

---

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA**

**FACULTE : Technologies**

**DEPARTEMENT : génie électrique**

**N° : .....**



**DOMAINE : Sciences et Technologie**

**FILIERE : Automatique**

**OPTION : Automatique et systèmes**

**Mémoire présenté pour l'obtention  
Du diplôme de Master Académique**

**Par : ABDELBAKI BENLOUMAFEK**

**Intitulé**

**Règles d'ajustement optimales d'un PID fractionnaire  
appliquées aux systèmes stable et instable**

Soutenu devant le jury composé de:

Dr HAMMOUCHE Abdelaziz	Université Mohamed Boudiaf-M'sila	Président
Dr IDIR Abdelhakim	Université Mohamed Boudiaf-M'sila	Rapporteur
Dr AIB Abdelghani	Université Mohamed Boudiaf-M'sila	Examineur

**Année universitaire : 2020/2021**

---

# Dédicace

*Je dédie ce travail :*

*À ma mère*

*Mon père*

*À toute mes frères et mes sœurs*

*À ma famille*

*À toute la famille Benloumafek*

*Tous mes amis et toute la promotion 2021 et en particulier*

*la promotion Automatique et systèmes*

*Abdelbaki*

---

# *Remerciement*

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout – Puissant qui m'a aidé à faire ce travail et m'a donné du courage, de la patience et de la santé pendant toutes ces longues années d'études pour que je puisse atteindre ce niveau.

Ce travail de recherche a été mené au sein de l'Université Mohamed Boudiaf - M'Sila, sous la direction scientifique du Dr Idir Abdelhakim que je tiens à remercier chaleureusement pour son enthousiasme envers notre travail, sa disponibilité et son soutien scientifique et humain. . Je le remercie également pour la confiance qu'il m'a accordée et pour ses précieux encouragements et conseils.

Mes sincères remerciements vont à mon père Muhammad et à ma mère Masouda et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pendant ces années de recherche et d'études. Je ne peux conclure sans un mot de remerciement à tous mes professeurs tout au long de mon stage.

Enfin, un grand merci, ainsi qu'à toute ma famille pour leur amour et leur soutien surtout au cours des deux dernières années.

## Résumé

Un ensemble de règles d'ajustement pour les correcteurs PID d'ordre entier et d'ordre fractionnaire pour les systèmes intégraux et instables ont été présenté dans ce projet de fin d'études. Sur la base d'un modèle simple du processus, les règles d'ajustement ont été conçues afin de minimiser l'erreur absolue intégrale. Les tâches de suivi du point de consigne et de rejet des perturbations de charge sont prises en compte. Les indices de performance atteints peuvent également être utilisés pour l'évaluation des performances du contrôleur. Une caractéristique remarquable de la procédure d'optimisation utilisée pour les processus intégraux est mise en évidence. Les résultats fournis permettent à l'utilisateur de quantifier, pour un processus donné, l'amélioration des performances qui peut être obtenue en utilisant le contrôleur fractionnaire au lieu du contrôleur entier.

## Mots clés :

Règles d'ajustement, PID, FOPID, systèmes stable et instables.

## الملخص

تم تقديم مجموعة من القواعد الملائمة لمصححات PID ذات الترتيب الكامل والكسري للأنظمة المتكاملة وغير المستقرة في مشروع التخرج هذا. بناءً على نموذج بسيط للعملية، تم تصميم قواعد الضبط لتقليل الخطأ المطلق المتكامل. يتم أخذ مهام مراقبة نقطة التحديد ورفض اضطرابات الحمل في الاعتبار. يمكن أيضاً استخدام مؤشرات الأداء المحققة لتقييم أداء وحدة التحكم. يتم تسليط الضوء على ميزة رائعة لإجراء التحسين المستخدم للعمليات المتكاملة. تسمح النتائج المقدمة للمستخدم بتحديد، لعملية معينة، تحسين الأداء الذي يمكن تحقيقه باستخدام وحدة التحكم الجزئية بدلاً من وحدة التحكم بأكملها.

## كلمات مفتاحية:

قواعد الموازنة، PID، FOPID، الأنظمة المستقرة وغير المستقرة..

## Abstract

A set of tuning rules for Integer-Order proportional-integral-derivative (PID) and fractional-order PID controllers for integral and unstable processes is presented in this Project of End study. Based on a simple model of the process, the tuning rules have been devised in order to minimise the integrated absolute error. Both set-point tracking and load disturbance rejection tasks are considered. The achieved performance indexes can also be used for the assessment of the controller performance. A remarkable feature of the optimisation procedure employed for integral processes is highlighted. The provided results allow the user to quantify, for a given process, the performance improvement that can be obtained by using the fractional controller instead of the integer one.

**Keywords:** Tuning rules, PID, FOPID, stable and unstable systems.

---

# *Table des Matières*

Introduction Générale .....	1.2
-----------------------------	-----

## CHAPITRE I

### Systèmes d'ordre Fractionnaire

I.1 Introduction.....	4
I.2 Calcul Fractionnaire .....	5
I.2.1 Fonctions fondamentales du calcul fractionnaire .....	5
a) La fonction Gamma.....	5
b) Fonction de Mittag-Leffler .....	6
I.3 Définition et propriétés des opérateurs d'intégration et de dérivation non-entières .....	6
I.4 Commande d'un PID classique .....	8
I.5 Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	10
I.6 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	12
I.6.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation .....	12
a) Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire .....	13
b) Méthode de Carlson .....	13
c) Méthode de Matsuda .....	13
d) La méthode d'Oustaloup .....	14
I.7 Conclusion .....	15

## CHAPITRE II

### Règles d'ajustements optimales des correcteurs PID Fractionnaires des systèmes stable et instable

II.1 Introduction.....	17
II.2 Formulation du problème .....	17
II.3 Règles de réglage optimales pour les processus intégraux.....	19
II.3.1 Tâche de suivi du point de consigne .....	20
II.3.2 Tâche de rejet des perturbations de charge .....	21
II.4 Règles de réglage optimales pour les processus instables .....	22

---

II.4.1 Tâche de suivi du point de consigne.....	23
II.4.2 Tâche de rejet des perturbations de charge.....	24
II.5 Conclusion .....	25

## Chapitre III

### Simulations & Applications

III.1 Introduction .....	27
III. 2 Modèles FOPDT, IPDT, FOIPDT .....	27
III.3 Mesures de performance .....	28
III.4 Exemples de Simulation.....	28
III.4.1 Exemple 1 .....	28
III.4.2 Exemple 2.....	31
III.4.3 Exemple 3.....	33
III.5 Conclusion.....	35
Conclusion générale .....	36
Références bibliographies .....	37 ;38 ;39

---

*Liste des figures*

**Figure 0.1** : Système de commande à retour unitaire classique..... 8

**Figure 0.2** :  $PI^\lambda D^\mu$  et PID, (a) :ordre entier,(b) :ordre fractionnaire..... 11

**FigureII.1** : Figure.II.1 Schéma de système de commande à retour unitaire.....17

**FigureIII.1** : La sortie d'un système stable et aperiodique à une entrée en échelon.....27

**Figure III.2** Réponse indicielle à l'unité de consigne pour le système  $G_1(s)$  : Haut :  
.....29Correcteur PD classique & PD fractionnaire, bas : Variable de commande (**pour Ms = 1.4**) 29

**Figure III.3** Réponse indicielle à l'entrée consigne pour le système  $G_1(s)$  : Haut : Correcteur PD classique & PD fractionnaire, bas : Variable de commande (**pourMs = 2.0**) ..... 30

**Figure III.4** Réponse indicielle à l'entrée perturbation pour le système  $G_1(s)$  : Correcteur PID classique & PID fractionnaire, (**pourMs = 1.4**) ..... 31

**Figure III.5** Réponse indicielle du système  $G_2(s)$  : Correcteur PID classique, Correcteur PID fractionnaire optimale (critère de performance ITAE) et Correcteur PID fractionnaire optimale (critère de performance ISE).....32

**Figure III.6** Réponse indicielle à l'entrée consigne pour le système  $G_3(s)$  : Correcteur PID classique & PID fractionnaire, (**pourMs = 1.4**) .....34

**Figure III.7** Réponse indicielle à l'entrée perturbation pour le système  $G_3(s)$  : Correcteur PID classique & PID fractionnaire, (**pourMs = 1.4**) .....34

---

---

*Liste des tableaux*

**Tableau II.1** Règles d’ajustement et paramètres d’indice de performance pour les contrôleurs PD fractionnaire (FOPD) pour la tâche de suivi du point de consigne pour in système intégral.....(20)

**Tableau II.2** Règles d’ajustement et paramètres d’indice de performance pour les contrôleurs PD classique (PD) pour la tâche de suivi du point de consigne pour in système intégral... (21)

**Tableau II.3** Règles d’ajustement et paramètres d’indice de performance pour le contrôleur PID Fractionnaire (FOPID) sous une forme idéale pour la tâche de rejet de perturbations (système intégral avec retard).....(22)

**Tableau II.4** Paramètres des règles d’ajustement de contrôleur PID fractionnaire (FOPID) sous une forme idéale pour la tâche de suivi du point de consigne pour les processus Instables.....(23)

**Tableau II.5** Paramètres des contrôleurs PID et PID fractionnaire basés sur l’indice de performance IAE pour la tâche de suivi du point de consigne dans le cas des processus instables.....(23)

**Tableau II.6** Paramètres des règles d’ajustement pour les contrôleurs PID fractionnaire idéale pour la tâche de rejet des perturbations dans le cas des processus instables.....(24)

**Tableau II.7** Paramètres de l’expression de l’indice de performance IAE pour la tâche de rejet des perturbations dans le cas des systèmes instables.....(25)

**Tableau III.1** Résultats liés au processus  $G_1(s)$  .....(31)

**Tableau III.2** Résultats liés au processus  $G_3(s)$ .....(34)

## *Symboles et abréviations*

### ❖ *Symboles*

<i>symbole</i>	<i>Signification</i>
$u(t)$	le signal de commande
$r(t)$	la consigne
$x(t)$	le signal de retour
$y(t)$	la grandeur à commander
$C(s)$	la fonction de transfert du correcteur
$G(s)$	la fonction de transfert de système
$K_P$	le gain proportionnel, et
$K_i$	le gain intégral
$K_d$	le gain dérivé
$T_i$	la constante d'intégration
$T_d$	la constante de dérivation
$T$	constante de temps
$L$	le retard apparent
$\Gamma$	la fonction Gamma
$E$	La fonction de Mittag-Leffler
$D_t^\alpha$	Dérivation non entière
$I_t^\alpha$	Intégration non entière
$PI^\lambda D^\mu$	correcteurs d'ordre fractionnaire
$\lambda$	Ordre d'intégration
$\mu$	Ordre de dérivation
$C_{PD}$	La fonction de transfert du contrôleur PD,
$C_{FPD}$	La fonction de transfert du contrôleur fractionnaire PD,
$C_{PID}$	La fonction de transfert du contrôleur PID,
$C_{FOPID}$	La fonction de transfert du contrôleur fractionnaire PID,
$M_S$	sensibilité maximale

