

## IV.1- Introduction:

La conception des systèmes électromagnétiques est hautement sophistiquée et coûteuse. Les méthodes classiques de construction de maquettes nécessitent bien souvent de la place, des moyens et beaucoup de temps. Pour y remédier, Ils ont fait recours à la simulation informatique. Cette dernière est un moyen particulièrement efficace qui permet de limiter les expériences, de plus la modélisation numérique offre souvent la possibilité d'ouvrir des perspectives par le traitement d'un plus grand nombre de paramètres ajustables, qui peuvent indiquer les performances limites auxquelles on peut s'attendre (par exemple la région où le champ électrique entre deux électrodes est élevé au point d'atteindre une tension de claquage,...). Ces points sont d'autant plus critiques qu'ils sont difficiles à prévoir et parfois même à mesurer. C'est dans une optique prévisionnelle et dans un souci économique autant qu'exploratoire qu'on fait de la simulation.

En régime stationnaire, la formation des ions par la décharge couronne est fonction du champ électrostatique. La solution du problème applique l'équation de Poisson satisfaite par une fonction potentielle qui décrit complètement les champs statiques, en incluant l'effet d'une distribution de charges électriques, elles-mêmes sources de champs. Cette dernière n'est pas connue au préalable et est déterminée par le développement de l'équation de continuité du courant. Les méthodes de résolution de l'équation de Poisson aux dérivées partielles peuvent être analytiques ou numériques. Cependant pour des géométries d'électrodes ne présentant pas de symétries, la résolution du problème d'une manière analytique est loin d'être acquise, bien que les travaux expérimentaux faits jusqu'à présent ont conduit à plusieurs expressions empiriques. Les différentes méthodes numériques mises en œuvre incluent toutes des techniques mathématiques à savoir : les différences finies, les éléments finis, les volumes finis, simulation de charge, les éléments frontière...etc, généralement combinés avec la méthode des caractéristiques.

Dans ce chapitre, on se propose de présenter d'abord les outils nécessaires permettant la spécification du problème, on présentera par la suite d'une manière plus ou moins détaillée les différentes étapes de résolution numérique de l'équation de Poisson et de continuité de courant pour une géométrie fil-plan.

## IV. 2- Modèle mathématique :

Les équations de base gouvernant le phénomène de la décharge couronne se ramènent aux équations de Maxwell de l'électrostatique auxquelles s'ajoutent les équations du milieu considéré (l'air dans notre cas). Ces équations sont :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \pm \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{IV-1})$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

$$\vec{J} = \pm \rho \cdot \mu \cdot \vec{E} \quad (\text{IV-3})$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (\text{IV-4})$$

$$\nabla^2 \phi = \mp \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{IV-5})$$

où :

- $\vec{E}$  est le vecteur champ électrique (V/m). Le signe dans l'équation (IV-1) est positif si l'électrode active est soumise à une tension de polarité positive et négatif dans le cas contraire.
- $\phi$  est le potentiel électrique (V)
- $\rho$  est la densité de la charge d'espace ( $C/m^3$ ), elle est toujours positive. Le signe dans (IV-5) est négatif si l'électrode active est soumise à une tension de polarité positive et positive dans le cas contraire.
- $\vec{J}$  est le vecteur de densité de courant ( $A/m^2$ ). Le signe dans (IV-3) est positif si la tension appliquée est de polarité positive et négative dans le cas contraire.
- $\mu$  est la mobilité des ions positifs ou négatifs selon la polarité de l'électrode active ( $m^2/V.s$ ).
- $\varepsilon_0$  est la permittivité de l'air,  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  (F/m)

L'équation (IV-5) est l'équation de Poisson, elle est obtenue en remplaçant l'expression du champ donnée par (IV-4) dans (IV-1). L'équation (IV-3) est l'équation de la densité de courant. L'équation (IV-2) est l'équation de continuité du courant. En réalité, il est extrêmement difficile de trouver une solution exacte de ces équations à cause de leur nature

Non linéaire et c'est ainsi que des approches simplificatrices basées sur des modèles hypothétiques ont été développées [35].

### IV.3- Modèles et approximations:

Plusieurs hypothèses simplificatrices ont été introduites pour la résolution du problème de la décharge couronne positive.

. **Approximation de Deutsch :** L'analyse approximative de Deutsch date de 1933 [38]. Elle inclue trois hypothèses simplificatrices :

- La présence de la charge d'espace modifie l'amplitude du champ électrique laplacien et non sa direction ;
- La densité de la charge d'espace est constante dans l'espace inter électrodes ;
- La charge d'espace n'affecte pas le champ électrique au plan.

. **Conditions aux limites de Townsend et Kaptzov :** Comme condition aux limites, Townsend supposa que le champ électrique sur l'électrode active (le fil) demeure constant et est partout égal à la valeur seuil. Kaptzov lui, postula que la distribution du champ à la surface du conducteur couronné reste constante et est égale à sa valeur seuil même si la tension appliquée augmente [39].

. **Modèles de Popkov, Sarma/Janischewskyj et d'autres :** En 1949, Popkov élaborait une relation approximative courant-tension pour une géométrie fil-plan [33], dans laquelle la première hypothèse de Deutsch a été retenue et les deux autres ont été écartées. Plus tard, Sarma et Janischewskyj ont proposé une méthode qui utilise cinq hypothèses. Les plus cruciales sont la première approximation de Deutsch et l'hypothèse de Kaptzov. La méthode utilise le modèle numérique, et à travers un processus itératif de résolution du champ électrique et de la densité du courant, ils ont obtenu les caractéristiques courant-tension qui s'accordent bien avec les données expérimentales. De là plus d'efforts ont été investis sur le calcul numérique et qui depuis ont pris le large des publications. Les travaux les plus marquants sont :

- Ceux de Janischewskyj et Gela [40] qui ont démontré en 1979, l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution du champ électrique dans les lignes de transport d'énergie à courant continu. La méthode de résolution a été appliquée pour une géométrie d'électrodes cylindres coaxiaux, résolu auparavant par Townsend en 1914 [42].

