2(t)}(1 + M^2(t)\rho^2(t)\dot{\rho}^2(t))(x^2 + y^2) \end{array} \right\}. \quad (3.20)$$

3.2.2 Valeurs et états propres de l'invariant:

Il reste à obtenir les états et les valeurs propres de l'invariant $I(t)$:

$$I\phi_n(x, y, t) = \lambda_n\phi_n(x, y, t), \quad (3.21)$$

où λ_n sont des valeurs propres constantes de $I(t)$ et les états $\phi_n(x, y, t)$ sont les vecteurs propres correspondants.

Comme ils sont présentées dans le chapitre précédent, les solutions de l'équation de Schrödinger sont obtenues en multipliant un facteur de phase appropriée $e^{i\theta_n(t)}$ par les états propres $\phi_n(x, y, t)$ de l'invariant $\psi_n(x, y, t) = e^{i\theta_n(t)}\phi_n(x, y, t)$ où $\theta_n(t)$ est la phase vérifiant

l'équation

$$\hbar\frac{d}{dt}\theta_n(t) = \langle\phi_n(x, y, t)|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \tilde{H}(x, y, t)\right)|\phi_n(x, y, t)\rangle. \quad (3.22)$$

Dans le cas où les fonctions $\phi_n(x, y, t)$ et $\theta_n(t)$ sont dérivées, la solution générale de l'équation de Schrödinger $\psi(x, y, t)$ peut s'écrire sous la forme:

$$\psi(x, y, t) = \sum_n C_n e^{i\theta_n(t)}\phi_n(x, y, t), \quad (3.23)$$

où C_n sont des coefficients constants arbitraires fixés par les conditions initiales du système physique. Le point clé pour résoudre l'équation (3.21) est d'effectuer la transformation unitaire dépendante du temps suivante :

$$\Phi(x, y) = U(t)\phi_n(x, y, t), \quad (3.24)$$

où

$$U(t) = \exp\left[\left(\frac{-iM(t)\rho(t)\dot{\rho}(t)}{2\hbar}\right)(x^2 + y^2)\right] \times \exp\left[\frac{i\ln\rho(t)}{2\hbar}(xp_x + p_x x + yp_y + p_y y)\right]. \quad (3.25)$$

Nous remarquons que la fonction $\Phi_n(x, y)$ est indépendante du temps, alors, l'application de la transformation inverse nous permettra de trouver la fonction dépendante du temps sous la forme:

$$\phi_n(x, y, t) = U^{-1}(t)\Phi_n(x, y) \quad (3.26)$$

$$= (\rho(t))^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{iM(t)\dot{\rho}(t)}{2\hbar} (x^2 + y^2) \right] \Phi_n \left(\frac{x}{\rho(t)}, \frac{y}{\rho(t)}, t \right). \quad (3.27)$$

On peut montrer facilement que les opérateurs x , y , p_x et p_y sont transformés sous l'action de la transformation unitaire $U(t)$ sous la forme:

$$x \rightarrow x = U(t)xU(t)^{-1} = \rho(t)x, \quad (3.28)$$

$$y \rightarrow y = U(t)yU(t)^{-1} = \rho(t)y, \quad (3.29)$$

$$p_x \rightarrow p_x = U(t)p_xU(t)^{-1} = \left(\frac{p_x}{\rho(t)} - M(t)\dot{\rho}(t)x \right), \quad (3.30)$$

$$p_y \rightarrow p_y = U(t)p_yU(t)^{-1} = \left(\frac{p_y}{\rho(t)} - M(t)\dot{\rho}(t)y \right). \quad (3.31)$$

Dans ce cas l'invariant $I(t)$ se transforme en un nouveau invariant indépendant du temps:

$$I_0 = UIU^{-1} = \frac{1}{2} [(p_x^2 + p_y^2) + (x^2 + y^2)]. \quad (3.32)$$

Le problème étudié est réduit à un problème à deux dimensions indépendant du temps. Effectuons les changements de nouvelles variables $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$, les équations aux valeurs propres (3.21) se transforment en

$$\frac{1}{2} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + r^2 \right] \Phi(r, \varphi) = \lambda_n \Phi(r, \varphi). \quad (3.33)$$