---

❖ *Abréviations*

<i>Acronyme</i>	<i>Signification</i>
<i>PID</i>	Proportionnel Intégral Dérivé
<i>FOPID</i>	Fractional Order PID
<i>IPDT</i>	Intégral Plus Dead Time
<i>FOPDT</i>	First Order Plus Dead Time
<i>FOIPDT</i>	First Order Integral Plus Dead Time
<i>UFOPDT</i>	Unstable First Order Plus Dead Time
<i>IAE</i>	Integral Absolute Error
<i>ITAE</i>	Integral Time Absolute Error

---

## *Introduction Générale*

Le régulateur PID, appelé aussi correcteur PID (proportionnel, intégral, dérivé) est un système de contrôle permettant d'améliorer les performances d'un asservissement, c'est-à-dire un système ou procédé en boucle fermée. C'est le régulateur le plus utilisé dans l'industrie où ses qualités de correction s'appliquent à de multiples grandeurs physiques. En effet, le grand nombre de règles d'ajustements des paramètres de régulateur PID [1,2] et la présence de techniques de réglage automatique fiables [3] permettent à l'utilisateur de concevoir ce type de contrôleurs plus facilement et d'obtenir des performances satisfaisantes pour de nombreux processus.

Ces dernières années, la conception de contrôleur proportionnel-intégral dérivé d'ordre fractionnaire (FOPID) a fait l'objet de nombreuses recherches [4-5] en raison de la flexibilité supplémentaire qu'ils sont capables de fournir par rapport au correcteur classique, la présence de cinq paramètres à sélectionner rend pratiquement possible l'obtention d'une performance accrue mais cela implique également que le réglage du contrôleur peut être beaucoup plus complexe.

Pour résoudre ce problème, différentes méthodes pour la conception d'un contrôleur fractionnaire a été proposée dans la littérature (où différentes fonctions objectives sont considérées) [6-7] et différentes règles d'ajustement ont été proposées [8-9].

L'objectif de notre thème est d'implémenter un ensemble de règles d'ajustement, basé sur la minimisation de l'erreur absolue intégrale de correcteurs PID classique et PID fractionnaire (FOPID) pour des systèmes stables et instables. La particularité de la procédure d'optimisation est employée pour les tâches de suivi de la consigne et pour la tâche de rejet de perturbations.

Notre travail est présenté dans un mémoire organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présenterons quelques définitions de base du calcul fractionnaire avec leurs propriétés et leurs transformées de Laplace. Puis, nous donnons un bref résumé sur la commande *PI/PID* d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Ensuite nous proposons un petit rappel sur les techniques d'approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire.

---

Dans le second chapitre, nous présenterons les règles d'ajustement optimale des correcteurs PID classique et PID fractionnaire décrites pour des processus intégral avec retard (IPDT) et des processus instable de premier ordre avec retard (UFOPDT).

Dans le chapitre trois, nous donnerons quelques exemples de synthèses des paramètres de PID classique et PID fractionnaires en utilisant les règles d'ajustement décrites au chapitre deux. Ensuite nous présenterons des résultats de simulation dans l'environnement MATLAB de la commande des systèmes stables et instables par les deux techniques de commandes. Enfin nous terminerons par une conclusion et quelques perspectives.

---

*Chapitre I :*  
*Systemes d'ordre Fractionnaire*

---

# CHAPITRE I

## Systemes d'ordre Fractionnaire

### I.1 Introduction

Un système décrit par une équation différentielle est dit d'ordre fractionnaire s'il utilise une dérivation d'ordre fractionnaire. Actuellement, beaucoup de travaux traitent des systèmes ou des phénomènes physiques qui nécessitent l'utilisation du calcul fractionnaire. Dans les dernières décennies, plusieurs techniques et outils mathématiques et informatiques ont été développées afin d'analyser, manipuler et simuler cette classe des systèmes dans différents domaines de la science et de l'ingénierie.

Le calcul fractionnaire a un domaine d'applications très vaste [10], par exemples : mécanique, automatique, théorie du contrôle, électricité, viscoélasticité, biologie, équation de diffusion, électromagnétique,...etc. [11].

Récemment, un intérêt considérable pour l'utilisation du calcul fractionnaire dans les différents domaines des systèmes et de la commande a été porté [12]. Dans le domaine de commande, des équations différentielle fractionnaire sont régies soit le système à commander soit la loi de commande utilisée. La première idée qui basée sur l'utilisation de la régulateur d'ordre fractionnaire revient à Oustaloup, qui a proposé le commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE). Notons qu'Oustaloup avait notamment démontré, dans ces travaux, l'avantage du régulateur CRONE par rapport au régulateur PID classique. Un régulateur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  utilisant des actions dérivées et intégrales d'ordre non entier a été proposé plus tard. Et par la suite, beaucoup de régulateur basée sur le calcul fractionnaire ont été développée (pour plus de détails voir [13]).

Dans ce chapitre, dans la première partie, nous allons commencer par la présentation des fonctions les plus utilisées qui permettrons de fournir des solutions aux problèmes de calcul fractionnaire et les opérateurs non entier (une définition unique de l'intégration et plusieurs définitions de la dérivée), puis nous donnerons les transformées de Laplace de ces opérateurs non entier, et dans la deuxième partie, nous présenterons la commande  $PI$  d'ordre fractionnaire et quelques techniques d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.

---

## I.2 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire (Les opérateurs fractionnaires intégration et différentiation) est un cas général de l'intégration et de la différentiation des opérateurs d'ordre non entier.

Les opérateurs d'intégration et de différentiation peuvent être généralisé en un seul opérateur fondamental  ${}_a D_t^\alpha$  ou  $a$  représente l'ordre de l'opération et  $\alpha$  et  $t$  sont les limites de l'opération.

L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme [14] :

$$D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_\alpha^t (dt)^{-\alpha}, & \alpha < 1 \end{cases} \quad (I.1)$$

Où  $\alpha$  est l'ordre de l'opération, généralement  $\alpha \in \mathfrak{R}$

Les définitions de l'opérateur fractionnaire les plus familières et les plus fréquemment utilisées sont : définition de Riemann Liouville et définition de Grünwald - Letnikov.

Avant de présenter ces définitions, nous proposons de présenter premièrement quelques fonctions dans le calcul fractionnaire qui permet de bien compréhension ces définitions.

### Fonctions fondamentales du calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présenterons la fonction Gamma d'Euler et de la fonction Mittag-Leffler qui sont très utilisées et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire.

#### a) La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est l'une des fonctions de base utilisées dans le calcul fractionnaire. La définition intégrale de cette fonction est donnée par [15] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} (e^{-t} t^{z-1}) dt, z > 0 \quad (I.2)$$

L'intégration par partie de l'équation (I.2) permet de donner la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z * \Gamma(z) \quad (I.3)$$

Puisque  $\Gamma(1) = 1$ , en utilisant la relation (I.3), nous obtenons pour  $(z = 1, 2, 3, \dots)$ .

$$\Gamma(n + 1) = n * \Gamma(n) = n * (n - 1) = n! \quad (\text{I.4})$$

Notons que l'autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des pôles simples pour  $(z = 0, -1, -2, \dots)$ . Son expression est :

$$\Gamma(z + 1) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \dots \quad (\text{II.5})$$

Avec :

$$\Gamma(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0$$

À partir de cette dernière équation il est clair que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend vers l'infini.

### b) Fonction de Mittag-Leffler

L'autre fonction qui est aussi très important dans le calcul fractionnaire est la fonction de Mittag-Leffler. La forme standard de cette fonction à un paramètre est donnée comme suit [16] :

$$E_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0) \quad (\text{I.6})$$

Pour  $\alpha = 1$ , on trouve la fonction exponentielle usuelle suivante :

$$E_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{n!} \quad (\text{I.7})$$

## I.3 Définition et propriétés des opérateurs d'intégration et de dérivation non-entières

Dans la suite, nous allons présenter des opérateurs d'ordre non entier ; une seule définition de l'intégration non entière et plusieurs définitions de la dérivée non entière [17] :

### Intégration non entière

Soit  $\alpha \in \mathcal{R}^+$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur l'intervalle  $[t_0, \infty)$ . On définit l'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure comme suit [17] :

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.8})$$

avec :  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma d'Euler.

Cette dernière inégalité est appelée intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-

Liouville.

Lorsque l'on s'intéresse aux systèmes dynamiques, il est clair que la fonction  $f(t)$  est causale, alors l'intégrale d'ordre non entier est peut être défini comme suit :

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0, \alpha \in \mathcal{R}^+ \quad (\text{I.9})$$

Qui peut être écrire sous la forme suit :

$$I_t^\alpha f(t) = \phi_\alpha * f(t), t > 0, \alpha \in \mathcal{R}^+ \quad (\text{I.10})$$

Où

$$\phi = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ et } t_+^{\alpha-1} = 0 \text{ pour } t < 0; t_+^{\alpha-1} = t_+^{\beta-1} \text{ pour } t \geq 0.$$

Notons que ‘\*’ représente la produit de convolution.