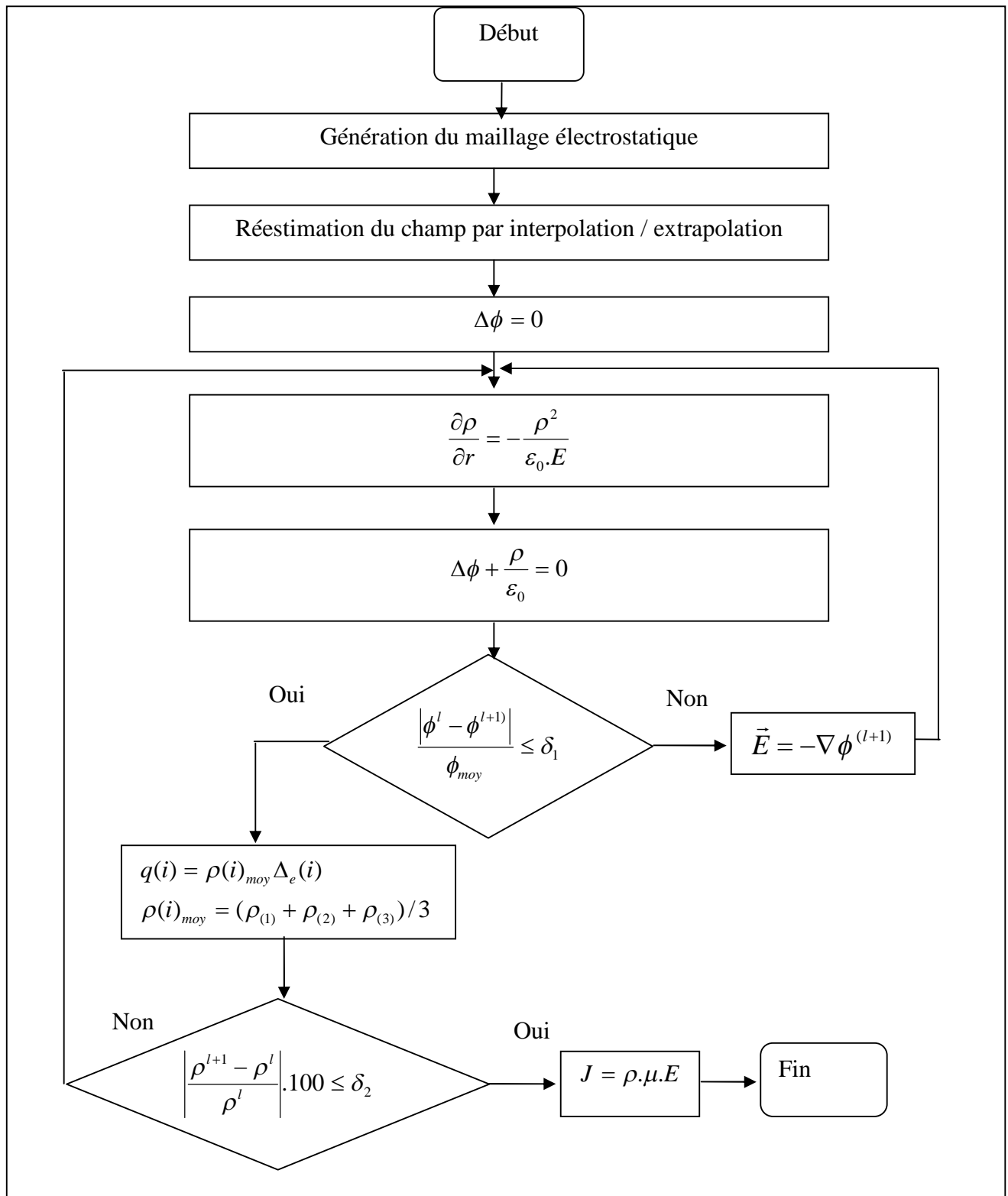
- L'analyse de Takuma, Ikeda et Kawamoto de 1981 [42]. Elle est basée sur la méthode des éléments finis et introduit les valeurs du courant couronne par unité de longueur. Dans leur publication de 1987, les mêmes auteurs ont utilisé la forme intégrale de l'équation de continuité du courant plus celle de Poisson pour calculer la distribution du potentiel et ils ont retenu l'hypothèse de la constance de la densité de la charge d'espace autour de l'électrode active.
- Abdel -Salam, Fargually et Abdel- Sattar ont utilisé en 1983 la méthode des éléments finis sans l'introduction des données empiriques.
- Davis et Hoburg [37] ont proposé en 1986 une méthode itérative basée sur la méthode des caractéristiques pour le calcul de la densité de la charge d'espace et de la méthode des éléments finis pour le calcul de la distribution du champ électrique.
- Adamiak [41] a proposé en 1994 la méthode des éléments finis dans laquelle le maillage est généré d'une manière adaptative basée sur les erreurs commises sur le potentiel et la densité de charge.
- Abdel-Salam et Al-Hamouz [42] sont les premiers à proposer en 1993 et 1995 une méthode itérative pour la résolution des équations du milieu ionisé en incluant la diffusion. En 1998 Al-Hamouz , a supposé la non constance de la mobilité ionique et a obtenu des résultats très satisfaisants via les résultats expérimentaux.

Le modèle que nous avons utilisé pour la résolution numérique est celui utilisé par Abdel-Salam et Al-Hamouz [42] tout en tenant compte de la longueur de l'avalanche négligée par ces auteurs et prise en considération pour la première fois par Yala. En outre une modification est apportée, dans laquelle nous avons introduit le potentiel correspondant au champ critique du minimum d'ionisation comme troisième condition aux limites dans la formulation en éléments finis. Toutes les étapes de résolution seront présentées en détails dans le paragraphe suivant :

#### IV.4- Différentes étapes de résolution numérique :

La configuration d'électrodes à simuler est la configuration fil-plan. Le fil est de rayon  $R_0$ , distant d'une hauteur  $H$  par rapport au plan. L'électrode active étant soumise à une tension de polarité négative. Il s'avère que le traitement peut se faire comme dans le cas de la polarité positive. La différence entre les deux cas réside dans les grandeurs physiques telles que la valeur de la tension seuil, la longueur d'avalanche et la mobilité des ions.

L'organigramme de résolution du problème considéré est donné par la figure (IV-1). Les différentes étapes suivies pour la résolution numérique sont détaillées dans ce qui suit.



**Figure IV.1- Organigramme des étapes de résolution du problème de la décharge couronne**

#### IV.4.1-L'etape 1 : Génération du maillage électrostatique:

Le conducteur est considéré de longueur infinie. Ainsi, le problème se ramène à une configuration bidimensionnelle dans le système (X, Y). La configuration fil-plan est une configuration ouverte non limitée, on est donc amené à limiter notre domaine d'étude en créant des frontières artificielles prises égale à  $0.2m$  selon l'axe des X, et  $0.4m$  selon l'axe des Y (figure IV.2). A cause de la symétrie par rapport à l'axe des Y, une moitié des lignes de champ est tracée en absence de la charge d'espace et cela en utilisant la méthode des images électriques décrite comme suit :

Sous tension négative  $V_{app}$ , appliquée à l'électrode active (le fil), le conducteur est simulé par

une charge  $-q$ , telle que :  $q = -\frac{2.\pi.\epsilon_0.V_{app}}{\ln((H+b)/R_0)}$  et son image  $+q$  (figure (IV.3)).

Avec  $b = \sqrt{H^2 - R_0^2}$  est la hauteur de  $q$  au dessus du plan.