Utilisant la méthode de séparation de variables, nous pouvons décomposer $\Phi_n(r, \varphi)$ (en coordonnées polaires) sous la forme: $\Phi_n(r, \varphi) = \chi_n(r)f(\varphi)$, où $f(\varphi) = \exp(\pm im\varphi)$. avec $m = 0, 1, 2, \dots$

Si nous définissons une nouvelle variable comme $z = r^2$ et introduisons ensuite le changement

$$\Phi_n(z) = (\hbar z)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \chi_n(z) f(\varphi), \quad (3.34)$$

l'équation (3.33) se réduit à:

$$z \frac{\partial^2 \chi(z)}{\partial z^2} + (1 + m - z) \frac{\partial \chi(z)}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_n}{\hbar} - m - 1 \right) \chi(z) = 0. \quad (3.35)$$

Cette dernière équation (3.25) s'écrit sous une forme hypergéométrique qui admet comme solution le polynôme de Laguerre, dont on peut exprimer $\chi_n(z)$ par :

$$\chi_n(z) = L_n^m(z), \quad (3.36)$$

tel que

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_n}{\hbar} - |m| - 1 \right). \quad (3.37)$$

Et par conséquent la valeur propre λ_n est exactement donnée par:

$$\lambda_n = \hbar(2n + |m| + 1) \quad (3.38)$$

et les vecteurs propres correspondants sont donnés par:

$$\begin{aligned} \Phi_n(r, \varphi) &= \chi_n(r) f(\varphi) \\ &= \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{1}{\hbar} \right)^{m+1} \right]^{\frac{1}{2}} \times r^{|m|} \exp\left(-\frac{r^2}{2\hbar}\right) \\ &\quad \times L_n^m\left(\frac{1}{\hbar}r^2\right) \exp(im\varphi). \end{aligned} \quad (3.39)$$

En utilisant la relation qui représente l'action de l'opérateur U^{-1} sur l'état propre de l'invariant I_0 on obtient les états propres de l'invariant $I(t)$ sous la forme:

$$\begin{aligned} \Phi_n(r, \varphi, t) &= U^{-1} \Phi_n(r, \varphi) \\ &= \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{1}{\hbar\rho^2} \right)^{m+1} \right]^{\frac{1}{2}} \times r^{|m|} \\ &\quad \times \exp \left\{ \left[\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right] r^2 \times L_n^m \left(\frac{r^2}{\hbar\rho^2} \right) \exp(im\varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dans les coordonnées cartésiennes (x, y) , les états propres de l'invariant $I(t)$ sont données par l'expression:

$$\begin{aligned} \phi_n(x, y, t) &= \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{1}{\hbar\rho^2} \right)^{m+1} \right]^{\frac{1}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{|m|}{2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ \left[\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right] (x^2 + y^2) \right\} \\ &\quad \times L_n^m \left(\frac{1}{\hbar\rho^2} (x^2 + y^2) \right) \times \exp(im\varphi). \end{aligned} \quad (3.41)$$

3.2.3 Calcul de la phase totale et la solution de l'équation de Schrödinger:

Il nous reste à déterminer la phase $\theta_n(t)$ qui satisfait l'équation (3.22). Appliquons la transformation unitaire $U(t)$ à gauche et à droite de l'équation (3.22) on obtient la relation

$$\hbar \frac{d}{dt} \theta_n(t) = \langle \Phi_n(x, y) | -\frac{I_0}{M\rho^2} | \Phi_n(x, y) \rangle. \quad (3.43)$$

Substituons les équations (3.38) et (3.39) dans (3.43), nous obtenons la phase associée au Hamiltonien H sous la forme

$$\theta_n(t) = -(2n + |m| + 1) \int_0^t \frac{1}{M(\hat{t})\rho^2(\hat{t})} d\hat{t}. \quad (3.44)$$

Et finalement la solution exacte de l'équation de Schrödinger (3.1) associée au Hamiltonien $H(x; y; t)$ est