### Dérivation non entière

#### Définitions de Riemann-Liouville (R - L)

Soient  $\alpha \in \mathcal{R}^+$ ,  $n$  un entier positif et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur l'intervalle  $[t_0, \infty]$ , avec  $t_0 \alpha \in \mathcal{R}^+$  et  $n - 1 < \alpha < n$ . On définit l'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  comme suit [12]:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left( t_0 I_t^{(n-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.11})$$

#### Définition de Caputo

Une autre définition de la dérivée d'ordre fractionnaire est proposée par Caputo comme la forme suivante [18] :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) \triangleq I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau \quad (\text{I.12})$$

Où

$$n - 1 < \alpha < n, n \in \mathcal{N}.$$

Pour  $t_0$ , à partir des deux des équations (I.14) et (I.15), on peut trouver les deux relations suivantes :

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = {}^C D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (\text{I.13})$$

$${}^{RL}D^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) = {}^C D^\alpha f(t) \quad (\text{I.14})$$

### Définition de Grunwald-Letnikov (G-L)

Cette définition est peut considère comme une généralisation de la dérivée classique d'une fonction  $f(t)$  d'ordre  $n \in \mathcal{R}$  qui prend la forme suivante :

$$D^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (\text{I.15})$$

Avec :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j! (n - j)!} \quad (\text{I.16})$$

remplaçant le nombre entier  $n$  par  $\alpha \in \mathcal{R}$ , on peut réécrire (II.16) comme suit

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j! (\alpha - j)!} \quad (\text{I.17})$$

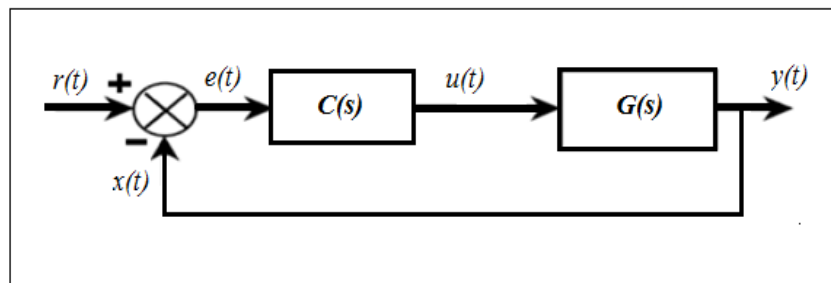
Maintenant on définit la dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de G-L comme suit [17] :

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (\text{I.18})$$

Où  $h$  est le pas d'échantillonnage,  $[x]$  représente la partie entière de  $x$  et  $\binom{\alpha}{j}$  appelés coefficient binomiaux.

### I.4 Commande d'un *PID* classique

Aujourd'hui, le correcteur *PID* est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs *PID*. Généralement, le correcteur *PID* classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure (I.1).



**Figure I.1** Système de commande à retour unitaire classique.

Où :

$u(t)$ : Le signal de commande

---

$e(t)$  : L'écart résultant de la différence entre la consigne  $r(t)$

$Y(t)$ : La grandeur à commander

$C(t)$  : La fonction de transfert du correcteur

$G_p(s)$  : C'est la fonction de transfert de système.

Le comportement du correcteur proportionnel intégral dérivé (*PID*) classique est décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{I.19})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (I.19) avec les conditions initiales nulles la fonction de transfert de ce correcteur peut être exprimé par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (\text{I.20})$$

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel  $K_p$ , la constante d'intégration  $T_i$  la constante de dérivation  $T_d$ . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire.

La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain  $K_p$ . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. Lorsque  $K_p$  augmente, le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée.

D'un autre côté, un correcteur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral.

Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Mais

il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition.

Notons que dans le domaine fréquentiel, ces effets se traduisent par une courbe d'amplitude de pente nulle (0dB) et une phase nulle pour le terme proportionnel, une pente de -20db/déc. et une phase de  $-\pi/2$  pour le terme de l'intégrale et une pente +20dB/déc et une phase  $-\pi/2$  pour le terme dérivée. La stabilité des systèmes dépend du réglage de ces trois paramètres.

### I.5 Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Le contrôleur PID, à part sa simplicité, est très utilisé dans le monde industriel, néanmoins, ses performances deviennent insuffisante en raison par exemple de la présence d'un retard non négligeable dans le modèle du procédé ou lorsque les paramètres du procédé varient. Dans ce cas, on fait appel à d'autres algorithmes de réglage tels que, le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne, le réglage Par régime glissant, etc.

Mais récemment, Podlubny, pour améliorer le comportement du correcteur PID, à proposer le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, comportant un intégrateur d'ordre  $\lambda$  et un différentiateur d'ordre  $\mu$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  appartiennent à l'ensemble des nombre réels. L'équation de sortie du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda}(e(t)) + T_d D^\mu(e(t)) \right] \quad (I.21)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (I.21) avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfère de ce correcteur peut être exprimé par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (I.22)$$

Où les d'intégration  $K_i$  et de dérivation  $K_d$  sont liés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (I.23)$$

$$K_d = K_p K_d \quad (I.24)$$

la fonction de transfère  $C(s)$  d'un correcteur est :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (I.25)$$

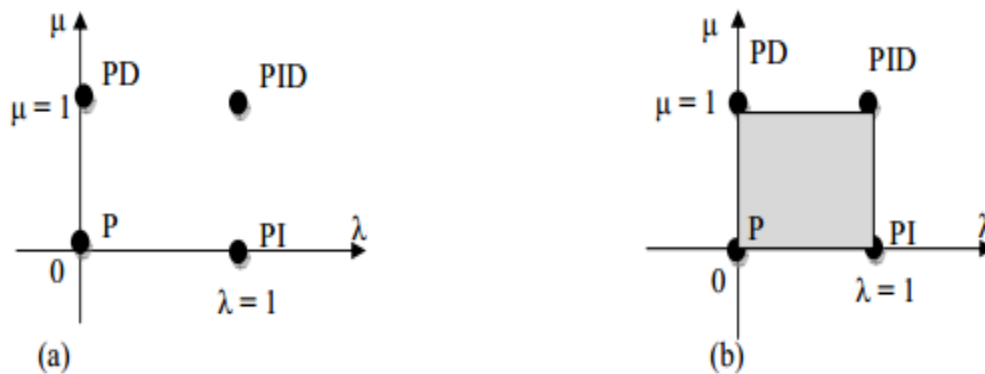
En choisissant

$\lambda = 1$  et  $\mu = 1$  dans l'équation (I.25), on obtien le correcteur *PID* classique.

$\lambda = 1$  ,  $\mu = 0$  et  $\lambda = 0$  ,  $\mu = 1$  donnent respectivement les correcteur *PI* et *PD* classique ,

$\lambda = 0$  et  $\mu = 0$  donnent un correcteur proportionnel .

Tous ces types de correcteur *PID* classique sont des cas particuliers du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire donné par l'équation (I.25), comme le montre la figure (I.2).



**Figure 01.1**  $PI^\lambda D^\mu$  et *PID* ,(a) :ordre entier,(b) :ordre fractionnaire

En plus de  $K_p, K_i$  et  $K_d$  ,le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  possède deux autre paramètre de réglage  $\lambda$  et  $\mu$ . Ceci le rend plus flexible et donc une opportunité pour mieux ajuster les propriété dynamique des système de commande d'ordre fractionnaire. S'inspirant de l'idée du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  ;plisieurs travaux sur les technique de réglage sont actuellement publiés .

L'avantage le plus important du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est sa possibilité de bien commander la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Un autre avantage se trouve dans le fait que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont moins sensibles aux changements des paramètres d'un système commandé, ce qui donne une amélioration de la robustesse. Ceci est parce que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire ayant deux degrés de liberté supplémentaires pour mieux ajuster les propriétés dynamiques de systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Puisque les ordres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels arbitraires, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des systèmes [19, 20].

Des activités de recherche sont dirigées pour définir de nouvelles techniques de réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par l'extension de la théorie de la commande classique.

## I.6 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire peuvent être divisées en deux catégories (fréquentielles et numériques) [21]:

### Méthodes Fréquentielles

#### I.6.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation

L'expansion des fractions continues [22, 23] est une méthode d'évaluation des fonctions qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et converge dans un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle  $G(s)$ , peut être exprimé sous la forme

$$G(s) \cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3 + \dots}}} \quad (I.27)$$

$$G(S) = a_0(S) + \frac{b_1(S)}{a_1(S) + \frac{b_2(S)}{a_2(S) + \frac{b_3(S)}{a_3(S) + \dots}}} \dots \quad (I.28)$$

Où  $a_i(S)$  et  $b_i(S)$  sont des fonctions rationnelles de la variable  $S$  ou des constantes. L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle  $\hat{G}(S)$ , qui est une approximation de la fonction irrationnelle  $G(S)$ .

D'autre part, pour l'interpolation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes, car elles permettent de modéliser les fonctions par des pôles. Ces techniques sont basées sur l'approximation d'une fonction irrationnelle  $G(S)$  par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variable  $S$  :

$$G(S) \cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(S)}{Q_\nu(S)} = \frac{p_0 + p_1 s + \dots + p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1 s + \dots + q_\nu s^\nu} \quad (I.29)$$

qui passe par les points  $(s_i, G(s_i)); \dots (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$ .

Dans la suite nous présenterons quelques-unes des méthodes les plus connues de ce type.

---

**a) Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégr-différentiels d'ordre fractionnaire**

En général, une approximation rationnelle de la fonction  $G(s) = s^\mu$  tel que  $0 < \mu < 1$  (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions :

$$G_h(s) = \frac{1}{(1+s.T)^\mu} \quad (I.30)$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\mu \quad (I.31)$$

Où  $G_h(s)$  est l'approximation pour les hautes fréquences ( $w_T \gg 1$ ), et  $G_l(s)$  l'approximation pour les basses fréquences ( $w_T \ll 1$ ).

**b) Méthode de Carlson**

La méthode proposée par Carlson tirée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la racine d'ordre  $\alpha$ , peut être considérée comme appartenant à ce groupe [22]. Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\mu} - G(s) = 0 \quad (I.32)$$

$$H(s) = (G(s))^\mu \quad (I.33)$$

En définissant  $m = \frac{1}{\mu}$  .  $m = \frac{q}{2}$  à chaque itération, partant de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , une fonction rationnelle approximée peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (I.34)$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle.

**c) Méthode de Matsuda**

La méthode proposée par [24] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s) = s^\alpha$  par une fonction rationnelle  $\hat{G}(s)$  en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant  $M$  fréquences réparties dans une bande de fréquence  $[\omega_0, \omega_M]$  dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble de points sélectionnés  $\omega_i, i = 0, 1, 2 \dots M$ , l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{s-\omega_0}{a_1+} \frac{s-\omega_1}{a_2+} \frac{s-\omega_2}{a_3+} \dots = [a_0; \frac{s-\omega_{i-1}}{a_i}]_{i=1}^M \quad (I.35)$$

Où

$$a_i = f(\omega_i), f_0(\omega) = G(s), f_{i+1}(s) = \frac{s-\omega_i}{f_i(s)-a_i} \quad (I.36)$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

#### *d) La méthode d'Oustaloup*

L'approximation d'Oustaloup d'un dérivateur généralisé, dont l'action différentielle couvre tout l'espace des fréquences, repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs (afin d'assurer un comportement à phase minimale) [24, 25]. Dans le cadre d'une synthèse réaliste (pratique) fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il convient de réduire le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de l'application [26].