Au point 1 de coordonnées  $(x_1, y_1)$  placé soit sur le plan, soit sur la frontière artificielle, on peut évaluer le potentiel  $\phi$ , les composantes  $E_{x1}$ ,  $E_{y1}$  du champ électrique selon les axes X et Y et le champ résultant  $E_{r1}$  comme suit :

$$\phi = \frac{-q}{2.\pi.\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (IV-6)$$

$$E_{x1} = -\left( \frac{q}{2.\pi.\epsilon_0} \left( \frac{x_1}{R_1^2} - \frac{x_1}{R_2^2} \right) \right) \quad (IV-7)$$

$$E_{y1} = -\left( \frac{q}{2.\pi.\epsilon_0} \left( \frac{y_1 - y_q}{R_1^2} - \frac{y_1 + y_q}{R_2^2} \right) \right) \quad (IV-8)$$

$$E_{r1} = \sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2} \quad (IV-9)$$

$$\text{Avec : } R_1^2 = x_1^2 + (y_q - y_1)^2 \quad (IV-10)$$

$$R_2^2 = x_1^2 + (y_q + y_1)^2 \quad (IV-11)$$

Les coordonnées  $(x_2, y_2)$  au point 2 à une distance additionnelle  $\Delta L$  du point 1 le long de la direction de  $E_{r1}$  sont exprimées par :

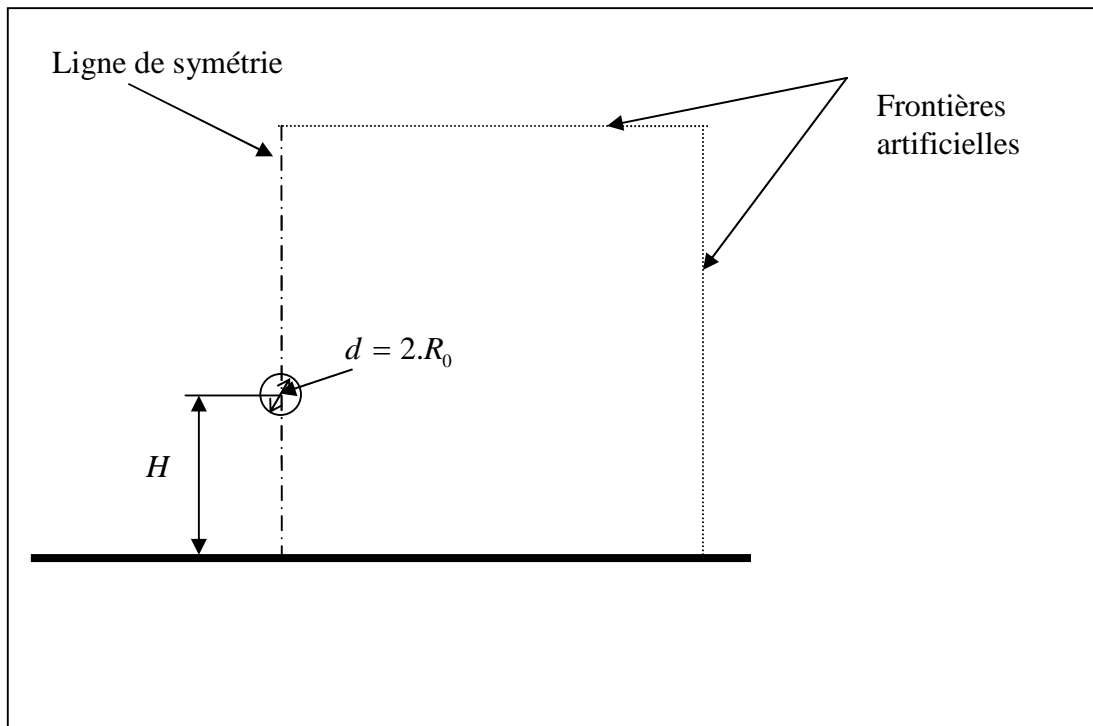


Figure IV.2 : Configuration fil-plan avec les frontières artificielles

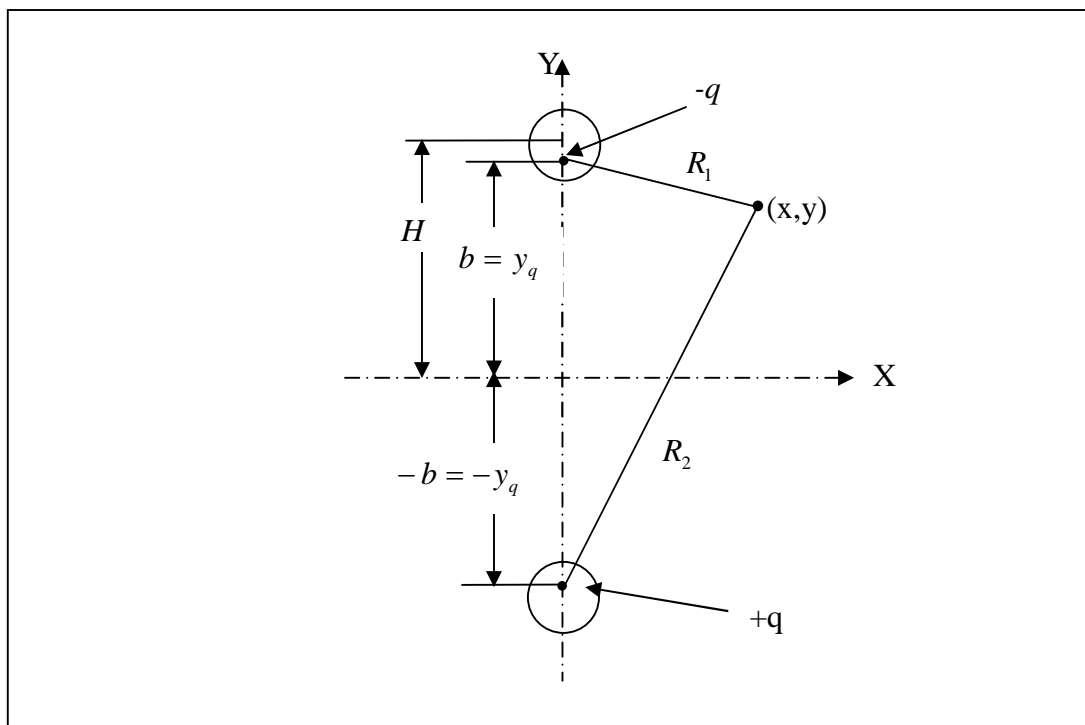
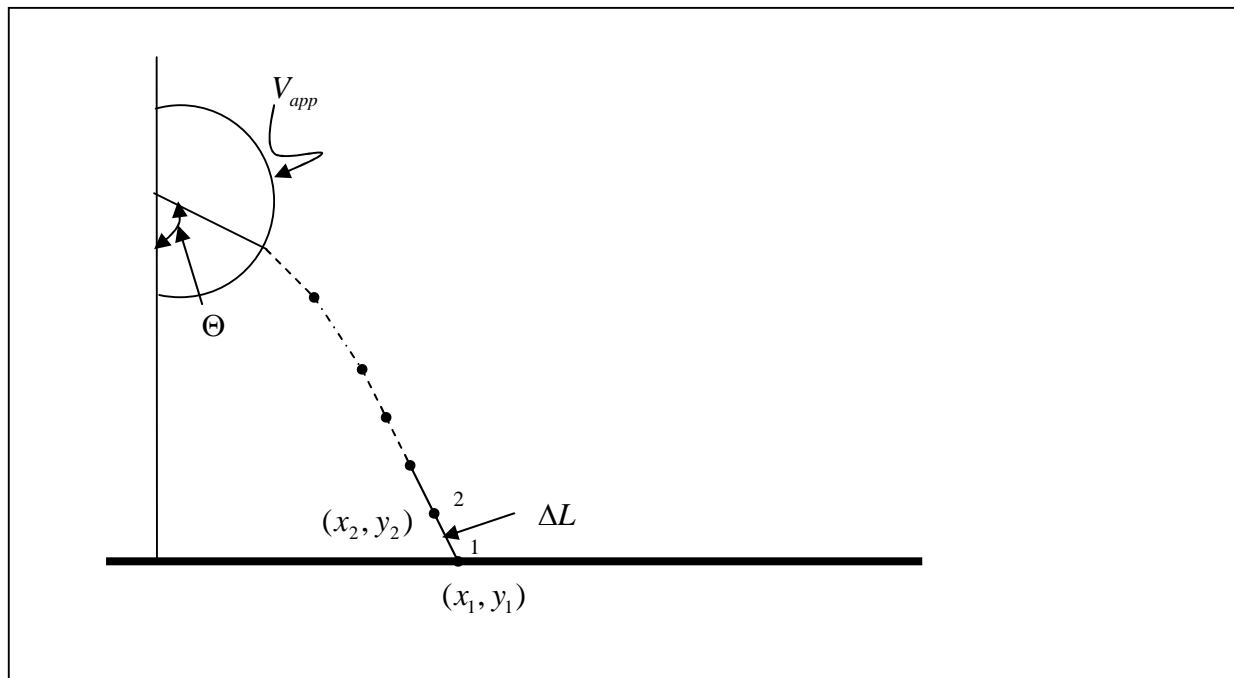