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(x, y, t) &= U(t)\psi_{nm}(x, y, t) = \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{1}{\hbar\rho^2} \right)^{m+1} \right] (x^2 + y^2)^{\frac{|m|}{2}} \\ &\times \exp \left\{ \left[\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right] (x^2 + y^2) \right\} \times L_n^m \left(\frac{1}{\hbar\rho^2} (x^2 + y^2) \right) \\ &\times \exp \left(-i(2n + |m| + 1) \int_0^t \frac{1}{M(\hat{t})\rho^2(\hat{t})} d\hat{t} + im\dot{\varphi} \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

où le phase totale est donnée par

$$\gamma_n(t) = -(2n + |m| + 1) \int_0^t \frac{1}{M(\hat{t})\rho^2(\hat{t})} d\hat{t} + m\dot{\varphi}, \quad (3.46)$$

$$\dot{\varphi} = \varphi - \frac{1}{2} \int \varpi_c(t) dt. \quad (3.47)$$

Nous pouvons maintenant exprimer la fonction d'onde complète du système dans l'équation (3.1) sous la forme $\Psi(x, y, t) = \sum_{n,m} C_{nm} \Psi_{nm}(x, y, t)$, donc la fonction d'onde complète du système est obtenue exactement.

3.2.4 Applications :

Maintenant, pour une meilleure compréhension de notre développement, nous l'appliquons à un cas particulier dont la solution classique est complètement connue. Prenons un cas particulier dont les paramètres dépendants du temps sont donnés par:

$$M(t) = M_0 [1 + \epsilon \cos(\Omega t)], \quad (3.48)$$

$$\varpi^2(t) = \omega_0^2 - \frac{\Omega^2 \epsilon \{ \epsilon [\sin(\Omega t)^2] + 2\epsilon [\cos(\Omega t)]^2 + 2 \cos(\Omega t) \}}{4 [1 + \epsilon \cos(\Omega t)]^2}, \quad (3.49)$$

où M_0, Ω, ω_0 , et ϵ sont des constantes. Nous considérons le cas où la variation de $M(t)$ est suffisamment petit, cela nous permettra de poser la condition $\epsilon \ll 1$. Ensuite, la solution de Eq.(3.17) est représenté par:

$$\rho(t) = \frac{1}{\{\omega_0 M_0 [1 + \cos(\Omega t)]\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.50)$$

Figures

Densité de probabilité $|\Psi_{nm}(x, y, t)|^2$ en fonction de x et t

Les paramètres sont donnés par Eqs.(3.47) et(3.48) les valeurs de (ϵ, Ω) sont

(0.1, 0.5) pour (a),

(0.3, 0.5) pour (b),

et (0.1, 5.0) pour (c).

D'autres valeurs sont $y = 1, M_0 = 1, \omega_0 = 1, \hbar = 1, n = 1$ et $m = 1$

Conclusion

Dans notre travail nous avons utilisé la théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld et l'approche algébrique $SU(1.1)$ de Lie pour analyser théoriquement l'évolution quantique d'un oscillateur harmonique chargé (particule chargée) dans un champ magnétique variable $B(t)$ décrit par un Hamiltonien qui contient toutes les informations sur la nature de la particule et les forces qu'elle subit. L'objectif était la résolution de l'équation de Schrödinger appropriée à ce système dans le cas où l'Hamiltonien est un opérateur dépendant du temps, c'est-à-dire la fréquence, la masse et le champ extérieur sont variables. Dans le but d'établir une solution exacte de l'équation de Schrödinger, nous avons utilisé la théorie des invariants comme un outil mathématique puissant pour traiter ce problème.

La méthode utilisée consiste à construire une algèbre $SU(1.1)$ de Lie de l'opérateur Hamiltonien, en utilisant une base composée par des générateurs, ce qui nous a conduit à calculer les coefficients de Maurer-Cartan (constants de structures) de cette algèbre, ces derniers ont été employés dans la constitution d'un ensemble des équations différentielles dites les fonctions $\alpha_l(t)$, dans le but de calculer un nouveau opérateur dépendant du temps, cela est effectué si et seulement si le système des équations différentielles $\alpha_l(t)$ est vérifié par une équation auxiliaire, dont la solution garantit la dépendance implicite du temps de notre invariant. Ensuite, à l'aide d'une transformation unitaire appropriée, nous avons transformé l'invariant $I(t)$ à un autre indépendant du temps dont l'équation de ses états propres prend la forme d'une équation différentielle qui admet pour solution le polynôme de Laguerre. Par conséquent, l'équation de Schrödinger qui décrit l'évolution de la fonction d'onde est obtenue en multipliant les états propres de l'invariant par un facteur de phase: $\exp i\theta_n(t)$.