Ainsi, l'approximation de l'opérateur  $s^\alpha$ ,  $\alpha \in R^+$ , dans une bande de fréquence  $[\omega_0, \omega_M]$  est donnée par une fonction rationnelle [24] :

$$\hat{G}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1+s/z_k}{1+s/w'_k} \quad (I.38)$$

En utilisant l'ensemble des formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = \alpha^{0.5} \cdot w_u ; w_0 = \alpha^{0.5} w_u ; \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha \cdot \eta > 1 \quad (I.39)$$

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \eta > 1 ; \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0 ; N = \frac{\log(w_N/w_0)}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \quad (I.40)$$

$w_u$  étant le gain fréquentiel unité et la fréquence centrale d'une bande de fréquences distribuées géométriquement autour. Soit,  $w_u = \sqrt{w_h \cdot w_b}$  et  $w_b$  sont la haute et basse fréquence respectivement.

## **I.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions de base du calcul fractionnaire avec leurs propriétés et leurs transformées de Laplace. Puis, nous avons fait un résumé sur la commande *PI/PID* d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Ensuite un bref rappel sur les

---

techniques d'approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire proposé dans la littérature ont été présentés.



## *Chapitre II :*

# *Règles d'ajustement optimales des correcteurs PID Fractionnaires des systèmes stables et instables*

---

## Chapitre II

### Règles d'ajustement optimales des correcteurs PID Fractionnaires des systèmes stables et instables

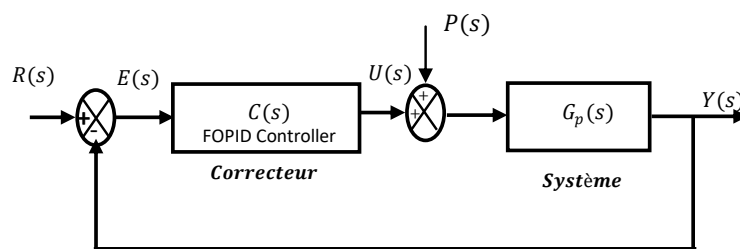
#### II.1 Introduction

Les contrôleurs proportionnels-intégraux dérivés (PID) sont sûrement les contrôleurs les plus adoptés dans l'industrie en raison de leur rapport coût / rendement qu'ils sont capables de fournir. Ces dernières années, la conception de contrôleurs PID d'ordre fractionnaire (FOPID) a fait l'objet de nombreuses recherches. En raison de la flexibilité supplémentaire qu'ils sont capables de fournir par rapport à l'entier (la présence de cinq paramètres à sélectionner) rend pratiquement possible l'obtention d'une performance accrue mais cela implique également que le réglage du contrôleur peut être beaucoup plus complexe.

Ce chapitre se concentre sur les règles d'ajustement des paramètres de contrôleur PID classique et fractionnaire qui sont utilisés dans la commande des systèmes stables et instables.

#### II.2 Formulation du problème

Dans cette section, le problème est formulé pour les systèmes intégraux et instables. Nous considérons le schéma de contrôle en boucle fermée de la figure II.2.



**Figure.II.1** Schéma de système de commande à retour unitaire

Dans le cas où un système intégral est considéré, le processus est supposé avoir une dynamique IPDT (*Integral Plus Dead Time*), à savoir .

$$P(s) = \frac{K}{s} e^{-L.s} \quad (\text{II.1})$$

où, évidemment.  $K$  est le gain et  $L$  est le temps mort. Dans le cas où un système instable est considéré, le processus est supposé avoir une dynamique FOPDT (*First Order Plus Dead Time*), à savoir

$$P(s) = \frac{K}{Ts-1} e^{-L.s} \quad (\text{II.2})$$

où  $T$  est la constante de temps. La dynamique du processus (II.2) peut être commodément caractérisée par le temps mort normalisé défini comme  $L / T$ . Ci-après, nous considérons les processus instables avec  $0,05 \leq L / T \leq 1$  qui est une plage sensible dans la plage stabilisable en considérant un contrôleur PID [27].

Dans ce PFE un type de contrôleurs PID fractionnaire(FOPID) est considéré sous la forme idéale suivante :

$$C(s) = Kp \left( 1 + \frac{1}{Tis^\lambda} + Td s^\mu \right) \quad (\text{II.3})$$

où  $K$ , est le gain proportionnel,  $Ti$  est la constante de temps intégral,  $Td$  est la constante de temps dérivé,  $\lambda$  et  $\mu$  les ordres non entiers des termes intégraux et dérivés respectivement. Il est à noter qu'en sélectionnant  $\lambda = \mu = 1$ , nous retrouvons le correcteur PID classique.

on obtient respectivement un contrôleur sous forme idéale de la forme :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_{is}} + T_d s \right) \quad (\text{II.4})$$

Pour l'implémentation du contrôleur d'ordre fractionnaire, l'approximation d'Oust loup [2] a été employée. Il consiste à utiliser l'approximation suivante basée sur une distribution récursive de zéros et de pôles définies au chapitre I.

$$S^v \cong k \prod_{n=1}^N \frac{1+(S/\omega_{z,n})}{1+(S/\omega_{p,n})}, \quad v > 0 \quad (\text{II.5})$$

qui est valable dans une gamme de fréquences et où le gain  $k$  est ajusté de sorte que l'équation (II.5) aient le même gain au milieu de l'intervalle  $[\omega_l, \omega_h]$ . Dans ce projet de fin d'étude, la valeur  $N = 10$  a été choisie, tandis que  $\omega_l=0.1$  et  $\omega_h=10$  ont été choisis. L'exigence de contrôle spécifiée est de minimiser le point de consigne  $r$  ou la perturbation de charge  $p$ ) erreur absolue intégrale de la réponse indicielle[28].

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)| dt = \int_0^\infty |r(t) - y(t)| dt \quad (\text{II.6})$$

Evidemment, minimiser (II.6) implique que le système est stabilisé.

Pour les processus intégraux, viser simplement à obtenir l'erreur absolue intégrale minimale. Pour cette raison, le réglage conçu des paramètres vise à minimiser l'erreur absolue intégrale en respectant en même temps la sensibilité maximale (comme dans les règles de réglage *Kappa-Tau* bien connues pour les contrôleurs PID standard [29]), qui est défini comme

$$Ms = \max_{\omega \in [0, +\infty)} \frac{1}{1+C(s)P(s)} \quad (\text{II.7})$$

et qui représente également l'inverse de la distance maximale du tracé de Nyquist au point critique (-1,0) . De toute évidence, plus la valeur de *Ms* est élevée, moins le système est robuste pour modéliser les incertitudes.

### II.3 Règles d'ajustement optimales pour les systèmes intégraux

Afin de trouver les règles d'ajustement par la minimisation de l'erreur absolue intégrale en respectant la valeur de sensibilité maximale, l'approche suivante a été utilisée. Premièrement, les tâches de suivi du point de consigne et de rejet des perturbations ont été considérées séparément. Deuxièmement, les valeurs des paramètres des contrôleurs PID fractionnaire (FOPID) et PID classique ont été trouvées au moyen d'un algorithme génétique [30]. La fonction objectif à minimiser est l'erreur absolue intégrale pour une réponse indicielle, alors que deux valeurs typiques de la sensibilité maximale, à savoir,  $Ms = 1.4$  et  $Ms = 2.0$ , sont utilisées comme contraintes [29]. D'un point de vue pratique, la sélection de  $Ms = 1.4$  implique un résultat de contrôleur plus robuste et moins agressif (d'un autre point de vue, une réponse plus lente avec un effort de contrôle plus faible est obtenu). Alors que la sélection de  $Ms = 2.0$  implique que le contrôleur est moins robuste et plus agressif (c'est-à-dire qu'une réponse plus rapide avec un effort de contrôle plus important est obtenu).

Formellement, l'optimisation à résoudre peut être énoncée comme suit :

$$\min_{K_p, T_i, T_d, \lambda, \mu} \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (\text{II.8})$$

Dans ce contexte, l'algorithme génétique peut être appliqué à une fonction de transfert de processus normalisée où  $\bar{s} = Ls$ , c'est-à-dire

$$\bar{P}(s) = \frac{KL}{\bar{s}} e^{-\bar{s}} \quad (\text{II.9})$$

de sorte que l'optimisation puisse être effectuée une seule fois sur le processus (II.9) et ensuite les paramètres résultants doivent simplement être mis à l'échelle par *L* afin d'obtenir

---

un ensemble de règles générales d'ajustement (notez que le gain  $K$  peut être négligé dans la procédure d'optimisation à condition que la valeur du gain proportionnel  $Kp$  soit finalement divisée par  $K$ ).

D'après [31], l'algorithme génétique appliqué à cet effet est celui implémenté dans la Matlab Global Optimisation Toolbox [32] avec une population initiale de 600 individus, 250 générations et avec des valeurs par défaut pour les autres options, Pour chaque individu de l'algorithme génétique, la stabilité du système en boucle fermée est vérifiée avant de déterminer la réponse indicielle. Si les paramètres sélectionnés ne stabilisent pas le système, la fonction de fitness prend une valeur très élevée de sorte que les paramètres de non-stabilisation sont automatiquement rejetés par l'algorithme. La contrainte sur la sensibilité maximale est garantie d'être satisfaite en utilisant une approche lagrangienne augmentée [32]. De plus, l'algorithme génétique global a été appliqué à quelques reprises afin de s'assurer que l'optimum global est bien atteint car les résultats sont les mêmes dans les différentes répétitions).

### II.3.1 Tâche de suivi du point de consigne

Si on s'intéresse seulement à la tâche de suivi du point de consigne, les résultats obtenus en appliquant la procédure d'optimisation montrent qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser l'action (éventuellement fractionnaire) intégrale. En effet, le pôle à l'origine du plan complexe dans la boucle de la fonction de transfert qui assure une erreur nulle en régime permanent (action intégrale) avec une valeur de consigne constante est déjà présent dans le processus et il n'est donc pas nécessaire de l'ajouter dans le contrôleur. Les règles d'ajustement optimal obtenues au moyen de l'algorithme génétique pour le contrôleur **PD** d'ordre fractionnaire sont (notez que, s'il n'y a pas d'action intégrale, les formes idéale et série du contrôleur fractionnaire sont équivalentes) [31].

$$Kp = \frac{a}{kL} \quad (\text{II.10})$$

$$Td = bL^\mu \quad (\text{II.11})$$

et la valeur optimale de l'indice de performance IAE (Erreur absolue intégrale) est :

$$IAE_{opt} = A_s kL \quad (\text{II.12})$$

où les valeurs des paramètres  $a, b, k$  et de  $\mu$  sont indiquées dans les tableaux II.1 et  $A_s$ , est l'amplitude de l'entrée de consigne. En ce qui concerne les règles d'ajustement de correcteur PD d'ordre entier, les expressions suivantes ont été obtenues .

$$Kp = \frac{a}{kL} \quad (\text{II.10})$$

$$Td = bL \quad (\text{II.13})$$

et la valeur optimale de l'indice de performance  $IAE$  est à nouveau

$$IAE_{opt} = A_s kL \quad (\text{II.14})$$

où les valeurs des paramètres sont indiquées dans le **tableau II.2**.