Figure IV.3: Représentation des charges simulant la configuration fil-plan

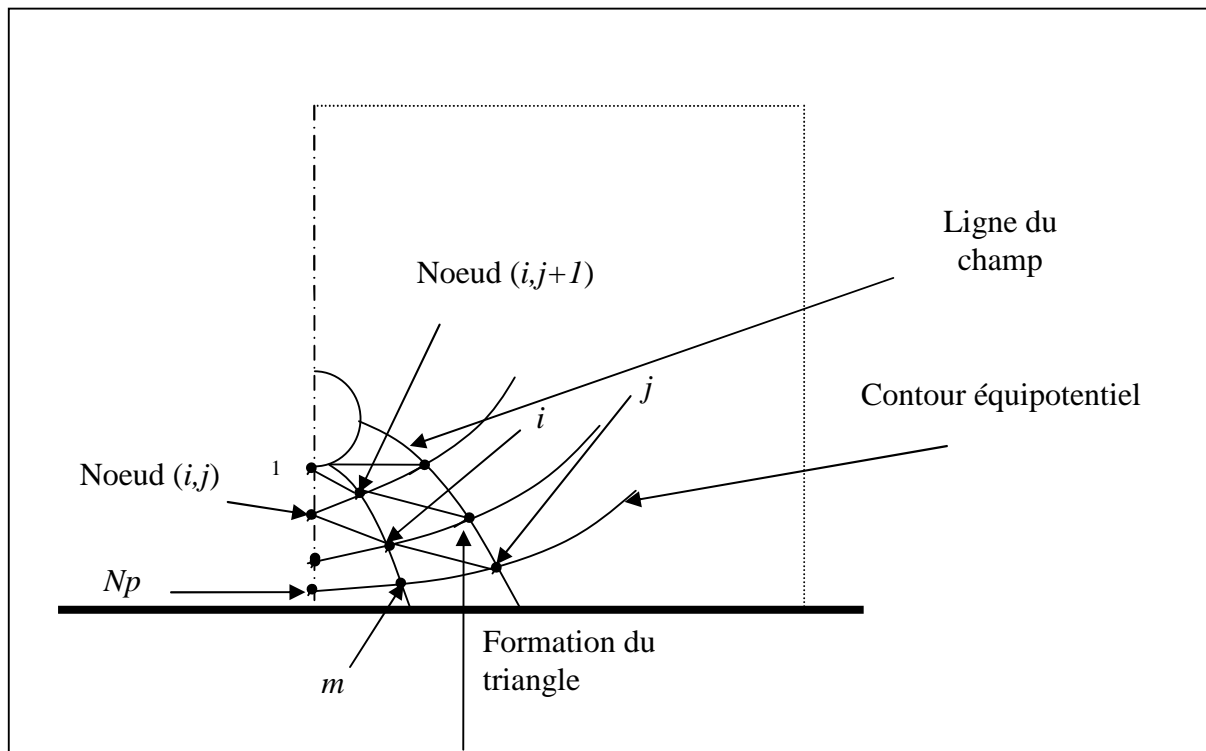
$$x_2 = x_1 + \frac{E_{x1}}{E_{r1}} \cdot \Delta L \quad (\text{IV-12})$$

$$y_2 = y_1 + \frac{E_{y1}}{E_{r1}} \cdot \Delta L \quad (\text{IV-13})$$

Au point 2, la même procédure est appliquée pour atteindre le point 3, elle continue jusqu'à ce qu'une ligne de champ complète soit tracée (figure (IV.4)). En polarité positive de l'électrode la même méthodologie de traçage surgit mais les lignes de champ dans ce cas, dérivent du conducteur pour atteindre le plan (ou la frontière artificielle) et les équations (IV-6)-(IV-8)) seront accompagnées d'un signe moins [22]. Cependant, il est plus facile de tracer les lignes de champ en commençant de la surface du conducteur et le résultat obtenu sera multiplié par le signe (-) et c'est ce que nous avons fait. Une fois les lignes du champ tracées, les coordonnées des points avec les valeurs du potentiel seront enregistrées. En connectant les points de même potentiel sur toutes les lignes du champ, on obtient des contours équipotentiels. Les points d'intersection des lignes du champ et des contours équipotentiels représentent les nœuds du maillage (figure (IV.5)). Les valeurs du potentiel et du champ électriques aux nœuds du maillage sont arrangées dans les matrices  $\phi$  et  $E$  notées  $\phi^{(1)}$  et  $E^{(1)}$  pour leur première estimation.