Les fonctions d'onde que nous avons obtenue ici peuvent être utilisées pour évaluer non seulement les valeurs moyennes de diverses observables en mécanique quantique tels que le moment et l'énergie quantique, mais aussi les densités de probabilité et les fluctuations des variables canoniques. Enfin, nous n'avons pas examiné les effets thermiques dans ce travail. Le comportement quantique du mouvement des particules chargées avec considération des effets thermiques peut construire une tâche passionnant. Certes, ils sont de bons sujets pour des recherches ultérieures dans le futur.

Bibliographie

- [1] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld , *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1458.
- [2] H. R. Lewis, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **18** (1967) 510.
- [3] H. R. Lewis, Jr., *Phys. Rev.* **172** (1968) 1313, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1976.
- [4] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18** (1941) 394.
- [5] E. Kanai, *Prog. Theor. Phys.* **3** (1948) 440.
- [6] K. M. Ng and C. F. Lo, *Phys. Lett. A* **230** (1997) 144.
- [7] S.-W. Qian, Z.-Y. Gu, and W. Wang, *Phys. Lett. A* **157** (1991) 456.
- [8] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko and L. Rosa, *Phys. Rev. A* **57** (1998) 2851.
- [9] C. A. S. Ferreira, P. T. S. Alencar and J. M. F. Bassolo, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 024103.
- [10] B. Bascia, S. S. Mizrahi and M. H. Moussa, *Phys. Rev. A* **49** (1992) 5885.
- [11] M. S. Abdalla, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 4026.
- [12] A. B. Nassar, *Physica A* **24** (1987) 24; C. Yuce, *Ann. Phys.* **308** (2003) 599.
- [13] J. R. Choi, *J. Phys.: Condens. Matter* **15** (2003) 823.
- [14] M. S. Abdalla and J. R. Choi, *Ann. Phys.* **322** (2007) 2795.
- [15] H. Jing, B. H. Xie and Q. Yun. Shi, *Phys. Lett. A* **277** (2000) 295.
- [16] L. M. Lin and L. L. Yan, *Commun Theor.Phys.* **43** (2005) 1027.
- [17] S. Menouar, M. Maamache and J. R. Choi, *Physica Scripta.* **82** (2010) 065004.
- [18] S. Menouar, M. Maamache and J. R. Choi, *Ann. Phys.* **325** (2010) 1708.
- [19] S. Menouar, M. Maamache and J. R. Choi, *Chin. J. Phys.* **4** (2011) 871.
- [20] R. K. Varma, *Phys. Rep.* **378** (2003) 301.
- [21] G. Goldstein, *Techniques de résolution numérique de l'équation de Schrödinger*

- dépendant du temps, (Université Libre de Bruxelles 2003).
- [22] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, T1 (Dunod, Paris, 1995) .
- [23] C. C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique* T1,(Hermann, Paris, 1977).
- [24] Y. Saadi .*Systèmes quantiques dépendant du temps Cas du spectre continu*, Thèse de Doctorat, (Université de Sétif, 2013).
- [25] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London. A* **392** (1984) 124.
- [26] D.Raouane, *Application de la théorie des invariants sur un oscillateur harmonique d'une fréquence variable*,*Memoire de Master*. (Universite de M'sila, 2012)
- [27] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **55** (1997) 3219.
- [28] I. A. Pedrosa, G. P. Serra, and I. Guedes, *Phys. Rev. A* 56 (1997) 4300.
- [29] S. Menouar, M. Maamache, Y. Saadi and J. R. Choi, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 215303.
- [30] S. Menouar, M. Maamache, J. R. Choi and R. Sever, *J. Phys. Soc. Japan* **81** (2012) 064003.
- [31] D.C. Khandekar, S.V. Lawande and K.V. Bhagwat, *Path Integral Methods and their Applications*, World Scientific, Singapore, (1993).
- [32] M. Hillery and M.S. Zubairy, *Phys. Rev. A* **26** (1982) 451.
- [33] L. Chetouani, L. Guechi and T.F. Hammann, *Phys. Rev. A* **40** (1989) 1157.
- [34] C. Yüce, *Ann. Phys.* **308** (2003) 599.
- [35] Q. Wang, *J. Phys. A* **20** (1987) 5041.
- [36] C.F. Lo, *Europhys. Lett.* **24** (1993) 319.
- [37] C. Farina and A. J. Segui-Santonja, *Phys. Lett. A* **184** (1993) 23.
- [38] N.J.M. Horing and K. Sabeech, *Mod. Phys. Lett.* **B11** (1997) 1193.
- [39] J. Y. Ji, J. Kim and S. P. Kim, *Phys. Rev. A* **51**, (1995) 4268 .
- [40] E. Pinney, *Proc. Am. Math. Soc.* **1** (1950) 681.