**Tableau II.1** Règles d'ajustement et paramètres d'indice de performance pour les contrôleurs PD fractionnaire (FOPD) pour la tâche de suivi du point de consigne pour in système intégral.

$Ms$	$a$	$b$	$\mu$	$k$
1.4	0.5962	0.3354	1.20	<b>1.804</b>
2.0	0.8699	0.4494	1.15	1.344

**Tableau II.2** Règles d'ajustement et paramètres d'indice de performance pour les contrôleurs PD classique (PD) pour la tâche de suivi du point de consigne pour in système intégral.

$Ms$	$a$	$b$	$k$
1.4	0.4745	0.3300	<b>2.110</b>
2.0	0.7399	0.5061	1.435

En comparant (II.12) et (II.14) (avec les valeurs liées de  $k$ ), il apparaît que la présence de l'action dérivée fractionnaire permet une amélioration des performances du système de 17,2% pour  $Ms = 1,4$  et de 6,34% pour  $Ms = 2,0$ .

### II.3.2 Tâche de rejet des perturbations de charge

Lorsque la tâche de rejet de perturbation d'une charge constante est considérée, l'action intégrale éventuellement fractionnaire doit être employée pour garantir une erreur en régime permanent nul. Les règles d'ajustement optimales qui en résultent obtenues au moyen de l'algorithme génétique pour le contrôleur fractionnaire (FOPID) sont [31]:

$$Kp = \frac{a}{KL} \quad (\text{II.10})$$

$$Ti = cL^\lambda \quad (\text{II.17})$$

$$Td = bL^\mu \quad (\text{II.18})$$

et la valeur optimale de l'indice de performance  $IAE$  est :

$$IAE_{opt} = A_d k K L^2 \quad (\text{II.19})$$

où  $A_d$  est l'amplitude de l'entrée perturbation et les valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont indiquées dans le **tableau II.3** pour le contrôleur fractionnaire (FOPID) sous forme idéale.

**NB :** Notez que dans les deux cas  $\lambda = 1$  et  $\mu \neq 1$  c'est-à-dire, il vaut la peine d'utiliser une action dérivée d'ordre fractionnaire et une action intégrale d'ordre entier.

En ce qui concerne les règles d'ajustement de correcteur PID d'ordre entier, les expressions suivantes ont été obtenues .

$$Kp = \frac{a}{KL} \quad (\text{II.20})$$

$$Ti = cL \quad (\text{II.21})$$

$$TD = bL \quad (\text{II.22})$$

et la valeur optimale de l'indice de performance  $IAE$  est à nouveau :

$$IAE_{opt} = A_d k K L^2 \quad (\text{II.23})$$

**Tableau II.3** Règles d'ajustement et paramètres d'indice de performance pour le contrôleur PID Fractionnaire (FOPID) sous une forme idéale pour la tâche de rejet de perturbations (système intégral avec retard).

$M_s$	$a$	$b$	$c$	$\lambda$	$\mu$	$k$
1.4	0.5636	0.4170	4.6206	1	1.15	8.75
2.0	1.0357	0.3723	3.1698	1	1.18	3.19

#### II.4 Règles de réglage optimal pour les processus instables

La procédure d'optimisation utilisée pour résoudre le problème d'optimisation (II.8) pour les processus instables est plus complexe que celle utilisée pour les processus intégraux. En effet, pour trouver les règles d'ajustement qui donnent les valeurs des paramètres du contrôleur qui minimisent l'erreur absolue intégrale, une approche similaire à celle employée dans [34] a été utilisée. En

particulier, le suivi du point de consigne et les tâches de rejet de perturbations ont été à nouveau considérés.

Pour chacun d'eux, les valeurs des paramètres des contrôleurs PID fractionnaire et PID classique [27] ont été trouvées au moyen d'un algorithme génétique. Les mêmes considérations faites dans la section.3 peuvent être appliquées également dans ce cas : une grande population a été employée et l'application de l'algorithme génétique a été répétée afin de garantir qu'un optimum global est atteint. En outre, la stabilité du système de contrôle a été vérifiée pour plusieurs essais de l'algorithme génétique et, dans le cas où un système instable en résulte, la valeur de la fonction de fitness a été augmentée de manière significative.

Il convient de souligner dans tous les cas qu'une solution du problème d'optimisation existe car un régulateur PID stabilisateur existe pour les processus considérés et  $\lambda$  et  $\mu$  sont des paramètres de réglage.

Finalement, pour chaque contrôleur considéré, les coefficients optimaux trouvés pour les différentes valeurs de  $L/T$  ont été interpolés afin d'obtenir des règles d'ajustement appropriées. Les indices de performance obtenus ont également été interpolés.

Dans ce contexte, différentes fonctions d'interpolation ont été envisagées [35], en prenant en compte l'objectif de fournir des règles d'ajustement où, comme pour le cas intégral, la performance résultante est mise à l'échelle par la constante de temps  $T$ . En d'autres termes, avec le même temps mort normalisé, la valeur de l'erreur absolue intégrale obtenue pour une valeur donnée de  $T$  est égale à 7 fois la valeur de l'erreur absolue intégrale obtenue pour  $T = 1$ . Les règles d'ajustement et les indices de performance obtenus dans les différents cas sont rapportés dans les sous-sections suivantes.

#### II.4.1 Tâche de suivi du point de consigne

Si seule la tâche de suivi du point de consigne est préoccupante, les règles d'ajustement optimales obtenues au moyen de l'algorithme génétique pour les régulateurs FOPID et PID sont [31] .

$$Kp = \frac{1}{K} \left( a \exp \left( -b \frac{L}{T} \right) + c \left( \frac{L}{T} \right)^2 \right) \quad (\text{II.24})$$

$$T = \frac{1}{K} \left( a \exp \left( b \frac{L}{T} \right) + c \exp \left( d \frac{L}{T} \right) \right) T^\lambda \quad (\text{II.25})$$

$$Td = \frac{1}{K} \left( a \left( \frac{L}{T} \right)^b + c \right) T^\mu \quad (\text{II.26})$$

où les valeurs des paramètres d'ajustement sont indiquées dans les tableaux II.4 pour le contrôleur PID fractionnaire sous forme idéale. Pour le contrôleur PID classique, il s'agit évidemment de poser  $\lambda = \mu = 1$ .

Pour le contrôleur PID Fractionnaire, les deux paramètres restants ( $\lambda$  et  $\mu$ ) ils seront calculés comme suit, pour

$$\lambda = 1 \quad (\text{II.27})$$

et pour

$$\mu = -0.008233 \left(\frac{L}{T}\right)^2 - 0.05605 \frac{L}{T} + 1.205 \quad (\text{II.28})$$

**Tableau II.4** Paramètres des règles d'ajustement de contrôleur PID fractionnaire (FOPID) sous une forme idéale pour la tâche de suivi du point de consigne pour les processus instables

Paramètres	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>Kp</i>	1.065	0.9063	1.051	-1.088
<i>Ti</i>	0.5659	2.942	-0.6172	-4.655
<i>Td</i>	0.4884	1.35	0.001938	-

**Tableau II.5** Paramètres des contrôleurs PID et PID fractionnaire basés sur l'indice de performance IAE pour la tâche de suivi du point de consigne dans le cas des processus instables

Paramètres	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<b>FOPID idéal <math>L/T \leq 0.4</math></b>	0.1137	4.3033	-0.2588	0.2205
<b>FOPID idéal <math>L/T &gt; 0.4</math></b>	$4.9722 \times 10^{-6}$	13.2717	4.9926	2.7626
<b>PID <math>L/T \leq 0,4</math></b>	0.0288	7.1112	3.0542	1.1122
<b>PID <math>L/T &gt; 0,4</math></b>	0.1153	4.6010	2.7518	1.2484

La valeur optimale de l'indice de performance *IAE* peut être exprimée comme :

$$IAE_{opt} = As \left( a \exp\left(b \frac{L}{T}\right) + c \left(\frac{L}{T}\right)^d \right) T \quad (\text{II.30})$$

où les valeurs des paramètres *a, b, c et d* pour les contrôleurs PID fractionnaire et PID classique sont indiquées dans le **tableau II.5** et **As** est l'amplitude de l'entrée de consigne.

Il est à noter que, comme pour les systèmes de premier ordre avec retard (FOPDT) stables et pour les systèmes intégraux avec retard (IPDT), la valeur  $\lambda = 1$  résulte pour les contrôleurs PID fractionnaire, c'est-à-dire que c'est juste l'action dérivée fractionnaire qui est utile pour améliorer les performances.

## II.4.2 Tâche de rejet de perturbations

Si la tâche de rejet de perturbation est considérée, les mêmes expressions (II.24, II.25 et II.26) pour les règles d'ajustement peuvent être utilisées. Les paramètres associés sont indiqués dans le tableau II.6 pour le contrôleur PID fractionnaire. Encore une fois, pour les contrôleurs FOPID, c'est  $\lambda = 1$ , alors qu'il est utile d'employer une action dérivée fractionnaire où l'ordre dérivé est

$$\mu = -0.04783 \left(\frac{L}{T}\right)^2 - 0.01017 \frac{L}{T} + 1.218 \quad (\text{II.31})$$

**Tableau II.6** Paramètres des règles d'ajustement pour les contrôleurs PID fractionnaire idéale pour la tâche de rejet des perturbations dans le cas des processus instables .

Paramètres	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>Kp</i>	1.602	1.255	1.075	-1.126
<i>Ti</i>	0.5207	2.875	-0.5913	-3.752
<i>Td</i>	0.4939	1.383	0.002607	-

**Tableau II.7** Paramètres de l'expression de l'indice de performance IAE pour la tâche de rejet des perturbations dans le cas des systèmes instables

Paramètres	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<b>FOPID idéal <math>L/T \leq 0.4</math></b>	$7.6922 \times 10^{-4}$	10.4503	2.8310	2.2116
<b>FOPID idéal <math>L/T &gt; 0.4</math></b>	$8.5461 \times 10^{-6}$	12.7409	4.9206	2.7406
<b>PID <math>L/T \leq 0,4</math></b>	0.0024	11.0222	2.5593	2.0682
<b>PID <math>L/T &gt; 0,4</math></b>	0.0503	6.1840	-14.2533	7.3901

Pour les contrôleurs PID fractionnaire (FOPID) dans sa forme idéale. La valeur optimale de l'indice de performance *IAE* peut être exprimée comme

$$IAE_{opt} = Ad \left( a \exp\left(b \frac{L}{T}\right) + c \left(\frac{L}{T}\right)^d \right) TK \quad (\text{II.33})$$

où **Ad** est à nouveau l'amplitude unité de l'entrée de perturbation et les valeurs des paramètres **a**, **b**, **c** et **d** pour les régulateurs FOPID et PID sont indiquées dans le Tableau II.7.