**Figure IV.4: Tracé d'une ligne de champ pour la configuration fil-plan**



**Figure IV.5: Représentation d'une portion de lignes du champ, de contours équipotentiels et des triangles formés**

#### **IV.4.2-L'etape 2: Réestimation du champ par interpolation / extrapolation:**

Cette étape est en quelque sorte une étape d'évaluation d'erreurs. En effet, les résultats obtenus de  $\phi^{(1)}$  et  $E^{(1)}$  dans l'étape 1 seront comparés à ceux que l'on obtiendra en utilisant la méthode des éléments finis (MEF). Il s'avère que pour commettre moins d'erreurs, on est amené à réestimer le champ électrique  $E^{(1)}$  aux nœuds du maillage par la méthode d'interpolation / extrapolation et ce résultat sera utilisé pour estimer la densité de la charge d'espace. La méthode d'interpolation / extrapolation sera aussi utilisée pour estimer le champ à partir des valeurs du potentiel déterminées par la MEF. Dans cette étape on présentera ces méthodes utilisées. Le traité de la MEF se fera pour la résolution de l'équation de Poisson et l'équation de Laplace n'est qu'un cas simplifié (absence de la charge d'espace  $\rho = 0$ ).

## IV.5-Résultats et discussions :

Dans cette section, nous avons rapporté les résultats obtenus par l'application de l'organigramme proposé, à la configuration fil-deux plans. La précision de notre méthode dépend de la précision des paramètres du modèle. Mais il existe d'autres paramètres qui jouent un rôle important dans la précision et la rapidité des calculs.

### IV.5.1- Domaine de discrétisation (Maillage) :

Le maillage représenté sur la figure (IV.6), est le maillage que nous avons choisi pour discrétiser notre domaine de calcul. Il est généré à partir des équipotentiels et des lignes de champ. Pour réaliser ce maillage nous avons appliqué la méthode des images électrique qui consiste à remplacer l'électrode active par une charge  $q$  et l'action de tout le plan chargé par  $-q$ , l'image de  $q$  par rapport au plan.

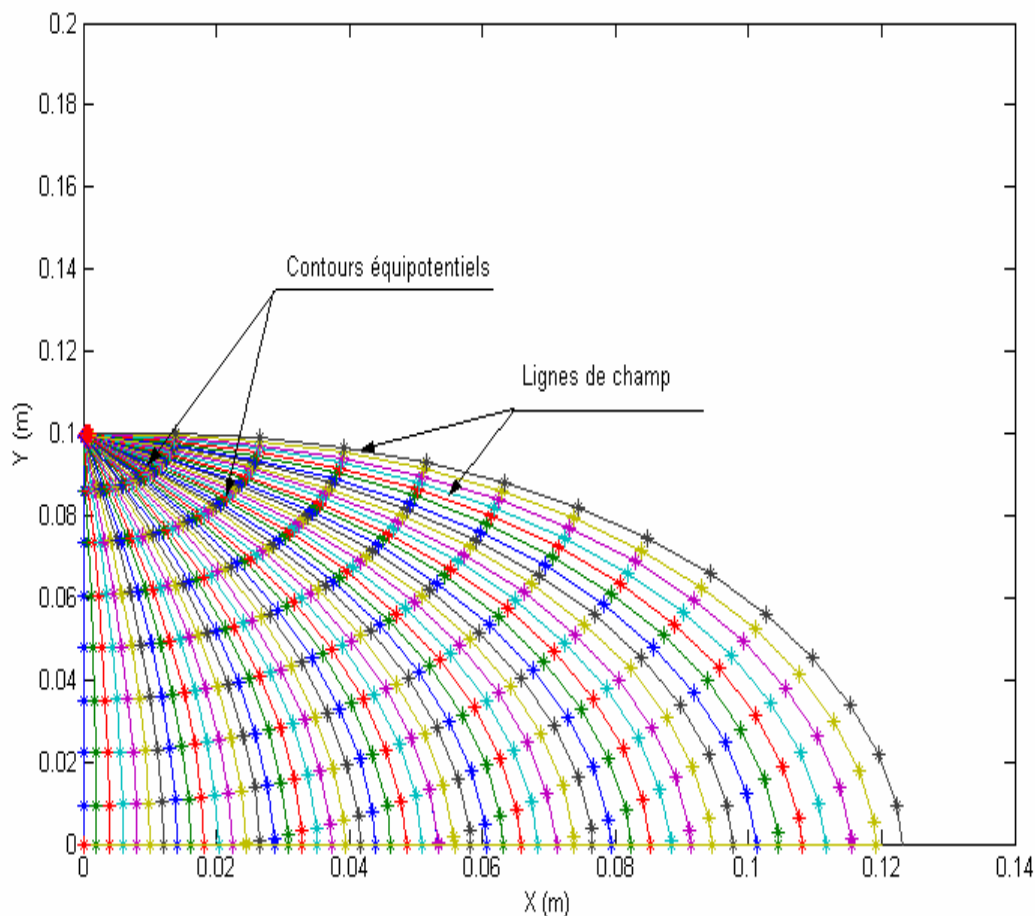
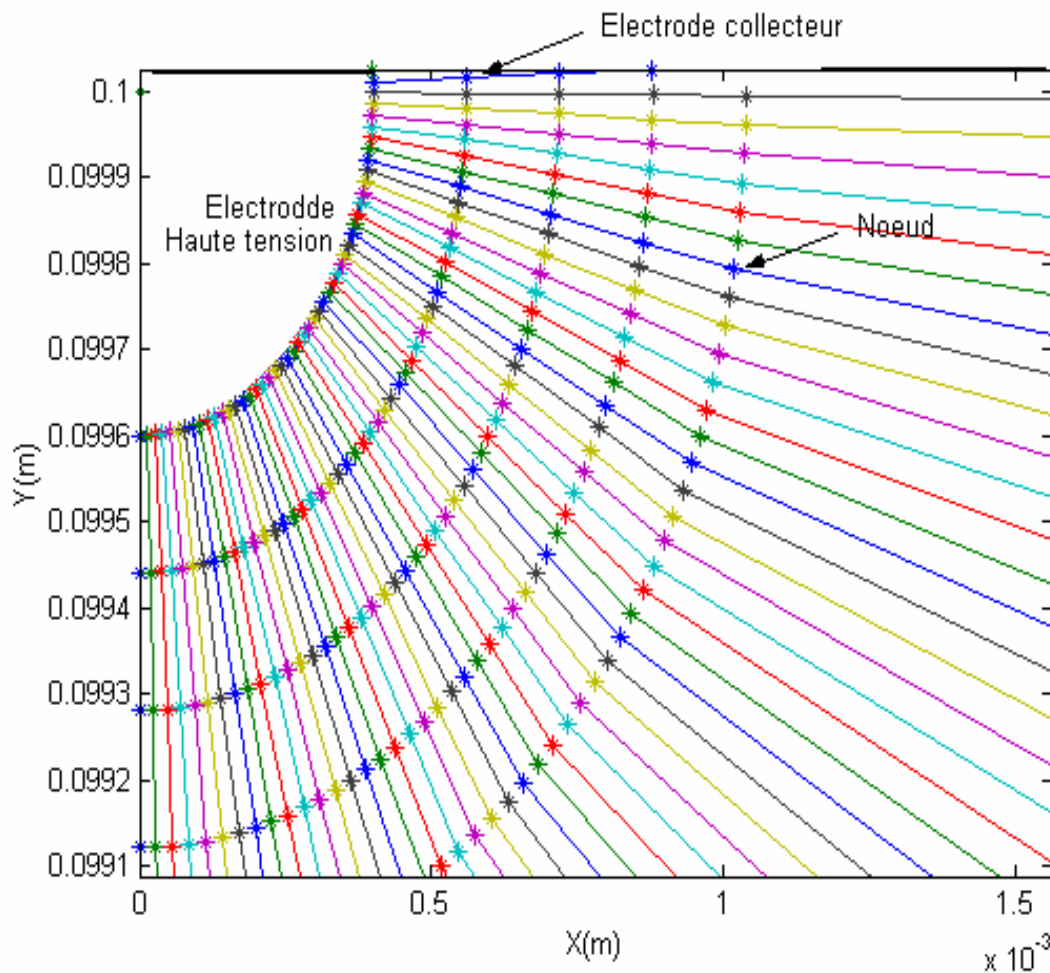