Abstract:

In our work we used the invariant theory of Lewis and Riesenfeld and algebraic approach $SU(1,1)$ to analyze theoretically the quantum evolution of a harmonic oscillator loaded (charged particle) in a variable magnetic field $B(t)$. The objective was the resolution of the Schrödinger equation appropriate to this system if the Hamiltonian operator is a time-dependent, that is to say, the frequency, the mass and the external field are variable. The method used is to construct an algebra $SU(1,1)$ Lie of the Hamiltonian operator, using a database composed by the generators structures L_i . Using an appropriate unitary transformation, we transformed the invariant $I(t)$ to another independent of the time whose the equation of its eigenstates takes the form of a differential equation which admits solution for the Laguerre polynomial. Therefore, the solution of the Schrödinger equation that describes the evolution of the wave function is obtained by multiplying the eigenstates of the invariant by a phase factor $\exp i\theta_n(t)$. To illustrate our calculations we have applied to a particular case.

Key words: *Schrödinger equation, invariant theory, harmonic oscillator, Magnetic field, Algebra $SU(1,1)$.*

Résumé

Dans notre travail nous avons utilisé la théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld et l'approche algébrique $SU(1,1)$ de Lie pour analyser théoriquement l'évolution quantique d'un oscillateur harmonique chargé (particule chargée) dans un champ magnétique variable $B(t)$. L'objectif était la résolution de l'équation de Schrödinger appropriée à ce système dans le cas où l'Hamiltonien est un opérateur dépendant du temps, c'est-à-dire la fréquence, la masse et le champ extérieur sont variables. La méthode utilisée consiste à construire une algèbre $SU(1,1)$ de Lie de l'opérateur Hamiltonien, en utilisant une base composée par les générateurs de structures L_i . A l'aide d'une transformation unitaire appropriée, nous avons transformé l'invariant $I(t)$ à un autre indépendant du temps dont l'équation de ses états propres prend la forme d'une équation différentielle qui admet pour solution le polynôme de Laguerre. Par conséquent, la solution de l'équation de Schrödinger qui décrit l'évolution de la fonction d'onde est obtenue en multipliant les états propres de l'invariant par un facteur de phase : $\exp i\theta_n(t)$. Pour illustrer notre calculs nous avons les appliqué sur un cas particulier.

Mots Clés : *Equation de Schrödinger, Théorie des invariants, Oscillateur harmonique, Champ magnétique, Algèbre $SU(1,1)$*

ملخص:

في عملنا استخدمنا نظرية اللامتغيرات للويس و ريزنفلد والتقريب الجبري $SU(1,1)$ للي. وذلك من أجل تحليل نظري للتطور الكمي للهزاز التوافقي المشحون (الجسيمة المشحونة) في حقل مغناطيسي متغير $B(t)$. الهدف هو حل معادلة شرودنجر المناسبة لهذا النظام في الحالة التي يكون فيها مؤثر الهاملتوني متعلقا بالزمن بمعنى التردد و الكتلة والحقل الخارجي متغيرة. الطريقة المستخدمة هي بناء جبر للهاملتوني وذلك باستخدام قاعدة مكونة من مولدات البنية الجبرية $SU(1,1)$ للي. وباستخدام تحول وحدوي مناسب قمنا بتحويل اللامتغير المتعلق بالزمن إلى آخر مستقل عن الزمن و الذي معادلته الخاصة تأخذ شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل كحل كثيرات حدود لاقير. كنتيجة لذلك تم الحصول على حل لمعادلة شرودنجر التي تصف تطور الدالة الموجية بضرب دوال الحالات الخاصة بالامتغير بمعامل الطور $\exp i\theta_n(t)$. لتوضيح حساباتنا قمنا بتطبيقها على حالات خاصة.

الكلمات المفتاحية : معادلة شرودنجر نظرية اللامتغيرات ، الهزاز التوافقي، المجال المغناطيسي، الجبر $SU(1,1)$