## II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les règles d'ajustement optimal des correcteurs PID classique et PID fractionnaire. L'objectif de ces règles est de minimiser l'intégrale de

---

l'erreur absolue pour les tâches de suivi de consigne et les tâches de rejet de perturbation. Dans le chapitre qui suit nous allons donner des exemples de synthèses des paramètres de PID classique et PID fractionnaires en utilisant ces règles d'ajustement dans le cas des systèmes IPDT (Intégral Plus Dead Time) et systèmes instables UFOPDT (Unstable First Order Plus Dead Time)...etc.

---

***CHAPITRE III :***  
***Simulations & Applications***

---

## Chapitre III :

### Simulations & Applications

#### III.1.Introduction

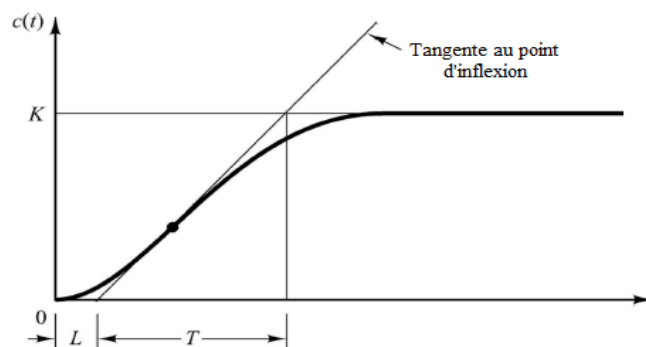
Dans ce chapitre nous allons présenter plusieurs exemples de simulation, d'un système intégral avec retard (IPDT), d'un système de premier ordre avec retard , d'un système instable en utilisant les algorithmes de commande *PID* d'ordre entier et d'ordre fractionnaire présenté dans les chapitres I & II . Nous montrons aussi que la méthode donne des résultats appréciables.

#### III.2 Modèles FOPDT, IPDT, FOIPDT

Un grand nombre de modèles industriels peuvent être approximativement modélisés par une fonction de premier ordre avec retard (FOPDT : First Order Plus Dead Time) [36]. Le modèle FOPDT est en fait la combinaison du modèle de processus de premier ordre avec le temps de retard [36]. L'équation FOPDT est donnée par [36,37] :

$$F(s) = \frac{K e^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (\text{III. 1})$$

Dans la figure III.1, la courbe en forme de S sans dépassement est connue sous le nom de courbe de réaction qui est caractérisée par deux constantes, (i) la constante de temps  $T$  et (ii) le temps de retard  $L$  et en traçant la ligne tangente au point d'inflexion du courbe en  $S$  puis en trouvant le point d'intersection de l'axe des temps et du niveau statique  $K$  avec la ligne tangente [36]. Ensuite, la fonction de transfert de la courbe en  $S$  peut être approchée par le système du premier ordre avec retard qui est donné par l'équation (III.1) [36].



**Figure III.1:**La sortie d'un système stable et apériodique à une entrée en échelon

Pour les systèmes intégraux avec retard (IPDT), les paramètres peuvent être trouvés de la même manière que nous le trouvons dans FOPDT.

L'équation IPDT est [31] :

$$G_{IPDT}(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts} \quad (III. 2)$$

Il n'y a pas d'exigence d'intégrateur pour supprimer l'erreur statique car il existe déjà un intégrateur. Le contrôleur PD peut être utilisé pour minimiser le dépassement [37].

Le premier ordre Intégral avec retard (FOIPDT) est également calculé en utilisant la même procédure que celle suivie dans le processus FOPDT. L'équation FOIPDT est,

$$G_{FOIPDT}(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{s(Ts + 1)} \quad (III. 3)$$

### III.3 Mesures de performance

Les mesures de performance utilisées pour comparer les différents contrôleurs sont l'Erreur quadratique intégrale (*ISE*), l'erreur absolue intégrale (*IAE*) et l'erreur absolue avec intégration temporelle (*ITAE*). Ces paramètres de performance sont décrits par les expressions écrites dans l'équation (IV.23). Les critères d'erreurs *IAE*, *ISE* et *ITAE* fournissent une mesure quantitative de la capacité d'un contrôleur à forcer l'erreur à zéro. Une valeur inférieure de ces paramètres montre que le contrôleur est capable d'atteindre la référence requise plus rapidement et avec moins d'effort.

$$\begin{aligned} IAE &= \int_0^t \|e(\tau)\| d\tau \\ ISE &= \int_0^t (e(\tau))^2 d\tau \\ ITAE &= \int_0^t t * \|e(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (III. 4)$$

### III.4. Exemples de Simulation :

Les résultats de simulation sont effectués sur le logiciel Matlab. La réponse indicielle pour entrée consigne et entrée perturbation ont été évaluées séparément dans tous les cas (notez qu'un signal échelon unitaire a toujours été appliqué).

contrainte

#### III.4.1 Exemple 1

Comme premier exemple illustratif, nous considérons le processus intégral suivant [31]

$$G_1(s) = \frac{0.0506}{s} e^{-6s} \quad (III. 5)$$

Les paramètres  $K$ ,  $L$  et  $T$  de la fonction IPDT sont :  $K = 0.0506$ ,  $L = 6s$  et  $T = 1s$ .

Les différents contrôleurs considérés ont été réglés par les formules de réglage correspondantes à [31] (chapitre2). Notez que la règle d'ajustement employée est décrite pour le suivi du point de consigne ou pour le rejet de perturbation.

### Correcteur Proportionnel Dérivé (PD) classique

Dans le cas de la conception des contrôleurs PD classique et PD fractionnaire en utilisant l'algorithme dans [31], nous trouvons les valeurs de  $K_p$  et  $T_d$  dont les valeurs sont respectivement 1.57 et 1.98 pour le correcteur PD classique et les valeurs  $K_p$ ,  $T_d$  et  $\mu$  dont les valeurs sont respectivement 1.96, 2.88 et 1.2 pour le correcteur PD fractionnaire.

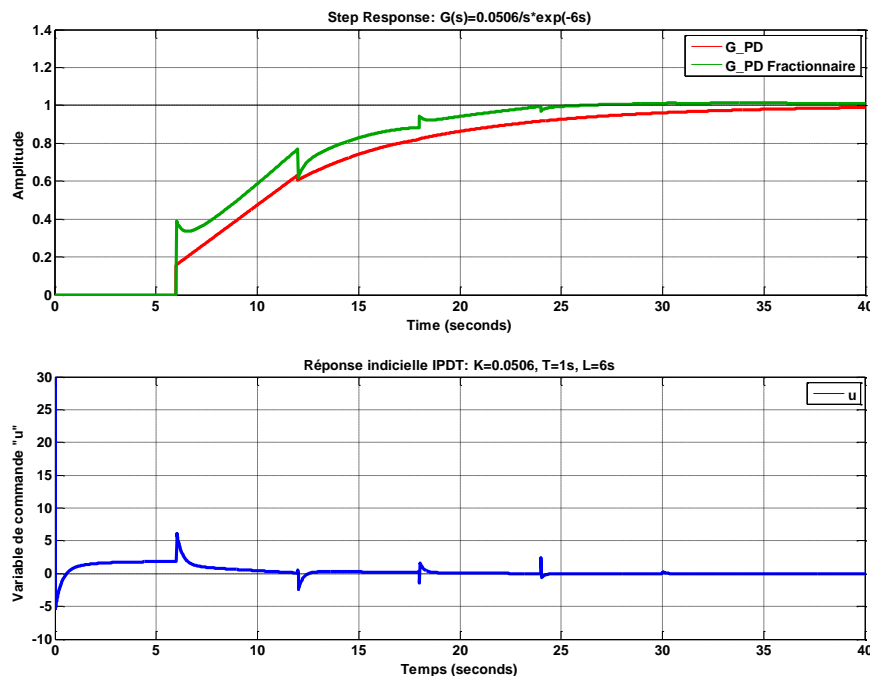
Alors les fonctions de transferts de correcteurs PD classique et PD fractionnaire sont comme suit :

☞ *Pour une entrée consigne :*

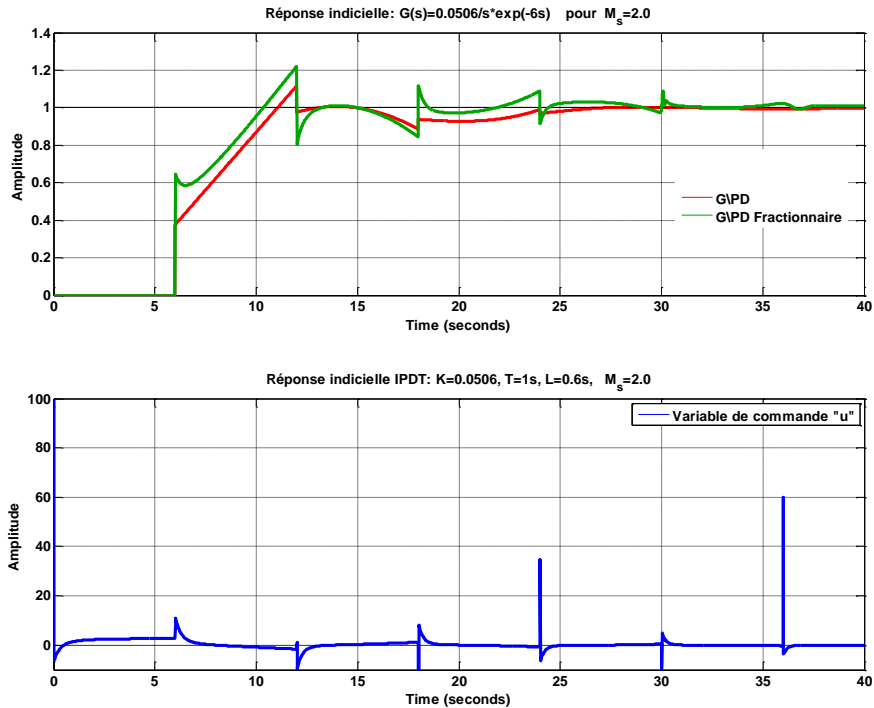
$$C_{PD}(s) = 1.57(1 + 1.98s)$$

$$C_{FOPD}(s) = 1.96(1 + 2.88s^{1.2})$$

Les Figures III.2 & III.3 donnent les réponses indicielles pour une entrée consigne du système IPDT en utilisant les deux correcteurs PD classique et PD fractionnaire ainsi la variable de commande pour les deux sensibilités maximales.