Figure VI.6 : Les lignes de champ et les équipotentiels pour le domaine de calcul

Pour avoir un compromis entre la précision et le temps nécessaire pour tracer la figure, l'incrément  $\Delta r$  est choisi plus petit au voisinage du fil, où le champ varie très rapidement, et augmente progressivement, en se dirigeant vers la frontière. Le nœud  $(i, j)$  est donnée par l'intersection de la  $i^{\text{eme}}$  ligne avec le  $j^{\text{eme}}$  contour (Figure (VI.7)).

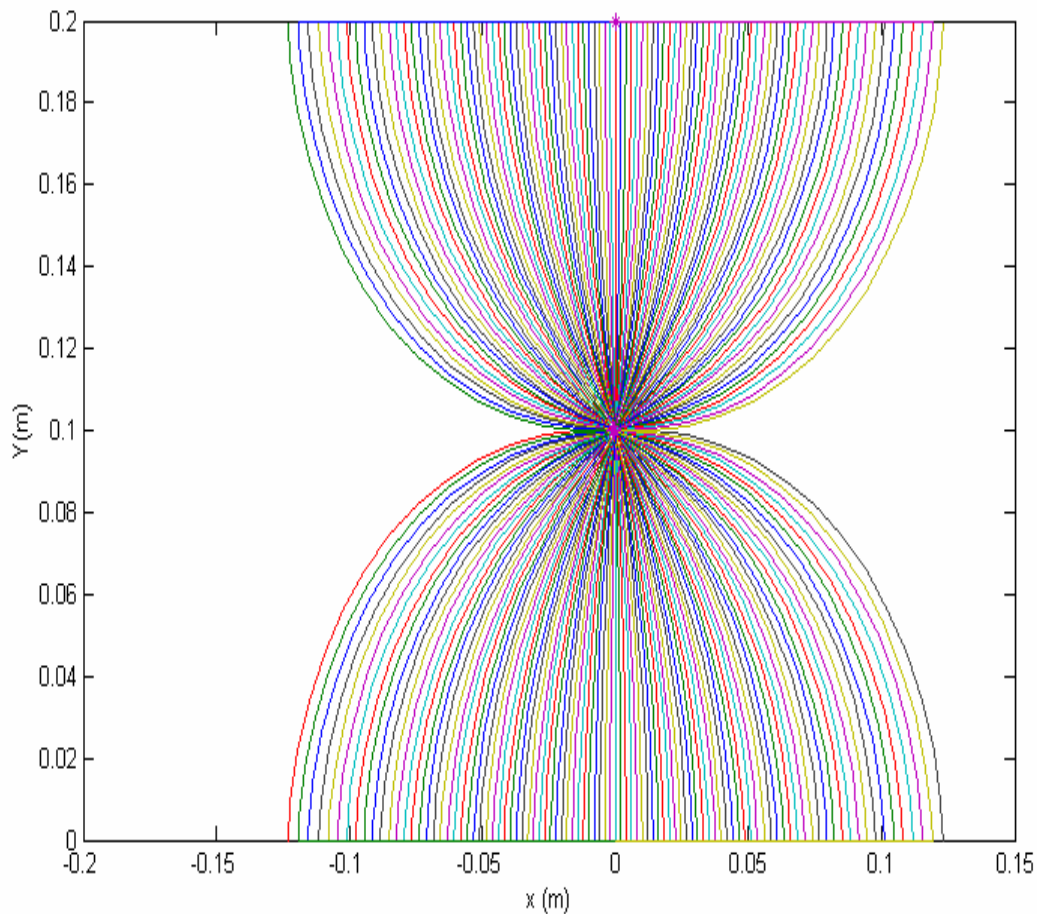


**Figure VI.7 : Distributions des nœuds autour de l'électrode active**

Pour tout le système, nous avons représenté les lignes de champ sur la figure (VI .8).

Une figure du champ est par définition une courbe tangente en chaque point au vecteur champ défini en ce point.

Nous constatons aussi, que les lignes de champ ne se coupent pas. Elles portent des charges positives vers les charges négatives (ou à l'infini).



**Figure VI .8 : Généralisation Les lignes de champ pour tout le système**

### VI.5.2- Champ électrique :

Etant donné une distribution de charges, considérées comme extérieures, il est donc toujours possible de définir en chaque point  $r$  de l'espace, une grandeur vectorielle  $E(r)$  appelée champ électrique.

La distribution du champ électrique dans notre système, est représentée sur la figure (VI.9).