**Figure III.2** Réponse indicielle à l'unité de consigne pour le système  $G_I(s)$  : Haut : Correcteur PD classique & PD fractionnaire, bas : Variable de commande (*pour Ms = 1.4*) : Réglage proposé dans [18].



**Figure III.3** Réponse indicielle à l'entrée consigne pour le système  $G_I(s)$  : Haut : Correcteur PD classique & PD fractionnaire, bas : Variable de commande ( pour  $M_s = 2.0$  ) :

### Correcteur PID Fractionnaire

Dans le cas de la conception de contrôleur PID fractionnaire idéal en utilisant l'algorithme de [Padula], nous trouvons les valeurs de  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  dont les valeurs sont respectivement 1.86, 27.72, 3.27, 1 et 1.15 .

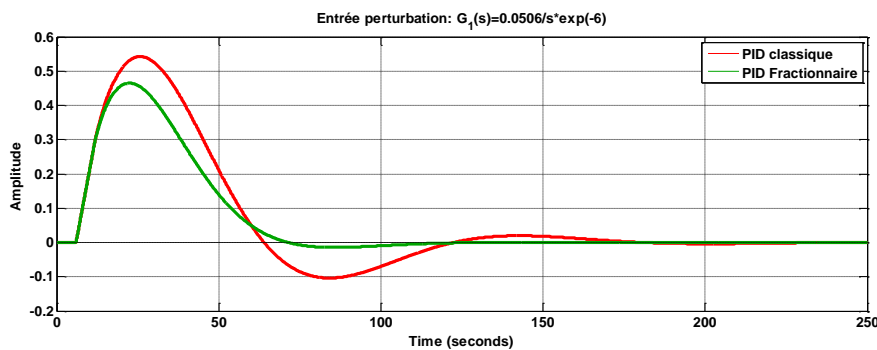
Alors les fonctions de transferts de correcteurs PID classique et PID fractionnaire sont comme suit :

☞ *Pour une entrée perturbation :*

$$C_{PID}(s) = 1.34 \left( 1 + \frac{1}{21.02s} + 3.16s \right)$$

$$C_{FOPID}(s) = 1.86 \left( 1 + \frac{1}{27.72s} + 3.27s^{1.15} \right)$$

La Figure 3.4 donne une réponse indicielle pour une entrée perturbation du système IPDT en utilisant les deux correcteurs PID classique et PID fractionnaire.



**Figure III.4** Réponse indicielle à l'entrée perturbation pour le système  $G_I(s)$  : Correcteur PID classique & PID fractionnaire, ( pour  $M_s = 1.4$  )

### Commentaire

En appliquant les règles d'ajustement des contrôleurs FOPID et PID et pour une entrée consigne ou perturbation, on obtient les résultats indiqués dans Tableau III.1, où IAE qui désigne l'erreur absolue intégrale obtenu en appliquant l'entrée consigne.

**Tableau III.1** Résultats liés au processus  $G_I(s)$

Contrôleur	$Kp$	$Ti$	$Td$	$\lambda$	$u$	IAE
FOPD (entrée échelon) $M_s=1.4$	1.96	-	2.88	-	1.2	<b>10.74</b>
PD (entrée échelon) $M_s=1.4$	1.57	-	1.98	-	-	<b>12.65</b>
FOPD (entrée échelon) $M_s=2.0$	2.87	-	3.53	-	1.15	<b>8.09</b>
PD entrée échelon) $M_s=2.0$	2.44	-	3.04	-	-	8.60
ideal FOPID (entrée perturbation) $M_s=1.4$	1.86	27.72	3.27	1	1.15	<b>15.88</b>
PID LD (entrée perturbation) $M_s=1.4$	1.34	21.02	3.16	-	-	<b>19.68</b>

Pour le cas  $M_s = 1.4$ , l'erreur absolue intégrale, la réduction n'est pas significative (environ 1% pour le contrôleur FOPID et 2% pour le contrôleur PID). Lorsque  $M_s = 2.0$  il y a une réduction sensible de l'IAE de 13 % pour le contrôleur FOPID et de 11% pour le régulateur PID.

Il apparaît que, comme prévu, le contrôleur FOPID offre de meilleures performances que celui d'ordre entier, même si avec une action de contrôle plus nerveuse avec le même niveau de robustesse) qui doit être éventuellement pris en compte dans une application donnée.

### III.4.2 Exemple 2

Comme deuxième exemple illustratif, nous considérons le processus suivant :

$$G(s) = \frac{1}{0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1} e^{-s} \quad (\text{III. 5})$$

Les différents contrôleurs PID classique et PID fractionnaire considérés ont été réglés dans le but de concevoir un contrôleur optimal fractionnaire en utilisant les deux critères de performance ISE et ITAE.

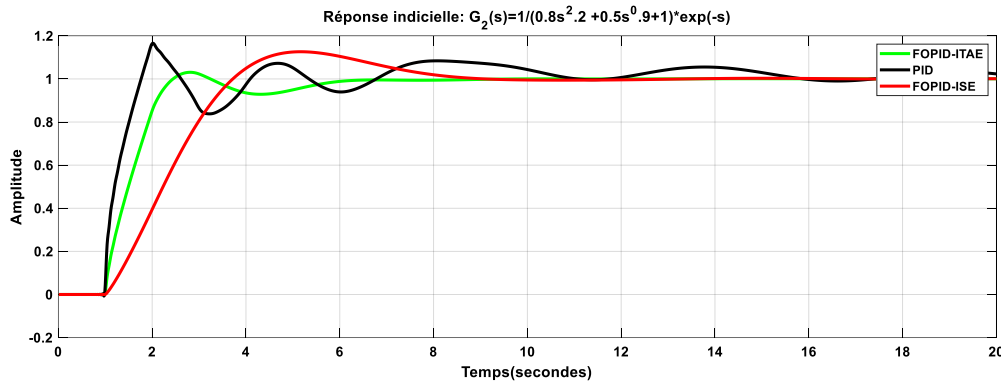
Alors les fonctions de transferts de correcteurs PID classique et PID fractionnaire après optimisation sont comme suit :

$$C_{PID}(s) = 0.0795 + \frac{0.5206}{s} + 0.3587s$$

$$C_{FOPID-ITAE}(s) = 0.459 + \frac{0.576}{s^{0.996}} + 0.493s^{1.379}$$

$$C_{FOPID-ISE}(s) = 1.237 + \frac{0.5628}{s^{1.1798}} + 0.8041s^{1.698}$$

La figure 3.5 donne les réponses indicielles en boucle fermée des trois contrôleurs : Correcteur PID classique et les deux correcteurs PID fractionnaire basés sur les critères des performances ITAE et ISE donné en équation III.4.



**Figure III.5** Réponse indicielle du système  $G_2(s)$  : Correcteur PID classique, Correcteur PID fractionnaire optimale (critère de performance ITAE) et Correcteur PID fractionnaire optimale (critère de performance ISE).

### Commentaire

D'après les réponses indicielles en boucle fermée sous les trois contrôleurs illustrées à la Figure 3.5. On peut voir que la réponse indicielle sous le contrôleur FOPID-ITAE est satisfaisante, tandis que celle avec le contrôleur FOPID-ITAE est moins bonne, car les signaux d'erreur sont traités de manière égale à tous les instants. Par conséquent, en pratique, le critère ITAE est fortement recommandé. On voit également que le contrôleur PID d'ordre entier optimal ne peut pas contrôler le système de manière satisfaisante.

### III.4.3 Exemple3 : système instable

Comme troisième exemple illustratif, nous considérons le processus instable UFOPDT suivant [31] :

$$G(s) = \frac{1}{s-1} e^{-2s} \quad (\text{III. 6})$$

Les paramètres  $K, L$  et  $T$  de la fonction UFOPDT sont :  $K = 1, L = 2s$  et  $T = 1s$ .

Les différents contrôleurs considérés ont été réglés par les formules de réglage correspondantes à [31] (chapitre2). Notez que la règle d'ajustement employée est décrite pour le suivi du point de consigne ou pour le rejet de perturbation.

### Conception de Correcteur PID classique et Fractionnaire

Dans le cas de la conception des contrôleurs PID classique et PID fractionnaire en utilisant l'algorithme dans [31], nous trouvons les valeurs de  $K_p$  et  $T_d$  pour le correcteur PID classique (pour une entrée consigne et perturbation) et les valeurs  $K_p$ ,  $T_d$  et  $\mu$  pour le correcteur PID fractionnaire ((pour une entrée consigne et perturbation) comme illustrés au tableau III.2.

Alors les fonctions de transferts de correcteurs PID classique et PID fractionnaire sont comme suit :

☞ *Pour une entrée consigne :*

$$C_{PID}(s) = 4.7209\left(1 + \frac{1}{0.7786s} + 0.1119s\right)$$

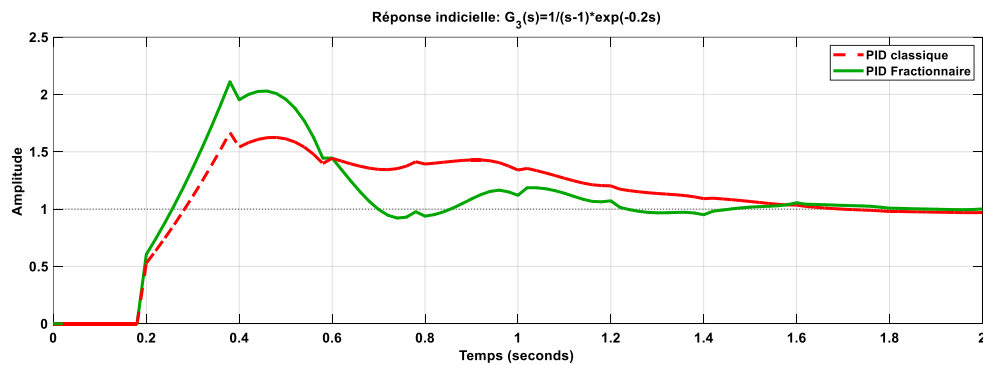
$$C_{FOPID}(s) = 6.9415\left(1 + \frac{1}{0.7759s} + 0.0576s^{1.1808}\right)$$

☞ *Pour une entrée perturbation :*

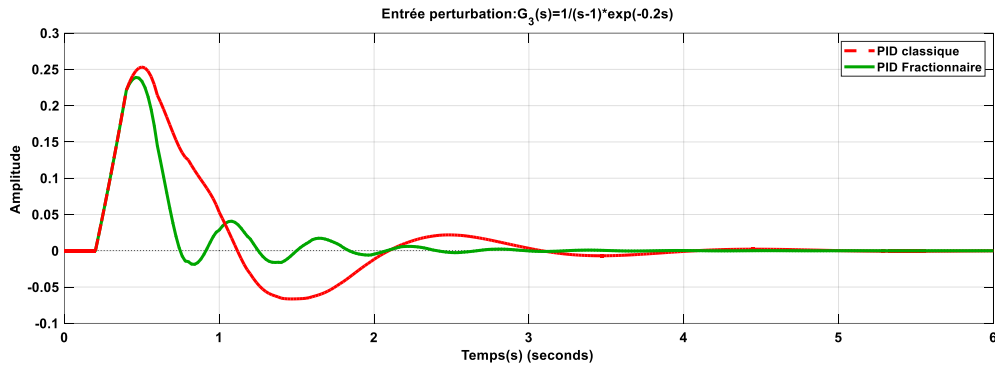
$$C_{PID}(s) = 4.7125\left(1 + \frac{1}{0.4338s} + 0.1334s\right)$$

$$C_{FOPID}(s) = 7.8350\left(1 + \frac{1}{0.6462s} + 0.0560s^{1.2169}\right)$$

Les Figure 3.6 & 3.7 donnent les réponses indicielles pour une *entrée consigne et entrée perturbation* du système UFOPDT en utilisant les deux correcteurs PID classique et PID fractionnaire respectivement.



**Figure III.6** Réponse indicielle à l'entrée consigne pour le système  $G_3(s)$  : Correcteur PID classique & PID fractionnaire, ( pour  $M_s = 1.4$  ) : Réglage proposé dans [18].



**Figure III.7** Réponse indicielle à l'entrée perturbation pour le système  $G_3(s)$  : Correcteur PID classique & PID fractionnaire, ( pour  $M_s = 1.4$  ) :

### Commentaire

En appliquant les règles d'ajustement des contrôleurs FOPID et PID et pour une entrée consigne ou perturbation, on obtient les résultats indiqués dans Tableau III.2, où IAE qui désigne l'erreur absolue intégrale obtenu en appliquant l'entrée consigne et entrée perturbation.

**Tableau III.2** Résultats liés au processus  $G_3(s)$

Contrôleur	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$\lambda$	$\mu$	IAE
FOPID (entrée consigne) $M_s=1.4$	6.9415	0.7759	0.0576	1	1.1808	0.5462
PID (entrée consigne) $M_s=1.4$	4.7209	0.7786	0.1119	-	-	0.6253
FOPID (entrée perturbation) $M_s=1.4$	7.8350	0.6462	0.0560	1	1.2169	0.0868
PID (entrée perturbation) $M_s=1.4$	4.7125	0.4338	0.1334	1	1	0.1105

Il apparaît que, comme prévu, le contrôleur FOPID offre de meilleures performances que celui d'ordre entier, même si avec une action de contrôle plus nerveuse avec le même niveau de robustesse) qui doit être éventuellement pris en compte dans une application donnée.

### III.5.Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons commandé différents types de systèmes (système intégral avec retard , système fractionnaire avec retard et un système instable) avec des correcteurs PD et PID d'ordre entier et  $PD^\mu$  et  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour faire une étude comparative. Le but des règles d'ajustement est de minimiser l'erreur absolue intégrale pour le suivi du point de consigne ou la tâche de rejet des perturbations de charge. En

---

comparant les résultats avec ceux obtenus pour les contrôleurs PID standard , On conclu  
que la commande d'ordre fractionnaire est mieux que le *PID* d'ordre entier.

---

## *Conclusion générale*

Aujourd'hui, plusieurs chercheurs s'intéressent au développement des méthodes et techniques d'ajustement des correcteurs PID d'ordre fractionnaire ( $PI^\lambda D^\mu$ ). L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation, ces paramètres peuvent satisfaire des performances additionnelles dans la conception de la commande.

Dans ce projet de fin d'études, nous avons proposé des règles d'ajustement des correcteurs PID classique et PID fractionnaire. En particulier, les règles d'ajustement permettant de minimiser l'erreur absolue intégrale, soit pour la tâche de suivi de la consigne, soit pour la tâche de rejet de perturbation.

---

## *Références bibliographiques*

- [1]
- [2] O'Dwyer, A.: 'Handbook of PI and PID controller tuning rules' (Imperial College Press, 2006)
- [3] Åström, K.J., Hägglund, T.: 'Advanced PID control' (ISA Press, 2006)
- [4] Podlubny, I.: 'Fractional-order systems and PI $\lambda$ D $\mu$  controllers', IEEE Trans. Autom. Control, 1999, 44, pp. 208–214
- [5] A. Idir, M. Kidouche, Y. Bensafia, K. Khettab, and S. Tadjer, "Speed Control of DC Motor Using PID and FOPID Controllers Based on Differential Evolution and PSO", International Journal of Intelligent Engineering and Systems, Vol. 11, No. 4, pp. 241–249, 2018.
- [6] Maiti, D., Acharya, A., Chakraborty, M., Konar, A., Janarthanan, R.: 'Tuning PID and PI $\lambda$ D $\delta$  controllers using the integral time absolute error criterion'. Proc. IEEE Int. Conf. on Information and Automation for Sustainability, Colombo, Sri Lanka, 2008
- [7] Barbosa, R.S., Tenreiro Machado, J.A., Ferreira, LM: `` Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function', Nonlinear Dyn.,2004, 38, pages 305-321
- [8] Valério, D., and da Costa, J. S. , 2006, "Tuning-Rules for Fractional PID Controllers," Proceedings of the Second IFAC Symposium on Fractional Differentiation and Its Applications (FDA06), IFAC.
- [9] D. Valerio and J. S. da Costa, "A review of tuning methods for fractional PIDs," in 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, FDA, vol. 10, 2010.
- [10] HADJ HAFSI Mohammed et hadi Kouider , mémoire de fin d'études , Université de M'Sila , juin 2020 ;
- [11] R Hilfer, "Applications of Fractional Calculus in Physics," *World scientific*, vol. 35, no.02, pp. 87-130, 2000.
- [12] A McBride, J Sabatier, O.P Agrawal, and J.T Machado, "Advances in fractional calculus: theoretical developments and applications in physics and engineering," *Springer*, pp. 613-615, 2008.
- [13] A Ben Messaoud, S Talmoudi, and M Ksour, "Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles extrêmes d'ordre entier," in Conférence Internationale des Energies Renouvelables (CIER-2016), Hammamet, Tunisie, 2016, pp. 134-140.
- [14] Y. Bensafia, K. Khettab, and A. Idir, "An Improved Robust Fractionalized PID Controller for a Class of Fractional-Order Systems with Measurement Noise", International Journal of Intelligent Engineering and Systems, Vol.11, No.2, pp. 200-207, 2018.
- [15] C.A Monje, Y.Q Chen, Vinagre B.M, D Xue, and V Feliu, Fractional-order systems and controls : fundamentals and applications. London: Springer, 2010.

- 
- [16] D Matignon and B d'Andréa Novel, "Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems," *Computational engineering in systems applications*, vol. 2, pp. 952-956, 1996.
- [17] R Caponetto, G Dongola, and L Fortuna, *Fractional order systems : modeling and control applications.*: World Scientific , 2010.
- [18] K.B Oldham and J Spanier, *The fractional calculus :theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.*: Elsevier Science, 1974, vol. 111.
- [19] I Doye, "Généralisation du lemme de gronwall-bellman pour la stabilisation dessystemes fractionnaires," Jeddah, Western province, Saudi Arabia, 2011
- [20] Magiante G .« Analyse et Synthèses des Filtres Analogiques » Edition TEC&DOC. Paris, 2006.
- [21] Monje A, Yang Quan Chen, Bals M, DingyerXue, VicentFelier « FractionalOrder Systemsand controls (fundamental and application) » Library of CongressControl Number:2010934759, © Springer-Verlag London Limited 2010.
- [22] Colbaugh R., Glass K., Seraji H., “Adaptive tracking control of manipulators: Theory and experiments,” *Robotics & Computer-Integrated Manufacturing*; pp 209–216, 1996.
- [23] Ladaci S. “Contribution a la Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire,” Thèse de Doctorat, Département d'Electronique, Université Mentouri de Constantine, 2007.
- [24] Monje A., Chen Y.-Q. “Fractional-order Systems and Controls, Fundamentals and Applications”, pp. 193-194, Springer, 2010.
- [25] Oustaloup A. “La Commande CRONE,” Hermès science publications, Paris, 1991.
- [26] Oustaloup A. “La Dérivation Non Entière,” Hermès, Paris, 1995.
- [27] Oustaloup A., Mathieu B., Lanusse P. “The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission,” *European J. Contr.*, Vol. 1, pp. 113–121, 1995.
- [28] Silva, G.J., Datta, A., Bhattacharyya, S.P.: ‘New results on the synthesis of PID controllers’, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2002, 47, pp. 241–252
- [29] Shinskey, F.G.: ‘Feedback controllers for the process industries’ (McGraw-Hill, 1994)
- [30] Åström, K.J., Hägglund, T.: ‘PID controllers: theory, design and tuning’ (ISA Press, 1995)
- [31] Mitchell, M.: ‘An introduction to genetic algorithms’ (MIT Press, 1998)
- [32] F. Padula, A. Visioli. Optimal tuning rules for proportional-integral-derivative and fractional-order proportional-integral-derivative controllers for integral and unstable processes. *IET Control Theory and Applications* 6 :776–786, 2012.
- [33] The Mathworks: ‘Global optimization toolbox user’s guide’ (2011)
- [34] Zamani, M., Karimi-Ghartemani, M., Sadati, N., Parniani, M.: ‘Design of fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization’, *Control Eng. Pract.*, 2009, 17, pp. 1380–1387
- [35] Padula, F., Visioli, A.: ‘Tuning rules for optimal PID and fractional order PID controllers’, *J. Proc. Control*, 2011, 21, (1), pp. 69–81

- 
- [36] The Mathworks: 'Curve fitting toolbox user's guide' (2010)
- [37] Amlan Basu, "Meliorating the performance of heating furnace system using proportional integral derivative controller with fractional element", M.Tech. thesis, ITM University, Gwalior, June 2016.