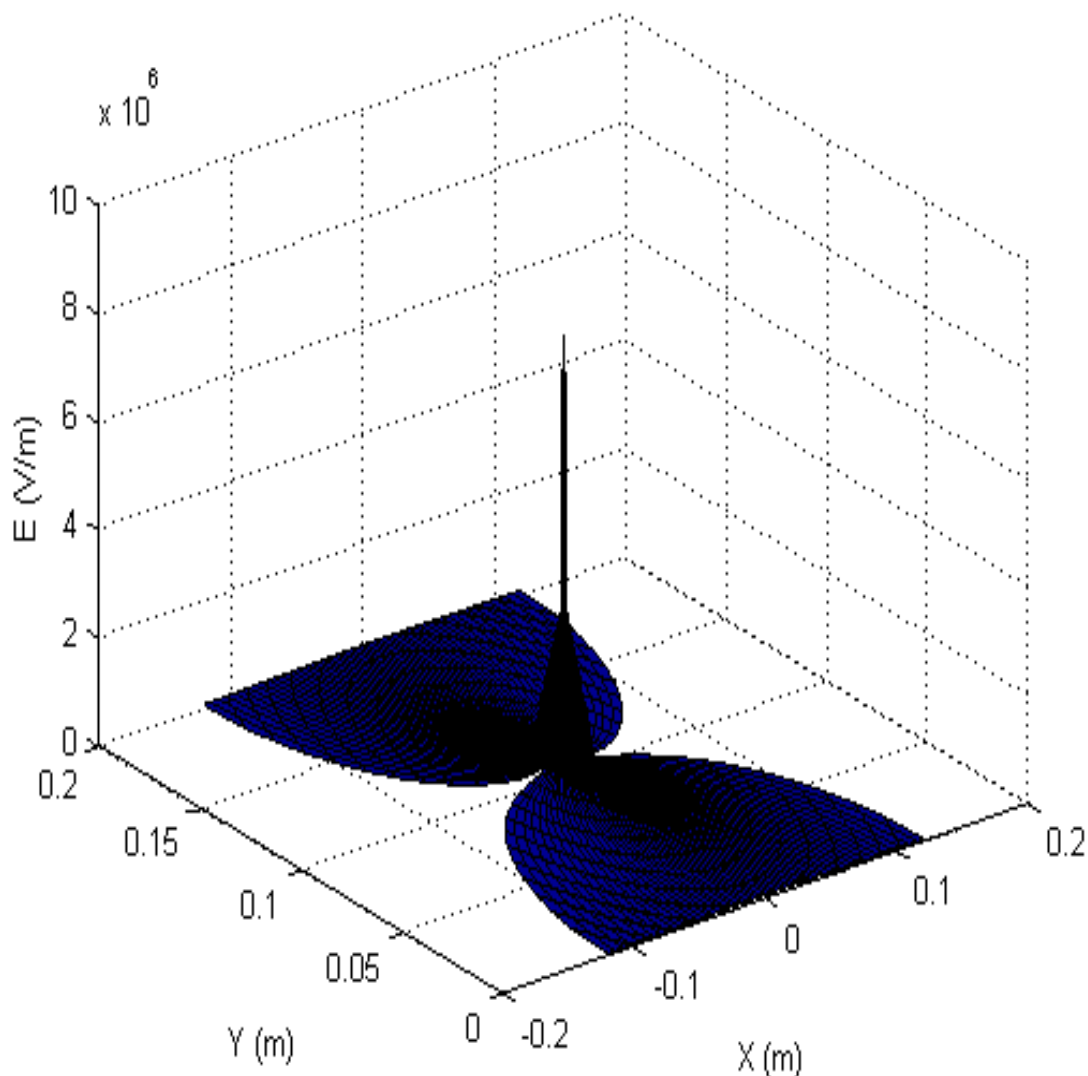
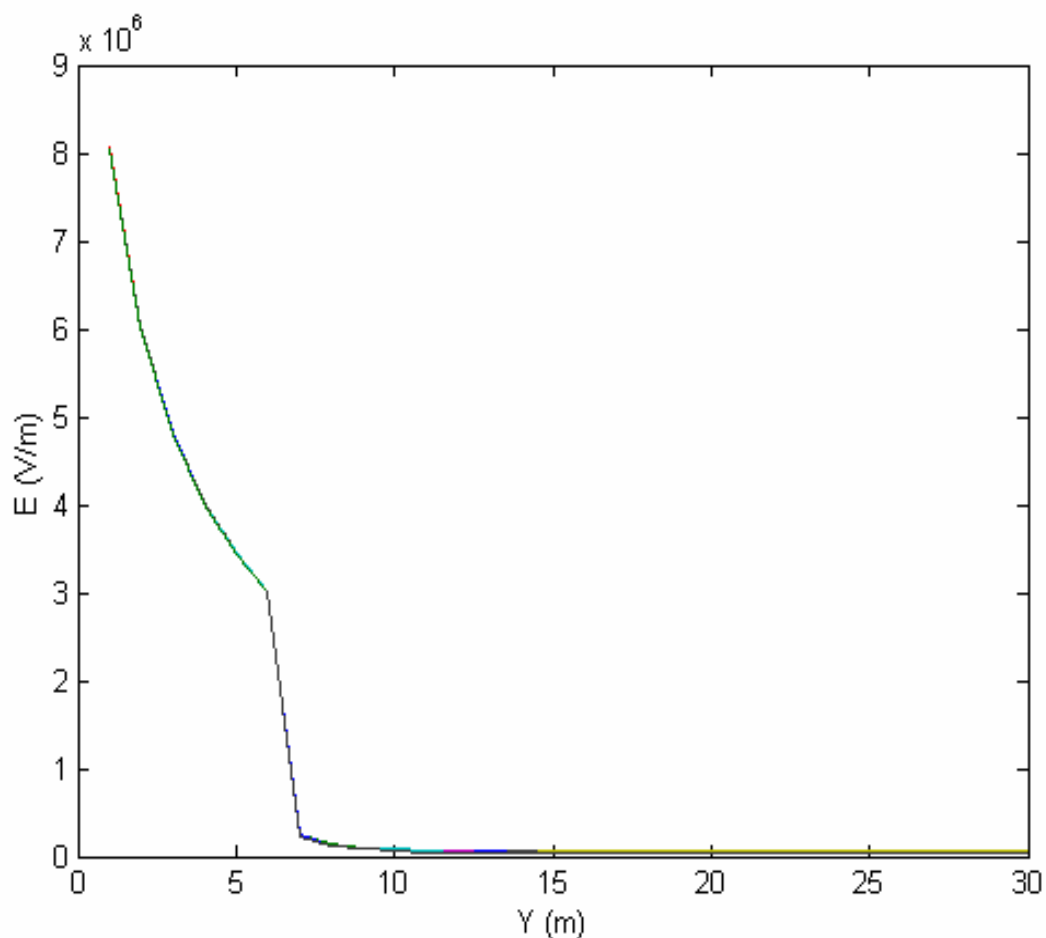


Figure IV.9 : Distribution spatiale du champ électrique entre les deux électrodes

Connaître un champ électrique  $E$ , c'est connaître le vecteur champ électrique en chaque point de l'espace, en direction, en sens et en intensité. Dans quelques cas simple, il est donné par une relation algébrique. Dans des cas plus complexe, il peut être calculé en des points de maillage suffisamment fin.

Avec les moyens informatiques actuels, il est très facile d'écrire un programme tel que, entrant les charges et leur positions, l'ordinateur fournisse en chaque point  $M$  demandé une petite flèche dont le sens, la direction et la longueur renseignent sur le champ électrique en ce point.

La variation du champ entre les deux électrodes est montrée sur la figure (IV.10) ou nous pouvons remarquer un aplatissement dans la direction du plan collecteur à cause du rapport élevé entre le champ électrique sur le fil et celui du plan mise à la terre.



**Figure IV.10 : Variation du champ électrique entre les deux électrodes**

### IV.5.3-Le potentiel électrique :

La fonction potentielle définit un champ de scalaires qui décrit les propriétés électriques de l'espace.

L'ensemble des points de l'espace qui sont au même potentiel constitue une surface équipotentielle. La distribution du potentiel électrique entre les deux électrodes est représentée sur la figure (IV.11).

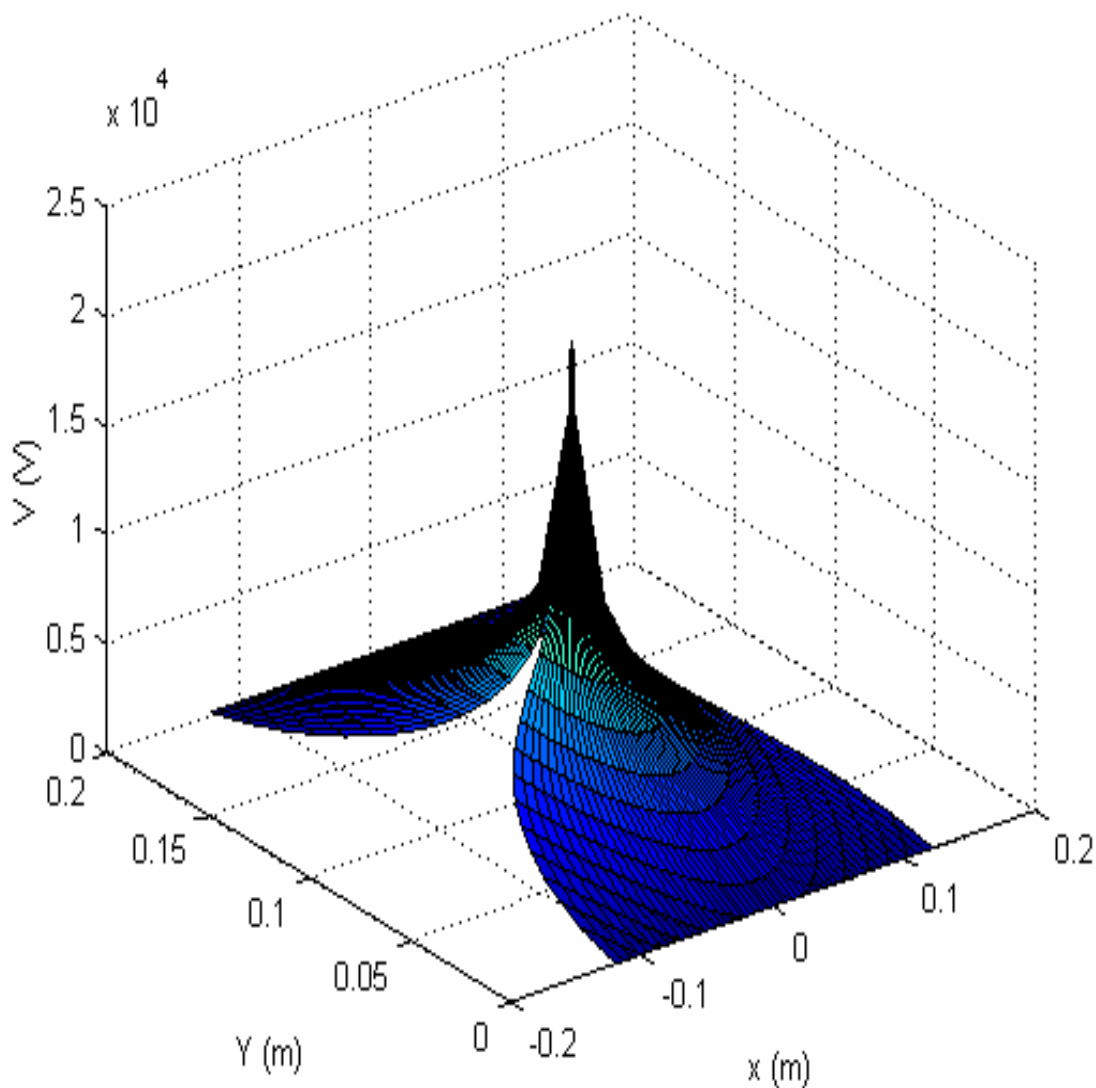
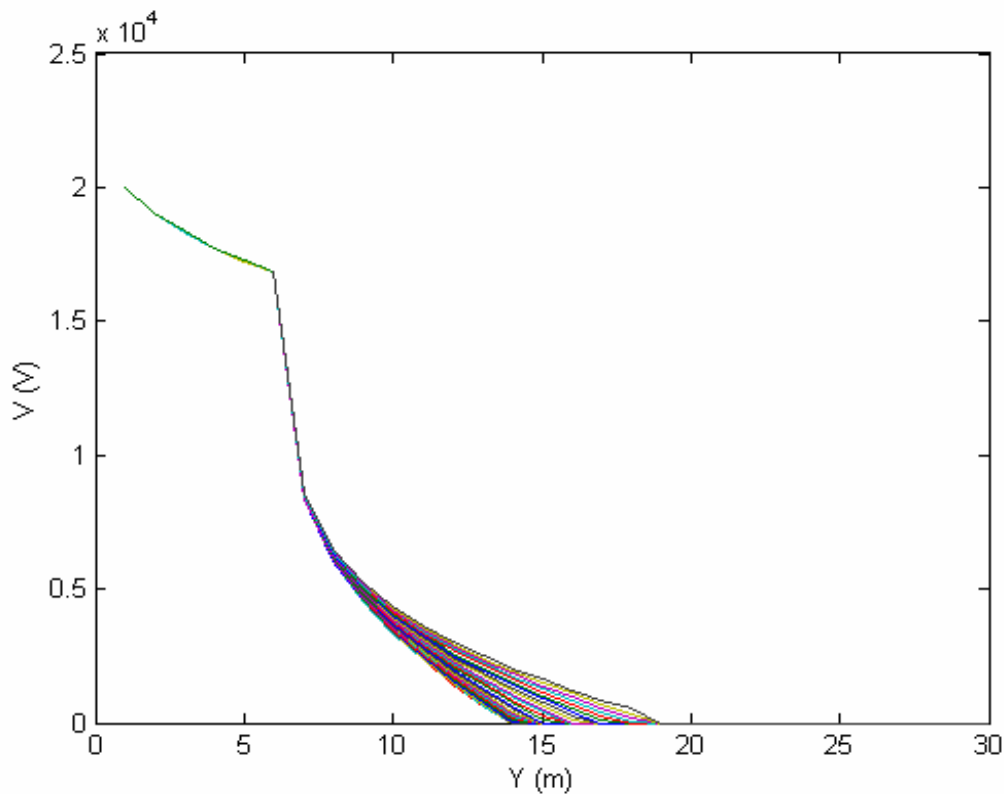


Figure IV.11: Distribution spatial du potentiel électrique entre les deux électrodes

D'après cette étude nous constatons que le champ électrique est normal en tout point aux surfaces équipotentiellles. Le potentiel sur le fil est égal à la tension appliquée et le potentiel au plan est égal à zéros. La variation du potentiel est Donnée par la figure (IV.12).



**Figure IV.12 : Variation du potentiel électrique entre les deux électrodes**

#### IV.6-Conclusion :

La méthode de résolution que nous avons présentée dans ce chapitre présente une bonne approximation dans la détermination des caractéristiques électrique de l'électrofilter.

Contrairement à l'écart entre le champ sur le fil, trouver par les autres modèles et le champ de Peek (>15%), l'exécution de notre calcul nous a rapproché de ce dernier (champ de Peek) de moins de 1%, chose qui nous sera d'une grande utilité pour reproduire les valeurs expérimentales sur le plan de mesure.